Liniengeometrie für den Leichtbau | Line geometry for lightweight structures

▶ **Daniel Lordick, Daniel Klawitter, Markus Hagemann**
▶ Institut für Geometrie, TU Dresden

1 Einführung

Regelflächen, das sind durch die Bewegung von Geraden erzeugte Flächen, haben für den Betonleichtbau unter den Gesichtspunkten Statik und Herstellung herausragende Eigenschaften: Auch wenn sie doppelt gekrümmt sind, können sie geradlinig bewehrt oder vorgespannt werden. Außerdem kann die Schalung beispielsweise durch Heißdrahtschneiden aus Polystyrol-Hartschaum gewonnen werden. In gängigen CAD-Systemen ist die Klasse der Regelflächen bislang nicht angemessen repräsentiert und steht deshalb für die Bauteilgestaltung nur eingeschränkt zur Verfügung. *Liniengeometrie für den Leichtbau* liefert nun ein mathematisches Modell, das Regelflächen und auf sie wirkende Kräfte abbildet, und entwickelt daraus Formfindungswerkzeuge, die in einer vertrauten Entwurfsumgebung das Prinzip *form follows force* unterstützen.

Liniengeometrie für den Leichtbau führt zwei sehr gegensätzliche Themenfelder zusammen. Auf der einen Seite steht eine weit verzweigte, mathematische Theorie und auf der anderen Seite die Praxis des Bauens mit ihren konkreten Anforderungen.

Die Liniengeometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik mit zahlreichen Anwendungen, beispielsweise in Optik und Robotik. Die Grundelemente der Liniengeometrie sind die Geraden. Das ist durchaus besonders, weil wir eigentlich gewohnt sind, unseren Anschauungsraum mithilfe des kartesischen Koordinatensystems als dreidimensionalen Punktraum zu begreifen. In

1 Introduction

Ruled surfaces, which are surfaces created by the movement of straight lines, have outstanding properties for lightweight concrete construction from the viewpoints of statics and production: even if they are double-curved, they can be reinforced or prestressed in a rectilinear fashion. In addition, the formwork can be obtained efficiently from rigid polystyrene foam by hot wire cutting, for example. In current CAD systems, the class of ruled surfaces has not yet been adequately implemented and is therefore only available to a limited extent for component design. This project *Line Geometry for Lightweight Structures* provides a mathematical model that represents ruled surfaces and the forces acting on them, and uses this to develop form finding tools that support the principle of *form follows force* in a familiar design environment.

Line Geometry for Lightweight Structures brings together two quite contrasting topics. On the one hand, there is a widely ramified mathematical theory and, on the other, the practice of building with its hands-on requirements.

Line geometry is a branch of mathematics with numerous applications, for example in optics and robotics. The basic elements of line geometry are straight lines. This is quite special because we are actually used to conceive our environment as a three-dimensional point space, which we can master with the help of Cartesian coordinates. In this familiar model, curves are created by the movement of points

diesem vertrauten Modell entstehen Kurven durch die Bewegung von Punkten und sind insofern eine einparametrische Schar der Grundelemente. Betrachtet man nun aber die Geraden als Grundelemente, so stellt man zunächst fest, dass die Mannigfaltigkeit aller Geraden des Anschauungsraumes nicht drei-, sondern vierdimensional ist. Das macht den Umgang mit Geraden ungleich schwerer und insbesondere das Entwerfen mit Regelflächen fordert die Vorstellungskraft stark heraus. Vierdimensional bedeutet: Um eine Gerade im Raum festlegen zu können, sind vier Werte nötig. Legt man zunächst mit zwei Koordinaten einen Punkt in der Grundrissebene fest, so braucht man darüber hinaus noch zwei Winkel. Anschaulich gesprochen sind das die Richtung im Grundriss (Azimut) und der Neigungswinkel (Elevation). Alternativ kann man auch den Schnitt der Geraden mit einer weiteren Ebene angeben, wofür aber ebenfalls zwei Werte benötigt werden.

Damit die Geraden einem eleganten Kalkül zugänglich werden, gibt es verschiedene Methoden, die Geraden als Elemente in einem höherdimensionalen Modellraum zu interpretieren. Jeder Punkt im höherdimensionalen Modell repräsentiert dann eine Gerade und jede Kurve entspricht einer Regelfläche. Auf diesem theoretischen Fundament behandeln wir in *Liniengeometrie für den Leichtbau* Regelflächen so ähnlich wie NURBS-Kurven in CAD-Programmen: Es greifen nun Interpolations- und Relaxationsalgorithmen.

Ein ökonomischer Leichtbau, und hier insbesondere der Leichtbau mit Beton, erfordert geschickte Bauteilformen, um Lasten mit einem effektiven Materialeinsatz abzutragen. Soll nun die Liniengeometrie dem Leichtbau dienen und somit die Vorteile der Regelflächen bei der Herstellung von Bauteilen verfügbar machen, muss die Liniengeometrie auch Kräfte und Lastfälle in den Modellraum übertragen und dort behandeln. Die Verknüpfung gewährleistet, dass während des Formfindungsprozesses die Klasse der Regelflächen nicht verlassen wird. In diesem Zusammenhang ist eine hilfreiche Eigenschaft unserer Herangehensweise, dass nicht nur ein-

and are therefore a one-parametric set of basic elements. But if we now consider the straight lines as basic elements, we first notice that the manifold of all straight lines of the Euclidean space is not three-dimensional, but four-dimensional. This makes the handling of straight lines much more difficult and especially the design with ruled surfaces challenges the imagination. Four-dimensional means: In order to define a straight line in space, four values are necessary. To give an example, if you first define a point in the floor plan with two coordinates, you also need two angles. These are the horizontal direction (azimuth) and the angle of inclination (altitude). Alternatively, you can also specify the intersection of the line with another plane, which still requires two values.

In order to make the lines accessible to an elegant calculus, there are different methods to interpret the lines as elements in a higher dimensional model space. Each point in the higher dimensional model then represents a straight line and each curve corresponds to a ruled surface. On this theoretical foundation, in *Line Geometry for Lightweight Structures* we treat ruled surfaces much like NURBS curves in CAD programs: interpolation and relaxation algorithms can now be used.

Economical lightweight construction, and in particular lightweight construction with concrete, requires sophisticated component shapes in order to transfer loads with an effective use of materials. If the line geometry is to serve lightweight construction and thus make the advantages of ruled surfaces available in the manufacture of components, the line geometry must also transfer forces and load cases to the model space and treat them there. The coupling ensures that the class of ruled surfaces is not left during the form finding process. In this context, a helpful feature of our approach is that not only simple forces but also moments can be covered in a natural way.

We report, after a short summary of examples of ruled surfaces in civil engineering and their implementation in CAD software, which strat-

fache Kräfte, sondern auch Momente auf natürliche Weise mit erfasst werden können.

Wir berichten, nach einem kurzen Abriss zur Anwendung von Regelflächen im Bauwesen und deren Implementierung in CAD-Software, welche Strategien wir verfolgt haben, um die Liniengeometrie im Sinne des Leichtbaus nutzbar zu machen. Wir geben einen Überblick über die bisherigen Resultate und skizzieren, in welche Richtung die ausgebreiteten Konzepte weiterentwickelt werden sollen. Außerdem geben exemplarische Ergebnisse aus einem Modellierungskurs mit Studierenden der Architektur einen Einblick in die grundsätzlichen Herausforderungen beim Transfer des hier akkumulierten Wissens und regen insofern künftige Aufgaben an.

2 Regelflächen im Bauwesen

Unter dem Blickwinkel Herstellung und Statik zerfällt die Klasse der Regelflächen in zwei wesentliche Arten. Zur einen Art, den abwickelbaren Regelflächen, gehören die Zylinder, Kegel und Torsen. Das sind Flächen mit durchgängig verschwindender Gaußscher Krümmung (einfach gekrümmte Flächen), die aus ebenem Baumaterial, z. B. Blech, durch einfaches Biegen hergestellt werden können. Die andere Art sind die windschiefen Regelflächen mit im Wesentlichen negativer Gaußscher Krümmung (gegensinnig doppelt gekrümmte Flächen), die durch ihre Krümmung günstige statische Eigenschaften aufweisen. *Liniengeometrie für den Leichtbau* befasst sich mit letzteren, weil Beton für das Herstellen doppelt gekrümmter Bauteile in besonderer Weise geeignet ist und derartige Konstruktionen auch bei geringer Materialstärke überdurchschnittlich leistungsfähig sind.

Die gebräuchlichsten windschiefen Regelflächen im Bauwesen sind die algebraischen Regelflächen 2. Ordnung, die sogenannten Reguli, namentlich das hyperbolische Paraboloid (HP-Fläche) und das einschalige Hyperboloid. Die Besonderheit der Reguli ist, dass auf ihnen zwei Scharen von Geraden liegen, sie also in doppegies we have followed to make line geometry usable in the sense of lightweight construction. We give an overview of the results obtained so far and outline the direction in which the presented concepts will be further developed. In addition, exemplary results from a modeling course with students of architecture give an insight into the fundamental challenges in transferring the knowledge accumulated here and in this respect stimulate future tasks.

2 Ruled surfaces in construction

From the viewpoint of production and statics, the class of ruled surfaces is divided into two main types. The cylinders, cones and torses belong to the first type, the developable surfaces. These are surfaces with zero Gaussian curvature, which can be produced from flat building material, e.g. sheet metal, by simple bending. The other type are the skew ruled surfaces with essentially negative Gaussian curvature (doubly curved surfaces with hyperbolic points), which have favorable static properties due to their curvature. *Line Geometry for Lightweight Structures* deals with the latter, because concrete is particularly suitable for the production of doubly curved components and such structures have above-average performance even with low material thickness.

The most common skew ruled surfaces in civil engineering are the algebraic ruled surfaces of 2nd order, the so-called reguli, namely the hyperbolic paraboloid and the one-sheet hyperboloid. The peculiarity of the reguli is that they contain two sets of mutually skew lines, which makes them doubly ruled surfaces. One-sheet hyperboloids of revolution have been known since the designs of the Russian engineer Vladimir Shukhov (1853–1939) as extremely efficient forms for large structures and often serve as the basic form for cooling towers, e.g. Beckh [1]. Antoni Gaudí (1852–1926) used reguli extensively as a design feature in the Sagrada Família, Burry [2] (Fig. 1). As thin concrete shells, hyperbolic paraboloids in particular were made famous by Félix Candela (1910–1997). Likewise,

Bild 1: Durch Geraden erzeugte Regelflächen im Modell, Museum in der Sagrada Família, Barcelona | **Fig. 1:** Examples of ruled surfaces as scale models, museum in the Sagrada Família, Barcelona

pelter Hinsicht Regelflächen sind. Einschalige Drehhyperboloide sind seit den Konstruktionen des russischen Ingenieurs Wladimir Schuchow (1853–1939) als extrem wirtschaftliche Bauformen für große Bauwerke bekannt und dienen vielfach als Grundform für Kühltürme, z. B. Beckh [1]. Antoni Gaudí (1852–1926) hat Reguli als Gestaltungsmittel umfangreich in der Sagrada Família eingesetzt, Burry [2] (Bild 1). Als dünne Betonschalen wurden insbesondere die HP-Flächen durch Félix Candela (1910–1997) berühmt. Ebenso haben aber auch Anton Tedesko (1903–1994), Eduardo Catalono (1917–2010), Ulrich Müther (1934–2007) und viele andere HP-Flächen verwendet, siehe z. B. Heinle/Schlaich [3] oder Dechau [4]. Als vorgefertigte Bauteile sind die Hyperboloidschalen von Wilhelm Silberkuhl (1912–1984) bekannt geworden, bei denen Vorspannung zur Anwendung kam, Rupper et al. [5]. Ein besonderes Beispiel für die Anwendung von Reguli ist das Panorama-Bauwerk Bad Frankenhausen, bei dem sowohl die Wände als auch das Dach aus HP-Schalensegmenten errichtet wurden, Müller/Kokott [6].

Das internationale Symposium Shell Pioneers, 2012 durchgeführt am Fachgebiet von Prof. Mike Schlaich (TU Berlin), förderte weitere, kaum populäre, doch nicht minder spektakuläre Beispiele aus dem europäischen Ausland zu Tage [7]. Auch jenseits von HP-Fläche und Drehhyperboloid sind die Vielseitigkeit der Betonschalenkonstruktionen und ihr verhältnismäßig geringer Baustoffverbrauch unbestritten. Jedoch führt insbesondere der hohe Arbeitsaufwand bei der

Anton Tedesko (1903–1994), Eduardo Catalono (1917–2010), Ulrich Müther (1934–2007) and many others have used hyperbolic paraboloids, see e.g. Heinle & Schlaich [3] or Dechau [4]. The hyperboloid shells of Wilhelm Silberkuhl (1912–1984) have become known as prefabricated components, where prestressing was applied, Rupper et al. [5]. A special example for the application of reguli is the panorama structure Bad Frankenhausen, where both the walls and the roof were built of shell segments from hyperbolic paraboloids, Müller & Kokott [6].

The international symposium Shell Pioneers, organized in 2012 by the department of Prof. Mike Schlaich (TU Berlin), brought to light further hardly popular but no less spectacular examples from other European countries [7]. Even beyond hyperbolic paraboloids and hyperboloids of revolution, the versatility of concrete shell structures and their relatively low consumption of building materials are undisputed. However, especially the high labor input during fabrication leads to the fact that they are hardly built today, Schlaich [8]. Obviously, the challenge is to manufacture the formwork for double-curved shells economically. This is indeed the reason why we restrict ourselves to the class of ruled surfaces: for this surface class the formwork elements can be obtained straightforwardly by hot wire cutting from extruded polystyrene.

Ruled surfaces that are not reguli are relatively rare in civil engineering. Conoids, where the

Herstellung dazu, dass sie heute kaum mehr gebaut werden, Schlaich [8]. Offensichtlich ist eine zentrale Aufgabe, die Schalung für doppelt gekrümmte Schalen wirtschaftlich in den Griff zu bekommen. Das ist auch der Grund, warum wir uns auf die Klasse der Regelflächen beschränken. Schließlich können in diesem Fall die Schalungselemente relativ unkompliziert durch Heißdrahtschneiden aus extrudiertem Polystyrol gewonnen werden.

Regelflächen, die keine Reguli sind, kommen im Bauwesen relativ selten vor. Konoide, bei denen die Erzeugenden zu einer Richtebene parallel sind (das gilt auch für HP-Flächen), treten dabei noch am häufigsten auf. Die Untersicht von massiven Wendeltreppen ist oft als Wendelfläche ausgeführt, obwohl auch schiefe Schraubregelflächen anzutreffen sind. Antoni Gaudí hat darüber hinaus solche Konoide verwendet, die eine Sinuskurve als Leitkurve besitzen. In neuerer Zeit finden sogar allgemeine windschiefe Regelflächen Anwendung, unter anderem im Werk von Zaha Hadid (1950–2016), Flöry/Pottmann [9]. Im Übrigen ist aber das Gestaltungspotential der Regelflächen noch bei weitem nicht ausgeschöpft. Das liegt unter anderem daran, dass Regelflächen in aktuellen CAD-Programmen nicht strukturiert gehandhabt werden können. Wesentliche konstruktive Eigenschaften sind nur auf Umwegen erreichbar, der Einsatz von Regelflächen im Entwurf somit mühsam.

3 Standard-Implementierung von Regelflächen in CAD-Software

Regelflächen treten in CAD-Software als eine Untergruppe der NURBS-Flächen auf. Sind beispielsweise für eine Loft-Fläche nur zwei Profilkurven vorgegeben, so werden diese linear verbunden und man erhält eine NURBS-Fläche, deren Parameterkurven in einer Richtung Geradenstücke sind. Es handelt sich bei einer derartigen NURBS-Fläche somit um einen Ausschnitt einer Regelfläche. Die Erzeugenden der Regelfläche, also die Geraden, verbinden immer einander entsprechende Parameterpunkte auf den Profilkurven. Diese Zuordnung ist aber weitgehend

generators are parallel to a common plane (this also applies to hyperbolic paraboloids), still occur most frequently. The soffit of massive spiral staircases is often designed as a helicoid, although oblique helical surfaces are also encountered. Antoni Gaudí also used such conoids, which have a sinusoidal curve as a guiding curve. In more recent times, even general skew ruled surfaces are used, among others in the work of Zaha Hadid (1950–2016), Flöry & Pottmann [9]. In all other respects, however, the design potential of ruled surfaces is far from being explored to the full. This is partly due to the fact that ruled surfaces cannot be handled in a structured way in current CAD programs. Essential design properties can only be achieved by detours, and the use of ruled surfaces in design is therefore laborious.

3 Standard implementation of ruled surfaces in CAD software

In typical CAD software, ruled surfaces appear as a subset of NURBS surfaces. If, for example, only two profile curves are specified for a loft surface, these are connected linearly and a NURBS surface is obtained whose isocurves in one direction are straight line segments. Such a NURBS surface is thus a section of a ruled surface. The generators of the ruled surface, which are the lines, always connect corresponding parameter points on the profile curves. However, this assignment is rather arbitrary, depends only on the parameterization of the profile curves and is usually beyond the control of the user. It typically requires additional processing to obtain the desired ruled surface. In fact, it must be made clear here that a ruled surface is only unambiguously determined by three curves (Fig. 2 and Pottmann/Wallner [10]).

In the case of the Kilden Performing Arts Centre in Kristiansand (Fig. 3), for example, the design goal was to create a conoidal surface. In the front view, the generators, materialized as wooden strips, were to appear parallel to each other. However, the architects' geometric

hend willkürlich, hängt nur von der Parametrisierung der Profilkurven ab und entzieht sich zunächst der Kontrolle der Benutzenden. Es bedarf typischerweise einer zusätzlichen Bearbeitung, um die gewünschte Regelfläche zu erhalten. Allgemein gilt nämlich, dass erst durch drei Kurven eine Regelfläche eindeutig bestimmt ist (Bild 2 und Pottmann/Wallner [10]).

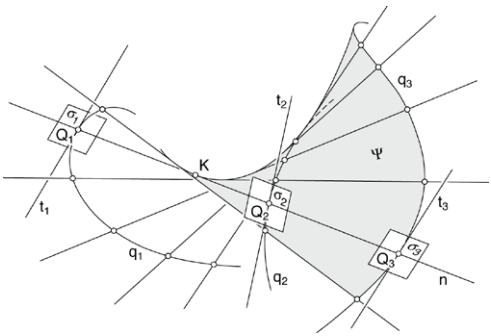

Bild 2: Festlegung einer Regelfläche durch die Treffgeraden zu drei Kurven q_1, q_2 und q_3 | **Fig. 2:** Definition of a ruled surface by three curves q_1, q_2, and q_3

Beim Kilden Theater- und Konzerthaus in Kristiansand (Bild 3) war beispielsweise das Entwurfsziel, eine konoidale Fläche zu erzeugen. In der Frontansicht sollten die Erzeugenden, als Holzleisten materialisiert, zueinander parallel erscheinen. Das leistete aber das geometrische Modell der Architekten zunächst nicht und es wurde erst erreicht, indem nachträglich die Parametrisierung der Randkurven manipuliert wurde (Bild 4). Diese Aufgabe war also dem digitalen Entwurf nachgeordnet und wurde von der auf Geometriemodellierung spezialisierten Firma Design-to-Production durchgeführt, Scheurer [12].

Dieser Ablauf bei der Formfindung und Realisierung ist in gewisser Weise typisch, aber keineswegs zufriedenstellend! Wir wollen die geometrische und statische Optimierung in

model did not initially achieve this, and it was only achieved by subsequently manipulating the parameterization of the boundary curves (Fig. 4). This task was thus subordinate to the digital design and was carried out by the company Design-to-Production, Scheurer [12], which specialized in geometric modeling.

This procedure in form finding and realization is typical in a certain way, but by no means satisfactory! We want to integrate the geometric and static optimization in the form finding and thus

Bild 3: Kilden Theater- und Konzerthaus in Kristiansand bei Nacht | **Fig. 3:** Kilden Performing Arts Centre in Kristiansand at night

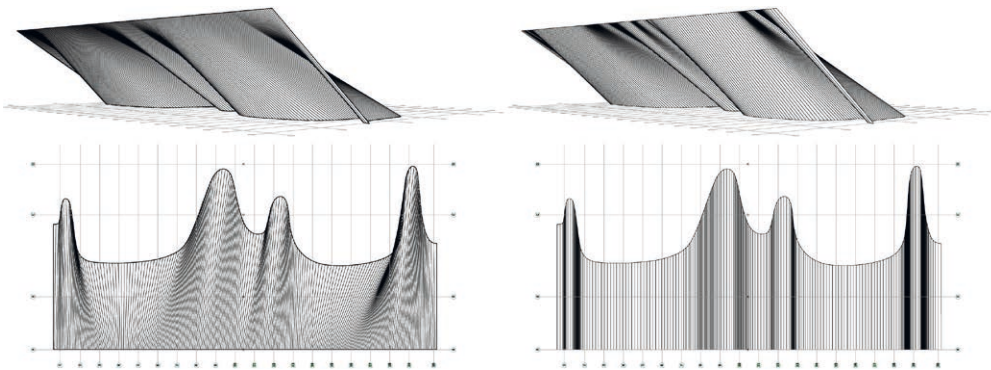

Bild 4: Fassade des Kilden Theater- und Konzerthauses, ALA Architects; links: NURBS-Entwurf, rechts: konoidale Fläche | **Fig. 4:** Kilden Performing Arts Centre facade, ALA Architects; left: NURBS design, right: conoidal surface

die Formfindung einbeziehen und so zu einer grundsätzlichen Verbesserung beim Entwerfen mit Regelflächen beitragen.

4 Liniengeometrische Modelle

Liniengeometrie für den Leichtbau stellt dem Konzept der NURBS-Flächen eine neue und – in Bezug auf windschiefe Regelflächen – artgerechte Berechnungsmethode zur Seite. Das Grundprinzip ist, die Menge aller Geraden des Anschauungsraums in einem höherdimensionalen Modellraum zu behandeln. Die Projektmitarbeiter Markus Hagemann und Daniel Klawitter haben insbesondere zwei bekannte liniengeometrische Modelle auf ihre Tauglichkeit für die Anwendung im Leichtbau näher untersucht, das *Plückersche Geradenmodell* und die *Dualsphäre*.

Das Plückersche Geradenmodell ist eingebettet in einen projektiven, fünfdimensionalen Raum, in dem alle Geraden des dreidimensionalen Raumes als Punkte auf der sogenannten Klein-Quadrik liegen. Die Besonderheit des Modells liegt in seiner Vollständigkeit. So sind Ferngeraden in dieses Modell in natürlicher Weise integriert. Das Parallelenaxiom ist außer Kraft: Irgend zwei verschiedene Geraden haben entweder einen Schnittpunkt oder sind windschief. Liniengeometrische Zusammenhänge können sehr gut mit Hilfe der durch die Klein-Quadrik

contribute to a fundamental improvement in designing with ruled surfaces.

4 Models of line space

Line Geometry for Lightweight Structures expands the concept of NURBS surfaces with a new and – with respect especially to skew ruled surfaces – appropriate computational method. The basic idea is to treat the manifold of all straight lines of the three-dimensional space in a higher-dimensional model space. The project team members Markus Hagemann and Daniel Klawitter have examined in particular two well-known models of line space with respect to their suitability for the application in lightweight construction, the *Klein model* and the *Study sphere*.

Lines can be computed homogeneously with the help of so-called Plücker coordinates. Those coordinates can be interpreted as points in a projective, five-dimensional space, in which then all lines of the three-dimensional space lie as points on the so-called Klein quadric. The special feature of this model is its completeness: thus, objects at infinity are integrated into model in a natural way. The parallel axiom is out of force: any two different straight lines either have an intersection point or are skew. Relations within line space can be explained very well with the help of the polarity induced by the Klein quadric. All this makes the Plücker

induzierten Polarität erklärt werden. All das macht das Plückersche Geradenmodell aus mathematischer Sicht elegant. Für ingenieurspezifische Fragestellungen werden Fernelemente und die projektive Sichtweise im Allgemeinen jedoch nicht benötigt.

Ein weiteres Modell ist die Dualsphäre. Ausgangspunkt sind die dualen Quaternionen zur Beschreibung von Bewegungen im Raum (allgemein: Schraubungen). Durch Einschränkung auf Drehungen um 180° erhält man die sogenannten liniensymmetrischen Bewegungen. Die dualen Quaternionen vereinfachen sich in diesem Fall entscheidend und erfüllen die Dualsphäre, die damit wiederum als eine Einbettung der Geraden des dreidimensionalen Raumes in das Bewegungsmodell angesehen werden kann. Während das Attribut dual auf die zu Grunde liegende algebraische Struktur der dualen Zahlen zurückzuführen ist, ist der Begriff der Sphäre durch eine Normierungsbedingung geprägt. In der Tat können also Geraden als Punkte auf einer zweidimensionalen Sphäre im dreidimensionalen Modul über dem Ring der dualen Zahlen angesehen werden.

Die Dualsphäre hat zwar den Nachteil, Fernelemente nicht erfassen zu können, aber den für das Bauwesen entscheidenden Vorteil, dass eine Norm induziert wird. Diese Norm ist eine duale Zahl und beinhaltet den Abstand und den Winkel zwischen zwei Geraden. Diese Eigenschaft ist vor allem aus Sicht der zu behandelnden Optimierungsaufgaben wichtig. Außerdem bietet die Korrespondenz des Modells mit der Darstellung von Bewegungen als duale Quaternionen die Möglichkeit, bereits bekannte Erkenntnisse aus der Kinematik auf Geraden zu übertragen. Faktisch ist es mit diesem Kalkül sehr einfach möglich, Geraden im Raum gezielt zu bewegen.

Eine willkommene Eigenschaft der Dualsphäre ist, dass jede Geodätische, das heißt die kürzeste Verbindung zweier Punkte im Punktmodell, immer genau einer Wendelfläche im dreidimensionalen Raum entspricht. Nun sind die Wendelflächen bekanntermaßen die einzigen

coordinates elegant from a mathematical point of view. For engineering specific problems, however, objects at infinity and the projective view are generally not needed.

Another model is the dual unit sphere (Study sphere). Starting point are the dual quaternions for the description of movements in space (in general: screw motions). By the restriction to rotations of 180° one obtains the so-called line-symmetric motions. In this case the dual quaternions simplify decisively and fulfill the dual unit sphere, which in turn can be seen as an embedding of the lines of the three-dimensional space into the motion model. While the attribute dual is due to the underlying algebraic structure of the dual numbers, the notion of sphere is characterized by a normalization condition. So, in fact, straight lines can be regarded as points on a two-dimensional sphere in the three-dimensional module over the ring of dual numbers.

Although the Study sphere has the disadvantage of not being able to capture elements at infinity, it has the significant advantage for civil engineering that a norm is induced. This norm is a dual number and contains the distance and the angle between two straight lines. This property is especially relevant for the optimization tasks to be treated. Moreover, the correspondence of the model with the representation of motions as dual quaternions offers the ability to transfer already known knowledge from kinematics to straight lines. In fact, with this calculus it is very easy to control the movement of straight lines in space.

A convenient property of the Study sphere is that every geodesic, i.e. the shortest connection of two points in the point model, always corresponds to a helical surface in three-dimensional space. Now, as is well known, the helical surfaces are the only ruled surfaces that are also minimal surfaces. Obviously, the model of the Study sphere harmonizes with the goals of lightweight construction, because in a quite natural way such surfaces are preferred, which have minimal surface area and thus bring material savings. For the above reasons, we have focused on the line-geometric model of the dual

Regelflächen, die zugleich Minimalflächen sind. Offensichtlich harmoniert also das Modell der Dualsphäre mit den Zielen des Leichtbaus, weil in organischer Weise solche Flächen bevorzugt werden, die minimalen Flächeninhalt haben und damit Materialersparnis bringen. Aus den genannten Gründen haben wir uns auf das liniengeometrische Modell der Dualsphäre konzentriert und es für die Belange des Entwerfens im Leichtbau ausgearbeitet. Im Zuge dieser Arbeit und zum Teil deutlich über die ursprünglichen Intentionen des Projektes hinaus sind mathematische Grundlagen geschaffen worden, die unsere Ergebnisse in einen wesentlich größeren theoretischen Kontext einbetten, Klawitter [13].

4.1 Interpolationsalgorithmen für Regelflächen

Zunächst wurde die Erzeugung von Regelflächen aus einer Schar vorgegebener Geraden untersucht, Hagemann/Klawitter [14]. Die Geraden sind Punkte auf der Dualsphäre und die gesuchte Regelfläche eine Kurve, die diese Punkte interpoliert. Dieser Zugang unterscheidet sich grundsätzlich von der NURBS-Technologie im Euklidischen Modell, kann aber durch eine analoge Betrachtung erschlossen werden. Der große Vorteil ist, dass Regelflächen definierbarer Güte entstehen.

Mit dem Übertragungsprinzip von Bewegungen und im Zusammenspiel mit der Definition eines Teilverhältnisses konnten verschiedene Subdivisionsalgorithmen konstruiert werden, die etablierte Konzepte etwa von Aitken, de Casteljau, und Bézier unter Beachtung der Gruppenstruktur auf der Dualsphäre adaptieren (Bild 5). Die Besonderheit bei diesem Zugang liegt in der direkten Verarbeitung der vorgegebenen diskreten Geradenmenge. Spezifisch liniengeometrische Größen, wie der Drall, können nun direkt in den Algorithmus integriert werden. Der Benutzer kann durch einzelne Geraden den Interpolationsalgorithmus steuern und die Regelfläche letztlich so manipulieren, wie er durch Steuerpunkte einen Spline manipuliert. Übliche Interpolationsalgorithmen basieren auf dem Konzept der Hermite-Interpolation und

unit sphere and elaborated it for the needs of lightweight design. In the course of this work, and in part well beyond the primary intentions of the project, mathematical foundations have been established that embed our results in a much larger theoretical context, Klawitter [13].

4.1 Interpolation algorithms for ruled surfaces

First, the generation of ruled surfaces from a set of given straight lines was investigated, Hagemann/Klawitter [14]. The lines are points on the Study sphere and the ruled surface aimed for is a curve interpolating these points. This approach differs fundamentally from the NURBS technology in the Euclidian model, but can be developed by an analogous consideration. The great advantage is that ruled surfaces of definable quality result.

With the transfer of motions and in combination with the definition of a ratio, several subdivision algorithms could be constructed, which adapt established concepts for example of Aitken, de Casteljau, and Bézier under consideration of the group structure on the Study sphere (Fig. 5). The special characteristic in this approach lies in the direct processing of the given discrete set of lines. Specific line-geometric quantities, such as the torsion, can now be directly integrated into the algorithm. The users can control the interpolation algorithm through single lines and actually manipulate the ruled surface in the same way that they manipulate a spline through control points. Conventional interpolation algorithms are based on the concept of Hermite interpolation and only guarantee C^2-continuity. In contrast, the new method provides a spline interpolation with arbitrarily high degree and thus corresponds to an adapted B-spline method. Another property of the algorithm is the automatic generation of conoidal surfaces as soon as the given discrete lines are parallel to a common plane.

4.2 Generalization of the kinematic mapping

During our research, we were able to generalize the kinematic mapping which maps the motion

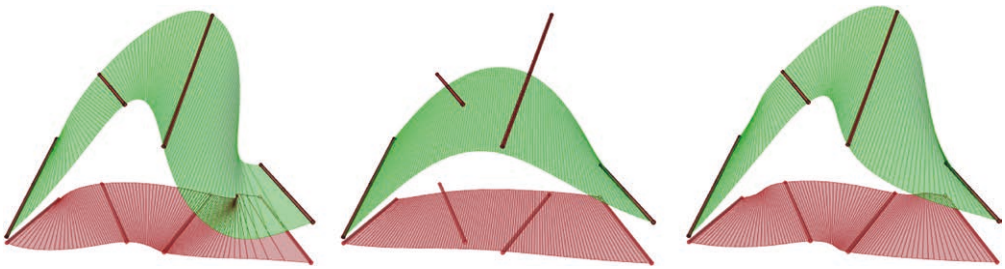

Bild 5: Subdivisionsalgorithmen für vier Geraden; von links nach rechts: Aitken, Bézier, B-Spline | **Fig. 5:** Subdivision algrorithms for four lines; from left to right: Aitken, Bézier, B-spline

gewährleisten lediglich C^2-Stetikeit. Dagegen bietet das neue Verfahren eine Spline-Interpolation mit beliebig hohem Grad und entspricht damit einem adaptierten B-Spline-Verfahren. Eine weitere Eigenschaft des Algorithmus ist die zwanglose Erzeugung konoidaler Regelflächen, sobald die vorgegebenen diskreten Geraden eine gemeinsame Ferngerade schneiden.

4.2 Verallgemeinerung der kinematischen Abbildung

Im Zuge unserer Forschung konnte die kinematische Abbildung, welche die Bewegungsgruppe SE(3) auf Punkte eine Hyperquadrik im siebendimensionalen projektiven Raum abbildet, verallgemeinert werden, Klawitter/Hagemann [15]. Mit Hilfe des Clifford-Algebra-Kalküls wurden Isometriegruppen von Cayley-Klein-Geometrien auf pseudo-algebraische Varietäten als Teilmenge von projektiven Räumen abgebildet. Insbesondere ließen sich mit Hilfe des entwickelten Apparates die bekannten Abbildungen von Blaschke und Grünwald sowie von Study im Clifford-Algebra-Kalkül vereinheitlichen. Außerdem wurden Möglichkeiten bereitgestellt, die Isometriegruppen verschiedener Cayley-Klein-Gruppen als Matrix-Gruppen darzustellen.

4.3 Entwicklung eines liniengeometrischen Clifford-Algebra-Models

Weiterhin wurde ein homogenes Clifford-Algebra-Model entwickelt, welches die Klein-Quadrik als Maßquadrik besitzt, siehe Klawitter [16]. In diesem Modell finden Geraden, welche in group SE(3) to points on a hyperquadric in the seven-dimensional projective space, Klawitter & Hagemann [15]. Using the Clifford algebra calculus, isometry groups of Cayley-Klein geometries were mapped to pseudo-algebraic varieties as subsets of projective spaces. In particular, the developed apparatus made it possible to unify the well-known mappings of Blaschke and Grünwald and of Study in the Clifford algebra calculus. Furthermore, possibilities were provided to represent the isometry groups of different Cayley-Klein groups as matrix groups.

4.3 Development of a line-geometric Clifford algebra model

Furthermore, a homogeneous Clifford algebra model was developed, which has the Klein quadric as a norm, see Klawitter [16]. In this model straight lines, which are represented in Plücker coordinates, find a natural analogon as zero vectors. Geometric objects which occur in the Klein model are transferred to the Clifford algebra model and are described there by certain algebra elements. For example, reguli, linear line congruences and linear complexes can be easily represented as algebra elements. According to Pottmann & Wallner [10], the group of regular projective transformations of the three-dimensional projective space is isomorphic to the group of automorphic collineations of the Klein quadric. This group can be found in the Clifford algebra model as a pin group. A way has been provided to transfer arbitrary projective mappings directly into the model. Advantages arise from the fact that the transformation, when represented in the algebra, can be

Plücker-Koordinaten dargestellt sind, ein natürliches Analogon als Nullvektoren. Geometrische Objekte, die im Klein-Modell vorkommen, werden in das Clifford-Algebra-Modell übertragen und sind dort durch bestimmte Algebraelemente beschrieben. So lassen sich beispielsweise Reguli, lineare Geradenkongruenzen und lineare Geradenkomplexe einfach als Algebraelemente darstellen. Nach Pottmann/Wallner [10] ist die Gruppe der regulären projektiven Transformationen des dreidimensionalen projektiven Raumes isomorph zur Gruppe der automorphen Kollineationen der Klein-Quadrik. Diese Gruppe kann in dem Clifford-Algebra-Modell als Pingruppe gefunden werden. Es wurde eine Möglichkeit bereitgestellt, beliebige projektive Abbildungen direkt in das Modell zu übertragen. Vorteile ergeben sich dadurch, dass die Transformation, wenn sie in der Algebra dargestellt ist, mit einer Algebraoperation auf verschiedene geometrische Objekte, die in der Algebra darstellbar sind, angewendet werden kann.

4.4 Relaxation auf der Dualsphäre

Für Formfindung und Optimierung von Regelflächen haben wir im liniengeometrischen Modell die entsprechenden Grundlagen geschaffen. Abhängig von gewählten Zielgrößen können etwa Evolutionsgleichungen betrachtet werden. Eine der bekanntesten Evolutionsgleichungen ist der *Curve-Shortening Flow*, welcher aus der Wärmeleitungsgleichung resultiert. Die Verallgemeinerung dieser Theorie auf duale Zahlen, vor allem für eine Anwendung auf der Dualsphäre, erforderte eine intensive Einarbeitung in Kurvenflüsse, Hagemann, Klawitter, Odehnal [17].

Die Anwendung des *Curve-Shortening Flow* hat große Gemeinsamkeit mit der Simulation eines Masse-Feder-Dämpfer-Systems. Werden Federn als Kanten eines polygonalen Netzes angenommen, können damit Membranen unter Krafteinfluss simuliert werden. Diese Idee lässt sich für Polygonzüge (eindimensionale polygonale Netze) auf die Dualsphäre übertragen. Der Feder, als Gerade zwischen zwei Punkten, entapplied with an algebra operation to various geometric objects representable in the algebra.

4.4 Relaxation on the Study sphere

For form finding and optimization of ruled surfaces, we have created the corresponding foundations in the line geometric model. Depending on the selected target variables, evolution algorithms can be considered. One of the best known evolution equations is the curve-shortening flow, which results from the heat equation. The generalization of this theory to dual numbers, especially for an application on the Study sphere, required an intensive study of curve flows, Hagemann, Klawitter, Odehnal [17].

The application of the curve-shortening flow has much in common with the simulation of a mass-spring-damper system. If springs are assumed to be edges of a polygonal mesh, it can be used to simulate membranes under the influence of forces. This idea can be applied to the Study sphere for polygonal chains (polylines, one-dimensional polygonal meshes). However, the spring, as a straight line between two points, then corresponds to a dual great circle arc and this in turn to the smallest helicoid between two straight lines. The helicoid stands in analogy to the straight line as the shortest connection between two points. Mechanical properties of these dual springs are also to be transferred into the dual sphere model, whereby a dependency from translational and rotational stiffness can be achieved. With the help of this approach, dynamic influences can be applied directly to ruled surfaces, and such can be used for a suitable shape finding within the design space of ruled surfaces – and this is the crucial point! See Fig. 6 and Hagemann, Klawitter, Lordick [18].

4.5 Transfer back into the three-dimensional Euclidean space

In buildings, ruled surfaces always exist only in segments, while by the Study sphere the generators are defined as infinite lines. Nevertheless, the modification of the ruled surfaces in the

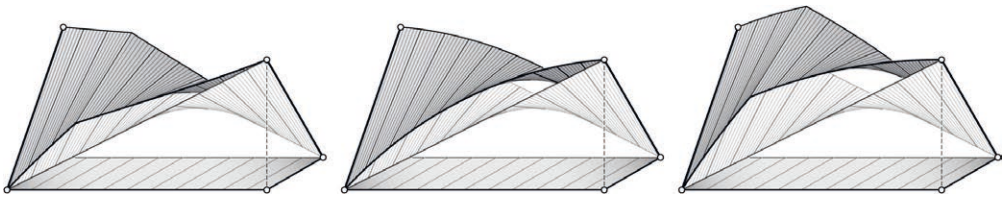

Bild 6: Relaxation unter Einzel- und Flächenlast und deren Kombination bei fixen Randgeraden | **Fig. 6:** Relaxation under point load, uniformly distributed load and their combination, while the boundary lines are fixed

spricht dann jedoch ein dualer Großkreisbogen und dieser wiederum der kleinsten Wendelflächen zwischen zwei Geraden. Die Wendelfläche steht in Analogie zur Geraden als kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Mechanische Eigenschaften dieser dualen Federn sind ebenfalls in das duale Modell zu übertragen, wodurch eine Abhängigkeit von translatorischer und rotatorischer Steifigkeit erreicht werden kann. Mit Hilfe dieses Ansatzes lassen sich dynamische Einflüsse auf Regelflächen übertragen, was direkt für eine geeignete Formfindung im Raum der Regelflächen – und das ist das Entscheidende! – Verwendung finden kann, siehe Bild 6 und Hagemann, Klawitter, Lordick [18].

4.5 Rückübertragung in den Anschauungsraum

Im Bauwesen liegen Regelflächen immer nur ausschnittweise vor, während die Erzeugenden auf der Dualsphäre als unendlich lange Geraden definiert sind. Die Modifikation der Regelflächen im Anschauungsraum gelingt dennoch über einen Zusammenhang mit der Kinematik: Da Wendelflächen Schraubbewegungen von Geraden entsprechen, lassen sich die Bewegungsvorgänge auch auf andere Objekte, speziell auf die Endpunkte der Geradensegmente, übertragen. Es werden also zunächst im liniengeometrischen Modell nur die Geraden manipuliert und erst nach der Optimierung die Endpunkte der Geradenstücke durch die Anwendung der gefundenen Transformationsmatrix zurückübertragen und dargestellt. Der Gesamtvorgang dieser Regelflächenmanipulation mag im Detail aufwändig erscheinen (Bild 7), ist aber in nahe Echtzeit durchführbar.

Euclidean space can be achieved by a connection of the Study sphere with kinematics: Since helicoids correspond to helical movements of straight lines, the processed movement of the lines can also be transferred to other objects, especially to the end points of line segments. So, at first only the infinite lines are manipulated in the line-geometric model and only after the optimization of the shape the end points of the original line segments are processed by the found transformation matrix and then transferred back to the ruled surface. The overall process of this ruled surface manipulation may seem complex in detail (Fig. 7), but it can be performed in near real time.

5 Software for the design of ruled surfaces

The results were implemented as an add-on for the plug-in Grasshopper of the CAD software Rhinoceros 3D [19]. Furthermore, basic functionalities were realized cross-platform in Matlab and Python. This includes a calculus for different models of line space and a simulation tool for ruled surface relaxation.

The Grasshopper add-on called LineGeometry is a freely available toolkit for the line-based design of ruled surfaces [20], [21]. Four components (*Generators*) are used to generate ruled surfaces and four additional components (*Util*) provide auxiliary tools (Fig. 8, top). Ruled surfaces can be generated with LineGeometry, for example, by steering the surface with so-called control lines – just as control points determine a Bézier curve. Or the ruled surface interpolates the control lines (Fig. 8, down).

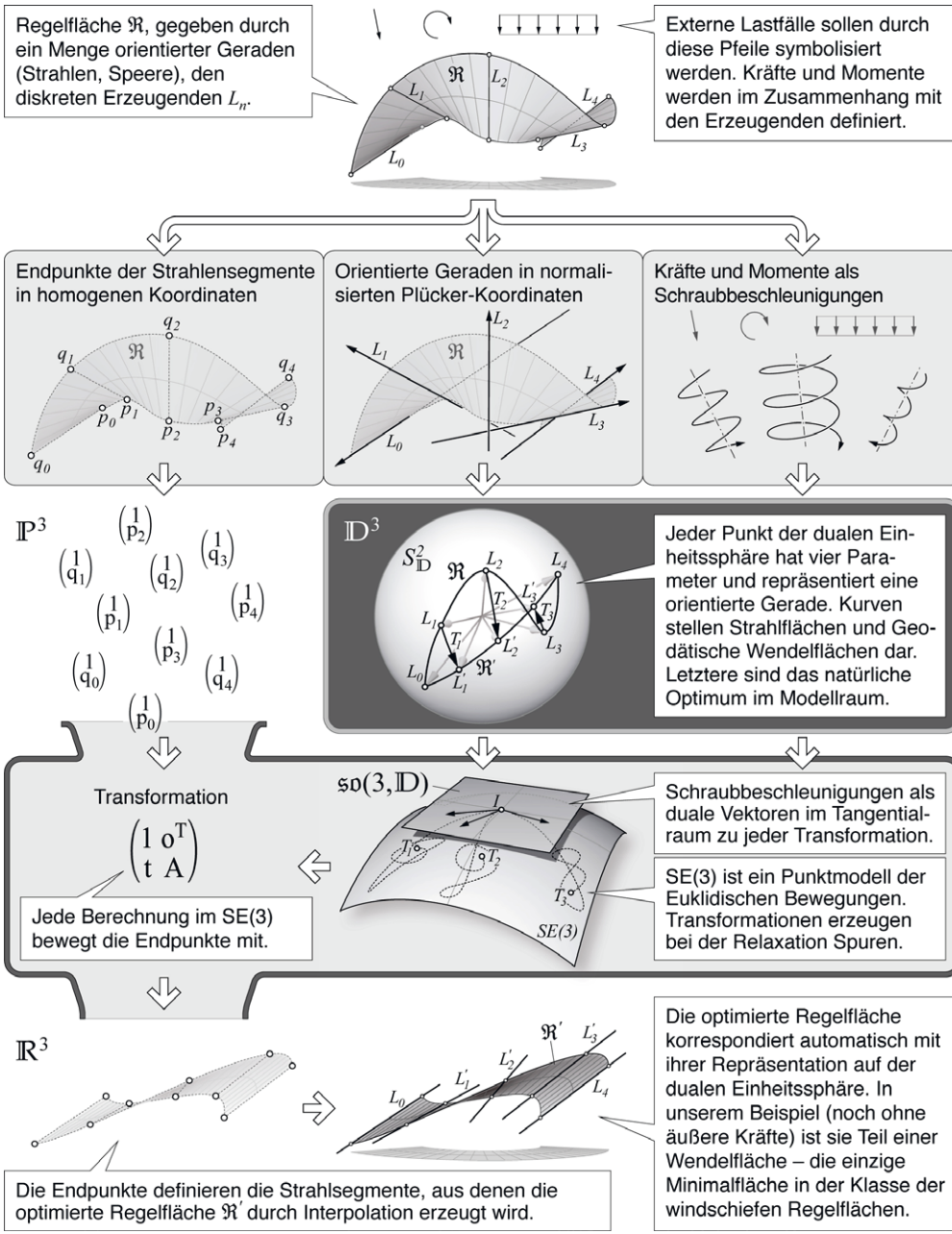

Bild 7: Diagramm des Prozesses

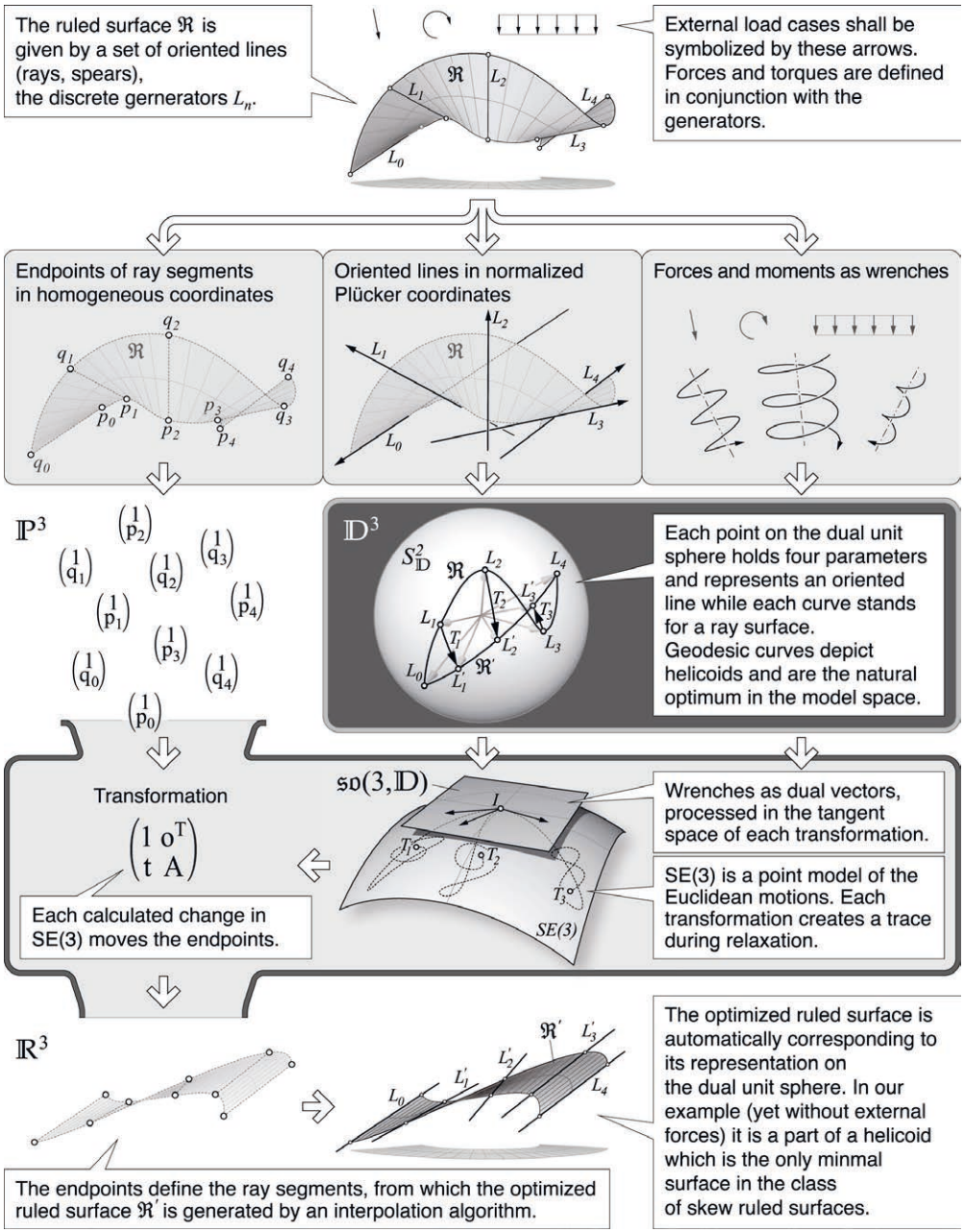

Fig. 7: Diagram of the process

5 Software für die Erzeugung von Regelflächen

Die gefundenen Ergebnisse wurden als Add-on für das Plug-in Grasshopper der CAD-Software Rhinoceros 3D [19] implementiert. Darüber hinaus wurden grundlegende Funktionalitäten plattformübergreifend in Matlab und Python realisiert. Dazu zählt neben dem Geradenkalkül für verschiedene liniengeometrische Modelle ein Simulationswerkzeug für Regelflächenrelaxation.

Das Grasshopper-Add-on mit dem Namen LineGeometry ist ein frei verfügbares Entwurfswerkzeug zum geradenbasierten Design von Regelflächen [20], [21]. Vier Funktionen (*Generators*) dienen der Erzeugung von Regelflächen und vier weitere Funktionen (*Util*) stellen Hilfswerkzeuge zur Verfügung (Bild 8, oben). Regelflächen können mit LineGeometry zum Beispiel erzeugt werden, indem sogenannte Kontrollgeraden die Fläche steuern – genau so, wie Kontrollpunkte eine Bézier-Kurve steuern. Oder aber die Regelfläche interpoliert die Kontrollgeraden (Bild 8, unten). Außerdem gibt es ein spezielles Werkzeug für Parallelflächen von Regelflächen, die wieder Regelflächen sind, und eines für die Erzeugung von Reguli. Werkzeuge für die Extraktion von Asymptoten- und Hauptkrümmungslinien unterstützen die Approximation von Freiformflächen durch Regelflächen-Patches. Ein weiteres Werkzeug dient dem effektiven *Loften* einer Vielzahl von Geraden. Damit wird eine Performance-Schwäche der Standard-Loft-Funktion von Rhinoceros bei einer großen Zahl von Profilkurven umgangen. Ein Werkzeug für die Darstellung der Striktionslinie, dem Ort der Zentralpunkte auf einer windschiefen Regelfläche, rundet den Werkzeugkasten ab.

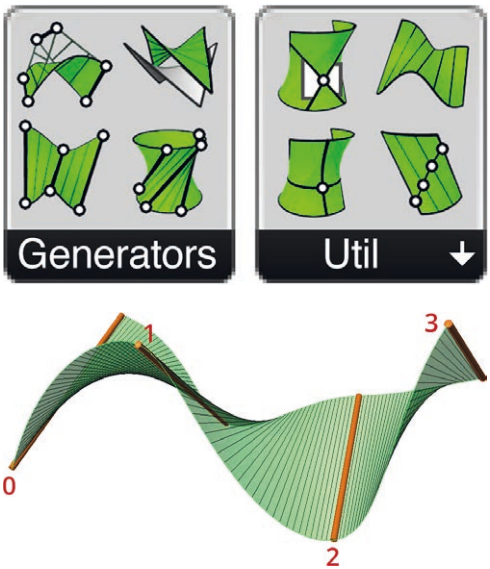

Bild 8: Funktionen des Add-on LineGeometry (oben) und Interpolation von vier Geraden mit einer Regelfläche, erzeugt durch die Funktion BezLines aus dem Add-on LineGeometry (unten) |
Fig. 8: Tools of the add-on LineGeometry (top) and interpolation of four lines with a ruled surface, created by the tool BezLines of the add-on LineGeometry (down)

6 Anwendungen von LineGeometry

6.1 SPP-Sommerschule 2013

In einer Fallstudie *Summer School Pavilion* wurde der Prototyp einer Regelflächenschale während der SPP-Sommerschule 2013 entworfen

There is also a special tool for “parallel surfaces” of ruled surfaces, which are ruled surfaces again, and one for generating reguli. Components for the extraction of asymptotic curves and curvature lines support the approximation of freeform surfaces by ruled surface patches. Another tool is used to effectively loft a large number of straight lines. This circumvents a performance weakness of Rhinoceros’ standard lofting function when dealing with a large number of profile curves. A tool for plotting the restriction line, the location of the central points on a skew ruled surface, completes the toolbox.

6 Applications of LineGeometry

6.1 SPP Summer School 2013

In a case study called *Summer School Pavilion*, the prototype of a ruled surface shell was designed during the SPP Summer School 2013 (see

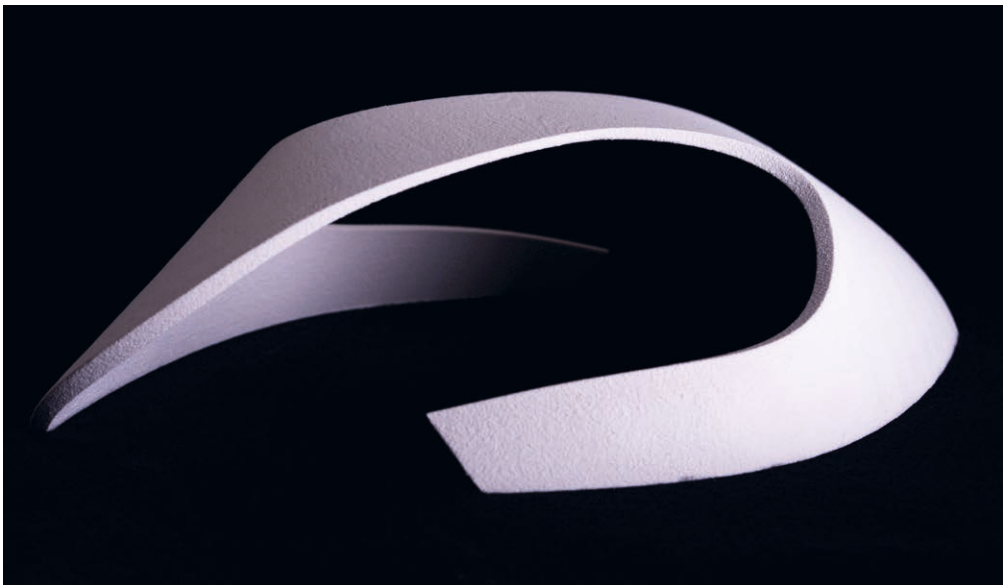

Bild 9: 3D-Druck des *Summer School Pavilion* aus dem 3D-Labor des Institutes für Geometrie, 2013 | **Fig. 9:** 3D print of the Summer School Pavilion, produced in 2013 at the 3D lab at the Institute of Geometry

(siehe Bild 9. Beteiligt waren Markus Hagemann (Mathematik, TU Dresden), Björn Freund (Massivbau, TU Darmstadt) und Michael Breitenberger (Statik, TU München). Zum Entwurf wurde mit Hilfe von CARAT++ eine Festigkeitsanalyse durchgeführt. Ein Modell der Fläche entstand im 3D-Labor am Institut für Geometrie, TU Dresden.

6.2 Modellierungskurs „Gestalten mit Regelflächen“

Im Sommersemester 2014 hatten 20 Studierende aus der Architekturfakultät der TU Dresden Gelegenheit, in die Liniengeometrie einzusteigen, mit Regelflächen zu entwerfen und die im Forschungsprojekt entstandenen Werkzeuge zu nutzen. Vier Teilaufgaben strukturierten den Kurs 3D-Modellieren von Prof. Lordick. Zunächst sollten die Studierenden lediglich gebaute Beispiele sammeln und präsentieren. Dabei stellte sich heraus, dass es für Neulinge keineswegs einfach ist, windschiefe Regelflächen zu erkennen und etwa von anderen Freiformflächen zu unterscheiden.

Fig. 9). Markus Hagemann (Institute of Geometry, TU Dresden), Björn Freund (Institute of Concrete Structures, TU Darmstadt) and Michael Breitenberger (Chair of Structural Analysis, TU Munich) were involved. For the design, a structural analysis was performed using CARAT++. A model of the surface was created in the 3D lab at the Institute of Geometry, TU Dresden.

6.2 Modeling course “Designing with ruled surfaces”

In the summer semester 2014, 20 students from the architecture faculty of the TU Dresden had the opportunity to get into line geometry, to design with ruled surfaces and to use the toolkit created during the research project. Four sub-tasks structured Prof. Lordick’s 3D modeling course. Initially, the students were asked to simply collect and present built examples. It turned out that it is by no means easy for newcomers to recognize skew ruled surfaces and to distinguish them from other freeform surfaces.

Die zweite Aufgabe war, eine freie Regelflächenstudie zu kreieren, und sich dabei beispielsweise durch Fadenmodelle aus der mathematischen Sammlung am Institut für Geometrie inspirieren zu lassen [22]. Diese Übung war formal streng gefasst: Alle mussten ihre Modelle in einem Würfelmodul von 25 cm Kantenlänge realisieren (Bild 10). Das Material − Faden und ein Rahmen aus Holzwerkstoff − war vorgegeben. Für die Herstellung des Rahmens wurde ein Lasercutter verwendet; die Schnittmuster mussten also auf digitalem Wege gewonnen werden. Bis zu diesem Punkt hatten die Studierenden nicht nur prinzipielle Erzeugungsweisen von Regelflächen, sondern auch die grafische Programmierumgebung Grasshopper in der CAD-Software Rhinoceros kennengelernt.

Im nächsten Schritt erhielten die Studierenden einen Einblick in die Formfindungswerkzeuge aus unserem Forschungsprojekt und sollten außerdem ein inhaltliches Konzept für einen kleinen Pavillon auf dem Campusgelände entwickeln. In der Abschlussaufgabe galt es dann,

The second task was to create a free ruled surface study, drawing inspiration, for example, from string models in the mathematical collection at the Institute of Geometry [22]. This exercise was formally strict: everyone had to realize their models in a cube module of 25 cm edge length (Fig.10). The material – thread and a frame made of hardboard – was given. A laser cutter was used to produce the frame, so the patterns had to be obtained digitally. Up to this point, the students had not only become acquainted with basic methods of generating ruled surfaces, but also with the Grasshopper graphical programming environment in the Rhinoceros 3D CAD software.

In the next step, the students were given an insight into the form finding tools from our SPP project and were also asked to develop a concept for a small pavilion on TU Dresden's campus. The final task was to combine the collected knowledge and concepts into a pavilion design (Fig. 11). For the evaluation of the designs, 3D prints were created in addition to the drawings.

Bild 10: Studierende mit ihren Fadenmodellen (2014) | **Fig. 10:** Students with their string models (2014)

Bild 11: Pavillonentwürfe zum Thema „Campus-Station"; von links oben nach rechts unten von Mark Ullrich, Andreas Margert, Daniel Petermann und Sandy Klemm | **Fig. 11:** Pavilion designs on the theme "Campus-Station"; from left top to right down: Mark Ullrich, Andreas Margert, Daniel Petermann und Sandy Klemm

die gesammelten Kenntnisse und Konzepte zu einem Pavillonentwurf zusammenzuführen (Bild 11). Für die Evaluierung der Entwürfe wurden neben den Zeichnungen auch 3D-Drucke erstellt.

Während des Kurses wurde offenbar, welche Herausforderung für die räumliche Vorstellung der Umgang mit Regelflächen bedeutet. Der digitale Modellbau war insofern unabdingbarer Bestandteil der Veranstaltung. Der weitgehend unvoreingenommene Zugang der Teilnehmenden zum Thema war ein Vorteil, weil dadurch ein ungeahntes Spektrum an Regelflächenentwürfen angeboten wurde – zunächst ohne Rücksicht auf die Effektivität der Konstruktionen.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die bisherigen Ergebnisse des Projektes ermöglichen die Gestaltung mit Regelflächen auf eine

During the course it became obvious what a challenge for the spatial imagination dealing with ruled surfaces means. In this respect, digital model building was an indispensable part of the training. The open approach of the participants to the topic was an advantage, because this offered an unexpected variety of ruled surface designs – initially without concern for the feasibility of the constructions.

7 Conclusion and outlook

The results of the project so far allow the design with ruled surfaces in a novel and at the same time force-adaptive way. In the SPP follow-up project *Lightweight Concrete Structures Based on Line Geometry*, in cooperation with Prof. Mike Schlaich from the TU Berlin, the aim is to match the mathematical strategy with engineering form finding and optimization methods, to systematize them and thus make them easily ac-

neuartige und zugleich kraftadaptive Weise. Im SPP-Anschlussprojekt *Dünnwandige Betonbauteile mit Regelflächengeometrie*, in Kooperation mit Prof. Mike Schlaich von der Technischen Universität Berlin, geht es dann darum, die mathematische Strategie mit ingenieurtechnischen Formfindungs- und Optimierungsmethoden abzugleichen, zu systematisieren und somit praxistauglich zu machen. Das Ziel sind Werkzeuge zur Konstruktion unkonventioneller, aber effektiver und leichter Betonbauteile mit Regelflächengeometrie (siehe Bericht auf S. 488 ff. in diesem Band).

Die Erfahrung mit Studierenden hat gezeigt, dass der Wissenstransfer in Bezug auf die Gestaltung mit Regelflächen eine komplexe Herausforderung ist. Diesem Thema war die Summer school *Line Geometry for Lightweight Structures* (LGLS) gewidmet, die im September 2018 durchgeführt wurde und sich speziell an die nächste Generation aus Forschung und Praxis gewendet hat (siehe [23] und Kurzbericht auf S. 794/795 in diesem Band).

Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die Förderung des Projekts innerhalb des Schwerpunktprogramms SPP 1542.

cessible for practical use. The goal is to develop tools for the design of unconventional but effective and lightweight structural elements from concrete with ruled surface geometry (see [23] and short report on p. 488 seq. in this volume).

The experience with students has shown that the transfer of knowledge related to the design with ruled surfaces is a complex challenge. The summer school *Line Geometry for Lightweight Structures* (LGLS), which was held in September 2018, was dedicated to this topic and addressed to the rising generation of researchers and practitioners (see pages 794/795 in this book).

Acknowledgement

The authors would like to thank the German Research Foundation (DFG) for funding the project within the Priority Programme SPP 1542.

Literatur | References

[1] Beckh, M.: Hyperbolische Stabwerke: Suchovs Gittertürme als Wegweiser in den modernen Leichtbau. München: Detail, 2012

[2] Burry, M.: Gaudí Unseen: Completing the Sagrada Família. Berlin: Jovis, 2007

[3] Heinle, E.; Schlaich, J.: Kuppeln aller Zeiten, aller Kulturen. Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt DVA, 1996

[4] Dechau, W. (Hrsg.): Kühne Solitäre. Ulrich Müther, Schalenbaumeister der DDR. Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt DVA, 2000

[5] Ruppert, M.; Gebbeken, N.; Janowski, D.; Raabe, K.-H.: Zur Berechnung von vorgespannten Hyperboloidschalen. Beton- und Stahlbetonbau 97 (2002), Heft 4, S. 212–220

[6] Müller, H.; Kokott, H.-J.: „Panorama"-Bauwerk Bad Frankenhausen. Bauplanung – Bautechnik 32 (1978) 2, S. 52–56

[7] Shell Pioneers: Int. Symp. am 18./19.10.2012 an der TU Cottbus. http://www.tu-cottbus. de/fakultaet2/de/bautechnikgeschichte/lehrstuhl/franz-dischinger-symposium/inhalt.html an der TU Berlin (aufgerufen am | accessed on 07.11.2013)

[8] Schlaich, M.: Von den dünnen Betonschalen Félix Candelas zu den leichten Flächentragwerken von heute. Bauingenieur – VDI-Bautechnik Jahresausgabe 2011/2012 (2011), S. 122–131

[9] Flöry, S.; Pottmann, H.: Ruled Surfaces for Rationalization and Design in Architecture. LIFE in:formation. On Responsive Information and Variations in Architecture (2010), S. 103–109

[10] Pottmann, H.; Wallner, J.: Computational Line Geometry. Heidelberg · Berlin u. a.: Springer, 2001

[11] Lordick, D.: Konstruktion der Schattengrenzen krummer Flächen mithilfe von Begleitflächen. Diss., Universität Karlsruhe, 2001; erschienen bei: Aachen: Shaker Verlag

[12] Scheurer, F.: Bis zur letzten Schraube − Kilden Konzerthaus. Werk, Bauen + Wohnen 98/65 (2011) 5, S. 12–19

[13] Klawitter, D.: Clifford Algebras − Geometric Modelling and Chain Geometries with Application in Kinematics. Diss., TU Dresden, 2014; erschienen bei: Wiesbaden: Springer Spektrum

[14] Hagemann, M.; Klawitter, D.: Discretisation of light-weight concrete elements using a line-geometric model. In: Müller, H. S.; Haist, M.; Acosta, F. (Hrsg.): Proc. of the 9th fib Int. PhD Symp. in Civil Engineering, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), 22.–25.07.2012 in Karlsruhe, Karlsruhe: KIT Scientific Publ., 2012, S. 269–274

[15] Klawitter, D.; Hagemann, M.: Kinematic mappings for Cayley-Klein geometries via Clifford algebras. Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry 54 (2013), S. 737–761

[16] Klawitter, D.: A Clifford Algebraic Approach to Line Geometry. Adv. Appl. Clifford Algebras 24 (2014), S. 713–736 – https://doi.org/10.1007/s00006-014-0459-z

[17] Hagemann, M.; Klawitter, D.; Odehnal, B.: Curve Flows on Ruled Surfaces. Journal of Geometry and Graphics 17 (2013) 2, S. 129–140

[18] HAgemann, M.; Klawitter, D.; Lordick, D.: Force Driven Ruled Surfaces. Journal for Geometry and Graphics (JGG) 17 (2013) 2, S. 193–204

[19] CAD-Software Rhinoceros 3D: https://www.rhino3d.com/ (aufgerufen am | accessed on 25.01.2022)

[20] Download des Add-on LineGeometry: http://linegeometry.daniellordick.de/ (aufgerufen am | accessed on 25.01.2022)

[21] Lordick, D.: Parametrischer Entwurf von Regelflächen auf Grundlage von Interpolationsalgorithmen zwischen Kontrollgeraden. In: Bischoff, M.; von Scheven, M.; Oesterle, B. (Hrsg.): Tagungsband Baustatik – Baupraxis 14, 23./24.03.2020 an der Universität Stuttgart, 2020, S. 579–589 – http://dx.doi.org/10.18419/opus-10762

[22] Sammlung Mathematische Modelle der TU Dresden: https://www.mathematical-models.org/ (aufgerufen am | accessed on 25.01.2022)

[23] Lordick, D.; Eichenauer, M.: Line Geometry Applied to Form Finding. In: Williams, Kim and Leopold, Cornelie (Eds.): Proc. of Nexus 20/21 – Relationships Between Architecture and Mathematics, 26.–29.07.2021 in Kaiserslautern (online), Kim Williams Books, 2021, S. 183–186

Bildnachweise | Picture credits

- Bild | Picture 1: Silke Scheerer
- Bilder | Pictures 2 [11], 10: Daniel Lordick
- Bild | Picture 3: Knut Arne Gjertsen, CC BY-SA 3.0, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/17/Kilden_teater_og_konserthus.jpg
- Bild | Picture 4: Design-to-Production, Fabian Scheurer [12]
- Bild | Picture 5: vgl. | compare [14]
- Bild | Picture 6: Hagemann et al. [18]
- Bild | Picture 7: [18]
- Bild | Picture 8: [21]
- Bild | Picture 9: Jens Martin Bornemann
- Bild | Picture 11: Renderings der genannten Autoren | Renderings of the named authors

Projektdaten | Project data

Allgemeine Angaben | General information

Kraftadaptive Diskretisierung leichter Betonbauteile mittels liniengeometrischer Modellierung

Force-adaptive discretisation of lightweight concrete components by means of line geometric modelling

Antragsteller 1 | Applicant 1:	Prof. Dr.-Ing. Daniel Lordick Leiter der Arbeitsgruppe Geometrische Modellierung und Visualisierung | Head of the working group Geometric Modeling and Visualization
DFG-Geschäftszeichen | DFG reference number:	LO 1755/1-1
Kontakt | Contact:	+49 351 463 34193 | daniel.lordick@tu-dresden.de | https://tu-dresden.de/mn/math/geometrie/lordick/
Antragsteller 2 | Applicant 2:	Prof. Dr. Gunter Weiß Professur für Geometrie/Differentialgeometrie | Chair of Geometry/Differential Geometry
Kontakt | Contact:	– (emeritiert | emeritus)
Adresse | Address:	TU Dresden, Institut für Geometrie, 01062 Dresden
Berichts-/Förderzeitraum | Reporting/funding period:	01.10.2011–30.09.2014 Kostenneutrale Verlängerung bis | Cost-neutral extension up to: 31.03.2015
Team | Team:	Markus Hagemann (10/2011–12/2013) Daniel Klawitter (10/2011–03/2015)

Projektbezogene Publikationen | Project related publications

- Hagemann, M.; Klawitter, D.: Discretisation Lightweight Concrete Elements Using a Line-Geometric model. In: Müller, H. S.; Haist, M.; Acosta, F. (Hrsg.): Proc. of the 9th fib Int. PhD Symp. in Civil Engineering, 22.–25.07.2012 am KIT Karlsruhe, Karlsruhe: KIT Scientific Publ., 2012, S. 269–274
- Hagemann, M.; Klawitter, D.; Odehnal, B.: Curve Flows on Ruled Surfaces. Journal for Geometry and Graphics 17 (2013) 2, S. 129–140
- Hagemann, M.; Klawitter, D.; Lordick, D.: Force Driven Ruled Surfaces. Journal for Geometry and Graphics (JGG) 17 (2013) 2, S. 193–204
- Klawitter, D.; Hagemann, M.: Kinematic mappings for Cayley-Klein geometries via Clifford algebras. Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry 54 (2013), S. 737–761
- Klawitter, D.: A Clifford Algebraic Approach to Line Geometry. Adv. Appl. Clifford Algebras 24 (2014), S. 713–736 – https://doi.org/10.1007/s00006-014-0459-z
- Lordick, D.; Klawitter, D.; Hagemann, M.: Liniengeometrie für den Leichtbau. In: Scheerer, S.; Curbach, M. (Hrsg.): Leicht Bauen mit Beton – Forschung im Schwerpunktprogramm 1542, Förderphase 1, Dresden: Institut für Massivbau der TU Dresden, 2014, S. 224–235 – http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-171646

Qualifikation wissenschaftlichen Nachwuchses im Rahmen des Projektes | Qualification of young academics within the framework of the project

Dissertation | Dissertation

- Klawitter, D.: Clifford Algebras – Geometric Modelling and Chain Geometries with Application in Kinematics. 2014

Folgeprojekt | Follow-up project

- Methoden und Werkzeuge für Entwurf und Herstellung schalenartiger und dünnwandiger Betonbauteile mit Regelflächengeometrie. Kurz: Dünnwandige Betonbauteile mit Regelflächengeometrie | Methods and tools for design and fabrication of shell-like and thin-walled concrete structures with line geometry; Short title: thin-walled concrete structures with line geometry

Antragsteller | Applicants:	Prof. Dr.-Ing. Daniel Lordick, Prof. Mike Schlaich (TU Berlin)
Förderer | Funding:	Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) / SPP 1542 (Phase II)