

Karl Alexander Kalina

**Mehrskalige Modellierung und  
Finite-Elemente-Simulation  
magnetorheologischer Elastomere**



## Herausgeber

Prof. Dr.-Ing. Michael Beitelschmidt  
Prof. Dr.-Ing. habil. Markus Kästner  
Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Wallmersperger

Institut für Festkörpermechanik  
Fakultät Maschinenwesen  
Technische Universität Dresden  
01062 Dresden  
<https://tu-dresden.de/ing/maschinenwesen/ifkm>

©2021 Karl Alexander Kalina  
Alaunstraße 60  
01099 Dresden  
[kalina.karl@gmail.com](mailto:kalina.karl@gmail.com)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder Vervielfältigung auf anderem Weg und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten.

Schriftsatz:  $\LaTeX$

Druck und Bindung: DIEKOPIE24.de GmbH, Dresden

ISSN 2702-6787 Veröffentlichungen des Instituts für Festkörpermechanik

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörpermechanik (IFKM) an der TU Dresden von 2016 bis 2020. Meine Forschung wurde während dieser Zeit im Rahmen des Schwerpunktprogramms (SPP) 1681 durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft gefördert.

Zuallererst möchte ich mich bei Prof. Markus Kästner – meinem wissenschaftlichen Betreuer und erstem Gutachter – für interessante Diskussionen, meine fachliche Forderung und Förderung sowie sein großes entgegengebrachtes Vertrauen in mich bedanken. An der Professur für Numerische und Experimentelle Festkörpermechanik ist es Ihnen gelungen, ein sehr angenehmes, fast familiäres wissenschaftliches Umfeld zu gestalten.

Für das Interesse an meiner Arbeit und die freundliche Bereitschaft zur Erstellung des zweiten Gutachtens möchte ich mich herzlich bei Prof. Björn Kiefer bedanken. Ebenso gilt mein Dank auch den weiteren Mitgliedern der Promotionskommission, den Herren Professoren Stefan Odenbach, Volker Ulbricht und Thomas Wallmersperger. Besonders hervorheben möchte ich dabei Prof. Stefan Odenbach, der mit der Initiierung des SPP 1681 ein beispielloses Umfeld für die Forschung an magnetisch aktiven Materialien geschaffen hat.

Für interessante fachliche Diskussionen, die gemeinsame wissenschaftliche Arbeit und die Bereitstellung von zahlreichen Messdaten möchte ich mich bei meinen Kooperationspartnern Dr. Günter Auernhammer, Dr. Dmitry Borin, Dr. Eike Dohmen, Prof. Andreas Menzel, Dr. Malte Schumann und Dirk Sindensberger bedanken.

Weiterhin gilt mein besonderer Dank Karin Müller, die mir stets bereitwillig bei der Überwindung organisatorischer und verwaltungstechnischer Unwegsamkeiten half, sowie Swen Blobel für IT-technische und experimentelle Unterstützung. Vielmals danken möchte ich auch all meinen Kolleginnen und Kollegen sowie Studierenden am IFKM, die stets für ein tolles und oft freundschaftliches, humorvolles Arbeitsumfeld gesorgt haben und sorgen. Besonders hervorheben möchte ich dabei Dr. Jörg Brummund, Franz Dammaß, Philipp Gebhart, Dr. Joseph Goldmann, Franz Hirsch, Philipp Metsch und Maximilian Wollner. Sie haben durch umfangreiche fachliche Diskussionen und Unterstützung sowie die akribische Ausarbeitung der Skripte serverJob und imgexport entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Weiterhin möchte ich ein großes Dankeschön an meinen Freundeskreis richten, der mir durch gelegentliche Ablenkung zu notwendigen Arbeits- und Denkpausen verhalf. Schließlich sei auch meiner Familie und insbesondere meinen Eltern herzlich gedankt, die mich mit viel Geduld und Unterstützung von der Schule bis zum Abschluss meines Studiums begleitet haben. Für die akribische Rechtschreibkorrektur meiner Arbeit gebührt meinen Großeltern Gisela und Dr. Hartmut Kalina besonderer Dank. Meiner lieben Martha möchte ich zu guter Letzt für die geduldige Unterstützung und Ermutigung beim Schreiben dieser Arbeit ganz herzlich danken.

Karl Alexander Kalina  
Dresden, Juli 2021

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät Maschinenwesen der Technischen Universität Dresden zur Erlangung des akademischen Grades Doktoringenieur (Dr.-Ing.) genehmigten Dissertation.

Vorsitzender der  
Promotionskommission: Prof. Dr. rer. nat. habil. Stefan Odenbach  
(Technische Universität Dresden)

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Markus Kästner  
(Technische Universität Dresden)  
Prof. Dipl.-Ing. Björn Kiefer, Ph.D.  
(Technische Universität Bergakademie Freiberg)

Mitglieder der  
Promotionskommission: Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Wallmersperger  
(Technische Universität Dresden)  
Prof. Dr.-Ing. habil. Volker Ulbricht  
(Technische Universität Dresden)

Tag der Einreichung: 24. September 2020  
Tag der öffentlichen Verteidigung: 22. Januar 2021

# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit stellt eine mehrskalige Modellierungs-Strategie für die Beschreibung magnetorheologischer Elastomere (MRE) vor. Diese ermöglicht die Betrachtung von MRE sowohl auf der Mikroskala, wo die heterogene Mikrostruktur bestehend aus Partikeln und Matrix explizit aufgelöst ist, als auch auf der Makroskala, in welcher das MRE als homogener magnetisch aktiver Körper aufzufassen ist. Auf beiden Skalen kommt dabei eine Kontinuumsformulierung des gekoppelten magneto-mechanischen Feldproblems mit Gültigkeit für finite Deformationen zum Einsatz, wobei die Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen mittels der Finite-Elemente-Methode erfolgt. Ausgehend von einer experimentellen Charakterisierung der Konstituenten werden Materialmodelle für die elastomere Matrix sowie Carbonyleisen- und Neodym-Eisen-Bor-Partikel formuliert und mittels dieser Daten kalibriert. Im nächsten Schritt erfolgt die Analyse des effektiven Verhaltens hart- und weichmagnetischer MRE auf Basis von numerischen Homogenisierungen verschiedener mikroskopischer Partikelverteilungen und den Materialmodellen für die Konstituenten. Um weiterhin die effiziente Simulation makroskopischer MRE-Proben und -Bauteile zu ermöglichen, ist daran anschließend die Entwicklung und Parametrisierung eines Makromodells ausgehend von mikroskopisch generierten Datensätzen beschrieben. Mit diesem für isotrope, weichmagnetische und elastische MRE gültigen Modell werden abschließend Simulationen des magnetostriktiven sowie des magnetorheologischen Effektes verschiedener Proben durchgeführt.

## Abstract

In this contribution, a strategy for the multiscale modeling of magnetorheological elastomers (MREs) is presented. It allows to consider these materials on the microscopic scale, where the heterogeneous microstructure consisting of an elastomer matrix and embedded magnetizable particles is explicitly resolved, as well as the macroscopic scale, where the MRE is considered to be a homogeneous magneto-active body. On both scales, a continuum formulation of the coupled magneto-mechanical boundary value problem valid for finite strains is applied. The solution of the system of partial differential equations is calculated by using the finite element method. Starting with an experimental characterization of the individual constituents, constitutive models for the elastomer matrix as well as carbonyl iron and neodymium-iron-boron particles are formulated and adjusted to experimental data. In a next step, basic effective properties of magnetically soft and hard MREs are analyzed by using a computational homogenization scheme, where different geometrical arrangements of the particles on the microscale are considered. In order to enable the efficient simulation of macroscopic MRE samples and components, the development and parametrization of a macroscopic model based on a microscopically generated data basis is described. With this model which is applicable for isotropic, magnetically soft and elastic MREs, simulations of the magnetostrictive and magnetorheological effects of several sample geometries are performed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Abkürzungs- und Symbolverzeichnis</b>	<b>vi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Magnetorheologische Elastomere . . . . .	1
1.2 Modellierungsstrategien . . . . .	5
1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit . . . . .	6
<b>2 Kontinuumsformulierung</b>	<b>8</b>
2.1 Feldgleichungen . . . . .	8
2.1.1 Kinematik . . . . .	8
2.1.2 Stationäre magnetische Feldgleichungen . . . . .	12
2.1.3 Mechanische Bilanzgleichungen . . . . .	14
2.1.4 Konstitutive Gleichungen . . . . .	18
2.2 Mehrskalige Betrachtung . . . . .	20
2.2.1 Homogenisierung und Lokalisierung . . . . .	20
2.2.2 Multiskalenschemata . . . . .	25
2.2.3 Makroskopische Randbedingungen . . . . .	27
<b>3 Numerische Lösung von Randwertaufgaben</b>	<b>29</b>
3.1 Zweidimensionale Problemstellungen . . . . .	29
3.2 Finite-Elemente-Formulierung . . . . .	30
3.2.1 Schwache Form . . . . .	30
3.2.2 Diskretisierung . . . . .	31
3.2.3 Linearisierung . . . . .	32
3.3 Algorithmische Umsetzung . . . . .	35
3.3.1 Vektor-Matrix-Notation . . . . .	35
3.3.2 Berücksichtigung periodischer Randbedingungen . . . . .	36
<b>4 Charakterisierung der Konstituenten</b>	<b>39</b>
4.1 Klassifizierung . . . . .	39
4.2 Elastomere Matrix . . . . .	41
4.2.1 Experimentelle Charakterisierung . . . . .	41
4.2.2 Modellierung und Parametrisierung . . . . .	44
4.3 Weichmagnetische Partikel . . . . .	49
4.3.1 Modellierung . . . . .	50
4.3.2 Parametrisierung . . . . .	51
4.4 Hartmagnetische Partikel . . . . .	52
4.4.1 Modellierung . . . . .	53
4.4.2 Numerische Lösung . . . . .	56

4.4.3	Parametrisierung . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Studie zum effektiven Verhalten von MRE</b>	<b>61</b>
5.1	Weichmagnetische MRE . . . . .	61
5.1.1	Größeneinfluss statistischer RVE . . . . .	61
5.1.2	Magnetorheologischer Effekt . . . . .	65
5.2	Hartmagnetische MRE . . . . .	74
5.2.1	Simulation magnetischer Hysteresen . . . . .	75
5.2.2	Simulation mechanischer Hysteresen . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Makroskopische Materialmodellierung</b>	<b>82</b>
6.1	Generierung der Datenbasis . . . . .	82
6.2	Modellformulierung . . . . .	84
6.2.1	Struktur makroskopischer Modelle . . . . .	85
6.2.2	Nichtlinear-magnetisches Modell . . . . .	88
6.2.3	Linearisiertes Modell . . . . .	90
6.3	Parametrisierung . . . . .	91
6.3.1	Modell-Kalibrierung . . . . .	91
6.3.2	Fehlerbetrachtung und Modell-Validierung . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Simulation makroskopischer Proben</b>	<b>98</b>
7.1	Magnetostriktiver Effekt . . . . .	98
7.1.1	Analyse von Kreis- und Quadratgeometrie . . . . .	99
7.1.2	Einfluss von Seitenverhältnis und Partikelvolumengehalt . . . . .	105
7.1.3	Lokalisierung . . . . .	109
7.2	Magnetorheologischer Effekt . . . . .	110
7.2.1	Einfluss der Feldstärke . . . . .	112
7.2.2	Variation des Partikelvolumengehaltes . . . . .	113
<b>8</b>	<b>Abschließende Bemerkungen</b>	<b>115</b>
8.1	Zusammenfassung und Bewertung . . . . .	115
8.2	Ausblick . . . . .	118
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>120</b>
<b>A</b>	<b>Tensorrechnung</b>	<b>132</b>
A.1	Notation . . . . .	132
A.1.1	Algebra . . . . .	132
A.1.2	Analysis . . . . .	132
A.2	Spektrale Zerlegung . . . . .	133
A.2.1	Ableitung der Hauptstreckungen . . . . .	134
A.2.2	Ableitungen der Projektionstensoren . . . . .	135
A.2.3	Bestimmung der Materialtangente . . . . .	136
<b>B</b>	<b>Transformation von Feldgleichungen</b>	<b>137</b>
B.1	Partielle Differentialgleichungen . . . . .	137
B.2	Sprungbedingungen . . . . .	138
<b>C</b>	<b>Relative Fehler der kalibrierten Makromodelle</b>	<b>140</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Mikrostruktur magnetorheologischer Elastomere . . . . .	2
1.2	Makroskopische Schalteffekte von MRE . . . . .	3
1.3	Beispiele technischer und medizinischer Anwendungen von MRE . . . . .	4
2.1	Kinematik des materiellen Körpers . . . . .	9
2.2	Materielle Sprungfläche . . . . .	10
2.3	Repräsentative Volumenelemente . . . . .	21
2.4	Periodische Randbedingungen . . . . .	24
2.5	Mehrskalige Simulation von MRE . . . . .	26
2.6	Makroskopische Rand- und Übergangsbedingungen . . . . .	27
3.1	Algorithmische Umsetzung periodischer Randbedingungen . . . . .	36
4.1	Konstitutive Charakteristika von Partikeln und Matrix . . . . .	40
4.2	Elastomer-Prüfkörper . . . . .	41
4.3	Experimenteller Aufbau zur Elastomer-Prüfung . . . . .	42
4.4	Voruntersuchungen zur Charakterisierung des Silikonelastomers . . . . .	43
4.5	Charakterisierung des Silikonelastomers . . . . .	45
4.6	Weichmagnetische Carbonyleisen-Partikel . . . . .	50
4.7	Magnetisierungsverhalten weichmagnetischer Carbonyleisen-Partikel . . . . .	52
4.8	Hartmagnetische NdFeB-Partikel . . . . .	53
4.9	Magnetisierungskurven des eindimensionalen Hysterese-Modells . . . . .	56
4.10	Magnetisierungsverhalten von NdFeB-Partikeln . . . . .	59
5.1	Verteilung der Abstände monodisperser, statistisch-periodischer RVE . . . . .	62
5.2	Magneto-mechanische Materialantwort statistisch-periodischer Zellen . . . . .	63
5.3	Studie zur Repräsentativität statistisch-periodischer Zellen . . . . .	64
5.4	Streuung statistisch-periodischer Zellen verschiedener Partikelvolumengehalte . . . . .	65
5.5	Scherversuch zur Bestimmung des MR-Effektes . . . . .	66
5.6	Einheitszellen idealisierter Mikrostrukturen . . . . .	68
5.7	Einflussparameter des MR-Effektes idealer Einheitszellen . . . . .	69
5.8	Richtungsabhängigkeit des MR-Effektes idealer Einheitszellen . . . . .	71
5.9	Einflussparameter des MR-Effektes statistisch-periodischer RVE . . . . .	73
5.10	VSM-Messungen des Magnetisierungsverhaltens hartmagnetischer MRE . . . . .	75
5.11	Simulation des Magnetisierungsverhaltens hartmagnetischer MRE . . . . .	76
5.12	Simulierte Rotation eines einzelnen NdFeB-Partikels . . . . .	78
5.13	Rotationen der Partikel eines RVE mit 80 hartmagnetischen Einschlüssen . . . . .	79
5.14	Simulation der Spannungsantwort hartmagnetischer MRE . . . . .	80
5.15	Vergleich der Spannungsantwort vier hartmagnetischer RVE . . . . .	81
6.1	Lastfälle zur Parametrisierung und Validierung des Makromodells . . . . .	84
6.2	Homogenisiertes Magnetisierungsverhalten eines isotropen MRE . . . . .	86

6.3	Homogenisierte Spannungsanteile eines isotropen MRE . . . . .	87
6.4	Sättigungsfunktionen des Makromodells . . . . .	90
6.5	Angepasste mechanische Lastfälle . . . . .	93
6.6	Angepasste magneto-mechanische Lastfälle für $\phi = 30\%$ . . . . .	94
6.7	Relative Fehler des kalibrierten Makromodells . . . . .	95
6.8	Magneto-mechanischer Validierungs-Lastfall MM7 . . . . .	96
6.9	Vergleich des MR-Effektes zwischen Homogenisierung und Makromodell . . . . .	97
7.1	Makroskopische FE-Simulation des MS-Effektes . . . . .	99
7.2	MS-Effekt kreisförmiger und quadratischer MRE-Proben . . . . .	100
7.3	Verteilung von magnetischer Feldstärke und Magnetisierung in MRE-Proben . . . . .	101
7.4	Spannungen bei Magnetostriktion von MRE-Proben . . . . .	103
7.5	Feldverteilung des Deformationsmaßes $\bar{C}$ in MRE-Proben . . . . .	105
7.6	MS-Effekt von MRE-Proben mit verschiedenen Seitenverhältnissen . . . . .	106
7.7	Feldverteilung der Deformation in MRE-Proben mit verschiedenen Seitenverhältnissen . . . . .	106
7.8	MS-Effekt von MRE-Proben mit verschiedenen Partikelvolumengehalten . . . . .	107
7.9	Entkoppeltes Multiskalenschema für ein kreisförmiges MRE bei Striktion . . . . .	108
7.10	Lokalisierte Felder innerhalb der Mikrostruktur einer MRE-Probe . . . . .	109
7.11	Makroskopische FE-Simulation des MR-Effektes . . . . .	111
7.12	Simulierter MR-Effekt einer rechteckigen MRE-Probe . . . . .	112
7.13	MR-Effekt von MRE-Proben mit verschiedenen Partikelvolumengehalten . . . . .	113
C.1	Relative Fehler des kalibrierten Makromodells für 10 %, 15 % und 20 % . . . . .	140
C.2	Relative Fehler des kalibrierten Makromodells für 25 %, 35 % und 40 % . . . . .	141

# Tabellenverzeichnis

4.1	Identifizierte Parameter des inkompressiblen OGDEN-Modells . . . . .	48
4.2	Identifizierte Parameter des kompressiblen OGDEN-Modells . . . . .	49
4.3	Materialparameter für Carboneisen-Partikel . . . . .	51
4.4	Materialparameter für NdFeB-Partikel . . . . .	60
6.1	Lastfälle zur Parametrisierung des makroskopischen Materialmodells . . . . .	83
6.2	Algorithmus zur Parameteridentifikation des makroskopischen Materialmodells	92
6.3	Identifizierte mechanische Parameter des makroskopischen Modells . . . . .	93
6.4	Identifizierte Modell-Parameter von Kopplungsanteil und magnetischem Anteil	95

# Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

## Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
AB	Anfangsbedingung
ARWA	Anfangs-Randwertaufgabe
CDU	CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung
CEP	Carbonyleisen-Pulver
CT	Computer-Tomographie
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FE	Finite-Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
FORC	First order reversal curve
MR	Magnetorheologisch
MRE	Magnetorheologisches Elastomer
MS	Magnetostriktiv
NdFeB	Neodym-Eisen-Bor
PDGL	Partielle Differentialgleichung
PTFE	Polytetrafluorethylen
RB	Randbedingung
RSA	Random Sequential Adsorption
RVE	Repräsentatives Volumenelement
RWA	Randwertaufgabe
SVE	Statistisch äquivalentes Volumenelement
VSM	Vibrating Sample Magnetometer

## Allgemeine Notation

Symbol	Beschreibung
$\mathcal{A}$	Menge oder Raum
$\cup$	Vereinigungsmenge
$\cap$	Schnittmenge
$\emptyset$	Leere Menge
$\in, \ni$	Element von, enthält als Element
$\subset$	Teilmenge von
$\forall$	für alle
$\partial\mathcal{A}$	Berandung von $\mathcal{A}$
$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$	Kartesisches Produkt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
$\mathcal{A}_+$	Menge $\{\tau \in \mathcal{A} \mid \tau > 0\} \subset \mathcal{A}$
$\mathcal{A}_{\geq n}$	Menge $\{\tau \in \mathcal{A} \mid \tau \geq n\} \subset \mathcal{A}$

Symbol	Beschreibung
$A$	Skalar
$\mathbf{A}$	Tensor 1. Stufe
$\mathbf{A}$	Tensor 2. Stufe
$\mathfrak{A}$	Tensor 3. Stufe
$\mathbb{A}$	Tensor 4. Stufe
${}^{(n)}\mathbf{A}$	Tensor $n$ -ter Stufe
$A_{i_1 i_2 \dots i_n}$	Tensor $n$ -ter Stufe in Indexnotation
$\underline{\mathbf{A}}$	Vektor
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$	Matrix
$\delta_{kl}$	KRONECKER-Symbol
$e_{klm}$	LEVI-CEVITA-Symbol
$\mathbf{e}_k, \mathbf{E}_K$	Kartesische Basisvektoren
$\nabla = \mathbf{e}_k \partial_{x_k}$	Nabla-Operator bzgl. $x$
$\nabla_X = \mathbf{E}_K \partial_{X_K}$	Nabla-Operator bzgl. $X$
$(\bullet) \otimes (\bullet)$	Dyadisches Produkt
$(\bullet) \cdot (\bullet)$	Einfach verjüngendes Produkt
$(\bullet) : (\bullet)$	Zweifach verjüngendes Produkt
$(\bullet) \times (\bullet)$	Kreuzprodukt
$\det(\bullet)$	Determinante
$\text{tr}(\bullet)$	Spur
$\text{sym}(\bullet)$	Symmetrischer Anteil
$\text{skw}(\bullet)$	Antimetrischer Anteil
$(\bullet)^{-1}$	Inverse
$(\bullet)^T$	Transponierte
$ \mathbf{A} $	EUKLIDISCHE Norm
$\ \mathbf{A}\ $	FROBENIUS-Norm
$\ (\bullet)\ $	Sprung einer Größe
$\frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, \partial_x(\bullet)$	Partielle Ableitung nach $x$
$\frac{d(\bullet)}{dx}$	Totale Ableitung nach $x$
$f'(x)$	Erste Ableitung der Funktion $f(x)$
$\Delta(\bullet)$	Inkrementeller Zuwachs einer Größe
$(\bar{\bullet})$	Effektive Größe
$(\tilde{\bullet})$	Fluktuierende Größe
$\langle(\bullet)\rangle, \langle(\bullet)\rangle_0$	Volumenmittel bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}_0$
$\lim_{y \rightarrow x}(\bullet)$	Grenzwert $y$ gegen $x$
$(\dot{\bullet})$	Materielle Zeitableitung
$(\hat{\bullet})$	Vorgegebene Größe
$\min(\bullet)$	Minimum von $(\bullet)$
$\inf(\bullet)$	Infimum von $(\bullet)$
$\sup(\bullet)$	Supremum von $(\bullet)$
$\arg\{(\bullet)\}$	Argument von $(\bullet)$
$\mathbf{A}$	Assemblierungsoperator
$\Sigma$	Summe

Symbol	Beschreibung
$\Pi$	Produkt
$\langle (\bullet) \rangle_n$	Arithmetisches Mittel für $n \geq 2$
$\mathcal{X}_n^{95\%}(\bullet)$	95 %-Vertrauensintervall für $n \geq 2$
$n,j(\bullet)$	Größe im $n$ -ten Inkrement und Iterationschritt $j$
$(\bullet)^+, (\bullet)^-$	Größen auf dem positiven bzw. negativen Rand

## Mengen und Räume

Symbol	Beschreibung
$\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{U}$	Funktionsräume periodischer Primärgrößen
$\mathcal{B}, \mathcal{B}_0$	Momentan- und Referenzkonfiguration eines Körpers
$\mathcal{B}^*$	Konfiguration mit zusätzlicher Starrkörperbewegung
$\mathcal{B}^{\text{RVE}}, \mathcal{B}_0^{\text{RVE}}$	Momentan- und Referenzkonfiguration des RVE
$\partial\bar{\mathcal{B}}^{\alpha,+}, \partial\bar{\mathcal{B}}^{\alpha,-}$	Paarweise gegenüberliegende positive und negative RVE-Ränder
$\partial\bar{\mathcal{B}}^u$	Berandung mit Verschiebungsvorgabe
$\partial\bar{\mathcal{B}}^p$	Berandung mit Spannungsvorgabe
$\mathcal{C}$	Nebenbedingung
$\mathcal{E}, \mathcal{K}^H, \mathcal{P}^{\text{tot}}$	Funktionsräume antiperiodischer Sekundärgrößen
$\mathcal{E}^\alpha$	Raum der zulässigen irreversiblen Induktion
$\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{F}}_0$	Momentan- und Referenzkonfiguration des Vakuums
$\partial\bar{\mathcal{F}}^A$	Berandung mit Vorgabe des Vektorpotentials
$\partial\bar{\mathcal{F}}^\eta$	Berandung mit Vorgabe magnetischer Flächenladungen
$\partial\bar{\mathcal{F}}^K$	Berandung mit Vorgabe der Linienstromdichte
$\partial\bar{\mathcal{F}}^\varphi$	Berandung mit Vorgabe des Skalarpotentials
$\Gamma_0$	In der FEM betrachtete materielle Sprungfläche
$\mathcal{H}^1$	SOBOLEW-Funktionsraum
$\mathcal{K}$	Materieller Körper
$\mathcal{L}_n$	Raum der Tensoren $n$ -ter Stufe
$\mathcal{L}_2^{\text{sym}}$	Raum der symmetrischen Tensoren 2. Stufe
$\mathcal{N}$	Natürliche Zahlen
$\Omega_0$	In der FEM betrachtetes Gebiet
$\Omega_0^e$	Gebiet eines finiten Elementes
$\mathcal{P}^h$	Magneto-mechanischer Arbeitspunkt
$\mathcal{Q}$	Eigentlich orthogonale Gruppe
$\mathcal{R}^3$	Dreidimensionaler EUKLIDischer Raum
$\mathcal{R}$	Reelle Zahlen
$\mathcal{R}^{m \times n}$	Raum der $m \times n$ -Matrizen
$\mathcal{S}, \mathcal{S}_0$	Sprungflächen der Momentan- und Referenzkonfiguration
$\mathcal{T}$	Menge der Zeitpunkte $t$
$\mathcal{V}_u, \mathcal{V}_A, \mathcal{V}_\varphi$	SOBOLEW-Funktionsräume der primären Feldvariablen

Symbol	Beschreibung
$\mathcal{V}_{\delta u}, \mathcal{V}_{\delta A}, \mathcal{V}_{\delta \varphi}$	SOBOLEW-Funktionsräume der Wichtungsfunktionen

## Skalare

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\bar{a}, \bar{a}_0$	m	Probenlänge im deformierten und undeformierten Zustand
$\alpha_p$	–	Parameter des OGDEN-Modells
$\bar{b}, \bar{b}_0$	m	Probenbreite im deformierten und undeformierten Zustand
$B^c$	T	Koerzitivfeldstärke
$\chi_b$	$\text{Am}^{-1}\text{T}^{-1}$	Magnetische Suzeptibilität bezogen auf $\mathbf{b}$
$\chi_h$	–	Magnetische Suzeptibilität
$d$	m	Partikeldurchmesser
$da, dA$	$\text{m}^2$	Flächenelemente der Momentan- und Referenzkonfiguration
$dm$	kg	Massenelement
$d\upsilon, dV$	$\text{m}^3$	Volumenelemente der Momentan- und Referenzkonfiguration
$\dot{\mathcal{D}}$	$\text{Jm}^{-3}\text{s}^{-1}$	Auf $dV$ bezogene Dissipationsrate
$\dot{\mathcal{D}}^*$	$\text{Jm}^{-3}\text{s}^{-1}$	Auf $dV$ bezogene, transformierte Dissipationsrate
$\delta_1$	$\text{T}^{-1}$	Parameter der makroskopischen Magnetisierungsfunktion
$\delta_2, \delta_3$	$\text{T}^{-2}$	Materialparameter des Kopplungsanteils
$\Delta F$	N	Prüfkraft
$\Delta l_{ik}$	m	Mittelpunktabstände
$\Delta l^{\text{hex}}$	m	Partikelabstand einer hexagonalen Struktur
$\Delta l_i^{\text{min}}$	m	Minimaler Abstand zweier benachbarter Partikel
$\delta\varphi$	A	Virtuelles Skalarpotential
$\Delta u$	m	Verschiebung der Traverse
$E$	Pa	Initialer Elastizitätsmodul
$\mathcal{E}^{\text{kin}}$	$\text{Jm}^{-3}$	Kinetische Energiedichte
$(\bar{E}\bar{A})$	N	Proben-Dehnsteifigkeit
$\bar{\epsilon}$	–	Magnetostriktive Proben-Dehnung (linearisiertes Verzerrungsmaß)
$\bar{\epsilon}^S$	–	Magnetostriktive Dehnung im Sättigungszustand
$\epsilon_i^m, \epsilon_i^\sigma, \epsilon_i^{\sigma^{\text{tot}}}$	–	Relative Fehlermaße
$\eta$	T	Magnetische Flächenladung
$G$	Pa	Initialer Schubmodul
$\bar{G}_0$	Pa	Initialer, effektiver Schubmodul ohne magnetisches Feld
$(\bar{G}\bar{A})$	N	Proben-Schubsteifigkeit
$\gamma$	–	Gleitung

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\gamma^\alpha$	$\text{Am}^{-1}$	Inkrementelle Änderung der Teilmagnetisierung
$\gamma_1$	T	Parameter der makroskopischen Magnetisierungsfunktion
$\gamma_2, \gamma_3$	$\text{T}^2$	Materialparameter des Kopplungsanteils
$I_\alpha$	–	Satz von Invarianten
$J$	–	JACOBI-Determinante
$k^\alpha$	T	Pinningfaktor
$K_{\varphi\varphi}^{\alpha\beta}$	$\text{Tm}^{-1}\text{A}^{-1}$	Tangentensteifigkeit
$\kappa$	Pa	Initialer Kompressionsmodul
$\bar{l}, \bar{l}_0$	m	Probenlänge im deformierten und undeformierten Zustand
$\ell, \bar{\ell}$	m	Charakteristische Längen der Mikro- und Makroskala
$\bar{\ell}^B, \bar{\ell}^F$	m	Charakteristische Längen von MRE und umgebendem Vakuum
$\ell^{\text{RVE}}$	m	Charakteristische Längenabmessung des RVE
$\lambda_\alpha$	–	Hauptstreckung
$\lambda^\alpha$	$\text{Am}^{-1}\text{s}^{-1}$	LAGRANGE-Parameter bzw. Inkrement der Teilmagnetisierungsrate
$\lambda_{\parallel}, \lambda_{\perp}$	–	Streckungen in Lastrichtung und quer dazu
$\lambda_\theta$	–	Streckung in tangentialer Richtung
$\mathcal{M}(X)$	$\text{Am}^{-1}$	Magnetisierungsfunktion
$M^S$	$\text{Am}^{-1}$	Sättigungsmagnetisierung
$n^{\text{El}}$	–	Anzahl finiter Elemente
$n^{\text{K}}$	–	Knotenanzahl
$N^\alpha(X)$	–	Formfunktionen bzw. LAGRANGE-Polynome
$N_\lambda$	–	Anzahl verschiedener Eigenwerte
$N^{\text{P}}$	–	Partikelanzahl
$\nu$	–	Initiale Querkontraktionszahl
$\nu_\alpha$	–	Algebraische Vielfachheit
$\mu$	$\text{TmA}^{-1}$	Permeabilität
$\mu_0$	$\text{TmA}^{-1}$	Permeabilität des Vakuums
$\mu_p$	Pa	Parameter des OGDEN-Modells
$\mu_r$	–	Relative Permeabilität
$\omega^\alpha$	–	Wichtungsfaktoren des BERGQVIST-Modells
$\Omega$	$\text{Jm}^{-3}$	Erweiterte freie HELMHOLTZsche Energiedichte bezogen auf $dV$
$\Omega^*$	$\text{Jm}^{-3}$	LEGENDRE-FENCHEL-Transformation der erweiterten freien HELMHOLTZschen Energiedichte bezogen auf $dV$
$\Omega^{\text{frei}}$	$\text{TmA}^{-1}$	Magnetische Freifeldenergie bezogen auf $dV$
$\Omega^{*\text{frei}}$	$\text{TmA}^{-1}$	Transformierte magnetische Freifeldenergie bezogen auf $dV$
$p$	Pa	Mechanischer hydrostatischer Druck
$P_\alpha$	Pa	Hauptspannung von $\mathbf{P}$
$\mathcal{P}^{\text{mech}}$	$\text{Wm}^{-3}$	Mechanische Leistungsdichte

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\mathcal{P}^{\text{pon}}$	$\text{Wm}^{-3}$	Ponderomotorische Leistungsdichte
$\mathcal{P}^{\text{therm}}$	$\text{Wm}^{-3}$	Thermische Leistungsdichte
$\phi$	–	Partikelvolumengehalt
$\phi_{\text{Öl}}$	–	Silikonölgehalt
$\phi^\alpha$	T	Schaltkriterium
$\varphi$	A	Skalarpotential
$\varphi^\alpha$	A	Knotenfreiwerte des Skalarpotentials
$\varphi_{\alpha, \text{Ma}}$	A	Skalarpotential der Masterknoten
$\psi$	$\text{Jkg}^{-1}$	Spezifische freie HELMHOLTZ-Energie
$\psi^*$	$\text{Jkg}^{-1}$	Transformierte spezifische freie HELMHOLTZ-Energie
$\Psi$	$\text{Jm}^{-3}$	Freie HELMHOLTZsche Energiedichte pro dV
$\Psi^*$	$\text{Jm}^{-3}$	Transformierte freie HELMHOLTZsche Energiedichte pro Ausgangsvolumen dV
$\bar{\Psi}_{\text{lin}}^*$	$\text{Jm}^{-3}$	Linear-magnetische makroskopische Energiedichte pro Ausgangsvolumen dV
$Q_3$	–	Summenverteilung der Partikelgrößen
$r$	$\text{Wkg}^{-1}$	Spezifische innere Wärmeproduktionsrate
$r_0$	m	Ecken-Abrundungsradius von Proben
$r^{\text{min}}$	m	Minimaler Partikelabstand
$R_\varphi^\alpha$	$\text{Tm}^{-1}$	Magnetisches Residuum
$\varrho, \varrho_0$	$\text{kgm}^{-3}$	Massendichten der Momentan- und Referenzkonfiguration
$s$	$\text{J}(\text{kgK})^{-1}$	Spezifische Entropie
$T$	s	Periodendauer
$t, t_0$	s	Aktuelle Zeit und Bezugszeit
$t_{\text{ges}}$	s	Gesamtzeit
$t_n$	s	Zeitinkrement
$T_\alpha$	Pa	Hauptspannung von T
$\vartheta$	K	Absolute Temperatur
$\theta_\alpha^{\text{p}}, \theta_\alpha^{\text{m}^{\text{p}}}$	°	Rotationswinkel von Partikel und magnetischem Moment
$u$	$\text{Jkg}^{-1}$	Spezifische innere Energie
$\gamma_{\alpha, \text{Ma}}$	$\text{Tm}^2$	Magnetische Masterknotenladung
$v^{\text{RVE}}, V^{\text{RVE}}$	$\text{m}^3$	Momentan- und Ausgangsvolumina des RVE
$w$	$\text{Jkg}^{-1}$	Spezifische erweiterte innere Energie
$W$	$\text{Jm}^{-3}$	Erweiterte innere Energiedichte bezogen auf dV
$w^{\text{frei}}$	$\text{Jkg}^{-1}$	Spezifische magnetische Freifeldenergie
$\xi$	$\text{T}^{-1}$	Skalierungsparameter der Magnetisierungsfunktion
$\xi_1$	$\text{T}^{-2}$	Materialparameter des makroskopischen magnetischen Anteils
$z$	$\text{Wkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	Spezifische Entropiequelle
$\zeta$	$\text{Wkg}^{-1}$	Spezifische, nicht kontrollierbare spontane Entropie-Produktionsrate

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\zeta_1$	$T^2$	Materialparameter des makroskopischen magnetischen Anteils

## Tensoren erster und höherer Stufe

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A}$	T m	EULERSCHES und LAGRANGESCHES Vektorpotential
$A^\alpha$	T m	Knotenfreiwerte des Vektorpotentials
$A^{\alpha, Ma}$	T m	Vektorpotential der Masterknoten
$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}$	T	EULERSCHE und LAGRANGESCHE magnetische Flussdichten
$\boldsymbol{B}^{r\alpha}, \boldsymbol{B}^{i\alpha}$	T	Reversible und irreversible Flussdichten des $\alpha$ -ten Elementes
$(\boldsymbol{B}^{i\alpha})_{\text{trial}}$	T	Irreversible Flussdichte des $\alpha$ -ten Elementes im Prädiktorschritt
$\bar{\boldsymbol{b}}^\infty$	T	Magnetische Flussdichte des Fernfeldes
$\boldsymbol{c}$	m	Aufgeprägter Verschiebungsvektor (Starrkörpertranslation)
$\boldsymbol{c}^{\text{pon}}$	Pa	Ponderomotorische Momentendichte
$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{C}$	–	Links- und Rechts-CAUCHY-GREEN-Deformationstensoren
$\mathfrak{C}$	$NA^{-1}m^{-1}$	Materialtangente
$\mathbb{C}$	Pa	Materialtangente
$\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\chi}^{-1}$	m	Bijektive Abbildung und inverse Abbildung
$d\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{A}$	$m^2$	Flächenelemente der Momentan- und Referenzkonfiguration
$d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{X}$	m	Linielemente der Momentan- und Referenzkonfiguration
$\delta\boldsymbol{A}$	$m^3$	Virtuelles Vektorpotential
$\delta\boldsymbol{u}$	$m^3$	Virtuelle Verschiebung
$\Delta\boldsymbol{X}^\alpha$	m	Verbindungsvektoren gegenüberliegender Seiten eines RVE
$\boldsymbol{e}$	–	Einheitsvektor
$\boldsymbol{e}$	–	EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor
$\boldsymbol{E}$	–	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor
$\boldsymbol{F}$	–	Deformationsgradient
$\boldsymbol{f}$	$Nkg^{-1}$	Spezifische mechanische Kraft
$\boldsymbol{F}^L, \bar{\boldsymbol{F}}^Q$	N	Längs- und Querkraft
$\boldsymbol{f}^{\alpha, Ma}$	N	Masterknotenkräfte
$\boldsymbol{f}^{\text{pon}}$	$Nm^{-3}$	Ponderomotorische Kraftdichte
$\boldsymbol{h}, \boldsymbol{H}$	$A m^{-1}$	EULERSCHE und LAGRANGESCHE magnetische Feldstärken
$\bar{\boldsymbol{h}}^\infty$	$A m^{-1}$	Magnetische Feldstärke des Fernfeldes

Symbol	Einheit	Beschreibung
$I^{\alpha, Ma}$	A	Masterknotenströme
$i, I$	–	Einheitstensoren
$K$	$Am^{-1}$	LAGRANGESche Linienstromdichte
$K_{AA}^{\alpha\beta}$	$AT^{-1}m^{-3}$	Tangentensteifigkeit
$K_{Au}^{\alpha\beta}, K_{uA}^{\alpha\beta}$	$Am^{-3}$	Tangentensteifigkeiten
$K_{u\varphi}^{\alpha\beta}, K_{\varphi u}^{\alpha\beta}$	$Tm^{-2}$	Tangentensteifigkeiten
$K_{uu}^{\alpha\beta}$	Pa	Tangentensteifigkeit
$m, M$	$Am^{-1}$	EULERSche und LAGRANGESche Magnetisierungen
$m^p$	$Am^2$	Magnetisches Moment
$m^{Dipol}$	$Am^2$	Dipolmoment
$M^\alpha$	–	Projektionstensor
$n, N$	–	Normaleneinheitsvektoren der Momentan- und Referenzkonfiguration
$N^\alpha$	–	Eigenvektor
$\bar{N}^\infty$	–	Normaleneinheitsvektor der Vakuumbox
$\hat{p}$	Pa	Vorgegebener nomineller Spannungsvektor
$p^{tot}$	Pa	Nomineller totaler Spannungsvektor
$P^{tot}$	Pa	Totaler 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$q, Q$	$Wm^{-2}$	Auf $da$ und $dA$ bezogene Wärmestromvektoren
$q, Q$	–	Eigentlich orthogonale Tensoren
$R$	–	Rotationstensor
$R_A^\alpha$	$Wm^{-2}$	Magnetischer Residuumsvektor
$R_u^\alpha$	$Wm^{-2}$	Mechanischer Residuumsvektor
$\sigma$	Pa	Mechanischer CAUCHY-Spannungstensor
$\sigma$	Pa	Mechanischer CAUCHY-Spannungstensor
$\sigma^{tot}$	Pa	Totaler CAUCHY-Spannungstensor
$\hat{t}$	Pa	Vorgegebener wahrer Spannungsvektor
$\hat{T}$	Pa	Vollständig auf $\mathcal{B}_0$ bezogener Spannungsvektor
$T^{tot}$	Pa	Totaler 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$u$	m	Verschiebungsvektor
$u^\alpha$	m	Knotenfreiwerte der Verschiebung
$u^{\alpha, Ma}$	m	Verschiebung der Masterknoten
$v$	$ms^{-1}$	Geschwindigkeit
$w^S$	$ms^{-1}$	Geschwindigkeit einer Sprungfläche $\mathcal{S}$
$x, X$	m	Ortsvektoren der Momentan- und Referenzkonfiguration
$X^\alpha$	m	Positionsvektor eines Knotens
$z$	$Wm^{-2}K^{-1}$	Entropiestrom

## Matrizen und Vektoren

Symbol	Beschreibung
$\underline{\underline{A}}$	Vektor der globalen Vektorpotential-Freiwerte
$\underline{\underline{B}}$	Vektor der LAGRANGESchen magnetischen Induktion
$\underline{\underline{B}}^{r\alpha}, \underline{\underline{B}}^{i\alpha}$	Vektoren der reversiblen und irreversiblen Flussdichten
$\underline{\underline{B}}^A, \underline{\underline{B}}^\varphi, \underline{\underline{B}}^u$	Matrizen mit Ableitungen der Formfunktionen
$\underline{\underline{C}}$	Matrix der Koordinaten des Tensors C
$\underline{\underline{C}}_{\text{alg}}^H$	Algorithmisch konsistente Tangente des BERGQVIST-Modells
$\underline{\underline{F}}$	Vektor der Koordinaten des Deformationsgradienten
$\underline{\underline{f}}_{\text{ext}}$	Generalisierte externe Knotenlasten
$\underline{\underline{f}}_{\text{int}}$	Generalisierte interne Knotenlasten
$\underline{\underline{f}}_{\text{Ma}}$	Vektor der generalisierten Masterknotenkräfte
$\underline{\underline{H}}$	Vektor der LAGRANGESchen magnetischen Feldstärke
$\underline{\underline{I}}$	Einheitsmatrix
$\underline{\underline{K}}$	Vektor der Linienstromdichte
$\underline{\underline{K}}$	Globale Tangentensteifigkeit
$\underline{\underline{K}}^{uu}, \underline{\underline{K}}^{uA}, \underline{\underline{K}}^{Au}, \underline{\underline{K}}^{AA}$	Tangentensteifigkeiten der Vektorpotential-Formulierung
$\underline{\underline{K}}^{uu}, \underline{\underline{K}}^{u\varphi}, \underline{\underline{K}}^{\varphi u}, \underline{\underline{K}}^{\varphi\varphi}$	Tangentensteifigkeiten der Skalarpotential-Formulierung
$\underline{\underline{\kappa}}$	Vektor mit Materialparametern
$\underline{\underline{M}}^\alpha$	Vektor der Teilmagnetisierung
$\underline{\underline{m}}, \underline{\underline{n}}$	Sortiermatrizen zur algorithmischen Umsetzung periodischer RB
$\underline{\underline{N}}^A, \underline{\underline{N}}^\varphi, \underline{\underline{N}}^u$	Matrizen der Formfunktionen
$\underline{\underline{\hat{p}}}$	Vorgegebener Spannungsvektor
$\underline{\underline{p}}^{\text{tot}}$	Totaler Spannungsvektor
$\underline{\underline{\mathbf{P}}}^{\text{tot}}$	Vektor der Koordinaten des totalen Spannungstensors
$\underline{\underline{\varphi}}$	Vektor der globalen Skalarpotential-Freiwerte
$\underline{\underline{R}}^\alpha$	Residuum in der lokalen NEWTON-Iteration
$\underline{\underline{R}}$	Globaler Residuumsvektor
$\underline{\underline{R}}^A$	Globaler Residuumsvektor des magnetischen Teilproblems
$\underline{\underline{R}}^\varphi$	Globaler Residuumsvektor des magnetischen Teilproblems
$\underline{\underline{R}}^u$	Globaler Residuumsvektor des mechanischen Teilproblems
$\underline{\underline{S}}$	Sortiermatrix zur algorithmischen Umsetzung periodischer RB
$\underline{\underline{u}}$	Vektor der globalen Knotenverschiebungen
$\underline{\underline{v}}$	Vektor der generalisierten Freiwerte

Symbol	Beschreibung
$\underline{x}^\alpha$	Gesuchte Größen der lokalen NEWTON-Iteration

## Häufig verwendete Indizierungen

Indizierung	Beschreibung
	parallel
⊥	senkrecht
Akt	Aktuation
dev	deviatorisch
frei	Freifeldanteil
ges	gesamt
iso	isochor
Kopp	Kopplung
kub	kubisch
M	Matrix
mag	magnetisch
max	maximal
mech	mechanisch
min	minimal
NB	Nebenbedingung
P	Partikel
pon	ponderomotorisch
RVE	Repräsentatives Volumenelement
sto	stochastisch
tot	total
vol	volumetrisch



# 1 Einleitung

Für technische Innovationen sind weiterentwickelte oder gänzlich neuartige Werkstoffsysteme häufig unabdingbar. Neben besonders temperaturbeständigen oder leichten und gleichzeitig widerstandsfähigen Werkstoffen sind dabei auch so genannte intelligente Materialien von immer größerem Interesse. Diese spezielle Werkstoffklasse ist durch die Möglichkeit der gezielten Steuerung mittels externer Stimuli wie thermischen, chemischen oder elektromagnetischen Feldern gekennzeichnet [9]. Eine Untergruppe intelligenter Materialien bilden magnetisch aktive Werkstoffe, also solche die unter Einwirkung externer Magnetfelder eine signifikante Änderung der mechanischen Eigenschaften aufzeigen. Zu ihnen gehören beispielsweise Materialien, bei denen der als JOULE-Magnetostriktion bezeichnete Effekt – also die magnetisch induzierte Deformation infolge von Prozessen auf Ebene der Gitter- und Domänenstruktur – auftritt. Das Material mit der stärksten bekannten Kopplung dieser Art ist die Legierung Terfenol-D, bei der sich Dehnungen von bis zu 2 % induzieren lassen [95, 98]. Deutlich größere Effekte von bis zu 10 % magnetisch induzierter Dehnung sind mit magnetischen Formgedächtnis-Legierungen wie monokristallinen Nickel-Mangan-Gallium-Legierungen realisierbar [78, 83, 84]. Die makroskopische magneto-mechanische Kopplung bei diesen Materialien basiert auf der Reorientierung von Martensit-Varianten sowie feldinduzierten Phasenumwandlungen [78].

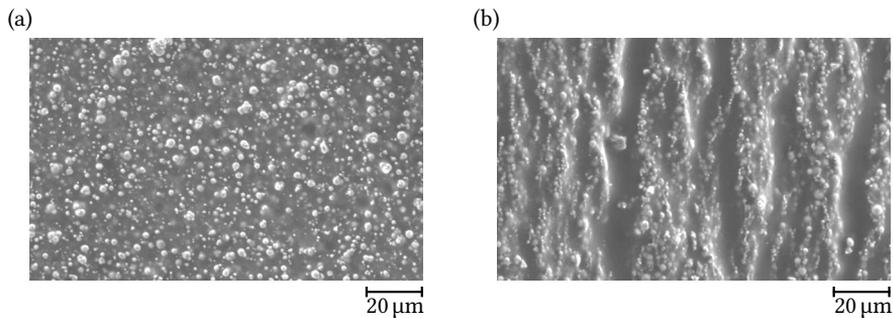
Eine weitere Klasse magnetisch aktiver Werkstoffe stellen Komposite, bestehend aus magnetisierbaren Partikeln und einer magnetisch inaktiven Matrix oder Trägerflüssigkeit, dar. Das Wirkprinzip dieser Materialien basiert auf lokalen Partikel-Partikel- und Partikel-Matrix-Wechselwirkungen unter Einfluss externer Magnetfelder. Beispiele sind Ferrofluide oder magnetorheologische Flüssigkeiten, bei denen sich durch Magnetfelder signifikante Änderungen der rheologischen Eigenschaften infolge von Partikelkettenbildung induzieren lassen [71, 118, 119]. Bereits bei moderaten externen Feldern deutlich unter  $100 \text{ kA m}^{-1}$  sind so Änderungen der Viskosität von mehr als 100 % erreichbar [118]. Der entscheidende Nachteil magnetischer Flüssigkeiten ist allerdings die fehlende Langzeitstabilität infolge von Sedimentations- und Agglomerationsprozessen der suspendierten Partikel. Dieser lässt sich durch die Verwendung von Polymeren als Trägermaterial umgehen. Dabei werden Komposite auf Basis von Gelen als Ferrogele [86, 170] und solche auf Basis von Elastomeren als magnetisch aktive, magnetosensitive oder magnetorheologische Elastomere (MRE) bezeichnet.

## 1.1 Magnetorheologische Elastomere

MRE sind aufgrund ihrer vielversprechenden Eigenschaften seit etwa 20 Jahren von großem Interesse in der Materialforschung und für verschiedenste technische Anwendungsmöglichkeiten einsetzbar. Der Aufbau sowie die wesentlichen Eigenschaften dieser Materialien sind im Folgenden zusammengefasst.

### *Aufbau und Herstellung*

Im Herstellungsprozess von MRE wird eine Vielzahl von magnetisierbaren Partikeln in der Größenordnung einiger Mikrometer in ein unvernetztes Elastomer eingebracht. Dabei sind



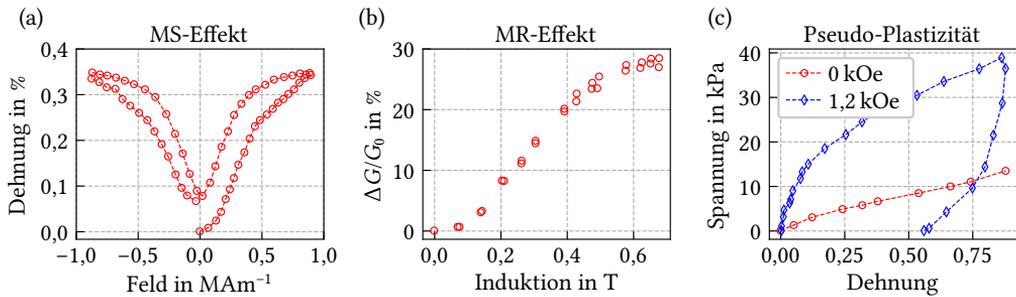
**Abb. 1.1:** Elektronenmikroskopische Aufnahme der Mikrostruktur von MRE aus TIAN et al. [160]: (a) vollständig stochastische Verteilung und (b) kettenartige Struktur. Nachdruck mit Genehmigung von Springer Nature: *Rheologica Acta*, Microstructure and magnetorheology of graphite-based MR elastomers, T. F. TIAN et al., ©2011.

verschiedene Materialien wie Carboneisen, Magnetit oder Neodym-Eisen-Bor (NdFeB) als magnetische Komponente gängig [5], wobei ersteres aufgrund der ausgeprägten magnetischen Eigenschaften am häufigsten verwendet wird. Die Form der eingebrachten magnetischen Füllstoffe reicht von sphärischen [12, 25, 45, 71] bis hin zu vollständig irregulär geformten Partikeln [148, 156]. Um die Kopplungseigenschaften des Komposits zu maximieren, werden als Matrixkomponente Materialien mit einer möglichst geringen, jedoch aus Sicht der jeweiligen technischen Anwendung sinnvollen Steifigkeit gewählt. Der umfangreichen Übersicht zur Synthese von MRE aus BASTOLA & HOSSAIN [5] folgend, kommen meist Silikonelastomere zum Einsatz, bspw. [12, 25, 40, 45, 60, 100, 153]. Im Herstellungsprozess lassen sich die Eigenschaften dieser Elastomer-Klasse durch Zugabe von Silikonöl zusätzlich anpassen [153, 157]. Nach der Aushärtung der Matrix sind die Partikel aufgrund der deutlich geringeren Größe der Polymerketten im Netzwerk fest gebunden, sodass ein langzeitstabiles, magnetisch aktives Kompositmaterial entsteht.

Neben dem resultierenden Partikelvolumengehalt lässt sich die Mikrostruktur von MRE während der Herstellung gezielt beeinflussen. So entstehen strukturierte MRE mit kettenartigen [25, 45, 60, 71, 164] oder deutlich komplexeren Anordnungen wie Waben [100, 101], wenn während der Vernetzung der Matrix Magnetfelder mit konstanter oder variierender Richtung angelegt werden. Hingegen bildet sich ohne Einwirkung äußerer Felder eine gänzlich statistische Verteilung aus [45, 160], s. Abb. 1.1.

### *Eigenschaften und Verhalten*

Bei Betrachtung des makroskopischen Verhaltens von MRE folgen aus den verschiedenen Mikrostrukturen isotrope bzw. anisotrope Eigenschaften. Die Materialantwort hängt dabei neben der mikrostrukturellen Geometrie maßgeblich von den konstitutiven Eigenschaften der einzelnen Komponenten, also Partikeln und Matrix, ab. Somit ist das mechanische Verhalten von MRE entweder elastisch [12] oder durch mögliche viskoelastische Effekte ratenabhängig



**Abb. 1.2:** Experimentelle Daten zu den Schalteffekten von MRE: (a) MS-Effekt einer strukturierten MRE-Probe mit einem longitudinalen Schubmodul von 1037,4 kPa in Feldrichtung aus DANAS et al. [25], (b) Änderung der elastischen Steifigkeit  $\Delta G$  einer doppelt überlappenden Scherprobe mit  $G_0 = 266,7$  kPa aus JOLLY et al. [70] und (c) feldinduzierte Plastizität einer zylindrischen Probe mit  $G_0 = 5,3$  kPa aus STEPANOV et al. [157].

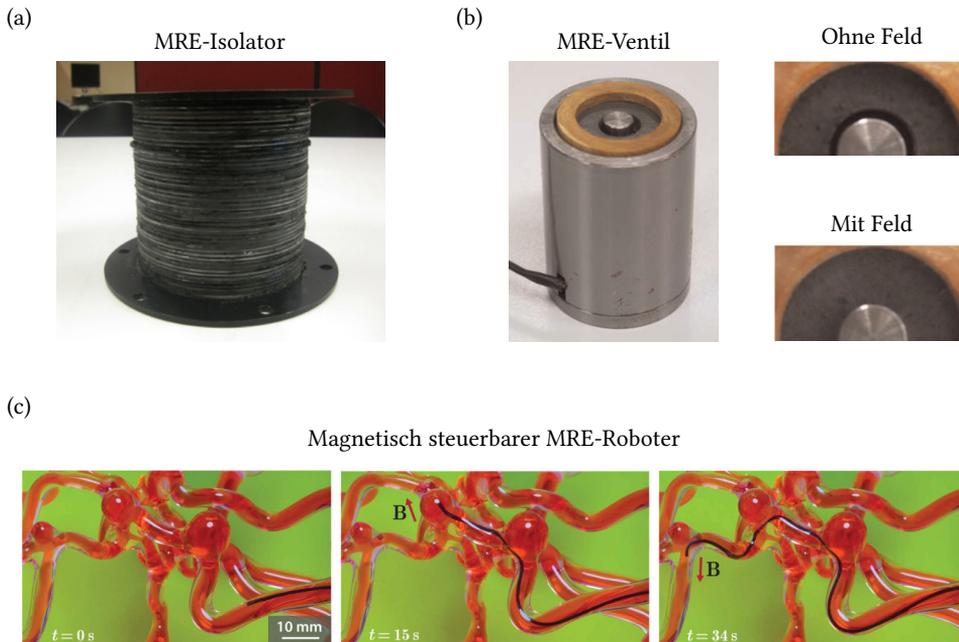
[60, 90, 153].<sup>1</sup> Wird das Elastomer mit weichmagnetischen Partikeln wie Carbonyleisen gefüllt, sind die magnetisch induzierten Eigenschaftsänderungen reversibel. Hingegen führt die Verwendung von hartmagnetischen Partikeln wie NdFeB zu einem deutlich ausgeprägten irreversiblen Verhalten [72, 93, 156, 158].

Unter Einfluss eines Magnetfelds ändert sich die Mikrostruktur des MRE durch magnetische Wechselwirkungen und daraus folgende Umstrukturierungen der eingebetteten Partikel. Infolge der mikroskopischen Wechselwirkungen ändern sich auch die effektiven makroskopischen Eigenschaften des Werkstoffverbunds. Makroskopisch resultieren daraus drei wesentliche magneto-mechanische Kopplungen bzw. Schalteffekte:

- (i) der magnetostriktive (MS)-Effekt,
- (ii) der magnetorheologische (MR)-Effekt, sowie
- (iii) die feldinduzierte Plastizität.

Der MS-Effekt bezeichnet die freie Deformation infolge externer Magnetfelder [44]. Je nach Steifigkeit der elastomeren Matrix lassen sich in homogenen magnetischen Feldern Dehnungen von einigen Prozent bis hin zu 20 % erzielen [157]. Deutlich stärker ausgeprägt ist der MR-Effekt, d. h. die feldabhängige Änderung von Speicher- und Verlustmoduli. Bei besonders weichen MRE lassen sich dabei relative Steifigkeitsänderungen von mehreren 100 % erreichen [13, 60]. In Abb. 1.2(a) und (b) sind der Literatur entnommene experimentelle Daten des MS- und MR-Effektes aufgetragen. Bei beiden Phänomenen ist der typische S-förmige Verlauf, welcher aus dem Sättigungsverhalten der magnetischen Partikel resultiert, gut zu erkennen. Weiterhin lassen sich sowohl MS- als auch MR-Effekt durch Vordeformation oder Vorspannung der MRE-Probekörper beeinflussen [25, 165]. Die feldinduzierte Plastizität oder auch Pseudo-Plastizität markiert den dritten bekannten Effekt. Wie in Abb. 1.2(c) dargestellt, zeigen MRE

<sup>1</sup>Aufgrund von irreversiblen Gleitprozessen zwischen Partikeln und Matrix auf der Mikroskala können in der Materialantwort von MRE zusätzlich zum rein elastischen oder viskoelastischen Verhalten Gleichgewichtshysteresen auftreten [12, 109]. Weiterhin ist in der Regel die als MULLINS-Effekt [117] bezeichnete Steifigkeitsänderung nach dem initialen Be- und Entlastungszyklus zu beobachten.



**Abb. 1.3:** Beispiele technischer Anwendungen von MRE: (a) MRE-Isolator zur Dämpfung mechanischer Schwingungen aus LI et al. [91], (b) magnetisch steuerbares Ventil aus BÖSE et al. [17] und (c) Navigation eines MRE-Roboters durch nachgebildete Blutgefäße aus KIM et al. [85]. Nachdrucke mit Genehmigung von IOPscience: Smart Materials and Structures, A state-of-the-art review on magnetorheological elastomer devices, Y. LI et al., (2014); SAGE journals: Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Soft magnetorheological elastomers as new actuators for valves, H. BÖSE et al., (2012); AAAS: Y. KIM et al., Ferromagnetic soft continuum robots, Science Robotics Vol. 4, Issue 33, eaax7329, (2019)

Hysteresen im Spannungs-Dehnungs-Verlauf, die infolge eines externen Magnetfelds auftreten [102, 157]. Eine umfangliche Übersicht zur experimentellen Charakterisierung von MRE ist in BASTOLA & HOSSAIN [5] zu finden.

### Anwendungen

Aufgrund des stark ausgeprägten Kopplungsverhaltens sind MRE für zahlreiche ingenieurtechnische Anwendungen interessant. Prominentestes Beispiel sind steuerbare Dämpfer und Lastaufnahmen [19, 26, 92]. Diese nutzen den MR-Effekt gezielt aus und ermöglichen so die Verminderung von Schwingungen und Vibrationen der gelagerten Komponenten wie etwa Autositzen [33]. In Abb. 1.3(a) ist exemplarisch ein aus Schichten von MRE und Stahlscheiben aufgebauter Isolator aus LI et al. [91] dargestellt. Das gut erkennbare Schicht-Design ermöglicht eine hohe mechanische Tragfähigkeit und erhöht gleichzeitig die Gesamtpermeabilität des Bauteils. Weitere vielversprechende Möglichkeiten zur Anwendung stellen Aktoren und Sensoren [6, 96, 161, 167], Ventile [17] oder mikrofluidische Transportsysteme [7] dar. Das in

Abb. 1.3(b) dargestellte Ventil aus BÖSE et al. [17] nutzt dabei gezielt den MS-Effekt aus, indem sich der MRE-Ring durch das Anlegen eines magnetischen Feldes radial aufweitet. Weiterhin lässt sich die Geometrie von Greifern variabel anpassen und temporär speichern [6, 21]. Dabei wird in Analogie zu klassischen Formgedächtnis-Legierungen die feldinduzierte Plastizität ausgenutzt.

Durch Einbringung hartmagnetischer Partikel ergeben sich weitere Möglichkeiten zum Einsatz von MRE, bspw. als aktiv steuerbare Roboter [62, 85]. Dazu sind die als Soft Robots bezeichneten Systeme vorab zu magnetisieren, um später mittels externer Magnetfelder Bewegungen induzieren zu können. Durch die remanente Magnetisierung der eingebetteten hartmagnetischen Partikel lassen sich dabei neben Translationen auch Drehbewegungen quer zum Feld realisieren. In Abb. 1.3(c) ist exemplarisch ein MRE-Roboter aus KIM et al. [85] dargestellt, der durch nachgebildete Blutgefäße navigierbar ist. Prothesen und Orthesen mit kontrollierbarer Steifigkeit [52] sind weiterhin als medizinische Anwendungen zu nennen. Für umfangreiche Übersichten mit weiteren Referenzen zu möglichen technischen Applikationen sei abschließend auf LI et al. [91] oder SCHUBERT [147] verwiesen.

## 1.2 Modellierungsstrategien

Um das Verständnis für das komplexe Verhalten von MRE zu erweitern, ist neben der experimentellen Charakterisierung auch die theoretische Betrachtung dieser Materialien notwendig. Dabei lassen sich Strategien zur Modellierung von MRE grundsätzlich in zwei Kategorien, mikroskopische und makroskopische Ansätze, unterteilen [18]. In ersteren wird die heterogene Mikrostruktur bestehend aus Partikeln und Matrix explizit aufgelöst, wohingegen makroskopische Ansätze das Komposit als homogenes, magnetisch aktives Kontinuum betrachten.

### *Mikroskopische Modelle*

Die erste Klasse mikroskopischer Modelle stellen Partikel-Interaktionsmodelle wie die von ASADI KHANOUKI et al. [3], CREMER et al. [23], FISCHER & MENZEL [35], PULJIZ et al. [131, 132] oder ROMEIS et al. [137, 138] verwendeten Formulierungen dar. Diese basieren auf einer Energieminimierung und beschreiben die Partikel als magnetische Dipole. Die polymere Matrix wird dabei als elastisches Kontinuum oder durch Federn zwischen den Partikeln beschrieben, vgl. MENZEL [103]. Partikel-Interaktionsmodelle sind numerisch sehr effizient, aber aufgrund der Dipolnäherung nur für Systeme mit großen relativen Partikelabständen ausreichend genau. Eine präzisere Beschreibung der Partikelinteraktionen für geringe Relativabstände der Einschlüsse ist durch die Verwendung einer Multipolentwicklung möglich [11].

Die zweite Klasse mikroskopisch motivierter Modelle stellen kontinuumsbasierte Ansätze gemäß DANAS [24], GALIPEAU et al. [37, 38], JAVILI et al. [67], KALINA et al. [72, 75], KEIP & RAMBAUSEK [80, 81], METSCH et al. [104–106] oder MUKHERJEE et al. [115] dar. In diesen Modellen werden sowohl magnetische als auch mechanische Felder lokal aufgelöst, sodass auch die exakte Beschreibung hoch gefüllter Systeme mit geringen Relativdistanzen der Einschlüsse möglich ist. Weiterhin lässt sich beliebiges dissipatives Verhalten der einzelnen Komponenten verhältnismäßig einfach berücksichtigen [72, 114] oder die Stabilität unter verschiedenen Lasten analysieren [47, 82, 112, 126, 139]. Ein entscheidender Nachteil mikroskopischer Kontinuumsmodelle gegenüber Partikel-Interaktionsmodellen ist jedoch der erhebliche rechnerische Aufwand für die numerische Lösung der zugrunde liegenden Randwertaufgabe (RWA). Die

Finite-Elemente (FE) Simulation einer realen MRE-Probe mit zehntausenden Partikeln ist somit nicht mit vertretbarem Aufwand zu realisieren.

Um das effektive Verhalten realer MRE zu berechnen, finden daher Homogenisierungsschemata gemäß CHATZIGEORGIOU et al. [20] Anwendung. Weiterhin ermöglicht die FE<sup>2</sup>-Methode gleichzeitig Effekte der Mikrostruktur und makroskopische Geometrieinflüsse zu erfassen, vgl. KEIP & RAMBAUSEK [80, 81], RAMBAUSEK et al. [136], RAMBAUSEK [135] oder ZABIHYAN et al. [175].

### *Makroskopische Modelle*

Makroskopische Modelle stellen eine vollständig andere Modellierungsstrategie dar. Da die heterogene Mikrostruktur in dieser Art von Modellen nicht explizit aufgelöst ist, und das MRE als homogenes Kontinuum beschrieben wird, ist die Berechnung realer makroskopischer Strukturen mit verhältnismäßig geringem Aufwand möglich, vgl. [130, 140]. Zugrunde liegende Partikel-Matrix-Interaktionen werden dabei durch geeignete magneto-mechanische Kopplungsterme erfasst, sodass die Formulierung dieser Modelle gegenüber mikroskopischen Ansätzen deutlich komplexer wird. Es lassen sich eine Vielzahl von isotropen [1, 15, 31, 32, 77, 130, 140] und transversalisotropen [16, 25, 65, 144] Ansätzen zur Beschreibung magnetoelastischen Verhaltens in der Literatur finden. Auch für die Formulierung ratenabhängiger oder hartmagnetischer Modelle existieren verschiedene Vorschläge, vgl. SAXENA et al. [142, 143] und HALDAR et al. [54] sowie MUKHERJEE et al. [116].

Naturgemäß sind alle makroskopischen Ansätze rein phänomenologischer Art, sodass in jedem Fall eine Modellkalibrierung erfolgen muss. Diese kann einerseits auf Basis experimenteller Ergebnisse [25, 54, 65] oder mittels mikroskopischer Modelle in Kombination mit einem Homogenisierungsansatz erfolgen [41, 74, 76, 88, 114–116]. Die Parametrisierung auf Basis makroskopischer Experimente bietet jedoch einen entscheidenden Nachteil: Es ist zu beachten, dass die magnetisch induzierte mechanische Feldverteilung im MRE unabhängig von der Probengeometrie starke Inhomogenitäten aufweist [42, 43, 73, 81, 88]. Wenn weiterhin keine ellipsoidischen Proben – wie etwa in BODELOT et al. [12] oder PÖSSINGER [133] vorgeschlagen – verwendet werden, ist die Verteilung der Magnetisierung ebenfalls stark inhomogen. Da allerdings im Regelfall zahlreiche vereinfachende Annahmen zur besseren Handhabbarkeit der Modellkalibrierung getroffen werden, enthält das parametrisierte Modell stets den Einfluss der Probengeometrie. Es wird also das Verhalten der betrachteten Probe und nicht das reine Materialverhalten des Komposits beschrieben. Einen Ausweg stellt die deutlich aufwendigere inverse Parametrisierung des Modells über eine FE-Simulation dar. Die Modellanpassung mittels mikroskopischer Simulationen umgeht die beschriebene Problematik dagegen vollständig und erlaubt eine Modellkalibrierung unabhängig von der Probengeometrie.

## 1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Wie zuvor diskutiert und in Abb. 1.2 exemplarisch dargestellt, zeigen MRE verschiedenste makroskopische Schalteffekte mit stark nichtlinearer Ausprägung. Die mikroskopischen Ursachen von MS- und MR-Effekt sowie pseudo-plastischen Verhaltens basieren dabei auf einem einzigen Mechanismus: der magnetisch getriebenen Wechselwirkung im Elastomer eingebetteter Partikel. Allerdings lässt sich bei der Betrachtung von MRE-Bauteilen oder -Proben keinesfalls eine Trennung zwischen mikrostrukturellen Prozessen und makroskopischen Ein-

flüssen wie der äußeren Form vornehmen, denn die räumliche Ausprägung des Magnetfelds und insbesondere Sprünge der Feldgrößen auf Materialgrenzen spielen eine entscheidende Rolle für die genannten lokalen Wechselwirkungen und führen zusätzlich zu makroskopischen Lasttermen. Um das Verständnis dieser Werkstoffklasse zu erweitern und so zukünftig die virtuelle Optimierung technischer Applikationen zu ermöglichen, sind demnach Mikro- und Makroskala gleichzeitig – also in gekoppelter Art und Weise – zu betrachten.

Das Kernziel dieser Arbeit besteht daher in der Entwicklung einer effizienten mehrskaligen Modellierungs-Strategie für MRE. Dabei kommen sowohl auf der Mikro- als auch auf der Makroebene Kontinuumsansätze mit Gültigkeit für finite Deformationen zum Einsatz. Die Lösung des gekoppelten magneto-mechanischen Feldproblems erfolgt mittels einer nichtlinearen FE-Formulierung. Dies bietet den Vorteil sowohl die magnetischen als auch die mechanischen Feldverteilungen auf der Mikroebene durch Lösung der beschreibenden partiellen Differentialgleichungen (PDGL) explizit aufzulösen, sodass sich die komplexen Partikel-Partikel- und Partikel-Matrix-Wechselwirkungen im Rahmen der numerischen Genauigkeit ohne vereinfachende Annahmen abbilden lassen. Um außerdem makroskopische Einflüsse untersuchen zu können und den numerischen Aufwand dabei zu beschränken, soll die bereits erläuterte implizite Berücksichtigung mikrostruktureller Prozesse durch mikroskopisch kalibrierte Makromodelle für MRE erfolgen.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen strukturiert: Nach der Bereitstellung wesentlicher Grundlagen in den Kapiteln 2 und 3, wird das konstitutive Verhalten der einzelnen Komponenten in Kapitel 4 anhand von experimentellen Daten charakterisiert und modelliert. Um grundlegende Eigenschaften weich- und hartmagnetischer MRE zu diskutieren, folgt in Kapitel 5 die Analyse des effektiven Verhaltens anhand von Homogenisierungs-Simulationen. In einem nächsten Schritt wird die Formulierung und Modellkalibrierung makroskopischer Ansätze für weichmagnetische MRE in Kapitel 6 diskutiert. Diese basiert auf einer mittels Homogenisierung generierten Datenbasis die ebenfalls zur Validierung des Modells fungiert. Schließlich erfolgt in Kapitel 7 die Anwendung der entwickelten Modellierungsstrategie zur Simulation von MS- und MR-Effekt verschiedenster weichmagnetischer Probekörper. Nach der Diskussion der erzielten Ergebnisse erfolgen eine Zusammenfassung sowie ein Ausblick in Kapitel 8.

# 2 Kontinuumsformulierung

Grundlage für die physikalische Beschreibung von MRE bildet in dieser Arbeit die Kontinuumsphysik. Bei der Modellierung wird der atomare Aufbau des Materials vernachlässigt und der materielle Körper  $\mathcal{K}$  ist als strukturloses Kontinuum bestehend aus einer zusammenhängenden Menge von materiellen Punkten  $\mathcal{P} \in \mathcal{K}$  zu betrachten [2, 48, 56, 61]. Die physikalischen Eigenschaften eines einzelnen Punktes sind durch orts- und zeitabhängige Tensoren

$${}_{(n)}\mathbf{T} \in \mathcal{L}_n := \begin{cases} \mathcal{R} & \text{für } n = 0 \\ \underbrace{\mathcal{R}^3 \otimes \cdots \otimes \mathcal{R}^3}_{n\text{-mal}} & \forall n \in \mathcal{N}_{\geq 1} \end{cases} \quad (2.1)$$

$n$ -ter Stufe beschrieben. Dabei bezeichnen  $\mathcal{R}$  die reellen Zahlen,  $\mathcal{R}^3$  den dreidimensionalen EUKLIDISCHEN Vektorraum und  $\mathcal{N}$  die natürlichen Zahlen. Zur Verkürzung der Notation seien Tensoren 0. bis 4. Stufe im Folgenden durch  $T \in \mathcal{L}_0$ ,  $\mathbf{T} \in \mathcal{L}_1$ ,  $\mathfrak{T} \in \mathcal{L}_2$ ,  $\mathfrak{T} \in \mathcal{L}_3$  und  $\mathbb{T} \in \mathcal{L}_4$  gekennzeichnet. Die in der symbolischen Schreibweise verwendeten Operationen sind in Anhang A zu finden.

## 2.1 Feldgleichungen

In diesem Abschnitt sind die wesentlichen Gleichungen des gekoppelten magneto-mechanischen Feldproblems zusammengefasst. Diese umfassen die Kinematik, die MAXWELL-Gleichungen, die mechanischen Bilanzgleichungen sowie die Angabe allgemeiner konstitutiver Beziehungen. Der Gleichungssatz ist sowohl auf der Mikro- als auch auf der Makroskala gültig, s. Kapitel 4. Die konkrete Einführung und Klassifizierung beider Skalen sowie die Angabe von Randbedingungen (RB) erfolgt in Abschnitt 2.2.

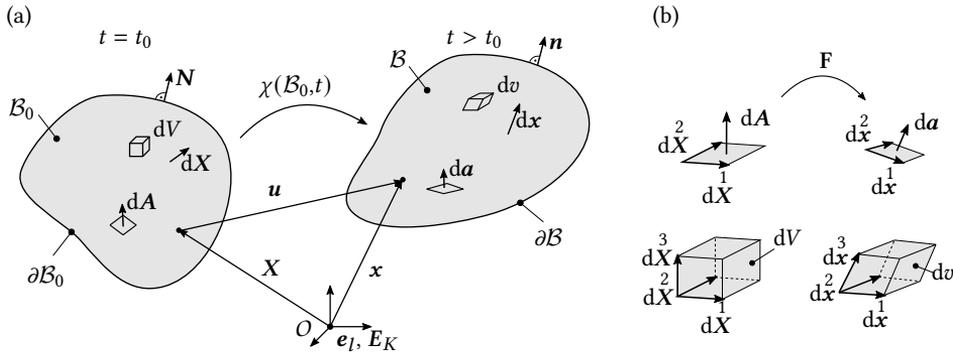
### 2.1.1 Kinematik

#### Konfigurationen

Es sei  $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{R}^3$  die Referenzkonfiguration eines materiellen Körpers  $\mathcal{K}$ , die zum Zeitpunkt  $t_0 \in \mathcal{R}_+$  in den  $\mathcal{R}^3$  eingebettet ist. Linien-, Flächen und Volumenelemente dieser Konfiguration sind dabei durch die Symbole  $d\mathbf{X}$ ,  $d\mathbf{A}$  und  $dV$  bezeichnet. Infolge äußerer Einwirkungen, die vorerst nicht näher diskutiert seien, nimmt  $\mathcal{K}$  für  $t \in \mathcal{T} := \{\tau \in \mathcal{R}_+ \mid \tau \geq t_0\}$  die Gebiete  $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}^3$  ein. All diese räumlichen Anordnungen  $\mathcal{B}$  sollen als Momentankonfigurationen von  $\mathcal{K}$  mit Linien-, Flächen und Volumenelementen  $d\mathbf{x}$ ,  $d\mathbf{a}$  und  $d\mathbf{v}$  bezeichnet sein. Unter Ausschluss von Selbstdurchdringung der Materie, lässt sich die Bewegung von  $\mathcal{K}$  bezüglich eines Bezugspunktes  $O \in \mathcal{R}^3$  durch die bijektiven Abbildungen

$$\chi : \begin{cases} \mathcal{B}_0 \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{R}^3 \\ (X, t) \mapsto \mathbf{x} := \chi(X, t) \end{cases} \quad \text{und} \quad \chi^{-1} : \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{R}^3 \\ (x, t) \mapsto X := \chi^{-1}(x, t) \end{cases} \quad (2.2)$$

beschreiben, wobei  $\chi^{-1}$  die Invertierung von  $\chi$  kennzeichnet. In der oberen Gleichung bezeichnen  $X \in \mathcal{B}_0$  und  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$  Ortsvektoren materieller Punkte der Referenz- und Momen-



**Abb. 2.1:** Kinematik des materiellen Körpers: (a) Ausgangs- und Momentankonfiguration mit Linien-, Flächen- und Volumenelementen sowie Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  eines materiellen Punktes und nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektoren  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{n}$  und (b) Aufspannen materieller Flächen- und Volumenelemente aus materiellen Linienelementen.

tankonfiguration. Zusätzlich zur geforderten Invertierbarkeit der Abbildung  $\chi$  sei diese frei von Sprüngen, sodass Risse auszuschließen sind. Außerdem sind Gebietsränder der jeweiligen Konfiguration mit  $\partial B_0 \subset \mathcal{R}^3$  bzw.  $\partial B \subset \mathcal{R}^3$  und zugehörige nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektoren mit  $\mathbf{N}$  bzw.  $\mathbf{n}$  gekennzeichnet. Eine schematische Veranschaulichung der eingeführten Größen ist in Abb. 2.1(a) zu finden. Die Beziehungen (2.2) sollen im Folgenden durch

$$\mathbf{x} := \chi(\mathbf{X}, t) \quad \text{mit} \quad \llbracket \chi(\mathbf{X}, t) \rrbracket = \mathbf{0} \text{ auf } S_0 \text{ bzw.} \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{X} := \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \llbracket \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \rrbracket = \mathbf{0} \text{ auf } S. \quad (2.3b)$$

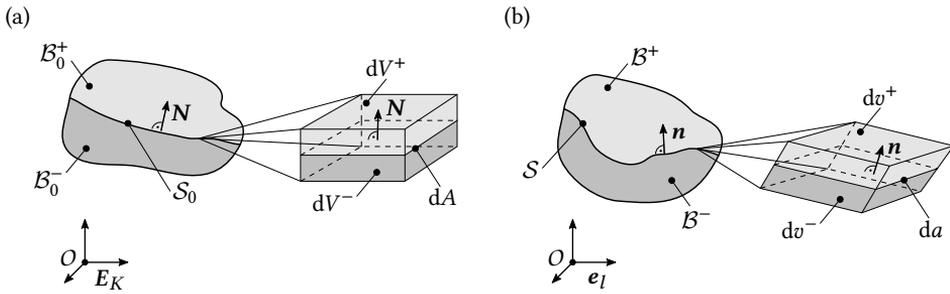
abgekürzt werden. Dabei kennzeichnet die Operation  $\llbracket (\bullet) \rrbracket = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$  den Sprung einer Größe auf einer materiellen Sprungfläche<sup>1</sup>  $S \subset \mathcal{R}^3$  bzw.  $S_0 \subset \mathcal{R}^3$  zwischen zwei Gebieten, also zwischen  $B^+$  und  $B^-$  bzw.  $B_0^+$  und  $B_0^-$ , vgl. Abb. 2.2(a) und (b). Die Normaleneinheitsvektoren  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{n}$  auf der Sprungfläche zeigen jeweils von  $-$  nach  $+$ .

Mit den eingeführten Beziehungen lässt sich der Verschiebungsvektor eines materiellen Punktes  $\mathcal{P} \in \mathcal{K}$  folglich mittels

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{X} \in B_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{x} - \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in B \quad (2.4)$$

definieren. Dabei wird die Beschreibung von Tensorfunktionen in Abhängigkeit von  $\mathbf{X}$  und  $t$  als LAGRANGESche Betrachtung und die Beschreibung als Funktion von  $\mathbf{x}$  und  $t$  als EULERSche Betrachtung bezeichnet [2, 48]. In dieser Arbeit findet ausschließlich die LAGRANGESche Betrachtung Anwendung. Sofern nicht explizit angegeben, ist die funktionale Abhängigkeit von Tensorfeldern somit durch  $\mathbf{X}$  und  $t$  gegeben und wird im Folgenden nicht weiter aufgeführt. Ferner sei das Symbol einer Funktion identisch zum Symbol des Funktionswertes selbst, bspw.

<sup>1</sup>Die Geschwindigkeit  $\mathbf{w}^S$  einer materiellen Sprungfläche ist identisch mit der Geschwindigkeit der Materie, d. h. es gilt  $\mathbf{w}^S \equiv \mathbf{v}$ . Da Risse in dieser Arbeit a priori ausgeschlossen sind, stellen somit lediglich Materialgrenzen zulässige Sprungflächen dar.



**Abb. 2.2:** Materielle Sprungfläche eines Körpers mit differentiellen Volumen- und Flächenelementen: (a) Ausgangs- und (b) Momentankonfiguration.

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ . Somit ist die Geschwindigkeit der Materie  $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{u}}$  als materielle Zeitableitung der Verschiebung mit  $(\dot{\bullet}) := \partial_t(\bullet)$  gegeben.

Zum Ausführen räumlicher Differentiationen seien die Nabla-Operatoren  $\mathcal{L}_1 \ni \nabla_{\mathbf{X}} := E_K \partial_{X_K}$  bezüglich  $\mathbf{X}$  bzw.  $\mathcal{L}_1 \ni \nabla := \mathbf{e}_k \partial_{x_k}$  bezüglich  $\mathbf{x}$  definiert. Dabei bezeichnen  $E_K \in \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$  und  $\mathbf{e}_k \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  Basisvektoren kartesischer Koordinatensysteme und es wird die EINSTEINSche Summationskonvention, also die Summation über doppelt auftretende Indizes, verwendet. Im weiteren Verlauf kennzeichnen kleine Indizes die Zugehörigkeit zu  $\mathcal{B}$  und große Indizes einen Bezug zu  $\mathcal{B}_0$ . Dementsprechend werden für Tensorfelder mit Bezug auf die Referenzkonfiguration große und für solche mit Bezug auf die Momentankonfiguration kleine Symbole gewählt. Wie in der Literatur üblich, seien die entsprechenden Tensoren außerdem auch als LAGRANGESche bzw. EULERSche Größen bezeichnet, wobei diese Bezeichnungen keinesfalls mit der Betrachtungsweise zu verwechseln sind.

### Deformation und Verzerrung

Um neben der Bewegung von  $\mathcal{K}$  auch die Deformation und Verzerrung von  $\mathcal{B}$  bzgl.  $\mathcal{B}_0$  zu beschreiben, ist die Einführung von geeigneten tensoriellen Deformationsmaßen notwendig. So sind der Deformationsgradient und die JACOBI-Determinante durch

$$\mathbf{F} := (\nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\chi})^T \quad \text{und} \quad J := \det \mathbf{F} > 0 \quad (2.5)$$

definiert. In Koordinatenschreibweise lässt sich der Ausdruck  $\det \mathbf{F}$  mittels des vollständig antisymmetrischen Permutations- oder LEVI-CEVITA-Symbols schreiben:

$$J = \frac{1}{3!} e_{klm} e_{KLM} F_{kK} F_{lL} F_{mM} \quad \text{mit} \quad (2.6)$$

$$e_{klm} := \begin{cases} +1, & \text{wenn } k, l, m \text{ gerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ -1, & \text{wenn } k, l, m \text{ ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.7)$$

Gemäß der Definition in Gleichung (2.5)<sub>1</sub> erfüllen der Deformationsgradient und dessen Inverse  $\mathbf{F}^{-1}$  automatisch die Kompatibilitätsbedingungen

$$\nabla_{\mathbf{X}} \times \mathbf{F}^T = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} \times \llbracket \mathbf{F}^T \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{auf } \mathcal{S}_0 \quad \text{sowie} \quad (2.8a)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} \times \llbracket \mathbf{F}^{-T} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{auf } \mathcal{S} \quad . \quad (2.8b)$$

Da  $\mathbf{F}$  sowohl Rotations- als auch Streckanteile enthält, ist zur Formulierung konstitutiver Gleichungen die Einführung weiterer Deformationsmaße notwendig. So sind der auf  $\mathcal{B}_0$  bezogene Rechts-CAUCHY-GREEN-Deformationstensor sowie der auf  $\mathcal{B}$  bezogene Links-CAUCHY-GREEN-Deformationstensor gemäß

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.9)$$

definiert. Diese sind im Gegensatz zu  $\mathbf{F}$  frei von Starrkörperrotationen und stets symmetrisch, d. h.  $\mathbf{C}, \mathbf{c} \in \mathcal{L}_2^{\text{sym}} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{L}_2 \mid \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T\}$ . Neben den diskutierten Deformationsgrößen, lassen sich weiterhin Verzerrungsmaße – die bei verschwindender Deformation den Wert null annehmen – einführen. Der GREEN-LAGRANGE- und der EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor sind gemäß

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{und} \quad \mathbf{e} := \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{c}^{-1}) \quad (2.10)$$

definiert, wobei  $\mathbf{I} := \delta_{KL} \mathbf{E}_K \otimes \mathbf{E}_L$  und  $\mathbf{i} := \delta_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$  Einheitstensoren bzgl. der eingeführten Basisvektoren bezeichnen. Hierin ist

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

das KRONECKER-Symbol. Neben  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{e}$  lassen sich beliebig viele weitere Verzerrungsmaße einführen [48]. Da diese im Rahmen dieser Arbeit jedoch keine Anwendung finden, erfolgt diesbezüglich keine weitere Ausführung.

### Kinematische Relationen zwischen den Konfigurationen

Für die Umrechnung zwischen Größen der Referenz- und Momentankonfiguration werden zusätzliche kinematische Relationen benötigt. Mittels des Deformationsgradienten lassen sich beispielsweise die Zusammenhänge  $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$ ,  $d\mathbf{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}$  und  $dv = JdV$  zwischen materiellen Linien-, Flächen- und Volumenelementen der Ausgangs- und Momentankonfiguration herstellen. Weiterhin gelten zwischen  $da := |d\mathbf{a}|$  und  $dA := |d\mathbf{A}|$  sowie  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{N}$  die Beziehungen

$$da = J|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}|dA \quad \text{und} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}|} \quad \text{sowie} \quad (2.12a)$$

$$dA = J^{-1}|\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n}|da \quad \text{und} \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n}|} \quad . \quad (2.12b)$$

Wird ein materielles Flächenelement auf einer Sprungfläche betrachtet, so müssen sich die aktuelle Fläche  $da \in \mathcal{S}$  und die Ausgangsfläche  $dA \in \mathcal{S}_0$  sowohl von der positiven Seite  $\mathcal{B}^+$ , als

auch von der negativen Seite  $\mathcal{B}^-$  ineinander überführen lassen. Da von beiden Seiten aus die gleiche materielle Fläche beschrieben wird, folgen gemäß BRUMMUND [14] die Beziehungen

$$0 = \llbracket J|\mathbf{F}^{-\text{T}} \cdot \mathbf{N}| \rrbracket \quad \text{sowie} \quad 0 = \llbracket J^{-1}|\mathbf{F}^{\text{T}} \cdot \mathbf{n}| \rrbracket . \quad (2.13)$$

Schließlich ergeben sich aus der Definition der JACOBI-Determinante  $J$  gemäß Gleichung (2.5)<sub>2</sub> bzw. (2.6) die Relationen

$$\nabla \cdot (J^{-1}\mathbf{F}) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (J\mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{0} \quad (2.14a)$$

sowie

$$e_{KLM} = J^{-1}e_{klm}F_{kK}F_{lL}F_{mM} \quad \text{und} \quad e_{KLM} = Je_{klm}F_{Kk}^{-1}F_{Ll}^{-1}F_{Mm}^{-1} . \quad (2.14b)$$

## 2.1.2 Stationäre magnetische Feldgleichungen

Das elektromagnetische Feldproblem lässt sich durch die MAXWELL-Gleichungen beschreiben. Im stationären Fall entkoppeln diese und das magnetische sowie das elektrische Randwertproblem lassen sich separat behandeln.

### Maxwell-Gleichungen

Für ausreichend langsame Änderungen der magnetische Felder und verschwindende Polarisation der Materie sowie Gebiete ohne freie Flächenstromdichten  $\mathbf{j}$  folgen somit das GAUßSche Gesetz sowie das AMPÈRESche Durchflutungsgesetz zu

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{b} \rrbracket = 0 \quad \text{auf } \mathcal{S} \quad \text{und} \quad (2.15a)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} \times \llbracket \mathbf{h} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{auf } \mathcal{S} . \quad (2.15b)$$

Dabei bezeichnen  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{h}$  die magnetische Flussdichte sowie die magnetische Feldstärke, vgl. JACKSON [66]. Diese Größen sind über die Verknüpfungsgleichung

$$\mathbf{b} = \mu_0(\mathbf{h} + \mathbf{m}) \quad (2.16)$$

verbunden, wobei  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$  die Permeabilität des Vakuums und  $\mathbf{m}$  die Magnetisierung der Materie bezeichnen.

### Magnetische Potentiale

Mit der Einführung geeigneter konstitutiver Gleichungen gemäß Abschnitt 2.1.4 und aus den Sprungbedingungen (2.15)<sub>2</sub> ableitbaren RB ist das System von PDGL (2.15) und (2.16) des magnetischen Teilproblems vollständig definiert. Zur Lösung ist es allerdings zweckmäßig ein geeignetes Potential einzuführen. So ist das AMPÈRESche Durchflutungsgesetz (2.15b) a priori erfüllt, wenn das Skalarpotential

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{B}_0 \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R} \\ (\mathbf{X}, t) \mapsto \varphi(\mathbf{X}, t) \end{cases} \quad \text{mit} \quad \mathbf{h} =: -\nabla\varphi \quad \text{und} \quad \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \quad \text{auf } \mathcal{S} , \quad (2.17)$$

zur Lösung verwendet wird. Das Potential  $\varphi$  muss somit lediglich das GAUßsche Gesetz (2.15a) erfüllen. Aufgrund der Definition von  $\varphi$  ergibt sich die Stetigkeit auf Sprungflächen. Wird hingegen das Vektorpotential, definiert als

$$\mathbf{a} : \begin{cases} \mathcal{B}_0 \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}^3 \\ (\mathbf{X}, t) \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{X}, t) \end{cases} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b} =: \nabla \times \mathbf{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{n} \times \llbracket \mathbf{a} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \mathcal{S}, \quad (2.18)$$

zur Lösung verwendet, ist das GAUßsche Gesetz (2.15a) a priori erfüllt und es verbleibt das AMPÈRESche Durchflutungsgesetz (2.15b). Die Definition des Vektorpotentials nach Gleichung (2.18) ist allerdings nicht eindeutig. Ein weiteres Vektorpotentialfeld  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \nabla \xi$ , welches sich um den Gradienten eines beliebigen Skalarpotentials  $\xi$  unterscheidet, erfüllt ebenso a priori Gleichung (2.15a) und führt auf identische Feldgrößen  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{h}$  und  $\mathbf{m}$ . Wird für  $\mathbf{a}$  zusätzlich die als COULOMB-Eichung bezeichnete Quellfreiheit

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{a} \rrbracket = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{S} \quad (2.19)$$

gefordert, verschwindet diese Uneindeutigkeit. Es sei angemerkt, dass die Eichbedingung für den zweidimensionalen Fall automatisch erfüllt ist. Schließlich folgt aus der eindeutigen Definition gemäß (2.18) und (2.19) die Stetigkeit des Vektorpotentials, d. h.  $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket = \mathbf{0}$  auf  $\mathcal{S}$ .

### Bezug auf die Referenzkonfiguration

Um zur numerischen Lösung des gekoppelten Problems eine totale LAGRANGE-Formulierung zu verwenden und die Objektivität konstitutiver Beziehungen a priori zu gewährleisten, ist es zweckmäßig den eingeführten Gleichungssatz auf die Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$  zu transformieren. Dazu sind die LAGRANGESchen magnetischen Feldgrößen  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{A}$  durch geeignete Pull-Back-Operationen zu bestimmen. Gemäß KANKANALA & TRIANTAFYLIDIS [77] sowie DORFMANN & OGDEN [31], lassen sich diese durch die Beziehungen

$$\mathbf{B} := \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{H} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{h}, \quad \mathbf{M} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{m} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{a} \quad (2.20)$$

definieren. Dabei sei angemerkt, dass die Definition LAGRANGEScher magnetischer Feldgrößen nicht eindeutig ist<sup>2</sup>, die Wahl entsprechend Gleichung (2.20) ist jedoch im Fachgebiet weit verbreitet und erhält die grundlegende Struktur der MAXWELL-Gleichungen (2.15a) und (2.15b) in der Formulierung bezüglich  $\mathcal{B}_0$ . Wie im Anhang B gezeigt, folgen unter Anwendung der Kompatibilitätsbedingungen (2.8a) und (2.8b) sowie der Relationen (2.12a), (2.13)<sub>1</sub>, (2.14a)<sub>1</sub> und (2.14b)<sub>2</sub> die Gleichungen

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} \cdot \llbracket \mathbf{B} \rrbracket = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{S}_0 \quad \text{und} \quad (2.21a)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} \times \llbracket \mathbf{H} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \mathcal{S}_0. \quad (2.21b)$$

<sup>2</sup>Da die eingeführten LAGRANGESchen magnetischen Feldgrößen mit Bezug auf  $\mathcal{B}_0$  fiktiv sind, dienen Sie lediglich als Hilfsfelder innerhalb der Kontinuumsformulierung. So lange die Transformationen der Feldgrößen derart gewählt werden, dass sich die LARMORSche Invariante  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{h} \, dV$  für  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $dV = J^{-1} dV$  nicht ändert, sind verschiedene Wahlen möglich [74].

Die Struktur der Verknüpfungsgleichung (2.16) bleibt jedoch in der LAGRANGESchen Form

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.22)$$

nicht erhalten. Mittels der gewählten Transformationen gemäß Gleichung (2.20) lässt sich weiterhin zeigen, dass die Definition der magnetischen Potentiale in ihrer LAGRANGESchen Form ebenfalls strukturerhaltend ist, s. Anhang B:

$$\mathbf{H} = -\nabla_{\mathbf{X}} \varphi \quad \text{mit} \quad \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ auf } \mathcal{S}_0, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{X}} \times \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} \times \llbracket \mathbf{A} \rrbracket = \mathbf{0} \text{ auf } \mathcal{S}_0. \quad (2.24)$$

Die Form der Eichbedingung gemäß Gleichung (2.19) ist allerdings nicht invariant. Mit (2.20) folgt der Zusammenhang  $\mathbf{A} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}) + \mathbf{C}^{-1} : (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}) = 0$ . Da diese Form der Eichbedingung unpraktikabel ist, soll zweckmäßigerweise die Uneindeutigkeit der Definition von  $\mathbf{A}$  – also  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla_{\mathbf{X}} \xi$  – in LAGRANGEScher Form gemäß (2.24) über die Relation

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} \cdot \llbracket \mathbf{A} \rrbracket = 0 \text{ auf } \mathcal{S}_0, \quad (2.25)$$

im Folgenden als LAGRANGESche COULOMB-Eichung bezeichnet, beseitigt werden.

### 2.1.3 Mechanische Bilanzgleichungen

Neben den im vorherigen Abschnitt diskutierten MAXWELL-Gleichungen sind die thermomechanischen Bilanzen, also die Massen-, Impuls-, Drehimpuls-, Energie- und Entropiebilanz zu diskutieren. Diese lassen sich ausgehend von einer allgemeinen Bilanz formulieren, wobei jeweils Quell- und Flussterme entsprechend anzupassen sind [48, 56, 61].<sup>3</sup> Weiterhin resultiert aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung.

Infolge der magnetischen Felder treten zusätzlich zu rein thermomechanischen Problemstellungen ponderomotorische Kraft-, Momenten- und Leistungsdichten auf, vgl. GROOT & SUTTORP [49], ERINGEN & MAUGIN [34] oder PAO [121].<sup>4</sup> Diese resultieren aus einer statistischen Mittelung von Größen quantenmechanischer Theorien und sind in den entsprechenden Bilanzen zu berücksichtigen. Dabei seien lediglich quasistationäre Prozesse gemäß der Gleichungen (2.15a) und (2.15b) – d. h. solche mit ausreichend langsamer Änderung magnetischer Felder, nicht polarisierbarer Materie sowie Gebiete ohne freie Ladungs- und Stromdichten – betrachtet. Somit sind die ponderomotorischen Kraft-, Momenten- und Leistungsdichten durch

$$\mathbf{f}^{\text{pon}} := (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{c}^{\text{pon}} := \mathbf{m} \times \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}^{\text{pon}} := \mathbf{f}^{\text{pon}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{b}} \quad (2.26)$$

---

<sup>3</sup>In materieller Form lassen sich die Bilanz einer auf  $d\mathbf{v}$  bezogenen Dichtegröße  $\phi$  sowie die zugehörige Sprungbedingung stets in der Form

$$\dot{\phi} + \phi \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} + \varphi \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad \text{und} \quad \hat{\psi} + \mathbf{n} \cdot \llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$$

angeben. Hier bezeichnen  $\boldsymbol{\psi}$  und  $\varphi$  Fluss- bzw. Quellterme im Gebiet  $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}^3$ . Die Größe  $\hat{\psi}$  kennzeichnet einen Flächenquellterm auf der Sprungfläche  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^3$ .

<sup>4</sup>Neben der Einbindung ponderomotorischer Kopplungsterme über Kraft-, Momenten- und Leistungsdichten lassen sich die gekoppelten magneto-mechanischen Feldgleichungen auch über die Bilanzierung von Gesamtimpuls, -drehimpuls und -energie und eine anschließende Vereinfachung durch Annahmen bestimmen.

gegeben [34]. Um die Formulierung und numerische Umsetzung des gekoppelten Feldproblems zu erleichtern, ist es allerdings zweckmäßig, die Kraftdichte  $\mathbf{f}^{\text{pon}}$  implizit durch die Divergenz eines ponderomotorischen CAUCHY-Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{pon}}$ , also gemäß

$$\mathbf{f}^{\text{pon}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{pon}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{pon}} = \frac{1}{\mu_0} \left[ \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} - \frac{1}{2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{i} \right] + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{i} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{m}, \quad (2.27)$$

darzustellen [30].

### Thermomechanische Bilanzen

Im Folgenden sind die angesprochenen Bilanzgleichungen in kurzer Form dargelegt. Es werden weiterhin lediglich materielle Sprungflächen, also solche mit  $\mathbf{w}^S = \mathbf{v}$ , betrachtet. Eine Diskussion vereinfachender thermischer und mechanischer Annahmen folgt im Anschluss.

#### Allgemeiner Gleichungssatz

Die lokale Massenbilanz, formuliert für die Massendichte  $\varrho$  der Konfiguration  $\mathcal{B}$ , ist durch

$$\dot{\varrho} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.28)$$

gegeben. Im Rahmen der LAGRANGESchen Betrachtung lässt sich die Massenbilanz (2.28) durch Integration in die algebraische Form  $J\dot{\varrho} - \varrho_0 = 0$ , die in dieser Arbeit lediglich zur Umrechnung der Massendichten dient, überführen.<sup>5</sup> Dabei bezeichnet  $\varrho_0$  die Massendichte der Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$ .

Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.28), der ponderomotorischen Volumenkraftdichte gemäß (2.26)<sub>1</sub> und Gleichung (2.27) folgt für die Bilanz des mechanischen Impulses

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}} + \varrho \mathbf{f} = \varrho \dot{\mathbf{v}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}} \rrbracket + \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \text{ auf } \mathcal{S}. \quad (2.29)$$

Darin bezeichnen  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}}$ ,  $\mathbf{f}$  und  $\hat{\mathbf{t}}$  den totalen CAUCHY-Spannungstensor, eine auf das Massenelement  $dm := \varrho dv$  bezogene spezifische mechanische Kraft sowie einen auf der Sprungfläche  $\mathcal{S}$  vorzugebenden Spannungsvektor, wobei  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}} := \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{pon}}$  als Summe des mechanischen und ponderomotorischen Spannungstensors definiert ist [30, 34, 49].

Unter Berücksichtigung der Massen- und Impulsbilanz sowie der ponderomotorischen Momentendichte  $\mathbf{c}^{\text{pon}}$  gemäß (2.26)<sub>2</sub> folgt aus der Bilanz des mechanischen Drehimpulses bzgl. eines beliebigen Bezugspunktes  $O \in \mathcal{R}^3$  der Zusammenhang

$$\mathbf{0} = \text{skw}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{b}) = \text{skw} \boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}} \quad (2.30)$$

Aus der obigen Gleichung ist ersichtlich, dass die mechanische CAUCHY-Spannung im Gegensatz zur Totalspannung  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}}$  im Allgemeinen nicht symmetrisch ist. Dies tritt insbesondere bei

<sup>5</sup>Mit  $\dot{J} = J \nabla \cdot \mathbf{v}$  folgt durch Trennung der Veränderlichen und anschließende Integration der Gleichung (2.28) gemäß

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} = - \int_{J_0}^J \frac{dJ}{J} = \int_{t_0}^t C dt$$

die algebraische Form der Massenbilanz  $\varrho_0 \varrho^{-1} = J$ . Dabei bezeichnet  $J_0 = 1$  die JACOBI-Determinante zur Zeit  $t_0$ .

anisotropen oder hartmagnetischen MRE auf, ist jedoch auch im Fall von weichmagnetischen isotropen Materialien zu beobachten. Die auftretende Anisotropie des Magnetisierungsverhaltens resultiert dabei aus der aufgeprägten Deformation, s. Kapitel 6.

Neben den bisherigen Bilanzierungen von Masse, Impuls und Drehimpuls ist ebenso eine Betrachtung der Energie notwendig. Eine Bilanzierung der spezifischen inneren Energie  $u$  und der kinetischen Energiedichte  $\mathcal{E}^{\text{kin}} := 1/2\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  führt folglich auf

$$\frac{d}{dt} \left( \rho u + \mathcal{E}^{\text{kin}} \right) + \left( \rho u + \mathcal{E}^{\text{kin}} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathcal{P}^{\text{mech}} + \mathcal{P}^{\text{therm}} + \mathcal{P}^{\text{pon}} . \quad (2.31)$$

Hier bezeichnen  $\mathcal{P}^{\text{mech}} := \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v})$  und  $\mathcal{P}^{\text{therm}} := \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}$  die mechanische bzw. thermische Leistungsdichte. Weiterhin kennzeichnet  $r$  die spezifische innere Wärmeproduktionsrate und  $\mathbf{q}$  den auf  $d\mathbf{a}$  bezogenen Wärmestrom. Unter Berücksichtigung der zuvor eingeführten Bilanzgleichungen (2.28) und (2.29) sowie der ponderomotorischen Leistungsdichte gemäß (2.26)<sub>3</sub> lassen sich die lokale Energiebilanz und die zugehörige Sprungbedingung schließlich in der Form

$$\rho \dot{u} = -\mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad \text{und} \quad 0 = \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{q} \rrbracket \quad \text{auf } \mathcal{S} \quad (2.32)$$

angeben. Dabei ist in dieser Form der Bilanz der Energieanteil der magnetischen Freifeldterme, also  $\rho w^{\text{frei}} := 1/(2\mu_0)\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ , abgezogen. Folglich lässt sich die Energiebilanz ebenso für die erweiterte innere Energie  $w := u + w^{\text{frei}}$  angeben:

$$\rho \dot{w} = \mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) + \frac{1}{2\mu_0} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad \text{und} \quad 0 = \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{q} \rrbracket \quad \text{auf } \mathcal{S} . \quad (2.33)$$

Zusätzlich zur energetischen Betrachtung ist letztlich noch die Entropie als weitere thermodynamische Zustandsgröße einzuführen. Unter der Annahme, dass Entropiestrom  $\mathbf{z}$  und Entropiequelle  $z$  ausschließlich durch Wärmezufuhr verursacht sind, also  $\mathbf{z} = \vartheta^{-1}\mathbf{q}$  und  $z = \vartheta^{-1}r$  gelten, ergibt sich unter Berücksichtigung der zuvor eingeführten Bilanzgleichungen die lokale Form der Entropiebilanz zu

$$\rho \vartheta \dot{s} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\vartheta} \mathbf{q} \cdot \nabla \vartheta + \rho r + \rho \zeta \quad \text{mit} \quad 0 = \llbracket \vartheta \rrbracket \quad \text{auf } \mathcal{S} . \quad (2.34)$$

Dabei bezeichnen  $s$  die spezifische Entropie,  $\vartheta \in \mathcal{R}_+$  die absolute Temperatur und  $\zeta$  die spezifische, nicht kontrollierbare spontane Entropie-Produktionsrate.

Gemäß des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik muss für die spontane Entropieproduktion  $\zeta$  die Forderung  $\rho \zeta \geq 0$  an jedem Punkt  $\mathcal{P} \in \mathcal{K}$  gelten [48]. In Verbindung mit Gleichung (2.34) ergibt sich demnach die Entropieungleichung

$$\rho \vartheta \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{q} \cdot \nabla \vartheta - \rho r \geq 0 . \quad (2.35)$$

Über eine LEGENDRE-FENCHEL-Transformation kann weiterhin die spezifische freie HELMHOLTZ-Energie

$$\psi(\cdots, \vartheta) := \inf_{s \in \mathcal{R}} \left\{ u(\cdots, s) - \vartheta s \right\} \quad (2.36)$$

eingeführt werden, wobei die weiteren als unabhängige Variablen gewählten Größen von  $\psi$  und  $u$  vorerst bewusst ausgespart sind. Somit lässt sich schließlich unter Ausnutzung der Energiebilanz (2.32) der als CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung (CDU) bezeichnete Zusammenhang

$$-\varrho(\dot{\psi} + \dot{\vartheta}s) - \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{q} \cdot \nabla \vartheta \geq 0 \quad (2.37)$$

angeben.

### Reduzierter Gleichungssatz

Da im Folgenden thermische Effekte keine Berücksichtigung finden, lassen sich die zuvor angegebenen Bilanzgleichungen (2.28) – (2.37) reduzieren. Für  $\dot{\vartheta} = 0$  und  $\nabla \vartheta = \mathbf{0}$  sowie vernachlässigte Trägheitsterme  $\varrho \dot{\mathbf{v}}$  und mechanische Volumenlasten  $\varrho \mathbf{f}$  folgen:

$$J\varrho - \varrho_0 = 0, \quad (2.38a)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}} = \mathbf{0} \text{ mit } \mathbf{n} \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}} \rrbracket = -\hat{\mathbf{t}} \text{ auf } \mathcal{S}, \quad (2.38b)$$

$$\text{skw } \boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}} = \mathbf{0} \text{ und} \quad (2.38c)$$

$$-\varrho \dot{\psi} - \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \geq 0. \quad (2.38d)$$

Unter den getroffenen Vereinfachungen entfällt die Energiebilanz vollständig, da diese keine unabhängige Gleichung darstellt.

### Bezug auf die Referenzkonfiguration

Wie bereits in Abschnitt 2.1.2 erwähnt, sind die eingeführten Bilanzgleichungen auf die Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$  zu transformieren. Dazu werden der totale 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor und der zugehörige auf  $\mathcal{S}_0$  vorgegebene Spannungsvektor gemäß

$$\mathbf{P}^{\text{tot}} := J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{p}} := J|\mathbf{F}^{-\text{T}} \cdot \mathbf{N}| \hat{\mathbf{t}}. \quad (2.39)$$

eingeführt. Dabei ist zu beachten, dass es sich bei  $\mathbf{P}^{\text{tot}} = P_{Kl}^{\text{tot}} \mathbf{E}_K \otimes \mathbf{e}_l$ , ebenso wie beim Deformationsgradienten  $\mathbf{F} = F_{IK} \mathbf{e}_I \otimes \mathbf{E}_K$ , um einen Zweipunkt-Tensor handelt. Weiterhin ist es für die nachfolgenden Diskussionen zweckmäßig, die erweiterte freie HELMHOLTZsche Energiedichte

$$\Omega := \varrho_0 \psi + \frac{1}{2\mu_0} J^{-1} \mathbf{C} : (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) \quad (2.40)$$

nach DORFMANN & OGDEN [32] einzuführen. Hierin ist der als Freifeldterm  $\Omega^{\text{frei}}$  bezeichnete zweite Summand die zurücktransformierte freie Energiedichte des Terms  $1/(2\mu_0) \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} dv$ . Unter

Ausnutzung der Relationen (2.12a)<sub>2</sub>, (2.13)<sub>1</sub> und (2.14a)<sub>1</sub> ergeben sich mit (2.39) und (2.40) die Impuls- und Drehimpulsbilanz sowie die CDU zu

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P}^{\text{tot}} = \mathbf{0} \text{ mit } \mathbf{N} \cdot \llbracket \mathbf{P}^{\text{tot}} \rrbracket = -\hat{\mathbf{p}} \text{ auf } \mathcal{S}_0, \quad (2.41a)$$

$$\text{skw}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^{\text{tot}}) = \mathbf{0} \text{ und} \quad (2.41b)$$

$$-\dot{\mathcal{Q}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{P}^{\text{tot}} : \dot{\mathbf{F}} \geq 0, \quad (2.41c)$$

s. Anhang B. Wie aus (2.41b) ersichtlich wird, ist der Spannungstensor  $\mathbf{P}^{\text{tot}}$  im Gegensatz zu  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}}$  nicht symmetrisch. Es ist daher zweckmäßig, ein weiteres, vollständig auf  $\mathcal{B}_0$  bezogenes Spannungsmaß gemäß

$$\mathbf{T}^{\text{tot}} := J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{tot}} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{T}} := J|\mathbf{F}^{-\text{T}} \cdot \mathbf{N}|\mathbf{F}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{t}}. \quad (2.42)$$

zu definieren. Dabei bezeichnen  $\mathbf{T}^{\text{tot}}$  den totalen zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor und  $\hat{\mathbf{T}}$  einen zugehörigen auf  $\mathcal{S}_0$  vorzugebenden Spannungsvektor. Unter Anwendung dieser Transformationen folgen schließlich:

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{T}^{\text{tot}} \cdot \mathbf{F}^{\text{T}}) = \mathbf{0} \text{ mit } \mathbf{N} \cdot \llbracket \mathbf{T}^{\text{tot}} \cdot \mathbf{F}^{\text{T}} \rrbracket = -\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} \text{ auf } \mathcal{S}_0, \quad (2.43a)$$

$$\text{skw } \mathbf{T}^{\text{tot}} = \mathbf{0} \text{ und} \quad (2.43b)$$

$$-\dot{\mathcal{Q}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{T}^{\text{tot}} : \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} \geq 0. \quad (2.43c)$$

## 2.1.4 Konstitutive Gleichungen

Zur Vervollständigung der Feldgleichungen ist letztendlich noch die Angabe eines konstitutiven Gleichungssatzes notwendig. Dazu werden die tensoriellen Feldgrößen nun in abhängige und unabhängige Zustandsvariablen untergliedert. Dem Formalismus der rationalen Thermodynamik folgend, seien bei der Formulierung von Materialgleichungen einige grundlegende, axiomatische Prinzipien befolgt:

- (i) Gemäß dem *Prinzip des Determinismus* können nur Ereignisse aus der Vergangenheit Einfluss auf das aktuelle Verhalten des Kontinuums haben. Zum Zeitpunkt  $t$  sind also lediglich die unabhängigen Variablen zu den Zeiten  $\tau \leq t$  für die abhängigen Zustandsvariablen relevant.
- (ii) Nach dem *Prinzip der lokalen Wirkung* hat nur die nähere Umgebung eines Punktes  $\mathcal{P} \in \mathcal{K}$  Einfluss auf die lokalen abhängigen Variablen. Im speziellen Fall hat nur die infinitesimale Umgebung einen Einfluss und das Material wird als einfach bezeichnet.
- (iii) Nach dem *Prinzip der materiellen Objektivität* in der aktiven Interpretation darf sich das Materialverhalten nicht ändern, wenn der Körper  $\mathcal{K}$  eine beliebige Starrkörperbewegung durchführt. Diese Starrkörperbewegung ist durch die Ortsvektoren

$$\mathbf{x}^* := \mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{L}_2 \mid \boldsymbol{\tau}^{\text{T}} = \boldsymbol{\tau}^{-1}, \det \boldsymbol{\tau} = 1\} \quad (2.44)$$

der Konfiguration  $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{R}^3$  ausgedrückt. Dabei bezeichnet  $\mathbf{q}$  einen eigentlich orthogonalen Tensor und  $\mathbf{c}$  einen Verschiebungsvektor. Im Allgemeinen gilt, dass LAGRAN-

gesche Tensoren – also solche mit Bezug auf die Konfiguration  $\mathcal{B}_0$  – stets objektiv sind [2, 48].

- (iv) Bei der Modellierung von Materialien werden gemäß des *Prinzips der Äquipräsenz* für alle abhängigen Variablen vorerst die gleichen unabhängigen Variablen zugelassen.
- (v) Letztlich müssen die Materialgleichungen stets *physikalisch konsistent*, also ohne Widerspruch zu den zuvor eingeführten Feld- und Bilanzgleichungen, sein. Besondere Bedeutung kommt dabei der Einhaltung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik – hier in Form der CDU (2.43c) gegeben – zu. Man spricht daher häufig auch von *thermodynamischer Konsistenz*.

### Formulierung mittels $\mathbf{C}$ und $\mathbf{B}$

Im Rahmen der zuvor genannten Einschränkungen und den Prinzipien (i) – (iv) folgend, sei ein magneto-mechanisches, konstitutives Modell nun implizit durch die Funktionen

$$\Omega = \Omega(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^n, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^m), \quad (2.45)$$

$$\mathbf{T}^{\text{tot}} = \mathbf{T}^{\text{tot}}(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^n, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^m) \text{ und} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^n, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^m) \quad (2.47)$$

in Abhängigkeit der als unabhängige konstitutive Variablen gewählten Größen  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{Z}^\alpha$  und  $\mathbf{Z}^\beta$  beschrieben. Dabei bezeichnen  $\mathbf{Z}^\alpha \in \mathcal{L}_2$  und  $\mathbf{Z}^\beta \in \mathcal{L}_1$  potentielle mechanische und magnetische innere Variablen, die zur Erfassung der Lastgeschichte an einem beliebigen materiellen Punkt  $\mathcal{P} \in \mathcal{K}$  des Körpers dienen. Gemäß HAUPT [56] lässt sich deren zeitliche Änderung durch einen Satz von Evolutionsgleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{Z}}^\alpha = \dot{\mathbf{Z}}^\alpha(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^n, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^m) \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad (2.48)$$

$$\dot{\mathbf{Z}}^\beta = \dot{\mathbf{Z}}^\beta(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^n, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^m) \quad \forall \beta \in \{1, \dots, m\} \quad (2.49)$$

darstellen. Zur Verkürzung der Notation seien die Abhängigkeiten der eingeführten Funktionen im Folgenden nicht explizit angegeben.

Um die thermodynamische Zulässigkeit des Modells zu gewährleisten, muss der Gleichungssatz (2.45) – (2.49) schließlich den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen. Gemäß dem Vorgehen nach COLEMAN und NOLL [22] folgen durch Auswertung der Ungleichung (2.43c) die Relationen

$$\mathbf{T}^{\text{tot}} = 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{B}} \quad \text{und} \quad \dot{\mathcal{D}} = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{Z}^\alpha} : \dot{\mathbf{Z}}^\alpha - \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{Z}^\beta} \cdot \dot{\mathbf{Z}}^\beta \geq 0 \quad (2.50)$$

Offensichtlich sind also nach (2.50)<sub>3</sub> die freie Energiedichte sowie die Evolutionsgleichungen (2.48) und (2.49) so zu wählen, dass die Dissipationsrate  $\dot{\mathcal{D}}$  stets größer gleich Null ist.

### Formulierung mittels $\mathbf{C}$ und $\mathbf{H}$

Da sich die als unabhängige Variable gewählte Flussdichte  $\mathbf{B}$  direkt aus  $\mathbf{A}$  berechnen lässt, ist die vorgestellte Formulierung geeignet, wenn das magnetische Vektorpotential nach (2.24) zur

Lösung der Feldgleichungen verwendet wird. Soll hingegen das Skalarpotential gemäß Gleichung (2.23) zur Lösung dienen, ist es zweckmäßig, die LEGENDRE-FENCHEL-Transformation

$$\Omega^*(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Z}^\alpha, \mathbf{Z}^\beta) := \inf_{\mathbf{B} \in \mathcal{L}_1} \left\{ \Omega(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{Z}^\alpha, \mathbf{Z}^\beta) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right\} \quad (2.51)$$

durchzuführen [107, 110, 112]. Ebenso wie in Gleichung (2.40) für  $\Omega$  angegeben, lässt sich auch für

$$\Omega^* = \varrho_0 \psi^*(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Z}^\alpha, \mathbf{Z}^\beta) - \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} : (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) \quad (2.52)$$

eine Aufteilung in materialabhängigen Teil  $\psi^*$  und Freifeldanteil  $\Omega^*$ <sup>frei</sup> auffinden.<sup>6</sup> Weiterhin gelten die konstitutiven Relationen

$$\mathbf{T}^{\text{tot}} = 2 \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{B} = - \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{H}} \quad \text{und} \quad \dot{\mathcal{D}}^* = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{Z}^\alpha} : \dot{\mathbf{Z}}^\alpha - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{Z}^\beta} \cdot \dot{\mathbf{Z}}^\beta \geq 0. \quad (2.53)$$

## 2.2 Mehrskalige Betrachtung

Das effektive Verhalten von MRE hängt neben den konstitutiven Eigenschaften der Komponenten maßgeblich von mikrostrukturellen Parametern wie Volumengehalt  $\phi$ , Anordnung oder Form der Partikel, aber auch von der makroskopischen Geometrie ab [73, 81, 88]. Um Einflüsse beider Skalen theoretisch erfassen und untersuchen zu können, ist somit eine mehrskalige Betrachtung unabdingbar. Dazu notwendige wesentliche Prinzipien und Gleichungen werden im Folgenden diskutiert.

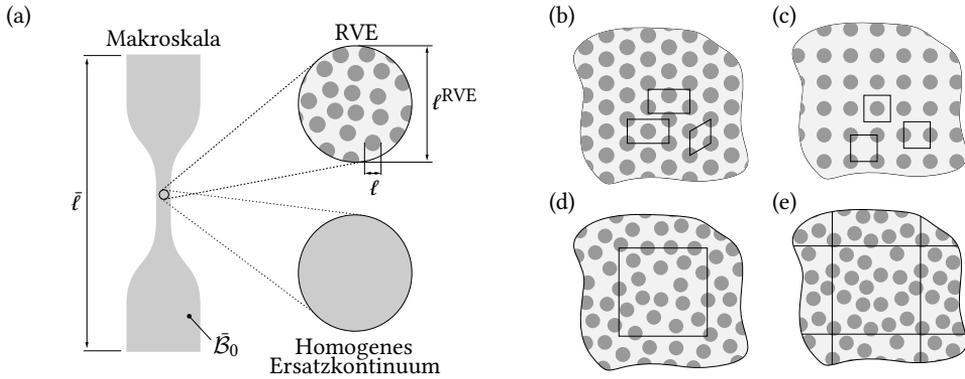
### 2.2.1 Homogenisierung und Lokalisierung

Zunächst seien die Grundlagen des zur Verknüpfung von Mikro- und Makroskala notwendigen Verfahrens mit den Teilschritten:

- (i) Festlegung eines *repräsentativen Volumenelementes (RVE)*, welches die statistischen Eigenschaften der Mikrostruktur wiedergibt,
- (ii) Berechnung effektiver Eigenschaften durch Lösung einer mikroskopischen RWA und anschließende Volumenmittelung (*Homogenisierung*), sowie
- (iii) Bestimmung lokaler Feldverteilungen im RVE durch Lösung einer mikroskopischen RWA bei Vorgabe makroskopischer Größen (*Lokalisierung*)

<sup>6</sup>Die Aufteilung der Energiedichte  $\Omega^*$  geht aus der Ausführung der LEGENDRE-FENCHEL-Transformation (2.52) unter Ausnutzung der LAGRANGESchen Verknüpfungsgleichung von  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M})$  hervor:

$$\begin{aligned} \Omega^*(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \dots) &= \inf_{\mathbf{B} \in \mathcal{L}_1} \left\{ \varrho_0 \psi(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \dots) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} : (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right\} \\ &= \underbrace{\varrho_0 \psi(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \dots) + \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} : [\mathbf{M}(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \dots) \otimes \mathbf{M}(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \dots)]}_{\varrho_0 \psi^*(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \dots)} - \underbrace{\frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} : (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H})}_{-\Omega^* \text{frei}(\mathbf{C}, \mathbf{H})}. \end{aligned}$$



**Abb. 2.3:** Repräsentative Volumenelemente (RVE): (a) Schematische Darstellung und Definition charakteristischer Längen, (b) und (c) ideal hexagonale und kubisch einfache Mikrostrukturen mit Einheitszellen, (d) Auswahl eines RVE aus einer statistischen Anordnung sowie (e) konstruiertes statistisch-periodisches RVE. Darstellung der Abbildungen nach GROSS & SEELIG [50] sowie GOLDMANN [46].

in kurzer Form zusammengefasst. Eine ausführlichere Abhandlung zum Thema ist bspw. in GROSS & SEELIG [50] oder SCHRÖDER & HACKL [146] zu finden.

### Skalenseparation und repräsentative Volumenelemente

Für die Analyse von MRE sei die bereits eingeführte Unterteilung in zwei verschiedene Skalen, die Mikro- und Makroskala, formal definiert. Erstere ist durch eine heterogene Struktur – bestehend aus Matrix  $\mathcal{B}_0^M \subset \mathcal{R}^3$  und Partikeln  $\mathcal{B}_0^P \subset \mathcal{R}^3$  der charakteristischen Länge  $\ell \in \mathcal{R}_+$  – gekennzeichnet, wohingegen die zweite einen als homogen angenommenen makroskopischen Körper  $\bar{\mathcal{B}}_0 \subset \mathcal{R}^3$  mit der charakteristischen Länge  $\bar{\ell} \in \mathcal{R}_+$  betrachtet, vgl. Abb. 2.3(a). Für die eingeführten Längen muss dabei die als Skalenseparation bezeichnete Beziehung

$$\bar{\ell} \gg \ell \quad (2.54)$$

gelten [46, 50, 146]. Zur Kennzeichnung makroskopischer Größen sind diese im Folgenden mit  $(\bar{\bullet})$  markiert. Jedem makroskopischen Punkt  $\bar{X} \in \bar{\mathcal{B}}_0$  lassen sich nun abhängig vom zeitlichen Verlauf der aufgeprägten Deformationen und Magnetfelder Eigenschaften zuordnen, die aus dem Verhalten der Mikrostruktur resultieren. Dazu wird in der Umgebung von  $\bar{X}$  ein repräsentativer Volumenausschnitt des Materials auf der Mikroskala betrachtet und durch Mittelung die effektive Materialantwort des zugeordneten homogenen Ersatzkontinuums bestimmt. Damit diese Mittelung unabhängig vom betrachteten Ort  $\bar{X}$  ist, muss der gewählte mikroskopische Ausschnitt ebenfalls ortsunabhängig sein. Weiterhin darf das berechnete effektive Verhalten nicht von der Größe des Ausschnitts abhängen, sodass dieser die Statistik der Mikrostruktur ausreichend genau abbildet [50]. Ein solcher Ausschnitt wird aufgrund seiner Eigenschaften als RVE bezeichnet.

Handelt es sich um eine ideale – d. h. periodisch fortsetzbare – Struktur, so lässt sich eine Einheitszelle auffinden, mit der die Eigenschaften der mikroskopischen Geometrie aufgrund der Periodizität vollständig beschrieben sind, vgl. Abb. 2.3(b) und (c). In diesem Fall gilt für die

charakteristische Länge  $\ell^{\text{RVE}}$  des RVE  $\mathcal{B}_0^{\text{RVE}} = \mathcal{B}_0^{\text{M}} \cup \mathcal{B}_0^{\text{P}}$  der Zusammenhang  $\ell^{\text{RVE}} \approx \ell$ . Reale Werkstoffe weisen allerdings immer eine mehr oder weniger statistisch geprägte Mikrostruktur auf, sodass eine Einheitszelle nicht mehr existiert. Um die Repräsentativität des zu wählenden Ausschnitts dennoch zu gewährleisten, muss das Gebiet  $\mathcal{B}_0^{\text{RVE}}$  also ausreichend viele Partikel enthalten. Die Beziehung (2.54) erweitert sich somit auf die schärfere Forderung  $\bar{\ell} \gg \ell^{\text{RVE}} \gg \ell$  [46, 50]. Ein mögliches RVE einer zufälligen Partikelverteilung ist in Abb. 2.3(d) dargestellt. Um weiterhin die periodische Fortsetzbarkeit der Zelle zu gewährleisten, kommen allerdings häufig statistisch-periodische RVE gemäß Abb. 2.3(e) zum Einsatz. Da derartige Verteilungen in realen Werkstoffen allerdings nicht auffindbar sind, werden diese algorithmisch generiert. Um dabei Periodizität zu gewährleisten, ist innerhalb des Algorithmus ein auf dem Rand platzierter Einschluss auf den gegenüberliegenden Rand bzw. auf die gegenüberliegenden Ränder zu kopieren [46].

### Definition makroskopischer Größen

Dem Grundgedanken der Homogenisierung folgend, lassen sich makroskopische Tensorgrößen  ${}_{(n)}\bar{\mathbf{T}} \in \mathcal{L}_n$  durch Integration über  $\mathcal{B}_0^{\text{RVE}}$  bzw.  $\mathcal{B}^{\text{RVE}}$  bestimmen. Im Folgenden seien die entsprechenden Operationen durch

$$\langle (\bullet) \rangle_0 := \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\mathcal{B}_0^{\text{RVE}}} (\bullet) \, dV \quad \text{und} \quad \langle (\bullet) \rangle := \frac{1}{v^{\text{RVE}}} \int_{\mathcal{B}^{\text{RVE}}} (\bullet) \, dv \quad (2.55)$$

definiert. Gemäß CHATZIGEORGIOU et al. [20] sind nun im Rahmen der hier betrachteten geometrisch nichtlinearen Theorie die Größen

$$\bar{\mathbf{F}} := \langle \mathbf{F} \rangle_0 \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{P}}^{\text{tot}} := \langle \mathbf{P}^{\text{tot}} \rangle_0 \quad \text{sowie} \quad (2.56a)$$

$$\bar{\mathbf{B}} := \langle \mathbf{B} \rangle_0 \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{H}} := \langle \mathbf{H} \rangle_0 \quad (2.56b)$$

mittels Gleichung (2.55)<sub>1</sub> definiert.<sup>7</sup> Weiterhin folgt aus der Definition des Deformationsgradienten (2.5)<sub>1</sub> sowie der Divergenzfreiheit von  $\mathbf{P}^{\text{tot}}$  gemäß (2.41a) der Zusammenhang des Mittelwertes dieser Tensorgrößen mit den Randintegralen

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \oint_{\partial \mathcal{B}_0^{\text{RVE}}} \mathbf{x} \otimes \mathbf{N} \, dA \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{P}}^{\text{tot}} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \oint_{\partial \mathcal{B}_0^{\text{RVE}}} \mathbf{X} \otimes \mathbf{p}^{\text{tot}} \, dA, \quad (2.57)$$

wobei  $\mathbf{p}^{\text{tot}} := \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^{\text{tot}}$  gilt. Ebenso lassen sich für eine Skalarpotential-Formulierung mittels (2.17) und (2.21a) bzw. für eine Vektorpotential-Formulierung mittels (2.18) und (2.21b) die Randintegrale

$$\bar{\mathbf{H}} = -\frac{1}{V^{\text{RVE}}} \oint_{\partial \mathcal{B}_0^{\text{RVE}}} \varphi \mathbf{N} \, dA \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \oint_{\partial \mathcal{B}_0^{\text{RVE}}} \eta \mathbf{X} \, dA \quad \text{bzw.} \quad (2.58)$$

<sup>7</sup>Die Wahl dieser Größen ist willkürlich, ist aber in der Literatur als Standard vorzufinden. Ebenso wäre auch die Wahl anderer energetisch konjugierter Größen, wie beispielsweise  $\bar{\mathbf{T}}$  und  $\bar{\mathbf{E}}$  sowie  $\bar{\mathbf{b}}$  und  $\bar{\mathbf{h}}$  möglich.

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \oint_{\partial \mathcal{B}_0^{\text{RVE}}} \mathbf{N} \times \mathbf{A} \, dA \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \oint_{\partial \mathcal{B}_0^{\text{RVE}}} \frac{1}{2} \mathbf{X} \times \mathbf{K} \, dA \quad (2.59)$$

herleiten. Dabei gelten die Definitionen  $\boldsymbol{\eta} := \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}$  sowie  $\mathbf{K} := \mathbf{H} \times \mathbf{N}$ .

Durch Anwendung der in Abschnitt 2.1 eingeführten Relationen, lassen sich dann aus  $\bar{\mathbf{F}}$ ,  $\bar{\mathbf{P}}^{\text{tot}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$  und  $\bar{\mathbf{H}}$  die makroskopischen Tensoren  $\bar{\mathbf{M}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\bar{\mathbf{h}}$  und  $\bar{\mathbf{m}}$  sowie  $\bar{\mathbf{C}}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}$ ,  $\bar{\mathbf{T}}^{\text{tot}}$ ,  $\bar{\mathbf{T}}^{\text{pon}}$ ,  $\bar{\mathbf{T}}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{tot}}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{pon}}$  und  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass die Berechnung sogar ausdrücklich über die genannten Relationen und nicht durch Anwendung der Mittelungsoperatoren gemäß (2.55) durchzuführen ist, da es sonst im Allgemeinen zu Widersprüchen in der Definition einiger Größen kommen kann, vgl. SCHRÖDER & HACKL [146].

## Mikroskopische Randbedingungen

### Vektorpotential-Formulierung

Um die gemäß Gleichung (2.56a) und (2.56b) definierten mechanischen und magnetischen Größen aufzuprägen bzw. zu bestimmen, ist die Formulierung einer mikroskopischen RWA notwendig. Neben der Definition des RVE und der Vorgabe konstitutiver Eigenschaften von Partikeln und Matrix sind also im Fall einer Vektorpotential-Formulierung zu den partiellen Differentialgleichungen (PDGL)  $\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P}^{\text{tot}} = \mathbf{0}$  und  $\nabla_{\mathbf{X}} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  zugehörige RB auf  $\partial \mathcal{B}_0^{\text{RVE}}$  vorzugeben. Die Wahl dieser ist dabei durch die im magneto-mechanischen Fall gemäß

$$\bar{\mathbf{P}}^{\text{tot}} : \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{B}}} = \langle \mathbf{P}^{\text{tot}} : \dot{\mathbf{F}} \rangle_0 + \langle \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} \rangle_0 \quad (2.60)$$

gegebene HILL-MANDEL-Bedingung [59] restriktiert. Beziehung (2.60) drückt die Äquivalenz der makroskopischen und gemittelten mikroskopischen Raten der erweiterten freien Energie sowie der Dissipation, also  $\dot{\bar{\Omega}} + \dot{\bar{\mathcal{D}}}$ , aus und geht aus einer Rücktransformation der Energiebilanz (2.33) unter Annahme isothermer Prozesse hervor.<sup>8</sup> Um Gleichung (2.60) zu erfüllen, lassen sich gemäß ZABIHYAN et al. [174, 175] für jedes Teilproblem drei verschiedene Typen von RB auffinden, wobei in dieser Arbeit lediglich die sogenannten periodischen RB verwendet werden. Dazu ist der Rand  $\partial \mathcal{B}_0^{\text{RVE}}$  gemäß Abb. 2.4(a) in positiven und negativen Rand, also  $\partial \mathcal{B}_0^+$  und  $\partial \mathcal{B}_0^-$ , zu zerlegen. Für den dreidimensionalen Fall sind die RB des mechanischen Teilproblems durch

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\bar{\mathbf{F}}) := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^3 \mid \mathbf{u} = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{u}} \text{ mit } \tilde{\mathbf{u}}^+ = \tilde{\mathbf{u}}^- \} \quad \text{und} \quad (2.64a)$$

<sup>8</sup>Mit der erweiterten inneren Energie  $W := \varrho_0 u + 1/(2\mu_0 J) \mathbf{C} : (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})$  folgt unter Ausnutzung der Transformationen (2.20) und (2.39) sowie  $\dot{\varrho} = -\varrho \nabla \cdot \boldsymbol{\nu}$  und  $\mathbf{Q} := J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}$  die Energiebilanz in der Form

$$\dot{W} = \mathbf{P}^{\text{tot}} : \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \varrho_0 r - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} . \quad (2.61)$$

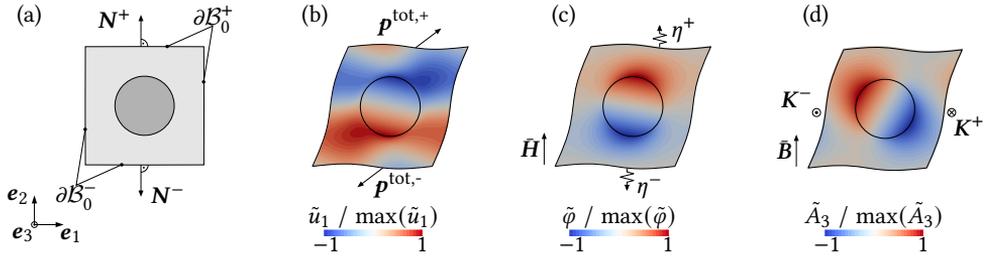
Die Rücktransformation der thermo-magneto-mechanischen CDU (2.37) und anschließende Auswertung nach COLEMAN und NOLL ergibt mit  $\Omega = \Omega(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \vartheta, \mathbf{Z}^\alpha, \mathbf{Z}^\beta)$  den Zusammenhang

$$\dot{\Omega} = \mathbf{P}^{\text{tot}} : \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathcal{D}} - \varrho_0 s \dot{\vartheta} . \quad (2.62)$$

Schließlich lässt sich aus der LEGENDRE-Transformation  $\Omega(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \vartheta, \dots) = W(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \varrho_0 s, \dots) - \vartheta \varrho_0 s$  und der Annahme von Prozessen mit  $\dot{\vartheta} = 0$ ,  $r = 0$  und  $\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} = 0$  sowie Gleichung (2.61) und (2.62) die Beziehung  $\dot{\mathcal{D}} = \varrho_0 \vartheta \dot{s}$  gewinnen, sodass sich die Energiebilanz (2.61) zu

$$\dot{\Omega} + \dot{\mathcal{D}} = \mathbf{P}^{\text{tot}} : \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} \quad (2.63)$$

ergibt.



**Abb. 2.4:** Periodische Randbedingung an einer kubisch einfachen Einheitszelle: (a) Ausgangsgeometrie mit positivem und negativem Rand und (b) – (d) deformierte Geometrie mit Fluktuationsanteilen von Verschiebung, Vektor- und Skalarpotential sowie schematischer Darstellung der antiperiodischen Größen  $\mathbf{p}^{\text{tot}}$ ,  $\mathbf{K}$  und  $\eta$  für Scherung mit  $\bar{F}_{12} = 0,3$ .

$$\mathbf{p}^{\text{tot}} \in \mathcal{P}^{\text{tot}} := \{ \mathbf{p}^{\text{tot}} \in \mathcal{R}^3 \mid (\mathbf{p}^{\text{tot}})^- = -(\mathbf{p}^{\text{tot}})^+ \} \quad (2.64b)$$

gegeben. Dabei kennzeichnet  $(\tilde{\bullet})$  den Fluktuationsanteil einer Größe. Sind  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{p}^{\text{tot}}$  Elemente der eingeführten Räume (2.64a) und (2.64b), lässt sich durch Anwendung des GAUSSSchen Integralsatzes zeigen, dass mit dieser Wahl der mechanische Anteil der HILL-MANDEL-Bedingung (2.60) stets erfüllt ist, falls  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^{\text{tot}} = \mathbf{0}$  gilt. Aus (2.64a) geht weiterhin die Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}}$  in Mittelwert und Fluktuationsanteil hervor.

Für den magnetischen Anteil gelten die RB

$$\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\bar{\mathbf{B}}) := \left\{ \mathbf{A} \in \mathcal{R}^3 \mid \mathbf{A} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}} \times \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{A}} \text{ mit } \tilde{\mathbf{A}}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^- \right\} \text{ und} \quad (2.65a)$$

$$\mathbf{K} \in \mathcal{K}^H := \{ \mathbf{K} \in \mathcal{R}^3 \mid \mathbf{K}^- = -\mathbf{K}^+ \} . \quad (2.65b)$$

Aus (2.65a) folgt in Äquivalenz zu  $\mathbf{F}$  die Zerlegung  $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}}$ . Die Gültigkeit der magnetischen Anteile von (2.60) für  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\bar{\mathbf{B}})$ ,  $\mathbf{K} \in \mathcal{K}^H$  lässt sich erneut durch Anwendung des GAUSSSchen-Integralsatzes sowie  $\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  zeigen. Werden zweidimensionale Problemstellungen behandelt, ändert sich die Definition der zuvor eingeführten Funktionsräume. Eine entsprechende Diskussion ist im anschließenden Kapitel 3 zu finden.

### Skalarpotential-Formulierung

Findet statt einer Vektorpotential-Formulierung das Skalarpotential zur Lösung des magnetischen Teilproblems Anwendung, ist es zweckmäßig  $\mathbf{H}$  statt  $\mathbf{B}$  als unabhängige konstitutive Variable zu wählen. Somit folgt für die HILL-MANDEL-Bedingung dann die Beziehung

$$\bar{\mathbf{P}}^{\text{tot}} : \dot{\tilde{\mathbf{F}}} - \bar{\mathbf{B}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}} = \langle \mathbf{P}^{\text{tot}} : \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \rangle_0 - \langle \mathbf{B} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{H}}} \rangle_0 \quad (2.66)$$

und es sind RB für die PDGL  $\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{B} = 0$  vorzugeben.<sup>9</sup> Diese sind durch

$$\varphi \in \mathcal{P}(\bar{\mathbf{H}}) := \{ \varphi \in \mathcal{R} \mid \varphi = -\bar{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{X} + \tilde{\varphi} \text{ mit } \tilde{\varphi}^+ = \tilde{\varphi}^- \} , \quad (2.67a)$$

$$\eta \in \mathcal{E} := \{ \eta \in \mathcal{R} \mid \eta^- = -\eta^+ \} \quad (2.67b)$$

definiert, sodass für die LAGRANGESche magnetische Feldstärke  $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{H}}$  gilt. Die Wahl der RB für das mechanische Teilproblem bleibt unbeeinflusst. Erneut lässt sich die Gültigkeit der magnetischen Anteile von (2.66) für  $\varphi \in \mathcal{P}(\bar{\mathbf{H}})$ ,  $\eta \in \mathcal{E}$  durch Anwendung des GAUSSSchen-Integralsatzes sowie  $\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{B} = 0$  zeigen.

Die Fluktuationsanteile von Verschiebung, Vektor- und Skalarpotential sind für eine zweidimensionale kubische Einheitszelle unter Scherung in Abb. 2.4(b) – (d), dargestellt.

### Lösung der mikroskopischen RWA

Zur Umsetzung der Homogenisierungs- bzw. Lokalisierungsoperation ist schließlich die durch das System von PDGL, RB und Materialgleichungen definierte mikroskopische RWA zu lösen. Diese erweitert sich im Falle dissipativen Materialverhaltens auf eine Anfangs-Randwertaufgabe (ARWA), da für die inneren Variablen Anfangsbedingungen (AB) vorzugeben sind. Eine erste Möglichkeit besteht dabei in der Anwendung analytischer Methoden, wie etwa in GALIPEAU & PONTE CASTAÑEDA [37], GALIPEAU et al. [39], LÈVEVRE et al. [88] oder PONTE CASTAÑEDA & GALIPEAU [127] dargelegt. Diese Methoden sind sehr effizient, jedoch mit Annahmen oder Restriktionen hinsichtlich Form- und Verteilung der Einschlüsse sowie dem konstitutiven Verhalten der Komponenten verbunden.

Universeller einsetzbar sind FE-basierte Verfahren, wie sie für MRE in DANAS [24], JAVILI et al. [67], KALINA et al. [72, 74], KEIP & RAMBAUSEK [80, 81], METSCH et al. [104, 105], MUKHERJEE et al. [115], RAMBAUSEK et al. [134] oder ZABIHYAN et al. [174, 175] zu finden sind. In der vorliegenden Arbeit soll daher die numerische Lösung auf Basis der in Kapitel 3 diskutierten FE-Formulierung präferiert werden.

### 2.2.2 Multiskalenschemata

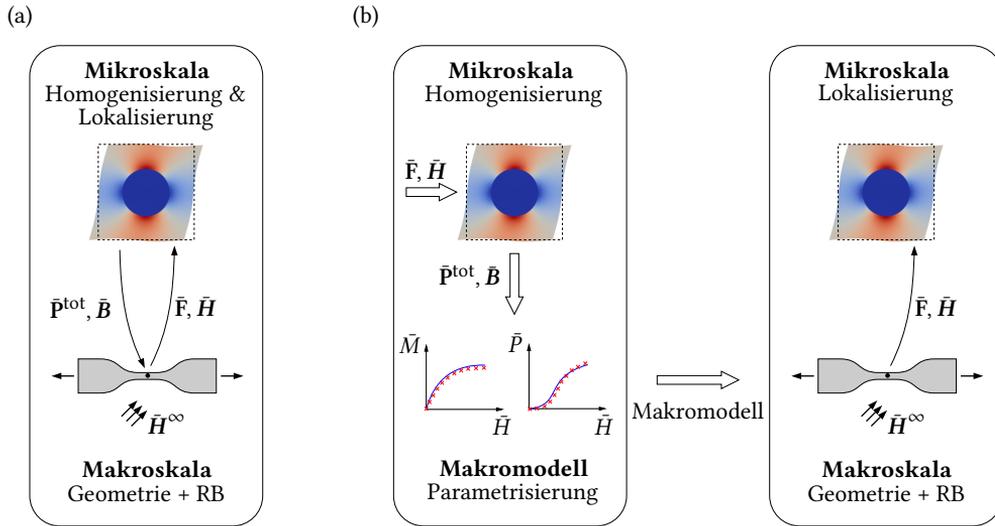
Mittels der im vorherigen Teilabschnitt eingeführten Methodik lässt sich einerseits einem makroskopischen Punkt  $\bar{\mathbf{X}} \in \bar{\mathcal{B}}_0$  durch Homogenisierung die effektive Materialantwort zuweisen oder durch Lokalisierung die mikroskopische Feldverteilung in der Umgebung von  $\bar{\mathbf{X}}$  bestimmen. Auf Basis dieser beiden Schritte ist nun die mehrskalige Modellierung eines makroskopischen Körpers auf zwei unterschiedlichen Wegen möglich, dem gekoppelten und dem entkoppelten Multiskalenschema.

#### Gekoppeltes Multiskalenschema (FE<sup>2</sup>)

Eine erste Möglichkeit zur Umsetzung der mehrskaligen Betrachtung besteht in der Nutzung eines FE<sup>2</sup>-Schemas, welches für MRE in KEIP & RAMBAUSEK [80, 81], RAMBAUSEK et al. [136] oder ZABIHYAN et al. [175] zu finden ist. Wie in Abb. 2.5(a) dargestellt, ermöglicht diese

<sup>9</sup>Mit (2.51) und (2.53) ergibt sich analog zur C-B-basierten Formulierung

$$\hat{\mathcal{Q}}^* + \hat{\mathcal{D}}^* = \mathbf{P}^{\text{tot}} : \hat{\mathbf{F}} - \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{H}} .$$

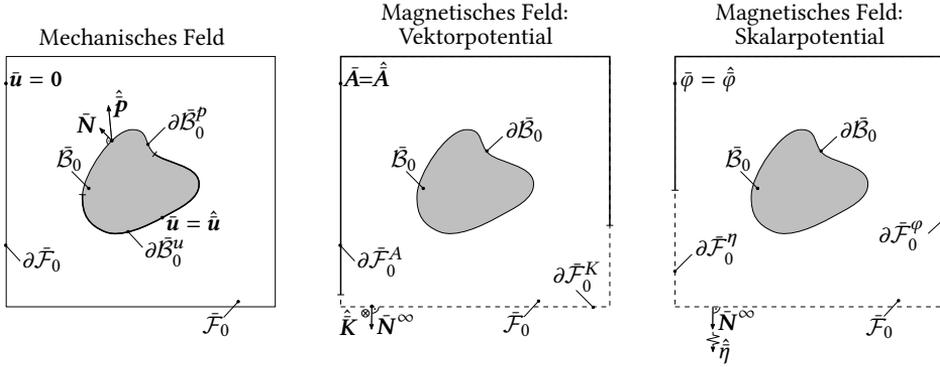


**Abb. 2.5:** Schematische Darstellung der mehrskaligen Simulation von MRE: (a) voll gekoppeltes FE<sup>2</sup>-Schema und (b) entkoppeltes Multiskalenschema. Die Kennzeichnung von Variablen mit einem Überstrich markiert makroskopische Größen.

Methode die vollständige Kopplung der mikroskopischen und makroskopischen Skalen ohne die Notwendigkeit der expliziten mathematischen Formulierung des effektiven Materialverhaltens. Sie ist somit bei Kenntnis der Mikrostruktur und den konstitutiven Eigenschaften der Einzelkomponenten universell für beliebige Bauteil- und Probengeometrien einsetzbar. Entscheidender Nachteil ist allerdings der sehr hohe Rechenaufwand, welcher aus der Lösung der mikroskopischen RWA zur Homogenisierung und Lokalisierung an jedem Integrationspunkt des makroskopischen FE-Netzes resultiert. Durch die im Allgemeinen notwendige iterative Lösung erhöht sich dieser Aufwand nochmals.

### Entkoppeltes Multiskalenschema

Eine Alternative zur vergleichsweise rechenintensiven FE<sup>2</sup>-Methode stellt die Anwendung eines entkoppelten Multiskalenschemas nach TERADA et al. [159] dar. Dabei wird vorerst das effektive Verhalten für verschiedene Lastfälle aus einer Homogenisierung bestimmt und dann ein geeignetes konstitutives Modell, das sogenannte Makromodell, an diese Daten angepasst. Mit diesem können nun makroskopische RWA gelöst werden, wobei der Einfluss der Mikrostruktur implizit durch das Makromodell erfasst wird. Somit entfällt im Gegensatz zur FE<sup>2</sup>-Methode die explizite Lösung der mikroskopischen RWA an jedem Integrationspunkt. Naturgemäß geht mit dem reduzierten numerischen Aufwand der Verlust der im Rahmen der Homogenisierungstheorie exakten Skalenkopplung einher, da sich im Allgemeinen kein für alle makroskopisch auftretenden Lastmoden beliebig genaues konstitutives Modell auffinden lässt. Weiterhin kann die Formulierung eines solchen Modells unter Umständen extrem kompliziert sein. Die mikroskopische Feldverteilung in der Umgebung eines makroskopischen Punktes lässt sich bei Bedarf durch eine Lokalisierung, also die Aufbringung der makroskopischen Fel-



**Abb. 2.6:** Makroskopische Rand- und Übergangsbedingungen für ein MRE mit dem Gebiet  $B_0$  eingebettet in Vakuum  $F_0$ : (a) Vorgaben für das mechanische Feldproblem und (b) und (c) Vorgaben für das magnetische Feldproblem für Vektor- bzw. Skalarpotential-Formulierung. Darstellung der Abbildung gemäß GEBHART & WALLMERSPERGER [43].

der  $\bar{\mathbf{F}}$  und  $\bar{\mathbf{H}}$  bzw.  $\bar{\mathbf{B}}$  am RVE, bestimmen. Das entkoppelte Multiskalenschema ist in Abb. 2.5(b) veranschaulicht.

Für MRE ist ein solches Vorgehen auf Basis analytischer Homogenisierungsmethoden in LEFÈVRE et al. [88] oder MUKHERJEE et al. [115] diskutiert, die jedoch nur bis zu begrenzten Partikelvolumengehalten von  $\phi = 20\%$  ausreichend genau sind [115]. In dieser Arbeit soll daher die auf einem numerischen Homogenisierungsverfahren basierte Methodik gemäß KALINA et al. [73] Anwendung finden. Diese ist auch für höhere Volumengehalte einsetzbar, erfordert jedoch einen gewissen Rechenaufwand zur Generierung der benötigten Datensätze.

### 2.2.3 Makroskopische Randbedingungen

Der Satz von Gleichungen der makroskopischen RWA wird durch geeignete RB komplettiert. Wie in Abb. 2.6 dargestellt, ist das MRE in einen Bereich mit verschwindender mechanischer Steifigkeit und Magnetisierbarkeit, im folgenden als Vakuum mit dem Gebiet  $F_0$  und äußerer Berandung  $\partial F_0$  bezeichnet, eingebettet. Da das magnetisierbare MRE in seiner Umgebung die magnetischen Felder stört, gelten allerdings Restriktionen für  $F_0$ . Um in diesem Ausschnitt endlicher Größe die Situation in einem unendlich ausgedehnten Raum mit homogenem Fernfeld mit der Induktion  $\bar{\mathbf{b}}^\infty$  bzw. Feldstärke  $\bar{\mathbf{h}}^\infty$  zu modellieren, muss die größte charakteristische Abmessung  $\bar{\ell}^B$  des MRE im Verhältnis zur Kantenlänge  $\bar{\ell}^F$  des Umgebungsbereiches ausreichend klein sein. Gemäß SALAS & BUSTAMANTE [140] ist der Randeinfluss der Probe dann vernachlässigbar, wenn  $\bar{\ell}^F \geq 10 \max(\bar{\ell}^B)$  gilt.

Da in dieser Arbeit eine LAGRANGESche Betrachtung verwendet wird, ist neben  $\bar{\mathbf{A}}$  bzw.  $\bar{\varphi}$  auch das Verschiebungsfeld innerhalb von  $F_0$  zu bestimmen. Dazu wird  $F_0$  durch ein elastisches Kontinuum mit, im Vergleich zu  $B_0$ , vernachlässigbarer Steifigkeit angenähert.<sup>10</sup> Die magnetischen Eigenschaften von  $F_0$  sind durch  $\bar{\mathbf{b}} = \mu_0 \bar{\mathbf{h}}$  gegeben.

<sup>10</sup>Vorgehensweisen, die eine genauere Beschreibung des umgebenden Vakuums ermöglichen, sind beispielsweise sogenannte moving mesh Methoden, wie sie etwa in BUSTAMANTE et al. [15], PELTERET et al. [122], SALAS & BUSTAMANTE [140] oder SAXENA et al. [144] beschrieben sind.

Für die magneto-mechanischen Rand- und Sprungbedingungen auf der Oberfläche  $\partial\bar{\mathcal{B}}_0$  gelten mit der Aufteilung gemäß Abb. 2.6(a), also  $\partial\bar{\mathcal{B}}_0 = \partial\bar{\mathcal{B}}_0^u \cup \partial\bar{\mathcal{B}}_0^p$  und  $\emptyset = \partial\bar{\mathcal{B}}_0^u \cap \partial\bar{\mathcal{B}}_0^p$ ,

$$\llbracket \bar{\varphi} \rrbracket = 0 \text{ auf } \partial\bar{\mathcal{B}}_0 \quad \text{bzw.} \quad \llbracket \bar{\mathbf{A}} \rrbracket = \mathbf{0} \text{ auf } \partial\bar{\mathcal{B}}_0 \quad \text{sowie} \quad (2.68)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} \text{ auf } \partial\bar{\mathcal{B}}_0^u \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{N}} \cdot \llbracket \bar{\mathbf{P}}^{\text{tot}} \rrbracket + \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial\bar{\mathcal{B}}_0^p. \quad (2.69)$$

Zur Vereinfachung wird die Verschiebung  $\bar{\mathbf{u}}$  auf dem gesamten äußeren Rand  $\partial\bar{\mathcal{F}}_0$  der Vakuum-Box zu null vorgeschrieben, d. h.  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  auf  $\partial\bar{\mathcal{F}}_0$ . Gemäß VOGEL et al. [166] stellt diese Vereinfachung keinen Verlust der Allgemeinheit der untersuchten Problemstellung dar.

Weiterhin wird  $\partial\bar{\mathcal{F}}_0$  in einen magnetischen DIRICHLET- und NEUMANN-Rand unterteilt. Das heißt im Fall einer Skalarpotential-Formulierung gelten  $\partial\bar{\mathcal{F}}_0 = \partial\bar{\mathcal{F}}_0^\varphi \cup \partial\bar{\mathcal{F}}_0^\eta \wedge \emptyset = \partial\bar{\mathcal{F}}_0^\varphi \cap \partial\bar{\mathcal{F}}_0^\eta$ , wobei

$$\bar{\varphi} = \hat{\varphi} \text{ auf } \partial\bar{\mathcal{F}}_0^\varphi \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{N}}^\infty = \hat{\eta} \text{ auf } \partial\bar{\mathcal{F}}_0^\eta \quad (2.70)$$

vorgeschrieben sind. Die Größe  $\bar{\mathbf{N}}^\infty$  bezeichnet den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor der Vakuum-Box. Findet hingegen eine Vektorpotential-Formulierung Anwendung, so gelte für den Rand  $\partial\bar{\mathcal{F}}_0 = \partial\bar{\mathcal{F}}_0^A \cup \partial\bar{\mathcal{F}}_0^K \wedge \emptyset = \partial\bar{\mathcal{F}}_0^A \cap \partial\bar{\mathcal{F}}_0^K$ , wobei

$$\bar{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}} \text{ auf } \partial\bar{\mathcal{F}}_0^A \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{H}} \times \bar{\mathbf{N}}^\infty = \hat{\mathbf{K}} \text{ auf } \partial\bar{\mathcal{F}}_0^K \quad (2.71)$$

vorzuschreiben sind. Die eingeführten Gebietsränder und vorzuschreibenden Größen sind in Abb. 2.6(a) – (c) für das mechanische Feld sowie eine Vektor- bzw. Skalarpotential-Formulierung schematisch dargestellt. Die Größen  $\hat{\eta}$  und  $\hat{\mathbf{K}}$  werden auch als magnetische Flächenladung und Linienstromdichte bezeichnet [98]. Mit ihnen erfolgt die Vorgabe normaler bzw. tangentialer Anteile der jeweiligen magnetischen Größen.

# 3 Numerische Lösung von Randwertaufgaben

Die numerische Lösung der im vorherigen Kapitel 2 zusammengefassten magneto-mechanischen RWA erfolgt in dieser Arbeit mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM). Die wesentlichen Gleichungen der hier verwendeten totalen LAGRANGE-Formulierung werden im Folgenden für die konkrete Problemstellung diskutiert. Für eine ausführlichere Abhandlung zur nichtlinearen FEM sei allerdings auf BELYTSCHKO [8] oder WRIGGERS [172] verwiesen. Da sich die vorliegende Arbeit aufgrund des beträchtlichen numerischen Aufwands auf die numerische Lösung zweidimensionaler Problemstellungen beschränkt, werden vorerst entsprechende Vereinfachungen diskutiert.

## 3.1 Zweidimensionale Problemstellungen

Zur Reduktion von einer 3D- auf eine 2D-Aufgabe werden in den Kapiteln 5 – 7 lediglich Feldverteilungen, welche dem ebenen Verzerrungszustand (EVZ) genügen, betrachtet. Die Lage der kartesischen Basisvektoren  $E_K$  und  $e_k$  ist dabei so gewählt, dass für die Koordinaten von  $F$  und  $P^{\text{tot}}$  die Beziehungen

$$[F_{IK}] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [P_{KI}^{\text{tot}}] = \begin{bmatrix} P_{11}^{\text{tot}} & P_{12}^{\text{tot}} & 0 \\ P_{21}^{\text{tot}} & P_{22}^{\text{tot}} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33}^{\text{tot}} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

gelten. Ferner seien Flussdichte  $\mathbf{b}$ , Feldstärke  $\mathbf{h}$  und Magnetisierung  $\mathbf{m}$  innerhalb der  $x_1x_2$ -Ebene ausgerichtet, d. h.

$$[b_I] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [h_I] = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [m_I] = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Mit den Gleichungen (3.1)<sub>1</sub> und (3.2) folgt weiterhin, dass auch die LAGRANGESchen magnetischen Größen  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{M}$  innerhalb der  $x_1x_2$ - bzw.  $X_1X_2$ -Ebene liegen. Aus der Definition des Vektorpotentials gemäß Gleichung (2.24)<sub>1</sub> und den getroffenen Annahmen geht schließlich die Reduktion auf lediglich eine Koordinate ungleich Null hervor. Es gelten demnach

$$[A_K] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [B_K] = \begin{bmatrix} \partial_{X_2} A_3 \\ -\partial_{X_1} A_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Die Restriktionen (3.1) – (3.3) vereinfachen den numerischen Aufwand erheblich, haben aber weitreichende Konsequenzen hinsichtlich der Modellierung. So bedingen diese die Approximation einer MRE-Mikrostruktur mit sphärischen Partikeln durch unendlich lange Zylinder entlang der  $x_3$ -Achse. Damit ändern sich nicht nur das magnetische Verhalten, sondern auch die mechanischen Partikel-Matrix-Interaktionen. Gemäß METSCH et al. [104, 106] lässt sich

aber dennoch eine qualitative Übereinstimmung mit 3D-Problemen, in denen sphärische Partikel betrachtet werden, feststellen. Demnach ist die Betrachtung von 2D-Problemen zur Analyse grundlegender Effekte und Phänomene durchaus sinnvoll.

Schließlich wirkt sich die Reduktion auf Problemstellungen des EVZ auch auf die im vorherigen Kapitel 2 eingeführten mikroskopischen RB (2.64a) – (2.67b) aus: Hier ist die Periodizität nunmehr für die betrachteten Fluktuationsanteile  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}$  und  $\tilde{\varphi}$  ebenfalls auf die  $x_1x_2$ -Ebene zu beschränken, sodass sich positive und negative Ränder auf jeweils zwei Randflächen bzw. -kanten reduzieren. Zusätzlich ergeben sich damit Änderungen für die vektorwertigen Größen. Demnach gilt für das mechanische Teilproblem

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\bar{\mathbf{F}}) := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^3 \mid \mathbf{u} = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{u}} \text{ mit } \tilde{u}_l^+ = \tilde{u}_l^- \text{ für } l \in \{1,2\}, \tilde{u}_3 = 0 \} \text{ und} \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{p}^{\text{tot}} \in \mathcal{P}^{\text{tot}} := \{ \mathbf{p}^{\text{tot}} \in \mathcal{R}^3 \mid (p_l^{\text{tot}})^- = -(p_l^{\text{tot}})^+ \text{ für } l \in \{1,2\} \} . \quad (3.4b)$$

Bei einer Vektorpotential-Formulierung ergibt sich analog

$$\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\bar{\mathbf{B}}) := \{ \mathbf{A} \in \mathcal{R}^3 \mid A_3 = e_{3KL} \bar{B}_K X_L + \tilde{A}_3 \text{ mit } \tilde{A}_3^+ = \tilde{A}_3^-, A_1 = A_2 = 0 \} , \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{K} \in \mathcal{K}^H := \{ \mathbf{K} \in \mathcal{R}^3 \mid K_3^- = -K_3^+, K_1 = K_2 = 0 \} , \quad (3.5b)$$

vgl. DANAS [24], LUX [98] oder METSCH et al. [105].

## 3.2 Finite-Elemente-Formulierung

### 3.2.1 Schwache Form

Da die zu lösenden PDGL (2.21a), (2.21b) und (2.41a) sowohl auf der mikroskopischen als auch auf der makroskopischen Ebene gelten, sei vorerst nicht explizit zwischen beiden Skalen unterschieden. Betrachtet wird daher im Folgenden ein Gebiet  $\Omega_0$ , welches entweder als  $\mathcal{B}_0^{\text{RVE}} := \mathcal{B}_0^{\text{M}} \cup \mathcal{B}_0^{\text{P}}$  oder als  $\tilde{\mathcal{B}}_0 \cup \tilde{\mathcal{F}}_0$  zu verstehen ist.

Die schwache Form der Impulsbilanz (2.41a) ergibt sich somit zu

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{p}^{\text{tot}} : (\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u})^{\text{T}} dV - \int_{\Gamma_0} \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} dA - \oint_{\partial \Omega_0} \mathbf{p}^{\text{tot}} \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0 , \quad (3.6)$$

wobei  $\delta \mathbf{u}$  die als virtuelle Verschiebung interpretierbare Wichtungsfunktion und  $\mathbf{p}^{\text{tot}} := \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^{\text{tot}}$  den totalen nominellen Spannungsvektor bezeichnen. Bei Betrachtung einer Homogenisierungsaufgabe gilt dabei  $(\mathbf{p}^{\text{tot}})^- = -(\mathbf{p}^{\text{tot}})^+$ , wohingegen für makroskopische Problemstellungen  $\hat{\mathbf{p}}^{\text{tot}} = \hat{\mathbf{p}}^{\text{tot}}$  auf  $\partial \Omega_0^{\text{P}}$  gelte. Das Integral über materielle Sprungflächen  $\Gamma_0$  berücksichtigt die Vorgabe von Spannungsvektoren  $\hat{\mathbf{p}}$  auf  $\Gamma_0^{\text{P}}$  gemäß Gleichung (2.69). Die Lösbarkeit der schwachen Form (3.6) setzt die quadratische Integrierbarkeit der Funktionen  $\{ \mathbf{u}, \delta \mathbf{u} \}$  voraus, sodass diese jeweils Elemente der SOBOLEW-Funktionsräume

$$\mathcal{V}_{\mathbf{u}} := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1(\Omega_0) \mid \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ auf } \partial \Omega_0^{\text{u}} \} \text{ und} \quad (3.7a)$$

$$\mathcal{V}_{\delta \mathbf{u}} := \{ \delta \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1(\Omega_0) \mid \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial \Omega_0^{\text{u}} \cup \Gamma_0^{\text{u}} \} \quad (3.7b)$$

sein müssen, vgl. SIMO & HUGHES [151].

Unter Anwendung der in Abschnitt 2.1.2 eingeführten Skalar- und Vektorpotential-Formulie-

rungen ist die schwache Form der magnetischen RWA mit  $\eta := \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}$  und  $\mathbf{K} := \mathbf{H} \times \mathbf{N}$  entweder gemäß

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \nabla_X \delta\varphi \, dV - \oint_{\partial\Omega_0} \eta \delta\varphi \, dA = 0 \quad \text{oder} \quad (3.8)$$

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{H} \cdot (\nabla_X \times \delta\mathbf{A}) \, dV - \oint_{\partial\Omega_0} \mathbf{K} \cdot \delta\mathbf{A} \, dA = 0 \quad (3.9)$$

gegeben.<sup>1</sup> In den eingeführten Gleichungen bezeichnen  $\delta\varphi$  und  $\delta\mathbf{A}$  magnetische Wichtungsfunktionen, die in Äquivalenz zu Gleichung (3.6) als virtuelles Skalar- und Vektorpotential interpretierbar sind. Ebenso gilt für Homogenisierungsaufgaben die Antiperiodizität von  $\eta$  bzw.  $\mathbf{K}$  und für makroskopische Feldprobleme deren Vorgabe gemäß (2.70)<sub>2</sub> und (2.71)<sub>2</sub>. Zur Gewährleistung der Lösbarkeit von Gleichung (3.8) und (3.9) müssen  $\{\varphi, \delta\varphi\}$  bzw.  $\{\mathbf{A}, \delta\mathbf{A}\}$  jeweils Elemente der Räume

$$\mathcal{V}_\varphi := \{\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0) \mid \varphi = \hat{\varphi} \text{ auf } \partial\Omega_0^\varphi\} \quad \text{und} \quad (3.10a)$$

$$\mathcal{V}_{\delta\varphi} := \{\delta\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0) \mid \delta\varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega_0^\varphi\} \quad (3.10b)$$

bzw.

$$\mathcal{V}_\mathbf{A} := \{\mathbf{A} \in \mathcal{H}^1(\Omega_0) \mid \mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}} \text{ auf } \partial\Omega_0^\mathbf{A}\} \quad \text{und} \quad (3.11a)$$

$$\mathcal{V}_{\delta\mathbf{A}} := \{\delta\mathbf{A} \in \mathcal{H}^1(\Omega_0) \mid \delta\mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial\Omega_0^\mathbf{A}\} \quad (3.11b)$$

sein.

### 3.2.2 Diskretisierung

Zur numerischen Lösung der zuvor eingeführten schwachen Formulierungen sind diese räumlich zu diskretisieren. Dazu wird das Gebiet

$$\Omega_0 \approx \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \Omega_0^e \quad (3.12)$$

in  $n^{\text{El}}$  Elemente untergliedert, wobei im Allgemeinen ein gewisser Diskretisierungsfehler auftreten kann. Die Approximation der primären Feldgrößen erfolgt in jedem Element  $\Omega_0^e$  durch LAGRANGE-Polynome  $N^\alpha(\mathbf{X})$ . Für die Wichtungsfunktionen sollen weiterhin dieselben Ansätze gelten, sodass in jedem Element, also für alle  $\mathbf{X} \in \Omega_0^e$  mit  $e \in \{1, 2, \dots, n^{\text{El}}\}$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = N^\alpha(\mathbf{X}) \mathbf{u}^\alpha(t) \quad \text{und} \quad \delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = N^\alpha(\mathbf{X}) \delta\mathbf{u}^\alpha(t), \quad (3.13)$$

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = N^\alpha(\mathbf{X}) \varphi^\alpha(t) \quad \text{und} \quad \delta\varphi(\mathbf{X}, t) = N^\alpha(\mathbf{X}) \delta\varphi^\alpha(t), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = N^\alpha(\mathbf{X}) \mathbf{A}^\alpha(t) \quad \text{und} \quad \delta\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = N^\alpha(\mathbf{X}) \delta\mathbf{A}^\alpha(t) \quad (3.15)$$

<sup>1</sup>Wird der allgemeine dreidimensionale Fall für eine Vektorpotential-Formulierung betrachtet, ist zusätzlich die COULOMB-Eichung durch LAGRANGE-Parameter oder mittels der Strafparametermethode als Nebenbedingung in die Gleichung (3.9) einzubringen, s. STARK et al. [155].

gilt. Die Indizierung  $(\bullet)^\alpha$  bezeichnet zur globalen Knotennummer  $\alpha \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  zugehörige Knotenfreiwerte, wobei  $n^K$  für die Anzahl der Knoten im System steht. Dabei ist die Summation in den Gleichungen (3.13) – (3.15) über alle  $\alpha \in \{\alpha \in \mathcal{N} \mid X^\alpha \in \Omega_0^e\}$  auszuführen, wobei  $X^\alpha$  die Position des Knoten mit der Nummer  $\alpha$  bezeichnet. Die so gewählten Ansätze erfüllen weiterhin die im vorherigen Abschnitt aufgestellten Forderungen  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u$ ,  $\varphi \in \mathcal{V}_\varphi$  und  $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_A$  sowie  $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}_{\delta u}$ ,  $\delta \varphi \in \mathcal{V}_{\delta \varphi}$  und  $\delta \mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\delta A}$ . Schließlich sind die gesuchten Freiwerte  $\mathbf{u}^\alpha$ ,  $\varphi^\alpha$  und  $\mathbf{A}^\alpha$  im Falle periodischer RB zusätzlich eingeschränkt, vgl. Abschnitt 3.3.2.

Unter Ausnutzung der Gleichungen (3.12) – (3.15) ergeben sich aufgrund der zu fordernden Beliebigkeit der virtuellen Knotengrößen in jedem Zeitinkrement  $t_n > t_0$  die aus den schwachen Formen (3.6) sowie (3.8) und (3.9) resultierenden Residuen

$${}^n \mathbf{R}_u^\alpha := \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \left[ \int_{\Omega_0^e} (\nabla_X N^\alpha) \cdot \mathbf{P}^{\text{tot}} \, dV - \int_{\Gamma_0^{p,e}} N^\alpha \hat{\mathbf{p}} \, dA - \int_{\partial \Omega_0^{p,e}} N^\alpha \mathbf{p}^{\text{tot}} \, dA \right], \quad (3.16)$$

$${}^n R_\varphi^\alpha := \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \left[ \int_{\Omega_0^e} (\nabla_X N^\alpha) \cdot \mathbf{B} \, dV - \int_{\partial \Omega_0^{n,e}} N^\alpha \eta \, dA \right] \text{ und} \quad (3.17)$$

$${}^n \mathbf{R}_A^\alpha := \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \left[ \int_{\Omega_0^e} (\nabla_X N^\alpha) \times \mathbf{H} \, dV - \int_{\partial \Omega_0^{K,e}} N^\alpha \mathbf{K} \, dA \right]. \quad (3.18)$$

Die Indizierungen  $(\bullet)_u$ ,  $(\bullet)_\varphi$  und  $(\bullet)_A$  sind hier nicht als Zählindex zu verstehen, sondern sollen lediglich die Zugehörigkeit zur primären Feldvariable kennzeichnen.

Schließlich sei angemerkt, dass durch die Approximation der primären Feldvariablen auch die Sprungbedingungen (2.21a)<sub>2</sub>, (2.21b)<sub>2</sub> und (2.41a)<sub>2</sub> im Allgemeinen nicht exakt erfüllt sein müssen [98]. Da die Ableitungen entlang von Elementkanten stetig sind, gelten allerdings

$$\mathbf{N} \times \llbracket \nabla_X \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{N} \times \llbracket \nabla_X \varphi \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{N} \times \llbracket \nabla_X \mathbf{A} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \forall X \in \Gamma_0. \quad (3.19)$$

Somit ist die Tangentialstetigkeit von  $\mathbf{F}$  gemäß (2.8a)<sub>2</sub> gewährleistet, wohingegen der Sprung von  $\mathbf{P}^{\text{tot}}$  im Allgemeinen nicht exakt ist. Analog folgt aus (3.19)<sub>2,3</sub>, dass eine Skalarpotential-Formulierung lediglich die tangentielle Stetigkeit von  $\mathbf{H}$  exakt erfüllt und bei einer Vektorpotential-Formulierung die Normalstetigkeit von  $\mathbf{B}$  gewährleistet wird, vgl. Gleichungen (2.21a)<sub>2</sub> und (2.21b)<sub>2</sub>.

### 3.2.3 Linearisierung

Aus der geometrischen und materiellen Nichtlinearität sowie dem magnetischen Anteil der Totalspannung resultiert sowohl auf der Mikro- als auch auf der Makroebene ein stark gekoppeltes, nichtlineares Problem. Je nach Wahl des magnetischen Potentials, d. h.  $\mathbf{H} = -\nabla_X \varphi$  oder  $\mathbf{B} = \nabla_X \times \mathbf{A}$ , sind also in jedem Zeitschritt  $t_n$  die nichtlinearen Gleichungen

$${}^n \mathbf{R}_u^\alpha({}^n \mathbf{u}^\beta, {}^n \varphi^\beta) = \mathbf{0} \wedge {}^n R_\varphi^\alpha({}^n \mathbf{u}^\beta, {}^n \varphi^\beta) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n^K\} \quad \text{bzw.} \quad (3.20)$$

$${}^n \mathbf{R}_u^\alpha({}^n \mathbf{u}^\beta, {}^n \mathbf{A}^\beta) = \mathbf{0} \wedge {}^n R_A^\alpha({}^n \mathbf{u}^\beta, {}^n \mathbf{A}^\beta) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n^K\} \quad (3.21)$$

bzgl. der globalen Knotenfreiwerte zu lösen. Dazu soll ein NEWTON-RAPHSON-Schema, das eine monolithische Lösung der Gleichungen (3.20) und (3.21) ermöglicht, Anwendung finden. Dieses basiert auf einer Linearisierung, also einer TAYLOR-Reihenentwicklung bzgl. der als unabhängigen Variablen fungierenden Knotenfreiwerte mit Abbruch nach dem linearen Glied, die durch

$$\begin{aligned} {}^{n,j+1}R_u^\alpha &\approx {}^nR_u^\alpha + \mathbf{K}_{uu}^{\alpha\beta}|_{t_{n,j}} \cdot {}^{n,j}\Delta\mathbf{u}^\beta + \mathbf{K}_{u\varphi}^{\alpha\beta}|_{t_{n,j}} \cdot {}^{n,j}\Delta\varphi^\beta = \mathbf{0} \quad \text{und} \\ {}^{n,j+1}R_\varphi^\alpha &\approx {}^{n,j}R_\varphi^\alpha + \mathbf{K}_{\varphi u}^{\alpha\beta}|_{t_{n,j}} \cdot {}^{n,j}\Delta\mathbf{u}^\beta + \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{\alpha\beta}|_{t_{n,j}} \cdot {}^{n,j}\Delta\varphi^\beta = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

bzw.

$$\begin{aligned} {}^{n,j+1}R_u^\alpha &\approx {}^nR_u^\alpha + \mathbf{K}_{uu}^{\alpha\beta}|_{t_{n,j}} \cdot {}^{n,j}\Delta\mathbf{u}^\beta + \mathbf{K}_{uA}^{\alpha\beta}|_{t_{n,j}} \cdot {}^{n,j}\Delta A^\beta = \mathbf{0} \quad \text{und} \\ {}^{n,j+1}R_A^\alpha &\approx {}^{n,j}R_A^\alpha + \mathbf{K}_{Au}^{\alpha\beta}|_{t_{n,j}} \cdot {}^{n,j}\Delta\mathbf{u}^\beta + \mathbf{K}_{AA}^{\alpha\beta}|_{t_{n,j}} \cdot {}^{n,j}\Delta A^\beta = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.23)$$

gegeben ist, vgl. KALINA et al. [75] und METSCH et al. [104].<sup>2</sup> Hierin bezeichnen  $j$  den Iterationsschritt und  ${}^{n,j}\Delta(\bullet)^\beta$  den Zuwachs einer Größe in diesem Schritt. Die Tangententerme sind abhängig vom konstitutiven Verhalten zu bestimmen. Dabei resultieren in dieser Arbeit die Linearisierungen auf beiden Skalenebenen lediglich aus dem Gebietsintegral über  $\mathcal{B}_0^{\text{RVE}}$  bzw.  $\tilde{\mathcal{B}}_0 \cup \tilde{\mathcal{F}}_0$ .<sup>3</sup> Somit sind mit den Beziehungen  $(\partial_{\mathbf{u}^\beta}\mathbf{F}) \cdot \Delta\mathbf{u}^\beta = \Delta\mathbf{u}^\beta \otimes \nabla_{\mathbf{X}}N^\beta$  und  $\partial_{\varphi^\beta}\mathbf{H}\Delta\varphi^\beta = -\Delta\varphi^\beta\nabla_{\mathbf{X}}N^\beta$  die Tangententerme im Fall einer Skalarpotential-Formulierung durch

$$\mathbf{K}_{uu}^{\alpha\beta} := \frac{\partial R_u^\alpha}{\partial \mathbf{u}^\beta} = \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} (\nabla_{\mathbf{X}}N^\alpha) \cdot \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \mathbf{F}^T \partial \mathbf{F}} \cdot (\nabla_{\mathbf{X}}N^\beta) \, dV, \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi}^{\alpha\beta} := \frac{\partial R_u^\alpha}{\partial \varphi^\beta} = - \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} (\nabla_{\mathbf{X}}N^\alpha) \cdot \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \mathbf{F}^T \partial \mathbf{H}} \cdot (\nabla_{\mathbf{X}}N^\beta) \, dV, \quad (3.24b)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi u}^{\alpha\beta} := \frac{\partial R_\varphi^\alpha}{\partial \mathbf{u}^\beta} = - \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} (\nabla_{\mathbf{X}}N^\alpha) \cdot \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \mathbf{H} \partial \mathbf{F}} \cdot (\nabla_{\mathbf{X}}N^\beta) \, dV \quad \text{und} \quad (3.24c)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{\alpha\beta} := \frac{\partial R_\varphi^\alpha}{\partial \varphi^\beta} = \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} (\nabla_{\mathbf{X}}N^\alpha) \cdot \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \mathbf{H} \partial \mathbf{H}} \cdot (\nabla_{\mathbf{X}}N^\beta) \, dV \quad (3.24d)$$

<sup>2</sup>Die Tangententerme folgen aus dem GÄTEAUX-Differential

$$\Delta \mathbf{R}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}) := \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{R}(\mathbf{x} + \epsilon \Delta \mathbf{x}) \right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x},$$

das die Änderung von  $\mathbf{R}$  in Richtung von  $\Delta \mathbf{x}$  beschreibt, s. WRIGGERS [172].

<sup>3</sup>Auf makroskopischer Ebene wird auf den Rändern  $\partial \mathcal{B}_0^p$  sowie  $\partial \tilde{\mathcal{F}}_0^{\eta/K}$  in jedem Inkrement  ${}^n\hat{\mathbf{p}}^{\text{tot}} = {}^n\hat{\mathbf{p}}^{\text{tot}}$  sowie  ${}^n\hat{\eta} = {}^n\hat{\eta}$  bzw.  ${}^n\hat{K} = {}^n\hat{K}$  vorgegeben, sodass die Linearisierung dieser Terme und der Randintegrale verschwindet. Auf mikroskopischer Ebene entfallen die Randintegrale über  $\partial \mathcal{B}_0^{\text{RVE}}$  aufgrund der Antiperiodizität der Terme  $\mathbf{p}^{\text{tot}}$ ,  $\eta$  und  $\mathbf{K}$  gemäß (2.64b), (2.67b) und (2.65b) vollständig.

gegeben, wohingegen sich diese für eine Vektorpotential-Formulierung unter Nutzung der Beziehung  $\partial_{A^\beta} \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{A}^\beta = \nabla_X N^\beta \times \Delta \mathbf{A}^\beta$  zu

$$\mathbf{K}_{uu}^{\alpha\beta} := \frac{\partial \mathbf{R}_u^\alpha}{\partial \mathbf{u}^\beta} = \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} (\nabla_X N^\alpha) \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{F}^T \partial \mathbf{F}} \cdot (\nabla_X N^\beta) \, dV, \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{K}_{uA}^{\alpha\beta} := \frac{\partial \mathbf{R}_u^\alpha}{\partial \mathbf{A}^\beta} = \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} (\nabla_X N^\alpha) \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{F}^T \partial \mathbf{B}} \times (\nabla_X N^\beta) \, dV, \quad (3.25b)$$

$$\mathbf{K}_{Au}^{\alpha\beta} := \frac{\partial \mathbf{R}_A^\alpha}{\partial \mathbf{u}^\beta} = \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} (\nabla_X N^\alpha) \times \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{B} \partial \mathbf{F}} \cdot (\nabla_X N^\beta) \, dV \text{ und} \quad (3.25c)$$

$$\mathbf{K}_{AA}^{\alpha\beta} := \frac{\partial \mathbf{R}_A^\alpha}{\partial \mathbf{A}^\beta} = \bigcup_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} (\nabla_X N^\alpha) \times \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{B} \partial \mathbf{B}} \times (\nabla_X N^\beta) \, dV \quad (3.25d)$$

ergeben. Aus den Gleichungen (3.24a) – (3.24d) bzw. (3.25a) – (3.25d) geht die Symmetrie der FE-Matrizen innerhalb des durchzuführenden NEWTON-RAPHSON-Schemas hervor. Da die erweiterte Energiedichte  $\Omega(\mathbf{C}, \dots)$  von  $\mathbf{C}$  und nicht direkt von  $\mathbf{F}$  abhängt, erfolgt die Bestimmung der Tangentenmodule durch Anwendung der Kettenregel, bspw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{F}^T \partial \mathbf{F}} &= \frac{\partial P_{KL}^{\text{tot}}}{\partial F_{pQ}} \mathbf{E}_K \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{E}_Q \\ &= \left( 4 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial C_{KL} \partial C_{QJ}} F_{lL} F_{pJ} + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial C_{KQ}} \delta_{lp} \right) \mathbf{E}_K \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{E}_Q. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die in (3.26) auftretenden Summanden führen auf die materielle und die geometrische Tangentensteifigkeit [172]. Weiterhin sei die zum 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor zugehörige Materialtangente im folgenden durch

$$\mathbb{C}^{\text{tot}} := 4 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{C}^{\text{tot}*} := 4 \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (3.27)$$

bezeichnet. Liegt, wie etwa in Kapitel 6, eine Modellformulierung in Abhängigkeit eines Satzes von Invarianten  $I_\alpha$  mit  $\alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$  vor, lassen sich die gesuchten Ableitungen erneut durch Anwendung der Kettenregel bestimmen, bspw.

$$\frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial I_\alpha \partial I_\beta} \frac{\partial I_\alpha}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_\beta}{\partial \mathbf{C}} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \Omega^*}{\partial I_\alpha} \frac{\partial^2 I_\alpha}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}, \quad (3.28a)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \mathbf{H} \partial \mathbf{C}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial I_\alpha \partial I_\beta} \frac{\partial I_\alpha}{\partial \mathbf{H}} \otimes \frac{\partial I_\beta}{\partial \mathbf{C}} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \Omega^*}{\partial I_\alpha} \frac{\partial^2 I_\alpha}{\partial \mathbf{H} \partial \mathbf{C}} \text{ und} \quad (3.28b)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \mathbf{H} \partial \mathbf{H}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial I_\alpha \partial I_\beta} \frac{\partial I_\alpha}{\partial \mathbf{H}} \otimes \frac{\partial I_\beta}{\partial \mathbf{H}} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \Omega^*}{\partial I_\alpha} \frac{\partial^2 I_\alpha}{\partial \mathbf{H} \partial \mathbf{H}}. \quad (3.28c)$$

## 3.3 Algorithmische Umsetzung

### 3.3.1 Vektor-Matrix-Notation

Zur Implementierung in einen FE-Code ist es zweckmäßig, die Beziehungen (3.16) – (3.18) sowie (3.24a) – (3.25d) in die Vektor-Matrix-Notation zu überführen. Dazu sei eine Matrix im Folgenden durch die Schreibweise

$$\underline{\mathbf{T}} \in \mathcal{R}^{m \times n} := \{ \tau_{ij} \in \mathcal{R} \text{ mit } i \in \{1, \dots, m\} \text{ und } j \in \{1, \dots, n\} \} \quad (3.29)$$

gekennzeichnet, wobei  $\mathcal{R}^{m \times n}$  den Raum der  $m \times n$  Matrizen darstellt. Als Spezialfall seien ferner Vektoren  $\underline{\mathbf{T}} \in \mathcal{R}^{m \times 1}$  eingeführt. Analog zur knotenweisen Sortierung der globalen mechanischen und magnetischen Freiwerte gemäß

$$\underline{\mathbf{u}} := \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_1^{n^k} & u_2^{n^k} \end{bmatrix}^T, \underline{\boldsymbol{\varphi}} := \begin{bmatrix} \varphi^1 & \dots & \varphi^{n^k} \end{bmatrix} \text{ bzw. } \underline{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} A_3^1 & \dots & A_3^{n^k} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

erfolgt nun unter Anwendung des Assemblierungsoperators  $\mathbf{A}$  der Zusammenbau des globalen FE-Systems. Somit sind die vektorwertigen Residuen der Teilprobleme im zweidimensionalen Fall durch

$$\mathcal{R}^{2n^k \times 1} \ni \underline{\mathbf{R}}^u := \underline{\mathbf{A}} \int_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} \underline{\mathbf{B}}^{u^T} \underline{\mathbf{P}}^{\text{tot}} dV - \underline{\mathbf{A}} \int_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Gamma_0^{p,e}} \underline{\mathbf{N}}^{u^T} n \hat{\mathbf{p}} dA - \underline{\mathbf{A}} \int_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\partial \Omega_0^{p,e}} \underline{\mathbf{N}}^{u^T} \underline{\mathbf{p}}^{\text{tot}} dA, \quad (3.31)$$

$$\mathcal{R}^{n^k \times 1} \ni \underline{\mathbf{R}}^\varphi := \underline{\mathbf{A}} \int_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} \underline{\mathbf{B}}^{\varphi^T} \underline{\mathbf{B}} dV - \underline{\mathbf{A}} \int_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\partial \Omega_0^{n,e}} \underline{\mathbf{N}}^{\varphi^T} \eta dA \text{ und} \quad (3.32)$$

$$\mathcal{R}^{n^k \times 1} \ni \underline{\mathbf{R}}^A := \underline{\mathbf{A}} \int_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\Omega_0^e} \underline{\mathbf{B}}^{A^T} \underline{\mathbf{H}} dV - \underline{\mathbf{A}} \int_{e=1}^{n^{\text{El}}} \int_{\partial \Omega_0^{K,e}} \underline{\mathbf{N}}^{A^T} \underline{\mathbf{K}} dA. \quad (3.33)$$

gegeben. Darin bezeichnen  $\underline{\mathbf{N}}^{u/\varphi/A}$  und  $\underline{\mathbf{B}}^{u/\varphi/A}$  Matrizen der Formfunktionen und ihrer Ableitungen für die jeweiligen Freiwerte. Weiterhin ist die eingeführte Spannungsgröße gemäß  $\underline{\mathbf{P}}^{\text{tot}} := \begin{bmatrix} P_{11}^{\text{tot}} & P_{12}^{\text{tot}} & P_{21}^{\text{tot}} & P_{22}^{\text{tot}} \end{bmatrix}^T$  definiert. Die in (3.31) – (3.33) auftretenden Integrale werden je nach Elementtyp durch Anwendung geeigneter Quadraturregeln gelöst, wobei zuvor der Integrationsbereich unter Anwendung des isoparametrischen Konzepts auf ein Einheitselement in den natürlichen Koordinaten transformiert wird, siehe LUX [98] oder WIRGERS [172]. Die globalen NEWTON-RAPHSON-Schemata zur monolithischen Lösung der nichtlinearen Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}^u \\ \underline{\mathbf{R}}^\varphi \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}^u \\ \underline{\mathbf{R}}^A \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \quad (3.34)$$

sind in Vektor-Matrix-Notation durch

$$\begin{bmatrix} n,j \underline{\underline{K}}^{uu} & n,j \underline{\underline{K}}^{u\varphi} \\ n,j \underline{\underline{K}}^{\varphi u} & n,j \underline{\underline{K}}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n,j \Delta \underline{\mathbf{u}} \\ n,j \Delta \underline{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} n,j \underline{\mathbf{R}}^u \\ n,j \underline{\mathbf{R}}^\varphi \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} n,j+1 \underline{\mathbf{u}} \\ n,j+1 \underline{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n,j \underline{\mathbf{u}} \\ n,j \underline{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n,j \Delta \underline{\mathbf{u}} \\ n,j \Delta \underline{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

und

$$\begin{bmatrix} n,j \underline{\underline{K}}^{uu} & n,j \underline{\underline{K}}^{uA} \\ n,j \underline{\underline{K}}^{Au} & n,j \underline{\underline{K}}^{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n,j \Delta \underline{\mathbf{u}} \\ n,j \Delta \underline{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} n,j \underline{\mathbf{R}}^u \\ n,j \underline{\mathbf{R}}^A \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} n,j+1 \underline{\mathbf{u}} \\ n,j+1 \underline{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n,j \underline{\mathbf{u}} \\ n,j \underline{\mathbf{A}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n,j \Delta \underline{\mathbf{u}} \\ n,j \Delta \underline{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

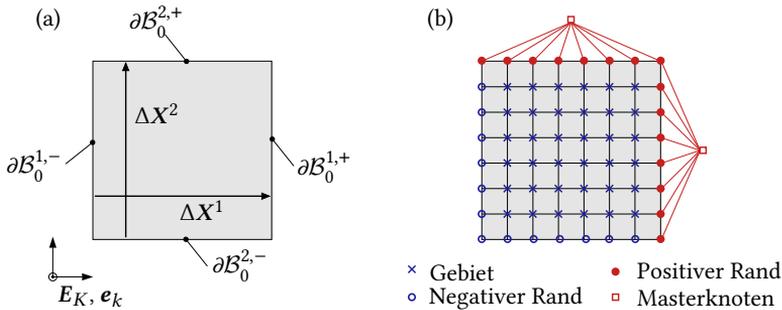
gegeben, vgl. KALINA et al. [75] und METSCH et al. [104]. Im Falle dissipativen Materialverhaltens ist zusätzlich in jedem globalen Iterationsschritt eine lokale NEWTON-Iteration zur Lösung der zeitdiskretisierten Evolutionsgleichung an den entsprechenden Quadraturpunkten durchzuführen. Nach jedem globalen Iterationsschritt  $j$  findet ein Update der Knotenfreiwerte statt bis das betrachtete Gleichungssystem, also (3.34)<sub>1</sub> oder (3.34)<sub>2</sub>, im Rahmen einer vorzugebenden Toleranz erfüllt ist. Die eingeführten Tangentenmatrizen  $\underline{\underline{K}}^{\bullet\bullet}$  bezeichnen die Ableitung der Residuen  $\underline{\mathbf{R}}^\bullet$  nach den gesuchten Knotenfreiwerten gemäß (3.24a) – (3.25d), bspw.

$$\underline{\underline{K}}^{uu} = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}^u}{\partial \underline{\mathbf{u}}} = \mathbf{A} \int_{\Omega_0^e} \underline{\mathbf{B}}^{uT} \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}^{\text{tot}}}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \underline{\mathbf{B}}^u dV \quad (3.37)$$

mit  $\underline{\mathbf{F}} := [F_{11} \ F_{12} \ F_{21} \ F_{22}]^T$ . Die Umsetzung der vorgestellten FE-Formulierung basiert in dieser Arbeit auf einem MATLAB-Code. Dabei erfolgt die Lösung des Gleichungssystems mittels des Pakets PARDISO [124, 125].

### 3.3.2 Berücksichtigung periodischer Randbedingungen

Wie in Abschnitt 3.2.2 bereits erwähnt, sind die gesuchten Primärgrößen im Falle einer Homogenisierung unter Annahme periodischer RB durch  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\bar{\Gamma})$  sowie  $\varphi \in \mathcal{P}(\bar{\mathbf{H}})$  bzw.  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\bar{\mathbf{B}})$  zusätzlich eingeschränkt. Weiterhin sind die zugehörigen Terme  $\mathbf{p}^{\text{tot}}$ ,  $\eta$  und  $\mathbf{K}$  – also Spannungsvektor, Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  sowie Tangentialkomponente von  $\mathbf{H}$  – gemäß (3.4b),



**Abb. 3.1:** Algorithmische Umsetzung periodischer RB: (a) Unterteilung des Gebietsrands in positive und negative Anteile und (b) Aufteilung der Knoten des FE-Systems und Masterknoten.

(2.67b) und (3.5b) als antiperiodisch zu fordern. Die entsprechenden Zwangsbedingungen werden dabei mittels des Konzepts der Masterknoten in das FE-Gleichungssystem eingebracht, s. HAASEMANN et al. [53], KÄSTNER [87] oder LUX [98]. Dieses wird im Folgenden kurz skizziert. Es bezeichnen  $\underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{R}^{3n^k \times 1}$ ,  $\underline{\mathbf{R}} \in \mathcal{R}^{3n^k \times 1}$  und  $\underline{\mathbf{K}} \in \mathcal{R}^{3n^k \times 3n^k}$  den Vektor der generalisierten Freiwerte, den Residuumsvektor und die Tangentenmatrix eines zweidimensionalen magneto-mechanischen FE-Systems mit jeweils knotenweiser Sortierung der globalen Freiwerte, bspw.  $\underline{\mathbf{v}} := \left[ u_1^1 \quad u_2^1 \quad \varphi^1 \quad \dots \quad u_1^{n^k} \quad u_2^{n^k} \quad \varphi^{n^k} \right]^T$ . Dieses System wird nun gemäß Abb. 3.1(b) in Knoten im Gebiet sowie Knoten auf den positiven und negativen Rändern zerlegt:

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}^G \\ \underline{\mathbf{v}}^+ \\ \underline{\mathbf{v}}^- \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}^G \\ \underline{\mathbf{R}}^+ \\ \underline{\mathbf{R}}^- \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}^{GG} & \underline{\mathbf{K}}^{G+} & \underline{\mathbf{K}}^{G-} \\ \underline{\mathbf{K}}^{+G} & \underline{\mathbf{K}}^{++} & \underline{\mathbf{K}}^{+-} \\ \underline{\mathbf{K}}^{-G} & \underline{\mathbf{K}}^{-+} & \underline{\mathbf{K}}^{--} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Wird ein rechteckiges RVE mit periodischem Netz vorausgesetzt, lassen sich die Koordinaten von Knoten auf paarweise gegenüberliegenden Rändern  $\partial\mathcal{B}_0^{\alpha,+}$  und  $\partial\mathcal{B}_0^{\alpha,-}$  mit  $\alpha \in \{1,2\}$  auffinden. Gemäß Abb. 3.1(a) sind also die Verbindungsvektoren gegenüberliegender Seiten durch  $\Delta X^\alpha := X^{\alpha,+} - X^{\alpha,-}$  für alle  $X^{\alpha,+} \in \partial\mathcal{B}_0^{\alpha,+} \wedge X^{\alpha,-} \in \partial\mathcal{B}_0^{\alpha,-}$  definiert. Aufgrund der geforderten Periodizität gelten zwischen den primären Feldvariablen der positiven und negativen Ränder aus  $\mathcal{U}(\bar{\mathbf{F}})$ ,  $\mathcal{P}(\bar{\mathbf{H}})$  und  $\mathcal{A}(\bar{\mathbf{B}})$  ableitbare Zwangsbedingungen. Diese sind durch

$$u_l^{\alpha,\text{Ma}} := u_l^{\alpha,+} - u_l^{\alpha,-} = (\bar{F}_{lK} - \delta_{lK}) \Delta X_K^\alpha, \quad (3.39)$$

$$\varphi^{\alpha,\text{Ma}} := \varphi^{\alpha,+} - \varphi^{\alpha,-} = -\bar{H}_K \Delta X_K^\alpha \quad \text{und} \quad (3.40)$$

$$A_3^{\alpha,\text{Ma}} := A_3^{\alpha,+} - A_3^{\alpha,-} = e_{3KL} \bar{B}_K \Delta X_L^\alpha \quad (3.41)$$

mit  $l, K, L \in \{1, 2\}$  gegeben, wobei die eingeführten Differenzen jeweils als Freiwerte  $(\bullet)^{\alpha,\text{Ma}}$  der Masterknoten definiert sind. Zugehörige generalisierte Masterknotenkräfte  $\{f^{\alpha,\text{Ma}}, \gamma^{\alpha,\text{Ma}}\}$  bzw.  $\{f^{\alpha,\text{Ma}}, I^{\alpha,\text{Ma}}\}$  sind durch Integration über den positiven Rand definiert und lassen sich ausgehend von (2.57) – (2.59) mit den gemittelten Spannungen und magnetischen Größen in Zusammenhang bringen:

$$\bar{P}_{Kl}^{\text{tot}} = \frac{1}{V_{\text{RVE}}} \sum_{\alpha=1}^2 \Delta X_K^\alpha f_l^{\alpha,\text{Ma}} \quad \text{mit} \quad f_l^{\alpha,\text{Ma}} := \int_{\partial\mathcal{B}_0^{\alpha,+}} p_l^{\text{tot}} \, dA, \quad (3.42)$$

$$\bar{B}_K = \frac{1}{V_{\text{RVE}}} \sum_{\alpha=1}^2 \Delta X_K^\alpha \gamma^{\alpha,\text{Ma}} \quad \text{mit} \quad \gamma^{\alpha,\text{Ma}} := \int_{\partial\mathcal{B}_0^{\alpha,+}} \eta \, dA \quad \text{und} \quad (3.43)$$

$$\bar{H}_K = \frac{1}{V_{\text{RVE}}} \sum_{\alpha=1}^2 e_{Kl3} \Delta X_L^\alpha I_3^{\alpha,\text{Ma}} \quad \text{mit} \quad I_3^{\alpha,\text{Ma}} := \int_{\partial\mathcal{B}_0^{\alpha,+}} K_3 \, dA \quad (3.44)$$

für  $K, l \in \{1, 2\}$ . Dabei ist anzumerken, dass  $(2.59)_2$  im 2D-Fall durch

$$\bar{H}_K = \frac{1}{V_{RVE}} \oint_{\partial \mathcal{B}_0^{RVE}} e_{KM3} X_M \underbrace{e_{3QS} H_Q N_S}_{K_3} dA \quad (3.45)$$

zu ersetzen ist. Der fehlende Faktor  $1/2$  kommt dadurch zustande, dass anstelle von der Beziehung  $e_{KLM} e_{PLM} = 2\delta_{KP}$  der Zusammenhang  $e_{KL3} e_{PL3} = \delta_{KP} - \delta_{K3} \delta_{P3}$  gilt und lediglich über vier Ränder zu integrieren ist.

Durch Ausnutzung der eingeführten Zwangsbedingungen (3.39) und (3.40) bzw. (3.41) lässt sich das diskrete System nun auf  $\underline{\mathbf{v}}^G, \underline{\mathbf{v}}^-$  sowie die Freiwerte  $\underline{\mathbf{v}}^{Ma}$  der Masterknoten reduzieren. Mit der Sortiermatrix  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  folgen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}^G \\ \underline{\mathbf{v}}^+ \\ \underline{\mathbf{v}}^- \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{S}}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{n}} & \underline{\mathbf{m}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{I}} & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{S}}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}^G \\ \underline{\mathbf{v}}^- \\ \underline{\mathbf{v}}^{Ma} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{v}}^*} \quad \text{und} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{n}}^T & \underline{\mathbf{I}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{m}}^T & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{S}}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}^G \\ \underline{\mathbf{R}}^+ \\ \underline{\mathbf{R}}^- \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{R}}^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}^G \\ \underline{\mathbf{n}}^T \underline{\mathbf{R}}^+ + \underline{\mathbf{R}}^- \\ \underline{\mathbf{m}}^T \underline{\mathbf{R}}^+ \end{bmatrix}}_{=\underline{\mathbf{R}}^*}, \quad (3.46)$$

wobei  $\underline{\underline{\mathbf{m}}}$  und  $\underline{\underline{\mathbf{n}}}$  Matrizen besetzt mit Nullen und Einsen bezeichnen. Es erfolgt nun eine Aufteilung des Residuums in interne und externe Knotenlasten:  $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{f}}_{\text{int}} + \underline{\mathbf{f}}_{\text{ext}}$ . Hier bezeichnet  $\underline{\mathbf{f}}_{\text{int}}$  alle Terme in den Gleichungen (3.31) – (3.33), die aus den Gebietsintegralen über  $\Omega_0$  resultieren. Die externen Knotenlasten ergeben sich dagegen aus den Randintegralen über  $\partial\Omega_0$ . Im nächsten Schritt ist nun die Struktur des transformierten Residuumsvektors  $\underline{\mathbf{R}}^*$  in Gleichung (3.46)<sub>2</sub> zu betrachten. Dabei gilt aufgrund der Antiperiodizität von  $\underline{\mathbf{p}}^{\text{tot}} \in \mathcal{P}^{\text{tot}}$  und  $\eta \in \mathcal{E}$  bzw.  $\underline{\mathbf{K}} \in \mathcal{K}^H$ , dass sich die externen Knotenlasten der positiven und negativen Seite aufheben. Somit stehen die entsprechenden internen Knotenlasten im Gleichgewicht, sodass auch abgeleitete Feldgrößen – also  $\underline{\mathbf{P}}^{\text{tot}}$  und  $\underline{\mathbf{F}}$  sowie  $\underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{B}}$  und  $\underline{\mathbf{M}}$  – periodischen Charakter aufweisen. Aus den Gleichungen (3.42) – (3.44) geht weiterhin hervor, dass die generalisierte Masterknotenkraft  $\underline{\mathbf{f}}^{Ma}$  dem Ausdruck  $\underline{\underline{\mathbf{m}}}^T \underline{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^+$  entspricht [53, 98]. Nach den diskutierten Schritten ergibt sich letztlich das transformierte Gleichungssystem

$$\underbrace{\underline{\underline{\mathbf{S}}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}}}_{\underline{\underline{\mathbf{K}}^*}} \Delta \underline{\mathbf{v}}^* = - \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}_{\text{int}}^G \\ \underline{\mathbf{n}}^T \underline{\mathbf{f}}_{\text{int}}^+ + \underline{\mathbf{f}}_{\text{int}}^- \\ \underline{\mathbf{m}}^T \underline{\mathbf{f}}_{\text{int}}^+ - \underline{\mathbf{f}}^{Ma} \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

in dem sowohl die Periodizität der primären Feldgrößen als auch die Antiperiodizität als Zwangsbedingungen eingebracht sind. Die effektiven magneto-mechanischen Zustände lassen sich dabei durch Vorgabe der Masterknotenverschiebungen und -potentiale vorgeben. Werden stattdessen generalisierte Kräfte vorgeschrieben, stellen sich die effektive Deformation  $\bar{\underline{\mathbf{F}}}$  und die magnetischen Größen  $\bar{\underline{\mathbf{H}}}$  bzw.  $\bar{\underline{\mathbf{B}}}$  ein. Zusätzlich ist ein Knoten  $X^\alpha \in \mathcal{B}_0^{RVE}$  mit homogenen DIRICHLET-RB zu versehen [98].

# 4 Charakterisierung der Konstituenten

Um das Verhalten von MRE auf der Mikroebene zu beschreiben, ist neben der strukturellen Anordnung die Kenntnis des Materialverhaltens von Partikeln und Matrix notwendig. Dieses Kapitel beinhaltet die Charakterisierung und Modellierung der Materialantwort beider Konstituenten anhand von experimentellen Daten und soll mit einer kurzen Einordnung beginnen.

## 4.1 Klassifizierung

Typische in MRE verwendete Partikel- und Matrixmaterialien können verschiedenste konstitutive Charakteristika aufweisen. Dabei wird an dieser Stelle das Verhalten auf mikroskopischer Ebene – in der beide Konstituenten näherungsweise als separate, homogene Kontinua beschreibbar sind – betrachtet. Die in Abb. 4.1 skizzierten Polymerketten und magnetischen Domänen werden also nicht explizit aufgelöst.

### *Ferromagnetische Partikel*

Das magnetische Schaltverhalten von MRE resultiert im Wesentlichen aus den Eigenschaften des verwendeten magnetischen Füllstoffes. Werden ferromagnetische Multidomänenteilchen mit polykristalliner Substruktur – d. h. stochastischer Verteilung der anisotropen Kristalle und Domänen – betrachtet, resultiert auf der Mikroebene ein isotropes Verhalten. Dabei lässt sich die in Abb. 4.1 dargestellte Untergliederung in harte und weiche Ferromagneten vornehmen, vgl. JILES [68]. Äquivalent zur Elastizität weisen ideale Weichmagneten keinerlei Lastpfadabhängigkeit auf. Das Magnetisierungsverhalten realer ferromagnetischer Materialien weist allerdings stets eine gewisse Pfadabhängigkeit, die zu einer schwach ausgeprägten Hysterese führt, auf. Diese resultiert aus irreversiblen Domänen-Umwandlungs-Prozessen, ist jedoch bei weichmagnetischen Materialien vernachlässigbar klein. Als Hartmagneten bezeichnete Materialien zeigen dagegen eine signifikante Geschichtsabhängigkeit ähnlich zur Plastizität. Aus mechanischer Sicht sind die magnetisierbaren Partikel im Vergleich zur elastomeren Matrix sehr steif, sodass  $\mathbf{C} \approx \mathbf{I}$  für alle  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0^p$  gilt. Magneto-mechanische Kopplungseffekte innerhalb der Partikel sind somit vernachlässigbar und die spezifische freie Energie lässt sich gemäß

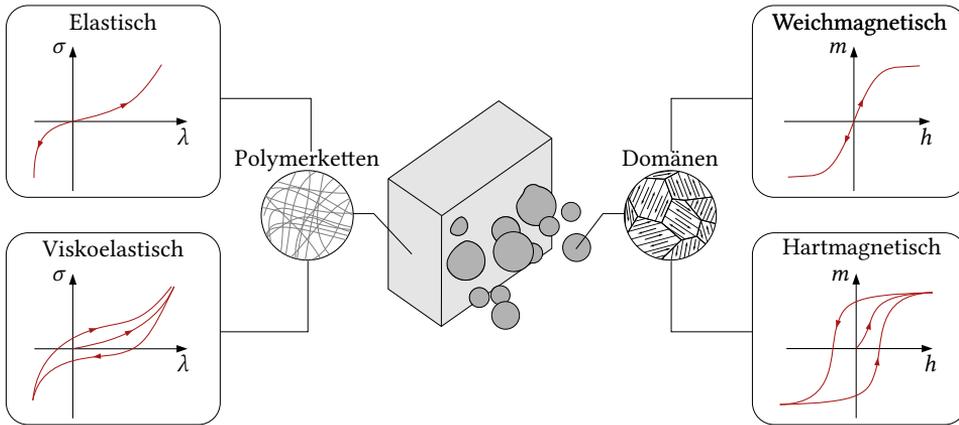
$$\psi(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{Z}^\alpha) := \psi^{\text{mech}}(\mathbf{C}) + \psi^{\text{mag}}(\mathbf{B}, \mathbf{Z}^\alpha) \quad \text{oder} \quad (4.1)$$

$$\psi^*(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Z}^\alpha) := \psi^{*\text{mech}}(\mathbf{C}) + \psi^{*\text{mag}}(\mathbf{H}, \mathbf{Z}^\alpha) \quad (4.2)$$

in einen rein mechanischen und einen rein magnetischen Anteil zerlegen, vgl. DANAS [24], JAVILI et al. [67], KALINA et al. [72, 74, 75], METSCH et al. [104–106] oder PONTE CASTAÑEDA und GALIPEAU [127].

### *Elastomere Matrix*

Neben den Eigenschaften der Partikel hängt das effektive Verhalten von MRE maßgeblich von der Wahl der elastomeren Matrix ab. Um große Schalteffekte im magnetisch aktiven Komposit zu erzielen, muss die Steifigkeit des Elastomers möglichst gering sein. Für den Einsatz in



**Abb. 4.1:** Schematische Darstellung des Aufbaus und konstitutiver Charakteristika von Partikeln und Matrix: Polymere mit elastischem und viskoelastischem Verhalten für einen Zug-Druck-Zyklus sowie Partikel mit weich- und hartmagnetischem Verhalten für einen Zyklus des  $h$ -Feldes. Die abgebildete MRE-Mikrostruktur ist METSCH et al. [104] entnommen. Nachdruck mit Genehmigung von Springer Nature: Archive of Applied Mechanics, Two- and three-dimensional modeling approaches in magneto-mechanics: a quantitative comparison, P. METSCH et al., ©2019.

spezifischen technischen Applikationen ergeben sich allerdings Restriktionen hinsichtlich der minimal wählbaren Steifigkeit. Zur Herstellung von MRE werden daher häufig Silikonelastomere verwendet, vgl. BASTOLA & HOSSAIN [5]

Aus der stochastischen Anordnung der Polymerketten innerhalb der Matrix resultiert auf der Mikroebene ein isotropes Verhalten, wobei die charakteristische Kettenlänge von Silikonelastomeren im Nanometerbereich liegt und damit deutlich geringer als der Durchmesser der eingebetteten Mikropartikel ist [173]. Werden Schädigungseffekte und plastisches Verhalten ausgeschlossen, lässt sich auf Seiten der Matrix zwischen dem in Abb. 4.1 schematisch dargestellten ideal elastischen und viskoelastischen Verhalten unterscheiden [56]. Dabei sei angemerkt, dass in der Realität stets eine gewisse Ratenabhängigkeit auftritt. Abhängig vom Elastomer lässt sich das Verhalten in einem für die Problemstellung relevanten Bereich von Deformationsgeschwindigkeiten  $\dot{C}$  aber häufig als elastisch annähern.

Aus magnetischer Sicht verhalten sich Polymere diamagnetisch, d. h. für die relative Permeabilität gilt  $\mu_r < 1$ . Im Vergleich zu den ferromagnetischen Partikeln ist dieser Effekt allerdings verschwindend gering, sodass die Permeabilität durch  $\mu = \mu_0 \mu_r \approx \mu_0$  gegeben ist, vgl. WAPLER et al. [169]. Somit kann die erweiterte freie Energie der Matrixphase  $\mathcal{B}_0^M$  unter der getroffenen Annahme durch

$$\Omega(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{Z}^\alpha) := \varrho_0 \psi(\mathbf{C}, \mathbf{Z}^\alpha) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} : (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) \quad (4.3)$$

definiert werden [72, 74, 75]. Ist  $\mathbf{H}$  als unabhängige konstitutive Variable festgelegt, so ist der in (4.3) auftretende Freifeldanteil durch die Definition gemäß Gleichung (2.52) zu ersetzen.

## 4.2 Elastomere Matrix

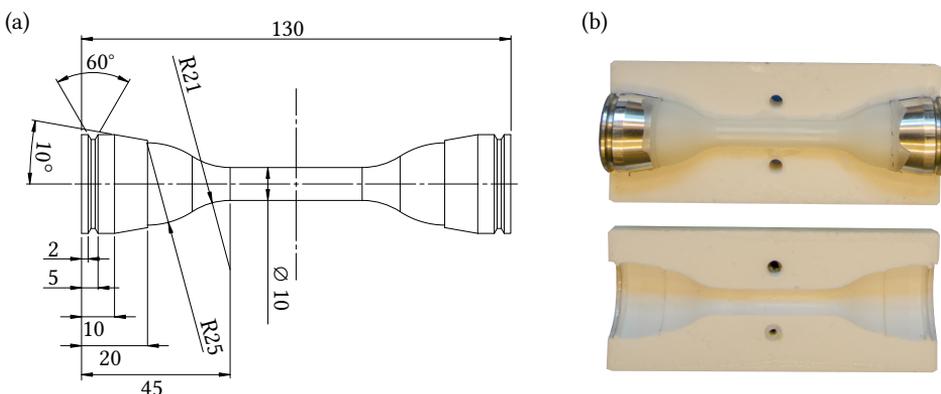
Um bei der Modellbildung das reale Verhalten eines Silikonelastomers abzubilden, wurde im Rahmen der studentischen Arbeit WOLLNER [171] das Elastomer *Zhermack Silikon ZA 8 LT Shore 8* der Firma TROLL FACTORY charakterisiert. Im folgenden Abschnitt sind die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst.

### 4.2.1 Experimentelle Charakterisierung

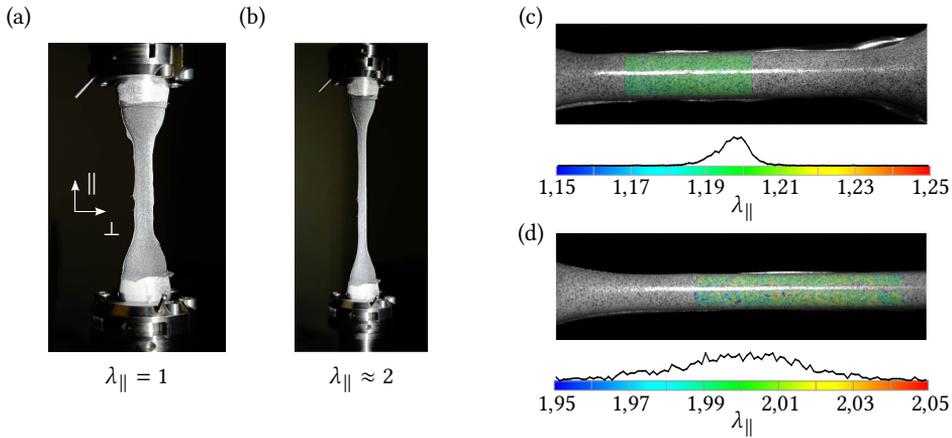
#### Probenherstellung und Prüfaufbau

Zur Herstellung der Proben erfolgte die Mischung von Basis- und Katalysatorflüssigkeit sowie verschiedenen Gehalten von Silikonöl. Um den Einfluss des Silikonöls auf die mechanischen Eigenschaften des Elastomers zu untersuchen, wurden jeweils sechs Proben mit den Ölgehalten  $\phi_{\text{Öl}} = \{0, 10, 20, 30, 40\}$  % hergestellt. Für die verbleibenden Volumenanteile erfolgte eine gleichmäßige Aufteilung auf Basis- und Katalysatorkomponente. Weiterhin wurden zur Erleichterung der vorgesehenen lokalen Dehnungsmessung jeweils geringe Mengen eines Farbstoffs auf Silikonbasis zugesetzt. Nach der sorgfältigen Vermischung aller Chemikalien bei Raumtemperatur wurde die Flüssigkeit 10 min in einer Vakuumkammer entgast und dann in zwei separate Polytetrafluorethylen (PTFE)-Formen gegeben. Zur Ankopplung an die Einspannvorrichtung dienten jeweils zwei Metallhülsen. Nach einer Wartezeit von mindestens 2 h erfolgte schließlich die in Abb. 4.2(b) dargestellte Entformung der Proben. Die Geometrie des Prüfkörpers samt Einspannhülsen ist in Abb. 4.2(a) zu finden und ist DOHMEN [29] entnommen.

Zur Durchführung der Zugversuche kam eine elektro-mechanische Prüfmaschine mit einer Maximalkraft von 5 kN zum Einsatz. Aufgrund der verhältnismäßig geringen Steifigkeit der hergestellten Proben lag die größte auftretende Prüfkraft samt Gewicht der Einspannung allerdings bei ca. 50 N. Um dennoch eine präzise Messung der anliegenden Zugkraft zu gewährleisten, wurde in den Laststrang eine Kraftmessdose mit einer Nennlast von 100 N eingebaut. Die Lasteinleitung erfolgte mittels der in Abb. 4.3(a) dargestellten Einspannvorrichtung gemäß



**Abb. 4.2:** Elastomer-Prüfkörper: (a) Geometrie der Probe gemäß DOHMEN [29] mit Längenangaben in mm und (b) PTFE-Formschalen mit Probe und Lasteinleitungshülsen.



**Abb. 4.3:** Experimenteller Aufbau der Elastomer-Prüfung: (a) und (b) lastfreie und belastete Probe mit aufgespritztem Muster zur lokalen Dehnungsmessung und Einspannung gemäß DOHMEN [29] sowie (c) und (d) Messung der lokalen Streckung  $\lambda_{||}$  in Lastrichtung mittels ARAMIS. Die Fotografie unter (a) ist KALINA et al. [76] entnommen. Nachdruck mit Genehmigung von De Gruyter: Physical Sciences Reviews, Multiscale modeling and simulation of magneto-active elastomers based on experimental data, K. KALINA et al. 2020.

DOHMEN [29]. Sämtliche Versuche erfolgten verschiebungsgesteuert, sodass die Traversen-Relativverschiebung  $\Delta u(t)$  vorzugeben war. Prüfkraft  $\Delta F$  und Verschiebung  $\Delta u$  wurden mit 500 Hz aufgezeichnet.

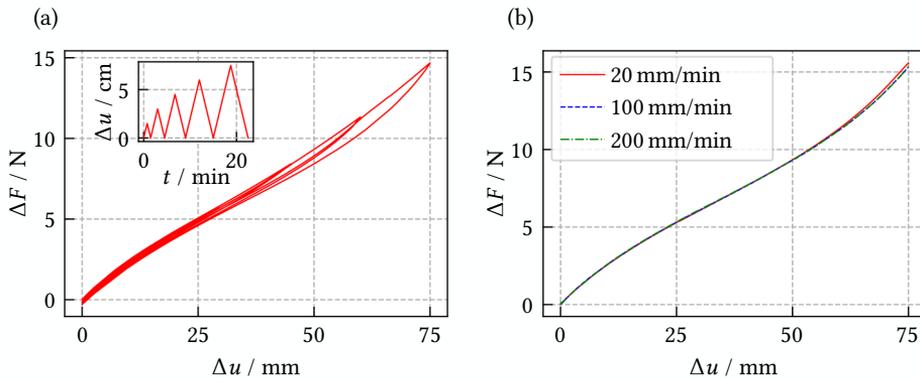
Neben der Aufzeichnung von  $\Delta u$  kam eine lokale Dehnungsmessung mittels digitaler Bildkorrelation zum Einsatz. Dies bietet den Vorteil, auf eine näherungsweise Berechnung der lokalen Dehnungen bzw. Streckungen  $\lambda_{||}$  in Lastrichtung anhand von  $\Delta u$  verzichten zu können.<sup>1</sup> Zusätzlich lässt sich auch die Streckung  $\lambda_{\theta}$  in tangentialer Richtung bestimmen. Da für eine homogene Deformation die Kreisform des Querschnitts erhalten bleibt, folgt weiterhin die Gleichheit von radialer und tangentialer Streckung. Somit ist neben  $\lambda_{||}$  die Streckung  $\lambda_{\perp}$  quer zur Lastrichtung bekannt. Die praktische Umsetzung der beschriebenen Prozedur erfolgte mit dem Tool ARAMIS der Firma GOM. Dazu war jeder Prüfkörper vorab mit einem stochastischen Muster zu besprühen. Die maximal aufgeprägte lokale Streckung in Lastrichtung lag bei  $\lambda_{||} \approx 2$ . Zwei aufgezeichnete Feldverteilungen von  $\lambda_{||}$  sind in Abb. 4.3(b) und (c) dargestellt. Die Aufnahme der Bilder zur anschließenden Auswertung erfolgte mit 1/3 Hz, wobei der Start der Aufnahme manuell vorgenommen wurde.

## Zugversuche

### Voruntersuchungen

Bevor die Aufzeichnung der Spannungs-Dehnungs-Kurven begann, wurden alle Proben vor-konditioniert, d. h. es fand eine Belastung bis zur Maximalverschiebung und anschließende Entlastung statt. Somit lässt sich die Nicht-Reproduzierbarkeit der Versuche aufgrund des

<sup>1</sup>Aus einem Vergleich der in Abb. 4.3(a) und (b) dargestellten Zustände wird die Schwierigkeit ersichtlich  $\lambda_{||}$  im Prüfbereich aus  $\Delta u$  zu bestimmen. Da der aufgeweitete Lasteinleitungsbereich der knochenförmigen Zugprobe eine nicht zu vernachlässigende Deformation aufweist, ist die analytische Berechnung von  $\lambda_{||}$  nur schwerlich möglich.



**Abb. 4.4:** Voruntersuchungen zur Charakterisierung des Silikonelastomers mit  $\phi_{\text{OI}} = 0\%$ . Prüfkraft  $\Delta F$  über Verschiebung  $\Delta u$  für: (a) MULLINS-Effekt bei einer unconditionierten Probe und (b) einer vorkonditionierten Probe bei unterschiedlichen Verschiebungsraten  $\dot{u}$  der Traverse.

MULLINS-Effektes [117] vermeiden. Die Be- und Entlastungskurven einer unconditionierten Probe in fünf Stufen sind in Abb. 4.4(a) dargestellt. Dabei ist der für den MULLINS-Effekt typische Steifigkeitsabfall deutlich zu erkennen.

Weiterhin wurde in einem Vorversuch die Ratenabhängigkeit des Silikonelastomers untersucht. Es ließ sich für die Verschiebungsraten  $\Delta\dot{u} = \{20, 100, 200\} \text{ mm min}^{-1}$  kein signifikanter Unterschied in den Kraft-Weg-Kurven detektieren, vgl. Abb. 4.4(b). Weitergehende Untersuchungen mittels einer dynamisch-mechanischen Analyse bestätigten die vernachlässigbare Ratenabhängigkeit des Elastomers erneut. Das Materialverhalten kann folglich in sehr guter Näherung als ideal elastisch betrachtet werden. Die ermittelte nahezu elastische Spannungsantwort ist auch von anderen Silikonelastomeren bekannt, vgl. LEONARD et al. [89].

#### *Durchführung der Messungen und Auswertung*

Zur statistischen Absicherung sind für jede Spannungs-Dehnungs-Kurve die Messdaten aus jeweils sechs separaten Versuchen berücksichtigt. Dabei tritt eine gewisse Schwierigkeit bei der Datenauswertung auf. Zum einen wurden die diskreten Signale von Kraft  $\Delta F(t_i)$  und Streckungen  $\lambda_{\parallel/\perp}(t_j)$  von zwei unterschiedlichen Systemen mit verschiedenen Frequenzen aufgezeichnet und zum anderen erfolgte die Initiierung der Dehnungsmessung über ARAMIS bei jedem Versuch per Hand.

Die angesprochenen Probleme lassen sich nun folgendermaßen umgehen: Durch Einspeisung des Signals  $\Delta u(t_i)$  in ARAMIS ist über einen Abgleich eine einheitliche Zeitparametrisierung zu erreichen, sodass mit der Transformation  $t_i^* = t_i + \Delta t^*$  jeweils  $\Delta F(t_0) = 0$  und  $\lambda_{\parallel/\perp}(t_0^*) = 1$  für die relevanten Signale gelten. Aufgrund des manuellen Starts der Dehnungsmessung können die Messpunkte  $\lambda(t_i^*)$  der jeweils sechs Versuche aber dennoch unmöglich an den gleichen Zeitpunkten vorliegen. Um zur Bestimmung von Mittelwert und Fehlern ein isochrones Signal

zu erhalten, erfolgt somit mittels der Stützwerte  $y_i$  mit  $i \in \{0, \dots, n\}$  eine Interpolation durch kubische  $C^2$ -Splines

$$s_i(t) := a_i(t - t_i)^3 + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i) + d_i \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \quad \text{mit } i \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (4.4)$$

Die Freiwerte sind dabei aus den Interpolations-Bedingungen  $s_i(t_i) = y_i$  und  $s_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$ , der Forderung nach zweifach stetiger Differenzierbarkeit sowie den natürlichen RB  $s_0''(x_0) = 0$  und  $s_{n-1}''(x_n) = 0$  bestimmbar. Unter Ausnutzung der Spline-Interpolation lassen sich nun für jeden Silikonölgehalt isochrone Signale  $\{\lambda_{\parallel,i}, \lambda_{\perp,i}, \Delta F_i\}$  mit äquidistanten Zeitschritten extrahieren. Da pro Versuch ca. 100 Stützstellen vorliegen, ist der Fehler infolge der Interpolation der gemessenen Streckungen vernachlässigbar. Für die Prüfkraft liegen aufgrund der deutlich höheren Abtastrate von 500 Hz nochmals wesentlich mehr Stützstellen vor.

Alle ermittelten Spannungs-Dehnungs-Messungen für die zuvor gewählten Silikonölgehalte  $\phi_{\text{Öl}} = \{0, 10, 20, 30, 40\} \%$  sind in Abb. 4.5(a) zu finden. Es zeigt sich ein deutlich ausgeprägtes nichtlineares Verhalten mit drei Teilbereichen, im englischen als *small-to-moderate strain regime*, *strain-hardening regime* und *limiting-chain regime* bezeichnet [27]. Der charakteristische Anstieg bei hohen Streckungen lässt sich auf die zugrunde liegende Polymerketten-Struktur zurückführen. Sind diese komplett in Richtung der angelegten Deformation ausgerichtet, steigt der Widerstand gegen eine weitere Dehnung deutlich an. Weiterhin zeigt sich für den betrachteten Deformationsbereich eine nahezu perfekt ausgeprägte Inkompressibilität des Elastomers, vgl. Abb. 4.5(b).

Für viele Anwendungen ist der initiale Bereich der Spannungs-Dehnungs-Kurve besonders relevant. Dabei verhalten sich alle elastischen Materialien in einem kleinen Bereich um den spannungsfreien Zustand  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  annähernd linear, d. h. es gilt  $P = E(\lambda - 1)$ . Folglich lässt sich der initiale Elastizitätsmodul  $E$  anhand der Datenpunkte des linearen Bereiches bestimmen. Es zeigt sich, dass der in Tab. 4.1 aufgeführte initiale Schubmodul  $G = E/3$  des Silikonelastomers durch Zugabe von Silikonöl systematisch beeinflusst werden kann. Die Abhängigkeit von  $G$  ist jedoch stark nichtlinear und lässt sich durch die Funktion

$$G(\phi_{\text{Öl}}) = 98,56 \text{ kPa} (1 - \phi_{\text{Öl}})^{2,735} \quad \text{mit} \quad \max \left| \frac{G(\phi_{\text{Öl}}^i) - G^i}{G^i} \right| = 4,78 \% \quad (4.5)$$

beschreiben [171].

## 4.2.2 Modellierung und Parametrisierung

Aufgrund der vernachlässigbaren Ratenabhängigkeit des charakterisierten Silikonelastomers sind mögliche interne Variablen  $\mathbf{Z}^\alpha$  nicht von Belang. Somit lässt sich  $\psi$  für alle  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0^M$  in Abhängigkeit des rechten CAUCHY-GREEN-Deformationsensors darstellen.

Um volumetrische und deviatorische Anteile der Spannungsantwort separat modellieren zu können, ist die als FLORY-Split [36] bezeichnete Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  in volumetrischen und isochoren Anteil gemäß

$$\mathbf{F} := \mathbf{F}^{\text{vol}} \cdot \mathbf{F}^{\text{iso}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}^{\text{vol}} := J^{1/3} \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^{\text{iso}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (4.6)$$

zweckmäßig. Somit kann das in Abb. 4.5(b) dargestellte nahezu perfekt inkompressible Verhalten sehr gut beschrieben werden. Dazu ist die freie HELMHOLTZsche Energiedichte  $\Psi := \rho_0 \psi$

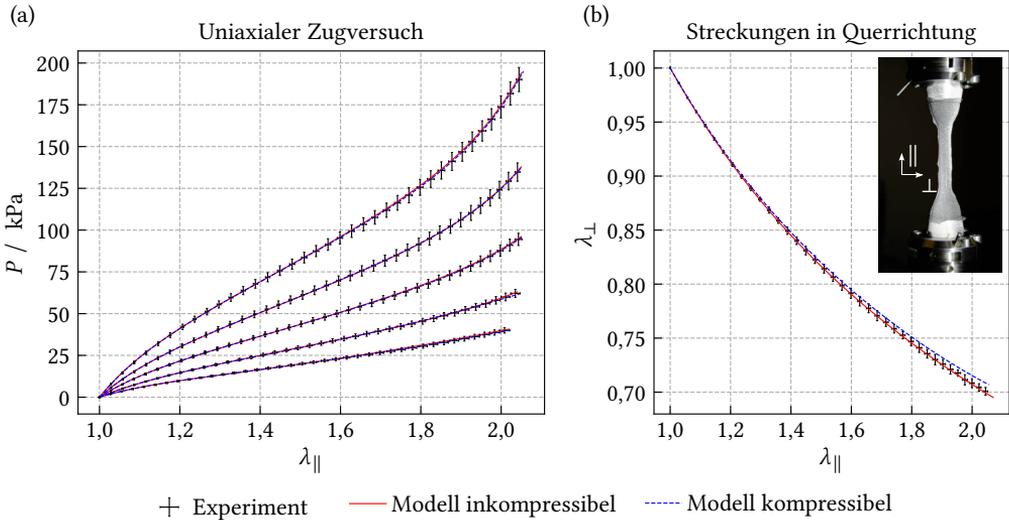
additiv in Deviator- und Kugelanteil aufzuspalten:  $\Psi(\mathbf{C}) := \Psi^{\text{dev}}(\mathbf{C}^{\text{iso}}) + \Psi^{\text{vol}}(J)$ . Mit dem isochoren Rechts-CAUCHY-GREEN-Deformationstensor  $\mathbf{C}^{\text{iso}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$  und  $\partial_{\mathbf{C}}J = J/2\mathbf{C}^{-1}$  sowie den Gleichungen (2.40) und (2.50) folgt

$$\mathbf{T} = 2 \frac{\partial \Psi^{\text{dev}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi^{\text{vol}}}{\partial J} J \mathbf{C}^{-1} . \quad (4.7)$$

Um ideal-inkompressibles Verhalten zu modellieren, gelten hingegen die Relationen

$$\Psi(\mathbf{C}) := \Psi^{\text{dev}}(\mathbf{C}^{\text{iso}}) - p(J - 1) \quad \text{und} \quad \mathbf{T} = 2 \frac{\partial \Psi^{\text{dev}}}{\partial \mathbf{C}} - p J \mathbf{C}^{-1} , \quad (4.8)$$

wobei  $p$  den mechanischen hydrostatischen Druck bezeichnet.



**Abb. 4.5:** Charakterisierung des Silikonelastomers durch uniaxiale Zugversuche: (a) experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Kurven für die Silikonölgehalte  $\phi_{\text{OI}} = \{0, 10, 20, 30, 40\} \%$  sowie angepasste OGDEN-Modelle (4.18) und (4.20) und (b) gemessene lokale Streckungen  $\lambda_{\parallel}$  und  $\lambda_{\perp}$  für  $\phi_{\text{OI}} = 0 \%$  sowie ideal inkompressible und quasi-inkompressible Streckungskurven. Die Richtungen  $\parallel$  und  $\perp$  sind im abgebildeten Foto des Probekörpers gekennzeichnet. Messdaten und Fotografie sind KALINA et al. [76] entnommen. Nachdruck mit Genehmigung von De Gruyter: Physical Sciences Reviews, Multiscale modeling and simulation of magneto-active elastomers based on experimental data, K. KALINA et al. 2020.

### Isotrope Hyperelastizität

Aufgrund der stochastischen Anordnung der Ketten innerhalb von Polymeren lassen sich diese als isotrop betrachten, d. h. es gilt  $\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(I_1^{\text{iso}}, I_2^{\text{iso}}, I_3) = \Psi(\lambda_1^{\text{iso}}, \lambda_2^{\text{iso}}, \lambda_3^{\text{iso}}, J)$ . Dabei sind die Hauptinvarianten mit isochor-volumetrischer Zerlegung gemäß

$$I_1^{\text{iso}} := J^{-2/3} \text{tr } \mathbf{C} \quad , \quad I_2^{\text{iso}} := \frac{J^{-4/3}}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{C} - \text{tr } \mathbf{C}^2) \quad \text{und} \quad I_3 := \det \mathbf{C} \quad (4.9)$$

definiert. Für die isochoren Anteile der Hauptstreckungen gilt  $\lambda_\alpha^{\text{iso}} = J^{-1/3} \lambda_\alpha$ , wobei sich die Hauptstreckungen  $\lambda_\alpha \in \mathcal{R}_+$  mit  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  aus dem Eigenwertproblem  $(\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}$  mit dem Eigenvektor  $\mathbf{N}$  ergeben.

Um das stark nichtlineare Verhalten des Elastomers abzubilden, hat sich die Anwendung des OGDEN-Modells [120] als besonders geeignet herauskristallisiert [171]. Daher soll im Folgenden die Beschreibung in Abhängigkeit der Hauptstreckungen präferiert werden. Unter Nutzung der Projektionstensoren  $\mathbf{M}^\alpha$  lassen sich  $\mathbf{C}$  und  $J$  nun allgemein durch

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \lambda_\alpha^2 \mathbf{M}^\alpha \quad \text{und} \quad J = \prod_{\alpha=1}^{N_\lambda} \lambda_\alpha^{v_\alpha} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{M}^\beta := \mathbf{M}^\alpha \delta^{(\alpha)\beta} \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \mathbf{M}^\alpha := \mathbf{I} \quad (4.10)$$

ausdrücken, vgl. MIEHE & LAMBRECHT [111]. Dabei bezeichnen  $N_\lambda \in \{1, 2, 3\}$  die Anzahl unterschiedlicher Eigenwerte und  $v_\alpha \in \{1, 2, 3\}$  die algebraische Vielfachheit von  $\lambda_\alpha$ . Das Einklammern von Indizes kennzeichne im Weiteren, dass über diese nicht zu summieren ist. Unter Ausnutzung der in A.2 hergeleiteten Relationen

$$\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2\lambda_\alpha v_{(\alpha)}} \mathbf{M}^{(\alpha)} \quad , \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{v_\alpha}{\lambda_{(\alpha)}} J \quad \text{und} \quad \frac{\partial \lambda_\alpha^{\text{iso}}}{\partial \lambda_\beta} = J^{-1/3} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} v_\beta \frac{\lambda_\alpha^{\text{iso}}}{\lambda_{(\beta)}^{\text{iso}}} \right) \quad (4.11)$$

folgen für deviatorischen und volumetrischen Anteil des mechanischen Spannungstensors  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\text{dev}} + \mathbf{T}^{\text{vol}}$  gemäß (4.7) bzw. (4.8)<sub>2</sub> die Zusammenhänge

$$\mathbf{T}^{\text{dev}} = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \frac{1}{\lambda_\alpha^2} \left[ \frac{\lambda_\alpha^{\text{iso}}}{v_\alpha} \frac{\partial \Psi^{\text{dev}}}{\partial \lambda_\alpha^{\text{iso}}} - \frac{1}{3} \sum_{\beta=1}^{N_\lambda} \lambda_\beta^{\text{iso}} \frac{\partial \Psi^{\text{dev}}}{\partial \lambda_\beta^{\text{iso}}} \right] \mathbf{M}^\alpha \quad \text{sowie} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{T}^{\text{vol}} = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \frac{J}{\lambda_\alpha^2} \frac{\partial \Psi^{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{M}^\alpha \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T}^{\text{vol}} = -p \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \frac{J}{\lambda_\alpha^2} \mathbf{M}^\alpha \quad (4.13)$$

Der nachfolgend zur Parametrisierung verwendete 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor nach Gleichung (2.39), also  $\mathbf{P} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T$ , ergibt sich unter Ausnutzung der Relationen

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} T_\alpha \mathbf{M}^\alpha \quad , \quad \mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \lambda_\alpha \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}^{(\alpha)}}_{:=\mathbf{P}^{(\alpha)}} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{P}^{(\alpha)} \quad (4.14)$$

mit den Hauptspannungen  $T_\alpha$  und dem eigentlich orthogonalen Rotationstensor

$$\mathcal{Q} \ni \mathbf{R} := \mathbf{F} \cdot \sqrt{\mathbf{C}^{-1}}. \quad (4.15)$$

Unter Anwendung der Beziehungen (4.14) folgt für den 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} P_\alpha \mathbf{P}^{\alpha T} \quad \text{mit} \quad P_\alpha := T_\alpha \lambda_{(\alpha)}. \quad (4.16)$$

## Parametrisierung

### Ideale Inkompressibilität

Zur Beschreibung der in Abb. 4.5 dargestellten experimentellen Daten soll, wie bereits erwähnt, ein OGDEN-Ansatz Anwendung finden. Unter Annahme ideal inkompressiblen Verhaltens gelten somit

$$\Psi := \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left( \sum_{\beta=1}^{N_\lambda} v_\beta \lambda_\beta^{\text{iso}\alpha_p} - 3 \right) - p(J - 1) \quad \text{und} \quad (4.17)$$

$$P_\beta = \frac{1}{\lambda_\beta} \sum_{p=1}^N \mu_p \left( \lambda_\beta^{\text{iso}\alpha_p} - \frac{1}{3} \sum_{\gamma=1}^{N_\lambda} v_\gamma \lambda_\gamma^{\text{iso}\alpha_p} \right) - p \frac{1}{\lambda_\beta} J. \quad (4.18)$$

Für den engsten Querschnitt der Probe sei nun ein homogener, uniaxialer Spannungszustand mit  $P = P_1$  angenommen. Somit gilt für die Spannungen in Querrichtung  $P_2 = P_3 = 0$  und für die Hauptstreckungen folgt  $\lambda_1 = \lambda_\parallel$  sowie  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_\perp$  mit  $v_\perp = 2$ . Aus der geforderten Inkompressibilität folgt weiterhin  $\lambda_\perp = \lambda_\parallel^{-1/2}$ . Der hydrostatische Druck  $p$  lässt sich aus den zu null geforderten Spannungen in Querrichtung bestimmen. Somit ergeben sich die gesuchten Parameter  $\underline{\kappa} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \mu_N \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \alpha_N]^T$  aus dem Optimierungsproblem

$$\underline{\kappa} = \arg \left\{ \min_{\underline{\kappa} \in \mathcal{C}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [P_i - P(\lambda_{\parallel i}, \underline{\kappa})]^2 \right\} \quad \text{mit} \quad (4.19)$$

$$\mathcal{C} := \left\{ \mu_p, \alpha_p \in \mathcal{R} \mid (\alpha_p < -1 \vee \alpha_p \geq 2) \wedge \alpha_p \mu_{(p)} \geq 0 \wedge G = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p \right\}.$$

Über die Nebenbedingung  $\mathcal{C}$  wird der initiale Schubmodul  $G$  eingestellt und weiterhin der Satz von Parametern  $\{\mu_p, \alpha_p\}$  auf physikalisch sinnvolle Wertepaare beschränkt [120]. Bei der Optimierung hat sich für  $\phi_{\text{OI}} = \{0, 10, 20\}$  % ein Modell mit  $N = 3$  Gliedern als geeignet erwiesen. Für  $\phi_{\text{OI}} = \{30, 40\}$  %, ist die angepasste Kurve bereits für  $N = 2$  ausreichend genau. Die bestimmten Datensätze für alle Sikikonölgehalte sowie die angepassten Spannungs-Dehnungs-Kurven sind in Tab. 4.1 und Abb. 4.5 zu finden. Das Modell ist im Bereich der gemessenen Streckungen sehr gut in der Lage, das stark nichtlineare Verhalten abzubilden.

**Tab. 4.1:** Identifizierte Parameter des inkompressiblen OGDEN-Modells (4.18) für verschiedene Silikonölgehalte  $\phi_{\text{Öl}}$  und zugehörige initiale Schubmoduli  $G$ . Die Werte von  $G$  sind anhand der ersten vier Datenpunkte der gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven bestimmt.

$\phi_{\text{Öl}}/\%$	$G/\text{kPa}$	$\mu_1/\text{kPa}$	$\mu_2/\text{kPa}$	$\mu_3/\text{kPa}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
0	99,17	-22,67	24,17	$9,00 \cdot 10^{-5}$	-6,61	2,00	18,78
10	71,79	-15,88	19,33	$8,16 \cdot 10^{-5}$	-6,58	2,03	18,29
20	52,09	-11,78	12,31	$4,07 \cdot 10^{-5}$	-6,67	2,08	18,18
30	33,55	-13,63	2,81	-	-3,99	4,53	-
40	25,19	-6,85	1,72	-	-6,85	2,00	-

### Quasi-inkompressibles Modell

Um im Rahmen der FE-Simulationen eine numerisch aufwendigere gemischte Elementformulierung mit dem Druck  $p$  als zusätzlichen Freiwert zu umgehen, soll das Verhalten im Folgenden durch einen quasi-inkompressiblen Ansatz approximiert werden. Dabei bleibt der deviatorische Anteil des Modells unverändert und der volumetrische Term sei durch den Ansatz  $\Psi^{\text{vol}}(J) := \kappa/4(J^2 - 2 \ln J - 1)$  gegeben, sodass die Spannung zu

$$P_\beta = \frac{1}{\lambda_\beta} \sum_{p=1}^N \mu_p \left( \lambda_\beta^{\text{iso}^{\alpha p}} - \frac{1}{3} \sum_{\gamma=1}^{N_\lambda} \nu_\gamma \lambda_\gamma^{\text{iso}^{\alpha p}} \right) + \frac{\kappa}{2} \lambda_\beta^{-1} (J^2 - 1) \quad (4.20)$$

folgt. In Gleichung (4.20) bezeichnet  $\kappa = 2/3G(1 + \nu)/(1 - 2\nu)$  den Kompressionsmodul, wobei für  $\kappa \rightarrow \infty$  ideal inkompressibles Verhalten resultiert [61]. Um eine stabile FE-Simulation und dennoch eine nahezu inkompressible Spannungsantwort zu gewährleisten, wird für die initiale Querkontraktion der Wert  $\nu = 0,49$  gewählt. Die Parameter des kompressiblen Modells ergeben sich erneut aus dem Optimierungsproblem (4.19), wobei an die Stelle der inkompressiblen Spannungsdefinition (4.18) die Definition gemäß (4.20) tritt. Weiterhin ist zu beachten, dass sich die Querstreckungen  $\lambda_\perp$  im Gegensatz zur idealen Inkompressibilität nicht explizit angeben lassen. Sie sind durch  $P_2(\lambda_\parallel, \lambda_\perp) = P_3(\lambda_\parallel, \lambda_\perp) = 0$  implizit gegeben und sind in jedem Optimierungsschritt der nichtlinearen Aufgabe (4.19) iterativ zu bestimmen. Für den initialen Schubmodul gilt  $G = E/[2(1 + \nu)]$ .

Die bestimmten Parameter für alle Silikonölgehalte sowie die angepassten Spannungs-Dehnungs-Kurven sind in Tab. 4.2 und Abb. 4.5 zu finden. Insgesamt lässt sich für das kompressible Modell ebenfalls eine sehr gute Abbildung der experimentellen Spannungsantworten festhalten. Naturgemäß tritt allerdings durch die vorgeschriebene Querkontraktionszahl eine leichte Abweichung von 1,15 % bzgl. der gemessenen Querstreckungen auf.

### Finite-Elemente-Implementierung

Um das parametrisierte OGDEN-Modell in die im Kapitel 3 behandelte FE-Formulierung zu integrieren, ist schließlich noch die Bestimmung der Materialtangente  $\mathbb{C} = 2\partial_{\mathbb{C}}\mathbb{T}$  erforderlich. Neben der Kenntnis von  $\partial_{\mathbb{C}}\lambda_\alpha$  gemäß (4.11), ist dazu auch die Ableitung der Projektionstensoren  $\partial_{\mathbb{C}}\mathbf{M}^\alpha$  zu bestimmen. Diese lässt sich gemäß MIEHE [108] auf verschiedenen Wegen ermitteln. In dieser Arbeit wird dabei ein Vorgehen auf Basis des totalen Differentials  $d\mathbb{C} = \partial_{\lambda_\alpha} \mathbb{C} d\lambda_\alpha + \partial_{\mathbf{M}^\alpha} \mathbb{C} : d\mathbf{M}^\alpha$  gewählt. Die einzelnen Schritte sind im Anhang A.2 aufge-

**Tab. 4.2:** Identifizierte Parameter des kompressiblen OGDEN-Modells (4.20) für verschiedene Silikonölgehalte  $\phi_{\text{Öl}}/\%$  und zugehörige initiale Schubmoduli  $G$ . Die Werte von  $G$  sind anhand der ersten zwei Datenpunkte der gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven bestimmt.

$\phi_{\text{Öl}}/\%$	$G/\text{kPa}$	$\mu_1/\text{kPa}$	$\mu_2/\text{kPa}$	$\mu_3/\text{kPa}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\kappa/\text{kPa}$ für $\nu = 0,49$
0	98,56	-22,34	23,70	$1,20 \cdot 10^{-4}$	-6,48	2,20	18,73	$4,90 \cdot 10^3$
10	72,37	-15,80	19,55	$7,38 \cdot 10^{-5}$	-6,65	2,03	18,67	$3,59 \cdot 10^3$
20	52,40	-11,80	12,45	$4,59 \cdot 10^{-5}$	-6,68	2,09	18,34	$2,60 \cdot 10^3$
30	33,90	-13,71	2,65	-	-4,05	4,64	-	$1,68 \cdot 10^3$
40	25,16	-6,77	1,88	-	-6,88	2,00	-	$1,25 \cdot 10^3$

zeigt. Für den Fall dreier unabhängiger Eigenwerte, also  $N_\lambda = 3$ , folgt mit  $\mathbf{M}^\alpha = \mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{N}^{(\alpha)}$  schließlich der Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{1}{\lambda_\beta} \frac{\partial T_\alpha}{\partial \lambda_\beta} \mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{N}^\beta \otimes \mathbf{N}^\beta \\ & + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \frac{T_\beta - T_\alpha}{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2} \mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{N}^\beta \otimes (\mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{N}^\beta + \mathbf{N}^\beta \otimes \mathbf{N}^\alpha) \end{aligned} \quad (4.21)$$

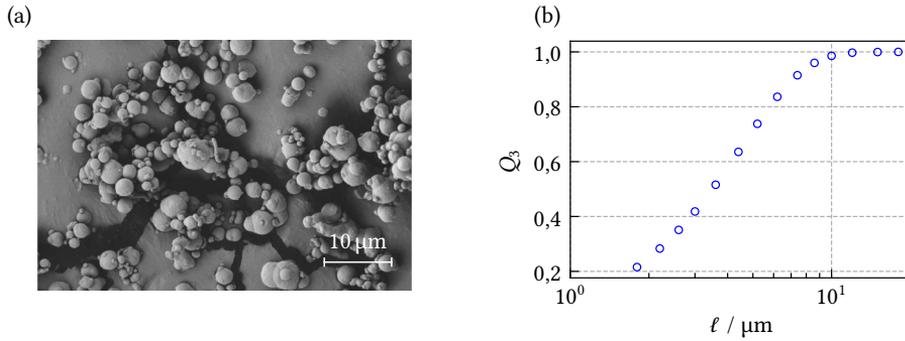
für die Tangente. Tritt während des Lösungsprozesses der Fall  $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$  für  $\alpha \neq \beta$  ein, so ist für den zweiten Term eine Grenzwertbildung mittels der Regel von l'HOSPITAL vorzunehmen, s. A.2.

### 4.3 Weichmagnetische Partikel

Klassische MRE sind mit weichmagnetischen Partikeln gefüllt, wobei zur Herstellung in der Regel Carbyloisen-Pulver (CEP) zum Einsatz kommt. Weit verbreitet sind Partikel der Firma BASF, welche Produkte mit verschiedensten mechanischen und magnetischen Eigenschaften sowie Größenverteilungen anbietet. Um während der Herstellung von MRE chemische Interaktionen mit dem unvernetzten Elastomer zu vermindern, ist außerdem eine Beschichtung der Partikel möglich. Die weichmagnetischen CEP weisen eine polykristalline Struktur auf, die durch Ausglühen der Partikel erreicht wird, vgl. PELTERET & STEINMANN [123]. Eine elektronenmikroskopische Aufnahme von Partikeln der Klasse CC ist in Abb. 4.6(a) dargestellt. Die zugehörige Summenverteilung  $Q_3$  der Partikelgrößen  $\ell$  ist in Abb. 4.6(b) zu finden. Hier liegt die mittlere Partikelgröße bei ca.  $5 \mu\text{m}$  [98].

Das experimentell mittels eines Vibrating Sample Magnetometers (VSM) bestimmte Magnetisierungsverhalten von CEP CC ist in Abb. 4.7 dargestellt. Die Messdaten sind der Arbeit SPIELER et al. [154] entnommen.<sup>2</sup> Anhand der Kurve wird ersichtlich, dass das betrachtete CEP

<sup>2</sup> Die Daten entstammen Messungen einer zylindrischen Probe aus gepresstem CEP. Kritisch anzumerken ist daher, dass in der Probe ein makroskopisch inhomogenes  $\vec{h}$ -Feld vorliegt. Weiterhin sind die lokalen Felder innerhalb der Partikel durch die heterogene Mikrostruktur, bestehend aus Partikeln und Luft, ohnehin stark inhomogen und lassen sich nicht analytisch bestimmen. Die herangezogenen Daten sind demnach mit einer starken Unsicherheit belegt. Dem Autor der vorliegenden Arbeit stehen jedoch zum aktuellen Zeitpunkt keine anderen Daten zur Verfügung. Zu präferieren sind Einzelpartikelmessungen, wie sie bspw. in METSCH et al. [106] für Nickel dokumentiert sind.



**Abb. 4.6:** Weichmagnetische Carbonyleisen-Partikel CC der Firma BASF: (a) rasterelektronenmikroskopische Aufnahme einzelner Partikel sowie (b) Summenverteilung  $Q_3$  der Partikelgrößen  $\ell$ . Bild und Daten sind Lux [98] entnommen. Nachdruck mit Genehmigung von C. Lux.

tatsächlich eine nahezu ideal weichmagnetische Materialantwort zeigt. Im Experiment erfolgte eine Magnetisierung zum maximalen Wert und eine anschließende Umkehr des äußeren Feldes [98]. Hin- und Rückkurve sind zugunsten der Übersicht nicht gesondert gekennzeichnet.

### 4.3.1 Modellierung

Unabhängig von den magnetischen Eigenschaften der Partikel sei der mechanische Anteil  $\psi^{\text{mech}} = \psi^{*\text{mech}}$  durch das kompressible neo-HOOKE-Potential

$$\psi^{\text{mech}}(I_1, J) := \frac{1}{2\varrho_0} \left[ G(I_1 - \ln J^2 - 3) + \frac{G\nu}{1 - 2\nu}(J^2 - \ln J^2 - 1) \right] \quad (4.22)$$

mit  $I_1 := \text{tr } \mathbf{C}$  gegeben. Die Steifigkeit der Partikel sollte dabei so gewählt werden, dass diese groß im Vergleich zu derer der Matrix ist. Somit lassen sich die Partikel als nahezu starre Einschlüsse in der FE-Simulation repräsentieren.

Da ideal weichmagnetische Materialien keine Lastpfadabhängigkeit aufzeigen, hängt der aktuelle Zustand des Materials lediglich von der primären magnetischen Feldgröße, also  $\mathbf{B}$  oder  $\mathbf{H}$ , ab. Aufgrund der angenommenen Isotropie folgen somit aus Gleichung (2.22) und (2.50) bzw. (2.53) die Relationen

$$\Psi^{\text{mag}} := - \int_0^{|\mathbf{B}|} \mathcal{M}(B) \, dB \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \mathcal{M}(|\mathbf{B}|) \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \quad \text{bzw.} \quad (4.23)$$

$$\Psi^{*\text{mag}} := -\mu_0 \int_0^{|\mathbf{H}|} \mathcal{M}(H) \, dH \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \frac{1}{J} \mathcal{M}(|\mathbf{H}|) \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}. \quad (4.24)$$

Dabei ist zu beachten, dass sich die Magnetisierung für kleine angelegte Felder stets linear verhält, sodass im initialen Bereich

$$\mathcal{M}(H) \approx \left. \frac{\partial \mathcal{M}(H)}{\partial H} \right|_{H=0} \Delta H = \chi_h \Delta H \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M}(B) \approx \left. \frac{\partial \mathcal{M}(B)}{\partial B} \right|_{B=0} \Delta B = \chi_b \Delta B \quad (4.25)$$

gelten, wobei der Parameter  $\chi_h$  die magnetische Suszeptibilität und  $\chi_b$  einen äquivalenten Parameter in Bezug auf die magnetische Flussdichte bezeichnen. Diese lassen sich durch die Zusammenhänge  $\chi_h = \mu_r - 1$  sowie  $\chi_b = (\mu_r - 1)\mu_r^{-1}\mu_0^{-1}$  mit der relativen Permeabilität und der Permeabilität des Vakuums in Verbindung bringen. Weiterhin ist die maximale Magnetisierung stets auf einen Sättigungswert  $M^S$  beschränkt, d. h.  $\lim_{H \rightarrow \infty} \mathcal{M}(H) = M^S$ . Diese Eigenschaft resultiert aus der Tatsache, dass sich der Betrag der den Domänen zugeschriebenen magnetischen Momente nicht ändert [79]. Aus den beschriebenen Eigenschaften folgt ein deutlich ausgeprägtes nichtlineares Verhalten, das durch die Wahl der Funktionen  $\mathcal{M}(B)$  bzw.  $\mathcal{M}(H)$  phänomenologisch zu beschreiben ist. Als geeignete Funktionen seien hier die ISING-Relation sowie die LANGEVIN-Funktion

$$\mathcal{M}(X) = M^S \tanh(\xi X) \quad \text{mit} \quad \mathcal{M}'(0) = \xi M^S \quad \text{und} \quad (4.26)$$

$$\mathcal{M}(X) = M^S [\coth(\xi X) - (\alpha X)^{-1}] \quad \text{mit} \quad \mathcal{M}'(0) = \xi M^S / 3 \quad (4.27)$$

genannt. Denkbar ist auch die Wahl anderer Funktionen mit Sättigungscharakter, wie etwa der dreiparametrischen BRILLOUIN-Funktion:

$$\mathcal{M}(X) = M^S \frac{2\beta + 1}{2\beta} \coth\left(\frac{2\beta + 1}{2\beta} \xi X\right) - \frac{1}{2\beta} \coth\left(\frac{1}{2\beta} \xi X\right) \quad (4.28)$$

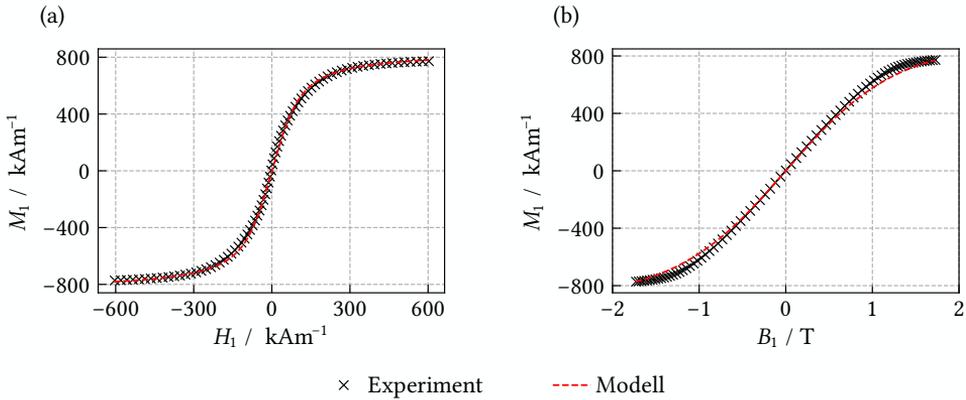
Diese enthält für  $\beta = 1/2$  die tanh-Funktion (4.26) und für  $\beta \rightarrow \infty$  die LANGEVIN-Funktion (4.27) als Grenzfälle [88].

### 4.3.2 Parametrisierung

Die phänomenologischen Modelle (4.23) und (4.24) sollen nun an die in Abb. 4.7 aufgetragenen Messpunkte angepasst werden. Dabei ist es zweckmäßig, vorerst die initiale relative Permeabilität  $\mu_r$  zu ermitteln, um im weiteren Verlauf das anfangs lineare Magnetisierungsverhalten korrekt abzubilden. Eine Regression ergibt  $\mu_r = 7,495$ , was deutlich unter Werten von reinem Eisen liegt. Die Ursache ist dabei in der Kristallstruktur, welche infolge des Herstellungsprozesses entsteht, zu suchen. Es sei aber auch auf die in Fußnote 2 diskutierte Unsicherheit der

**Tab. 4.3:** Materialparameter für CEP CC von BASF: Schubmodul  $G$  und Querkontraktion  $\nu$  des mechanischen Anteils der freien Energie (4.22) sowie identifizierte Parameter  $\xi$  und  $M^S$  der magnetischen Sättigungsfunktion.

$G$ / MPa	$\nu$	Sättigungsfunktion $\mathcal{M}(X)$	$\xi$ / T <sup>-1</sup>	$M^S$ / kA m <sup>-1</sup>
2000	0,3	$M^S \tanh(\xi B)$	0,7809	883
2000	0,3	$M^S [\coth(\mu_0 \xi H) - (\mu_0 \xi H)^{-1}]$	18,4371	841



**Abb. 4.7:** Experimentelle Daten des Magnetisierungsverhaltens weichmagnetischer Carbonyleisen-Partikel und angepasste Modelle: (a)  $H$ -Formulierung mit Sättigungsfunktion (4.27) und (b)  $B$ -Formulierung mit Sättigungsfunktion (4.26). Die VSM-Messdaten der Partikel der Klasse CEP CC von BASF sind SPIELER et al. [154] entnommen.

herangezogenen VSM-Messung hingewiesen.

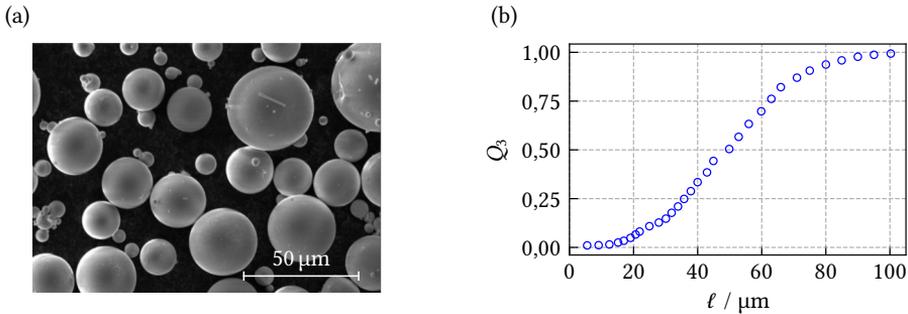
Die gesuchten Parameter  $\underline{\kappa} = [M^S \quad \xi]^T$  ergeben sich nun aus dem nichtlinearen Optimierungsproblem

$$\underline{\kappa} = \arg \left\{ \min_{\underline{\kappa} \in \mathcal{C}} \sum_{i=1}^n [\mathcal{M}(H_i, \underline{\kappa}) - M_i]^2 \right\} \text{ mit } \mathcal{C} := \{M^S, \xi \in \mathcal{R}_+ \mid \mathcal{M}'(0) = \chi_h\}, \quad (4.29)$$

wobei durch die Nebenbedingung  $\mathcal{M}'(0) = \chi_h$  die aus den Experimenten hervorgehende initiale Suszeptibilität gewährleistet wird. Für eine Formulierung mit  $H$  als unabhängige konstitutive Variable ergibt sich mit der LANGEVIN-Funktion (4.27) das beste Ergebnis. Die bestimmten Materialparameter und das angepasste Modell sind in Tab. 4.3 und Abb. 4.7(a) zu finden. Wird hingegen  $B$  anstelle von  $H$  als unabhängige konstitutive Variable gewählt, erweist sich die ISING-Relation (4.26) als beste Wahl, wobei das Optimierungsproblem (4.29) dementsprechend anzupassen ist. Wie in Abb. 4.7(b) dargestellt, ist die Güte des angepassten Modells allerdings deutlich schlechter als bei der  $H$ -Formulierung. Es zeigt sich, dass die tanh-Funktion nicht in der Lage ist, den Übergang zur Sättigungsmagnetisierung akkurat abzubilden. Allerdings lässt sich auch mit der dreiparametrischen BRILLOUIN-Funktion (4.28) kein besseres Ergebnis erzielen. Die Materialparameter sind ebenfalls in Tab. 4.3 aufgelistet.

## 4.4 Hartmagnetische Partikel

Magnetisch harte Materialien wie NdFeB stellen die zweite Klasse zu charakterisierender Füllstoffe dar. Dabei kommt zur Herstellung von MRE häufig das NdFeB-Pulver der Firma MAGNEQUENCH zum Einsatz [13, 72, 93]. Eine rasterelektronenmikroskopische Aufnahme aus SKALON et al. [152] sowie die statistische Summenverteilung  $Q_3$  der Partikelgrößen  $\ell$  sind in Abb. 4.8 dargestellt. Genau wie das weichmagnetische Carbonyleisen lassen sich die NdFeB-Partikel in guter Näherung als sphärisch beschreiben, sind jedoch mit einem mittleren Durchmesser



**Abb. 4.8:** Hartmagnetische NdFeB-Partikel MQP-S-11-9-20001-070 der Firma MAGNEQUENCH: (a) rasterelektronenmikroskopische Aufnahme einzelner Partikel und (b) Summenverteilung  $Q_3$  der Partikelgrößen  $\ell$ . Bild und Daten sind SKALON et al. [152] entnommen. Nachdruck mit Genehmigung von MDPI: Materials, Influence of Melt-Pool Stability in 3D Printing of NdFeB Magnets on Density and Magnetic Properties, M. SKALON et al. 2019.

von ca.  $50\ \mu\text{m}$  deutlich größer als diese [93]. Ebenso wie CEP weisen die NdFeB-Partikel eine polykristalline Struktur mit zufälliger Anordnung der Körner auf und lassen sich daher als isotrop betrachten [63, 99].

Da das hartmagnetische Verhalten von NdFeB eine signifikante Lastgeschichts-Abhängigkeit aufweist, ist zur Beschreibung der Materialantwort ein geeignetes Hysterese-Modell notwendig. Populäre Modelle dieser Art sind beispielsweise das JILES-ATHERTON-Modell [69] oder das PREISACH-Modell [128]. Für beide sind zahlreiche Vorschläge zur Verallgemeinerung auf ein Vektor-Modell vorhanden. Diese ermöglichen allerdings entweder keine konsistente Interpretation der dissipierten und gespeicherten Energien oder erfordern eine immens große Zahl von Parametern. Zur Beschreibung magnetischer Hysteresen existiert weiterhin eine Vielzahl thermodynamisch konsistenter Modelle in Analogie zu plastischen Theorien. Hier seien die Arbeiten MIEHE et al. [110], MUKHERJEE und DANAS [113] oder LINNEMANN et al. [94] genannt. Um das Verhalten hartmagnetischer Multidomänenteilchen zu beschreiben, soll in dieser Arbeit ein solcher Ansatz gemäß KALINA et al. [72] basierend auf dem BERGQVIST-Modell [10] Anwendung finden. Dieses ist phänomenologischer Natur und ist in vielfachen Adaptionen, Erweiterungen und Anwendungen in der Literatur zu finden, bspw. PRIGOZHIN et al. [129] und HENROTTE et al. [57, 58].

#### 4.4.1 Modellierung

Ebenso wie für die weichmagnetischen Partikel soll der mechanische Anteil der spezifischen freien Energie  $\psi := \psi^{\text{mech}}(\mathbf{C}) + \psi^{\text{mag}}(\mathbf{B}, \mathbf{Z}^\alpha)$  durch das elastische Modell gemäß Gleichung (4.22) beschreiben sein. Im Gegensatz zu den vorherigen Modellen sind nun allerdings die eingeführten internen Variablen von Belang.

Wie im JILES-ATHERTON-Modell wird im BERGQVIST-Modell die Ursache magnetischer Hysteresen irreversiblen Domänen-Umwandlungs-Prozessen infolge von Korngrenzen und anderen Inhomogenitäten zugeschrieben [10]. Um den statistischen Charakter dieser Prozesse innerhalb der Vielzahl von Domänen zu erfassen, werden – ähnlich wie beim PREISACH-Modell –  $N$

Einzelmodelle mit Wichtungsfaktoren  $\omega^\alpha$  überlagert. Diese seien derart beschränkt, dass sie die Beziehungen

$$\omega^\alpha > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha=1}^N \omega^\alpha = 1 \quad (4.30)$$

erfüllen.

### Vektor-Hysterese-Modell

Unter Beachtung von Gleichung (4.30) ist der magnetische Anteil der spezifischen freien HELMHOLTZschen Energie im dreidimensionalen Fall durch

$$\varrho_0 \psi^{\text{mag}}(\mathbf{B}, \mathbf{M}^\alpha) := - \sum_{\alpha=1}^N \omega^\alpha \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \omega^\alpha \int_0^{|\mathbf{M}^\alpha|} \mathcal{M}^{\alpha^{-1}}(M^\alpha) dM^\alpha \quad (4.31)$$

gegeben. Dabei ist dieser derart konstruiert, dass sich die Magnetisierung sowie die Dissipationsrate  $\dot{D}$  mit den Gleichungen (2.50) und (2.22) zu

$$\mathbf{M} = -\varrho_0 \frac{\partial \Psi^{\text{mag}}}{\partial \mathbf{B}} = \sum_{\alpha=1}^N \omega^\alpha \mathbf{M}^\alpha \quad \text{und} \quad (4.32)$$

$$\dot{D} = -\varrho_0 \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \Psi^{\text{mag}}}{\partial \mathbf{M}^\alpha} \cdot \dot{\mathbf{M}}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \omega^\alpha \left[ \mathbf{B} - \mathcal{M}^{\alpha^{-1}}(|\mathbf{M}^\alpha|) \frac{\mathbf{M}^\alpha}{|\mathbf{M}^\alpha|} \right] \cdot \dot{\mathbf{M}}^\alpha \geq 0 \quad (4.33)$$

ergeben. Um das charakteristische Sättigungsverhalten abzubilden, muss die in (4.33) eingeführte Funktion  $\mathcal{M}^{\alpha^{-1}}(|\mathbf{M}^{(\alpha)}|)$  die Bedingungen

$$\mathcal{M}^{\alpha^{-1}}(M^{(\alpha)}) \geq 0 \quad \wedge \quad \mathcal{M}^{\alpha^{-1}}(0) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{M \rightarrow M^S} \mathcal{M}^{\alpha^{-1}}(M^{(\alpha)}) = \infty \quad (4.34)$$

erfüllen und wird in Analogie zur Plastizitätstheorie auch als Verfestigungsfunktion bezeichnet [110].<sup>3</sup> Dabei fungieren die mit der Magnetisierung assoziierten Vektoren  $\mathbf{M}^\alpha$  als innere Variablen. Mit der Einführung einer additiven Zerlegung der magnetischen Flussdichte in reversiblen und irreversiblen Anteil gemäß

$$\mathbf{B} := \mathbf{B}^{\text{r}\alpha} + \mathbf{B}^{\text{i}\alpha} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}^{\text{r}\alpha} := \mathcal{M}^{\alpha^{-1}}(|\mathbf{M}^{(\alpha)}|) \frac{\mathbf{M}^{(\alpha)}}{|\mathbf{M}^{(\alpha)}|}, \quad (4.35)$$

---

<sup>3</sup>Die Bezeichnung von  $\mathcal{M}^{\alpha^{-1}}$  als Verfestigungsfunktion wird anhand des Schaltkriteriums  $\phi^\alpha$  gemäß (4.37) klar. Mit der Definition der additiven Zerlegung (4.35) lässt sich  $\phi^\alpha$  auch als

$$\phi^\alpha = \left| \mathbf{B} - \mathcal{M}^{\alpha^{-1}}(|\mathbf{M}^{(\alpha)}|) \frac{\mathbf{M}^{(\alpha)}}{|\mathbf{M}^{(\alpha)}|} \right| - k^\alpha \leq 0$$

schreiben. Im Allgemeinen führt die Funktion  $\mathcal{M}^{\alpha^{-1}}$  folglich auf ein in  $\mathbf{M}^\alpha$  nichtlineares Schaltkriterium analog zur kinematischen Verfestigung in der Plastizität.

folgt für die Dissipationsrate

$$\dot{\mathcal{D}} = \sum_{\alpha=1}^N \omega^\alpha \underbrace{\mathbf{B}^{i\alpha} \cdot \dot{\mathbf{M}}^\alpha}_{\dot{j}^\alpha}. \quad (4.36)$$

Um eine Evolutionsgleichung für die inneren Variablen  $\mathbf{M}^\alpha$  zu bestimmen, findet das Prinzip vom Maximum der Dissipationsrate gemäß

$$\dot{j}^\alpha = \sup_{\mathbf{B}^{i\alpha} \in \mathcal{E}^\alpha} \left( \mathbf{B}^{i\alpha} \cdot \dot{\mathbf{M}}^{(\alpha)} \right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}^\alpha := \{ \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{R}^3 \mid \phi^\alpha(\boldsymbol{\tau}) := |\boldsymbol{\tau}| - k^\alpha \leq 0 \} \quad (4.37)$$

für festgehaltene Raten  $\dot{\mathbf{M}}^\alpha$  Anwendung, vgl. MIEHE et al. [107]. Dabei bezeichnet  $\mathcal{E}^\alpha$  den Raum der zulässigen irreversiblen Induktion mit  $\phi^\alpha$  als Schaltkriterium. Der Faktor  $k^\alpha$  lässt sich als Widerstand der Domänen gegen eine Änderung der Magnetisierung interpretieren und soll im Folgenden als Schaltgrenze bezeichnet werden, vgl. BERGQUIST [10] oder HENROTTE et al. [57, 58]. Die notwendigen Bedingungen der Optimierung mit Nebenbedingung gemäß (4.37) sind die Evolutionsgleichungen

$$\dot{\mathbf{M}}^\alpha = \lambda^\alpha \frac{\mathbf{B}^{i(\alpha)}}{|\mathbf{B}^{i(\alpha)}|} \quad (4.38a)$$

mit  $\alpha \in \{1, 2, \dots, N\}$  und die KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen

$$\lambda^\alpha \phi^{(\alpha)} = 0 \wedge \lambda^\alpha \geq 0 \wedge \phi^\alpha \leq 0. \quad (4.38b)$$

Dabei bezeichnet  $\lambda^\alpha = |\dot{\mathbf{M}}^\alpha|$  das Inkrement der Teilmagnetisierungsrate. Wenn  $\phi^\alpha = 0$  gilt, folgt aus (4.38b) weiterhin die Konsistenzbedingung  $\lambda^\alpha \phi^{(\alpha)} = 0$ .

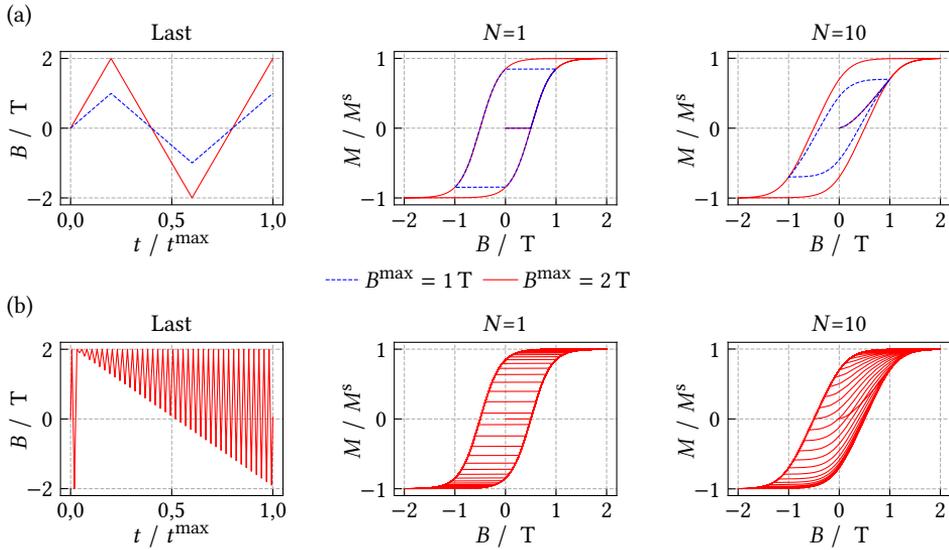
### Eindimensionales Hysterese-Modell

Das entwickelte Modell soll im Folgenden anhand von eindimensionalen Lastfällen demonstriert werden. Dabei reduziert sich die Evolutionsgleichung (4.38a) zu  $\dot{M} = \lambda \text{sign}(B^i)$ . Unter Ausnutzung von  $B = B^{r\alpha} + B^{i\alpha}$  lässt sich das Modell für einen vorgegebenen inkrementellen Lastpfad  ${}^n B := B(t_n)$  durch die Ausdrücke

$${}^n M = \sum_{\alpha=1}^N \omega^\alpha \mathcal{M}^\alpha({}^n B^{r\alpha}) \quad \text{mit} \quad {}^n B^{r\alpha} = \begin{cases} \max\{{}^n B - k^\alpha, {}^{n-1} B^{r\alpha}\} & \text{für } {}^n B \geq {}^{n-1} B \\ \min\{{}^n B + k^\alpha, {}^{n-1} B^{r\alpha}\} & \text{für } {}^n B < {}^{n-1} B \end{cases} \quad (4.39)$$

formulieren. Wird eine gleichmäßige Verteilung der Gewichte  $\omega^\alpha = N^{-1}$  und Schaltgrenzen  $k^\alpha$  gewählt, lässt sich die resultierende Koerzitivfeldstärke  $B^c$  der abzubildenden Hysteresen gemäß

$$k^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{N-1} B^c & \text{für } N > 1 \\ B^c & \text{für } N = 1 \end{cases} \quad (4.40)$$



**Abb. 4.9:** Magnetisierungskurven des eindimensionalen Hysterese-Modells (4.39) für die Funktion  $\mathcal{M}^\alpha = M^S \tanh(\xi B^{r\alpha})$  mit  $\xi = 2,5 \text{ T}^{-1}$ ,  $B^c = 0,5 \text{ T}$  und  $k^\alpha$  gemäß (4.40): (a) Initialkurve mit geschlossener Hysterese und (b) FORC-Kurven.

einstellen. Mit der Wahl  $\mathcal{M}^\alpha = M^S \tanh(\xi B^{r\alpha})$  liegt nun eine vollständige Formulierung vor. In Abb. 4.9(a) sind die initiale Magnetisierungskurve und eine darauf folgende geschlossene Hysterese dargestellt. Für  $N = 1$  ergibt sich eine horizontale und somit unrealistische Initialkurve. Die anschließende Hysterese zeigt ebenfalls lediglich für hohe Flussdichten, d. h. es gilt  $M^{\max} \rightarrow M^S$ , einen für polykristalline Hartmagneten typischen Verlauf. Das horizontale Zurücklaufen bis zum nächsten Schaltprozess für  $B^{\max} = 1 \text{ T}$  und  $M^{\max} \approx 0,85 M^S$  bildet dagegen das Verhalten von Multidomänenteilchen nicht sinnvoll ab. Wie für  $N = 10$  in Abb. 4.9(a) rechts exemplarisch dargestellt, lässt sich ein realistisches Verhalten durch die Kombination mehrerer Modelle erreichen.

Gleiches gilt für die in Abb. 4.9(b) dargestellten First Order Reversal Curves (FORC). Bereits mit  $N = 10$  Teilstufen lassen sich Verläufe dieser Kurven modellieren, die dem experimentell beobachtbaren Verhalten qualitativ sehr gut entsprechen, vgl. LINKE et al. [93].

## 4.4.2 Numerische Lösung

### Integration der Evolutionsgleichung

Die Einbindung des entwickelten Materialmodells in eine FE-Simulation erfordert die numerische Lösung der Evolutionsgleichung (4.38a) unter Beachtung von (4.38b) sowie die Bestimmung einer algorithmisch konsistenten Tangente. Dazu findet ein aus der Plastizität adaptiertes Prädiktor-Korrektor-Verfahren Anwendung. In einem initialen Prädiktor-Schritt wird die irreversible Induktion durch

$${}^n(\mathbf{B}^{i\alpha})_{\text{trial}} := {}^n\mathbf{B} - {}^{n-1}\mathbf{B}^{r\alpha} \quad (4.41)$$

bestimmt. Erfüllt der so berechnete Vektor  ${}^n(\mathbf{B}^{i\alpha})_{\text{trial}}$  das Schaltkriterium  ${}^n\phi^\alpha({}^n(\mathbf{B}^{i\alpha})_{\text{trial}}) < 0$ , so handelt es sich um einen Zeitschritt ohne Änderung der Teilmagnetisierung  $\mathbf{M}^\alpha$  und es gilt  $\lambda^\alpha = 0$ . Ist das Kriterium hingegen verletzt, ist im Korrektor-Schritt die Evolutionsgleichung zu lösen. Eine Integration führt dabei auf

$${}^n\mathbf{M}^\alpha - {}^{n-1}\mathbf{M}^\alpha = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \lambda^\alpha \frac{\mathbf{B}^{i(\alpha)}}{|\mathbf{B}^{i(\alpha)}|} dt. \quad (4.42)$$

Das in Gleichung (4.42) auftretende Integral soll im Folgenden durch die Mittelpunkregel approximiert werden, sodass sich die zweiter Ordnung genaue zeitdiskretisierte Form

$$\begin{aligned} {}^n\mathbf{M}^\alpha - {}^{n-1}\mathbf{M}^\alpha &= n^{-\frac{1}{2}}\gamma^\alpha \frac{n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}^{i(\alpha)}}{|n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}^{i(\alpha)}|} \quad \text{mit} \\ n^{-\frac{1}{2}}\gamma^\alpha &:= n^{-\frac{1}{2}}\lambda^\alpha \Delta t, \quad n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}^{i\alpha} := \frac{1}{2}({}^n\mathbf{B}^{i\alpha} + {}^{n-1}\mathbf{B}^{i\alpha}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

ergibt. Da die Teilmagnetisierung gemäß  $\sup({}^n\mathbf{M}^\alpha) = M^S$  beschränkt ist, ist es zweckmäßig, zur Lösung dieser nichtlinearen Gleichung  ${}^n\mathbf{B}^{r\alpha}$  als gesuchte Größe zu verwenden. Mit der aus Gleichung (4.35)<sub>2</sub> folgenden Beziehung  $\mathbf{M}^\alpha = \mathcal{M}^\alpha(|\mathbf{B}^{r(\alpha)}|)\mathbf{B}^{r(\alpha)}|\mathbf{B}^{r(\alpha)}|^{-1}$  und (4.38b) lassen sich die Residuen für das zu lösende Problem als

$$\begin{aligned} \mu_0^{-1n}\underline{\mathbf{R}}^{m\alpha} &:= \left| n^{-\frac{1}{2}}\underline{\mathbf{B}} - n^{-\frac{1}{2}}\underline{\mathbf{B}}^{r\alpha} \right| \left[ \underline{\mathbf{M}}^{(\alpha)}({}^n\underline{\mathbf{B}}^{r(\alpha)}) - {}^{n-1}\underline{\mathbf{M}}^{(\alpha)} \right] \dots \\ &\quad - n^{-\frac{1}{2}}\gamma^{(\alpha)} (n^{-\frac{1}{2}}\underline{\mathbf{B}} - n^{-\frac{1}{2}}\underline{\mathbf{B}}^{r\alpha}), \end{aligned} \quad (4.44a)$$

$${}^n\underline{\mathbf{R}}^{\phi\alpha} := |{}^n\underline{\mathbf{B}} - {}^n\underline{\mathbf{B}}^{r\alpha}| - k^\alpha \quad (4.44b)$$

formulieren. Die Skalierung von  ${}^n\underline{\mathbf{R}}^{m\alpha}$  mit  $\mu_0$  dient dabei lediglich zur besseren Konditionierung des zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen (4.44a) und (4.44b) angewendeten NEWTON-RAPHSON-Verfahrens:

$$\frac{\partial {}^n\underline{\mathbf{R}}^\alpha}{\partial {}^n\underline{\mathbf{x}}^\alpha} \bigg|_{n,j\underline{\mathbf{x}}^\alpha} \quad {}^{n,j}\Delta\underline{\mathbf{x}}^\alpha = -{}^{n,j}\underline{\mathbf{R}}^\alpha \quad \text{mit} \quad {}^n\underline{\mathbf{R}}^\alpha := \begin{bmatrix} {}^n\underline{\mathbf{R}}^{m\alpha} \\ {}^n\underline{\mathbf{R}}^{\phi\alpha} \end{bmatrix}, \quad {}^n\underline{\mathbf{x}}^\alpha := \begin{bmatrix} {}^n\underline{\mathbf{B}}^{r\alpha} \\ \mu_0 n^{-\frac{1}{2}}\gamma^\alpha \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Hier bezeichnet  ${}^{n,j}(\bullet)$  den Iterationsschritt  $j$  im Zeitinkrement  $t_n$ , wobei  ${}^{n,j+1}\underline{\mathbf{x}} = {}^{n,j}\underline{\mathbf{x}} + {}^{n,j}\Delta\underline{\mathbf{x}}$  gilt. Die im Folgenden als lokale NEWTON-Iteration bezeichnete Lösung erfolgt an jedem Integrationspunkt und für jedes Teilglied  $\alpha$  separat, sodass  $|{}^{n,j}\underline{\mathbf{R}}^\alpha| \leq r_{\text{tol}}$  erfüllt ist.

### Algorithmisch konsistenter Tangentenmodul

Für die Einbindung in einen FE-Code ist außerdem die Berechnung eines Tangentenmoduls erforderlich. Dieser ergibt sich zu

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^H := \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial \underline{\mathbf{B}}} = \frac{1}{\mu_0 J} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \underline{\mathbf{M}}^\alpha}{\partial \underline{\mathbf{B}}^{r\alpha}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}^{r\alpha}}{\partial \underline{\mathbf{B}}}. \quad (4.46)$$

Hier bezeichnet  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1}$  die Matrix der Koordinaten des Rechts-CAUCHY-GREEN-Deformationstensors  $\mathbf{C}$  bzgl.  $\mathbf{E}_K$ . Da sich der Ausdruck  $\partial_{\underline{\underline{\mathbf{B}}}} \mathbf{B}^{r\alpha}$  nicht allgemein bestimmen lässt, wird die Annahme

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{r\alpha}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{B}}}} \approx \frac{\partial^n \mathbf{B}^{r\alpha}}{\partial^n \underline{\underline{\mathbf{B}}}} \quad (4.47)$$

getroffen, wobei an dieser Stelle  ${}^n(\bullet)$  den auskonvergierten Zustand von (4.45) im Rahmen der Toleranz bezeichnet. Der gesuchte Term lässt sich nun mittels des Residuums-Vektors  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^\alpha ({}^n \underline{\underline{\mathbf{x}}}^{(\alpha)} ({}^n \underline{\underline{\mathbf{B}}}, {}^n \underline{\underline{\mathbf{B}}}) \approx \underline{\underline{\mathbf{0}}}$  über die Anwendung der Kettenregel bestimmen:

$$\frac{d \underline{\underline{\mathbf{R}}}^\alpha}{d^n \underline{\underline{\mathbf{B}}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{R}}}^\alpha}{\partial {}^n \underline{\underline{\mathbf{x}}}^{(\alpha)}} \cdot \frac{\partial {}^n \underline{\underline{\mathbf{x}}}^{(\alpha)}}{\partial^n \underline{\underline{\mathbf{B}}}} + \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{R}}}^\alpha}{\partial^n \underline{\underline{\mathbf{B}}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial {}^n \underline{\underline{\mathbf{x}}}^{(\alpha)}}{\partial^n \underline{\underline{\mathbf{B}}}} = - \underbrace{\left( \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{R}}}^\alpha}{\partial {}^n \underline{\underline{\mathbf{x}}}^{(\alpha)}} \right)^{-1}}_{\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{alg}}^\alpha} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{R}}}^\alpha}{\partial^n \underline{\underline{\mathbf{B}}}}. \quad (4.48)$$

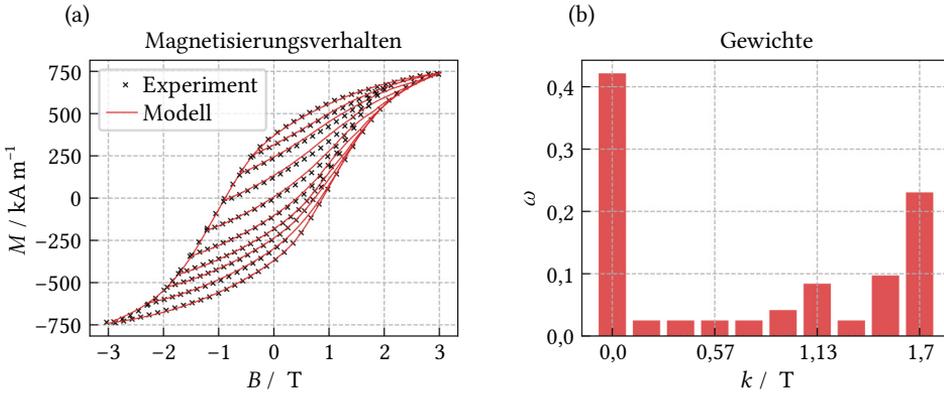
Aus der Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{alg}}^\alpha$  lässt sich schließlich der gemäß (4.47) gesuchte Zusammenhang bestimmen und die algorithmisch konsistente Tangente ergibt sich zu

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{alg}}^H = \frac{1}{\mu_{0J}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{M}}}^\alpha}{\partial \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{r\alpha}} \cdot \frac{\partial^n \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{r\alpha}}{\partial^n \underline{\underline{\mathbf{B}}}}. \quad (4.49)$$

### 4.4.3 Parametrisierung

Das entwickelte Modell soll nun an VSM-Messdaten einer ellipsoiden Probe angepasst werden, welche einen Volumenanteil von  $\phi = 28\%$  in eine Epoxidharzmatrix eingebettete NdFeB-Partikel enthält. Die Daten sind dabei LINKE et al. [93] entnommen. Aufgrund der verhältnismäßig hohen Steifigkeit der Epoxidharzmatrix, waren die Partikel während der Messung in der Probe vollständig fixiert. Somit lassen sich Relativbewegungen dieser ausschließen und es ist sichergestellt, dass die Messungen das rein magnetische Verhalten der Partikel repräsentieren. Aufgrund der starken Interaktionen der magnetischen Einschlüsse innerhalb der Probe lässt sich das ohnehin inhomogene lokale  $\mathbf{H}$ -Feld in diesen allerdings nicht bestimmen. Daher sei zur Auswertung der Daten das lokale Feld in den Partikeln mit dem effektiven Feld der Probe gleichgesetzt, d. h.  $H = \bar{H}$  mit  $\bar{H} = \bar{H}^\infty - \bar{D}^{\text{Probe}} \bar{M}$ . Hier bezeichnen  $\bar{D}^{\text{Probe}} = 0.46$  und  $\bar{H}^\infty$  den äußeren Demagnetisierungsfaktor der Probe und das am VSM angelegte Fernfeld. Die gemittelte Magnetisierung der Partikel berechnet sich gemäß  $M = \phi \bar{M}$ . Weiterhin sei angemerkt, dass sich der gesättigte Zustand der Probe im Experiment aufgrund der dazu notwendigen enorm hohen Feldstärke nicht erreichen ließ. Die aufbereiteten experimentell ermittelten FORC-Kurven sowie eine geschlossene Hysterese-Kurve sind in Abb. 4.10(a) dargestellt.

Damit das Modell möglichst gut das komplexe Magnetisierungsverhalten der NdFeB-Partikel abbildet, soll dieses an die Hysterese-Kurve sowie die FORC-Kurven angepasst werden. Ei-



**Abb. 4.10:** Magnetisierungsverhalten von NdFeB-Partikeln: (a) mit einem VSM gemessene FORC-Kurven und Hysterese-Kurve aus LINKE et al. [93] sowie angepasstes Modell und (b) ermittelte Verteilung der Gewichte  $\omega^\alpha$ .

ne Anpassung an die Initialkurve wird nicht vorgenommen.<sup>4</sup> Aus Gleichung (4.39)<sub>2</sub> lässt sich dazu die Beziehung

$$B^{r\alpha}(B) = \max\{B - k^\alpha, B_0^{r\alpha}\} \quad \text{mit} \quad B_0^{r\alpha} = \min\{B_0 + k^\alpha, B^{\max} - k^\alpha\} \quad (4.50)$$

für das reversible Teilfeld  $B^{r\alpha}$  innerhalb einer FORC-Kurve bestimmen, wobei  $B_0$  und  $B^{\max}$  Start- und Endwert der Belastung bezeichnen. Als Startpunkt für die Parametrisierung sei das Modell gemäß

$$M := M^S \sum_{\alpha=1}^N \omega^\alpha \tanh(\xi^\alpha B^{r\alpha}) \quad \text{und} \quad k^\alpha := \frac{\alpha-1}{N-1} k_0 \quad (4.51)$$

mit  $M^S = 912 \text{ kA m}^{-1}$ ,  $k_0 = 1,7 \text{ T}$  und  $N = 10$  gegeben. Unter Anwendung von (4.39)<sub>2</sub> und (4.50) lassen sich die Parameter  $\underline{\kappa} = [\xi^1 \ \xi^2 \ \dots \ \xi^N \ \omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^N]^\top$  durch das nichtlineare Optimierungsproblem

$$\underline{\kappa} = \arg \left\{ \min_{\xi^\alpha \in \mathcal{R}_+, \omega^\alpha \in \mathcal{C}_\omega} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{\alpha=1}^N M(\omega^\alpha, \xi^\alpha, B_i^{r\alpha}) - M_i \right|^2 \right\} \quad \text{mit} \quad (4.52)$$

$$\mathcal{C}_\omega := \left\{ \omega^\alpha \in \mathcal{R}_+ \mid \sum_{\alpha=1}^N \omega^\alpha = 1 \wedge \omega^\alpha \geq \frac{N-1}{4} \right\}$$

<sup>4</sup>Eine akkurate Wiedergabe der gemessenen initialen Magnetisierungskurve ist mit dem vorgestellten Modell nicht möglich. Hier sei auf einen alternativen Ansatz von MUKHERJEE & DANAS [113] verwiesen. Darin wird eine Erweiterung äquivalent zur isotropen Verfestigung in der Plastizität vorgeschlagen, die eine bessere Abbildung der Initialkurve ermöglicht.

**Tab. 4.4:** Materialparameter des Hysterese-Modells gemäß Abschnitt 4.4.1 für NdFeB-Partikel. Die mechanischen Parameter sind durch  $G = 2000$  MPa und  $\nu = 0,3$  gegeben und für die Sättigungsmagnetisierung gilt  $M^S = 912$  kA m<sup>-1</sup>

$\alpha$	$k^\alpha / \text{T}$	$\omega^\alpha$	$\xi^\alpha / \text{T}^{-1}$
1	0	0,42152	0,41366
2	0,18889	0,025	0,71145
3	0,37778	0,025	1,2496
4	0,56667	0,025	1,8295
5	0,75556	0,025	2,0382
6	0,94444	0,041626	1,8377
7	1,1333	0,08404	1,5428
8	1,3222	0,025	1,2826
9	1,5111	0,097232	1,5252
10	1,7	0,23054	0,39489

bestimmen. Um einen möglichst glatten Verlauf der angepassten Hysterese und der FORC-Kurven zu gewährleisten, sind die Wichtungsfaktoren gemäß der Nebenbedingung  $C_\omega$  auf einen Minimalwert von  $\frac{N^{-1}}{4}$  beschränkt. Der ermittelte Datensatz und das modellierte Magnetisierungsverhalten sind in Abb. 4.10(a) bzw. Tab. 4.4 zu finden. Insgesamt ist das so angepasste Modell sehr gut in der Lage, die experimentellen Daten wiederzugeben. Der dazu notwendige Datensatz ist allerdings verhältnismäßig groß.

# 5 Studie zum effektiven Verhalten von MRE

Neben den im vorherigen Kapitel 4 charakterisierten Eigenschaften von Partikeln und Matrix resultiert das effektive Verhalten von MRE maßgeblich aus der Anordnung und der Wechselwirkung der Konstituenten innerhalb der Mikrostruktur. Um das mikroskopisch getriebene Verhalten zu analysieren, soll in diesem Kapitel das in Abschnitt 2.2 eingeführte Homogenisierungsschema zum Einsatz kommen, wobei  $\bar{\mathbf{F}}$  und  $\bar{\mathbf{B}}$  bzw.  $\bar{\mathbf{H}}$  vorzuschreiben sind. Grundlegende Effekte werden dazu anhand von mehreren Studien für MRE mit weich- und hartmagnetischen Partikeln diskutiert.

## 5.1 Weichmagnetische MRE

Die Simulationen für magnetisch weiche MRE sollen mittels der Skalarpotential-Formulierung durchgeführt werden. Demnach kommt auch für die Magnetisierung die funktionale Abhängigkeit entsprechend (4.24) zum Einsatz. Die Materialparameter der konstitutiven Modelle für Elastomer und Carbonyleisen-Partikel sind den Tabellen 4.2 und 4.3 zu entnehmen.

### 5.1.1 Größeneinfluss statistischer RVE

Um den Einfluss der statistisch geprägten Mikrostruktur von MRE auf deren effektive Materialantwort zu bestimmen, ist die Auswahl eines repräsentativen Gebietes mit ausreichend vielen Partikeln notwendig. Dabei stellt sich allerdings die Frage, welche Partikelanzahl  $N^P$  erforderlich ist. In der Literatur sind diesbezüglich für die in dieser Arbeit betrachteten zweidimensionalen RVE verschiedene Werte zu finden, vgl. DANAS [24] und ZABIHYAN et al. [174]. Unterschiede lassen sich auf Einflüsse, wie den minimalen Partikelabstand  $r^{\min}$ , den Partikelvolumengehalt oder die Dispersität der Partikelgrößen zurückführen. Im Folgenden soll die Analyse für monodisperse, statistisch-periodische Mikrostrukturen mit einem Minimalabstand von  $r^{\min} = 1,1 d$  durchgeführt werden, wobei  $d$  den Partikeldurchmesser bezeichnet. Dabei erfolgt die Platzierung der Partikel und die anschließende Erstellung der periodischen Vernetzung mit dem Python-Tool gmshModel.<sup>1</sup>

#### *Vergleich der Partikelverteilung für verschiedene Volumengehalte $\phi$*

Zuerst ist nun der Einfluss des Partikelvolumengehaltes  $\phi$  auf die statistische Verteilung der Einschlüsse innerhalb der Mikrostruktur von Interesse. Die Untersuchung erfolgt auf Basis der Mittelpunktabstände  $\Delta l_{ik} := |\mathbf{X}_i^P - \mathbf{X}_k^P|$  mit  $i \in \{1, 2, \dots, N^P\}$ . Zur Klassifizierung wird vorerst der minimale Abstand

$$\Delta l_i^{\min} := \min_{j \in \mathcal{N}_i} \Delta l_{ij} \text{ mit } \mathcal{N}_i := \{1, 2, \dots, N^P\} \setminus i \quad (5.1)$$

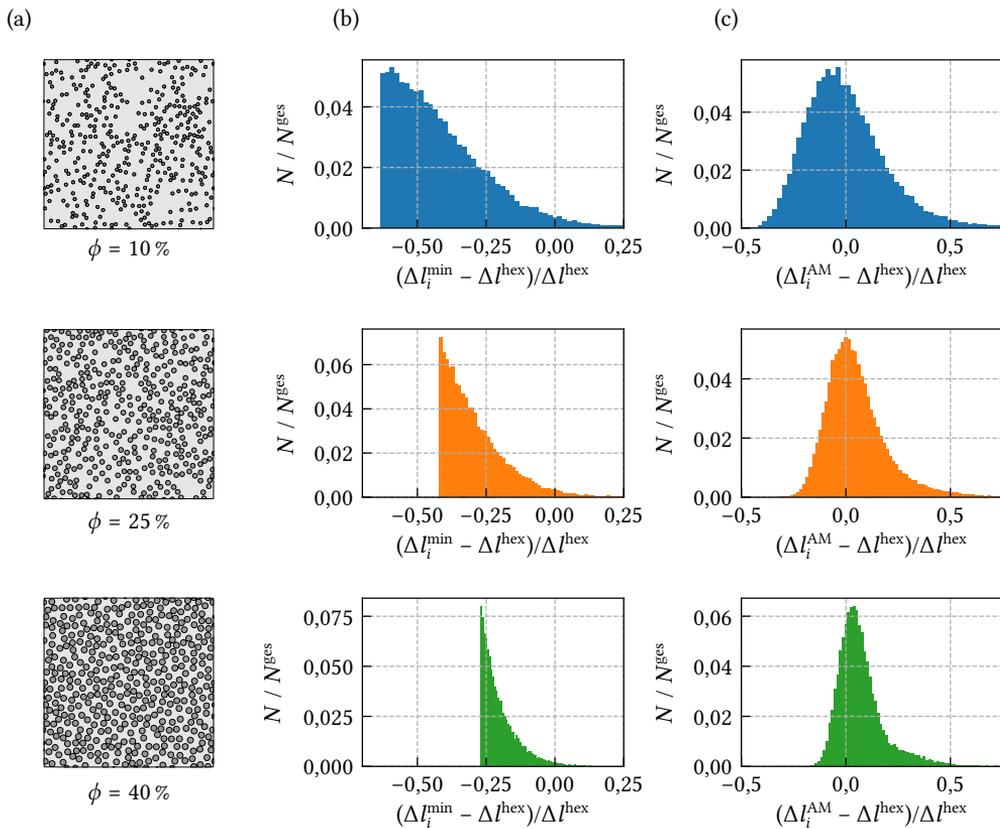
---

<sup>1</sup>Das Python-Tool gmshModel ist unter dem Link <https://gmshmodel.readthedocs.io/en/latest/> frei zugänglich. Die Generierung stochastischer Partikelverteilungen basiert in diesem Tool auf dem Random Sequential Adsorption (RSA)-Algorithmus [162].

zweier benachbarter Partikel ausgewertet. Dabei erfolgt zur besseren Interpretation eine Umrechnung auf die relative Abweichung der jeweiligen Werte vom Partikelabstand

$$\Delta l^{\text{hex}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\phi\sqrt{3}}}d \quad (5.2)$$

innerhalb einer äquivalenten hexagonalen Struktur gemäß Abb. 2.3(b). In dieser liegt eine ideale Gleichverteilung vor, da jeder Partikel zu allen unmittelbar benachbarten Einschlüssen – also insgesamt sechs – den identischen Abstand hat. Ein weiteres sinnvolles Maß stellt demnach das arithmetische Mittel  $\Delta l_i^{\text{AM}} := 1/6(\Delta l'_{i2} + \Delta l'_{i3} + \dots + \Delta l'_{i7})$  der Abstände zu den sechs nächsten Einschlüssen in der Umgebung des Partikels  $i$  dar, wobei die Sortierung ge-



**Abb. 5.1:** Verteilung der Abstände monodisperser statistisch-periodischer RVE für die Partikelvolumen-  
gehalte  $\phi = \{10, 25, 40\}$  %: (a) Zellen mit jeweils  $N^{\text{P}} = 400$  Einschlüssen, (b) Verteilung der Minimalabstände  $\Delta l_i^{\text{min}}$  und (c) arithmetisches Mittel  $\Delta l_i^{\text{AM}}$  der sechs geringsten Partikelabstände aus jeweils 100 Zellen. Es erfolgt ein Bezug auf den Partikelabstand  $\Delta l^{\text{hex}}$  hexagonaler Strukturen mit äquivalentem Volumengehalt  $\phi$  und Partikeldurchmesser  $d$ .

mäß  $0 = \Delta l'_{i1} < \Delta l'_{i2} \leq \Delta l'_{i3} \leq \dots \leq \Delta l'_{iN^P}$  gilt.

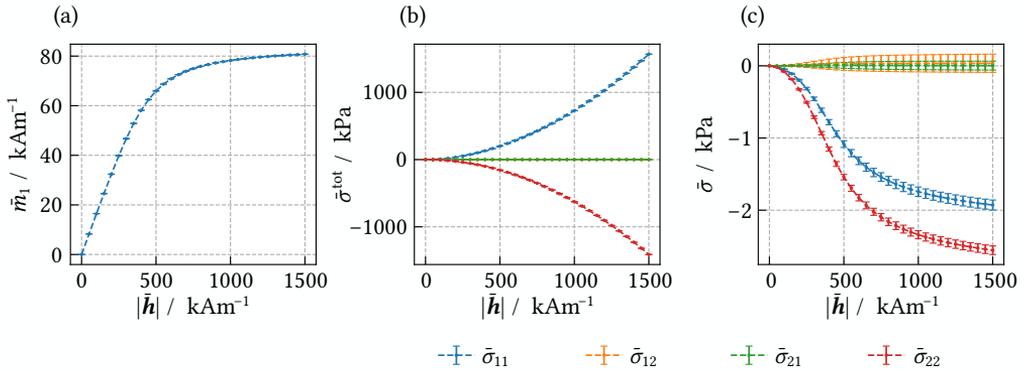
Drei generierte RVE für  $\phi = \{10, 25, 40\}$  % mit  $N^P = 400$  Partikeln und die Verteilung der minimalen Abstände von insgesamt 100 Zellen je Volumengehalt sind in Abb. 5.1(a) und (b) dargestellt. Für alle  $\phi$  stellt sich aufgrund der Definition des minimal zulässigen Partikelabstandes  $r^{\min}$  eine scharfe Grenze an der linken Seite der Verteilung ein. Auffällig ist die nahezu vollständige Verschiebung von  $(\Delta l_i^{\min} - \Delta l^{\text{hex}}) / \Delta l^{\text{hex}}$  in den negativen Bereich, welche ein Indiz für die Bildung von Partikel-Agglomerationen ist. Besonders ausgeprägt sind diese für  $\phi = 10$  %. Im Gegensatz zur Verteilung der minimalen Partikelabstände zeigt sich für das arithmetische Mittel der Abstände zu den sechs nächsten Einschlüssen eine näherungsweise zu null symmetrische Kurve, vgl. Abb. 5.1(c). Insgesamt lässt sich sowohl für die Verteilung  $\Delta l_i^{\min}$  als auch für  $\Delta l_i^{\text{AM}}$  festhalten, dass die Streuung mit steigendem Volumengehalt deutlich abnimmt. Diese Charakteristik folgt aus der limitierten Anzahl von Platzierungsmöglichkeiten, die zu einer Streckung der statistischen Verteilung relativer Partikelabstände innerhalb eines RVE führt. Demnach ist zu erwarten, dass die Streuung in der Materialantwort für  $\phi = 10$  % am stärksten ausgeprägt ist.

### Streuung der effektiven Materialantwort

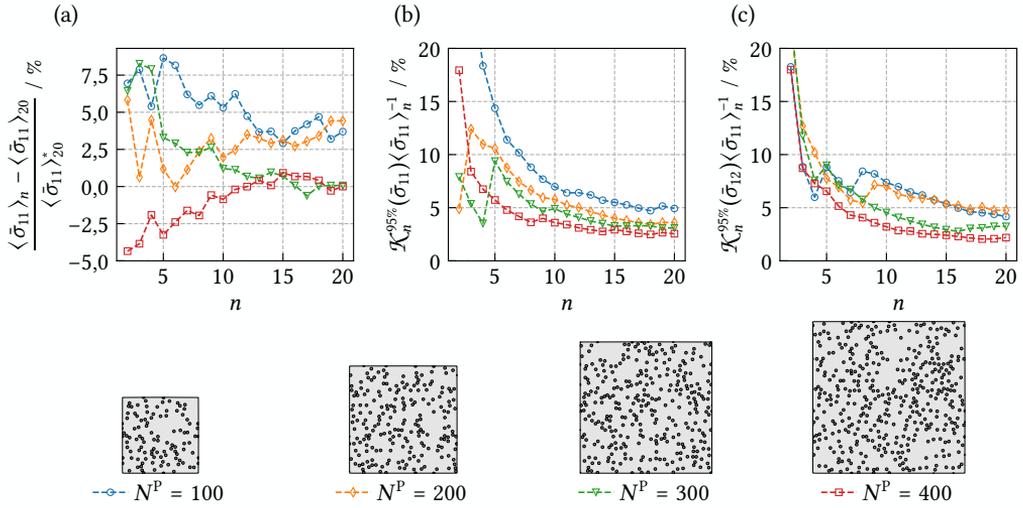
Im nächsten Schritt ist nun die Streuung der Materialantwort statistisch-periodischer RVE von Interesse. Um die Repräsentativität der Zellen zu bewerten, werden Mittelwerte mit 95 %-Vertrauensintervallen

$$\langle (\bullet) \rangle_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bullet)_i \quad \text{und} \quad \mathcal{X}_n^{95\%}(\bullet) := \sqrt{\frac{t^2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n [(\bullet)_i - \langle (\bullet) \rangle_n]^2} \quad (5.3)$$

der magneto-mechanischen Antworten verschiedener Stichproben mit dem Umfang  $n$  bestimmt. Der Wert  $t$  bezeichnet das Quantil der STUDENTschen  $t$ -Verteilung.



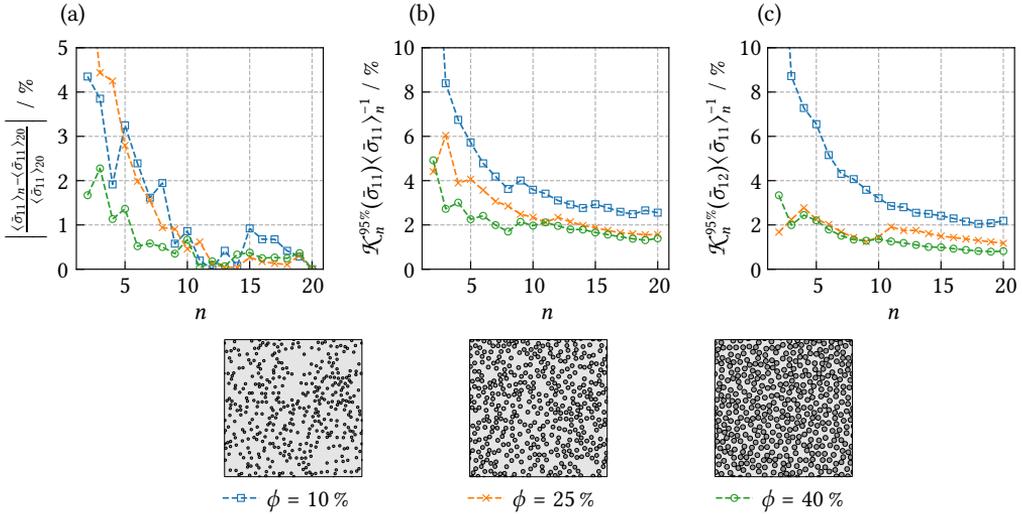
**Abb. 5.2:** Bestimmung der magneto-mechanischen Materialantwort  $n = 10$  statistisch-periodischer Zellen mit  $\phi = 10$  % Volumengehalt und jeweils  $N^P = 400$  Partikeln: (a) – (c) Mittelwerte  $\langle \bar{m}_k \rangle_{10}$ ,  $\langle \bar{\sigma}_{kl}^{\text{tot}} \rangle_{10}$  und  $\langle \bar{\sigma}_{kl} \rangle_{10}$  mit 95 %-Vertrauensintervall. Für die vorzugebenden Größen gilt  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  und  $\mathbf{H} = \tilde{H} \mathbf{E}_1$ .



**Abb. 5.3:** Studie zur Repräsentativität statistisch-periodischer Zellen mit  $\phi = 10\%$  Partikelvolumengehalt und  $N^P = \{100, 200, 300, 400\}$  Einschlüssen: (a) Relative Abweichung des prognostizierten Mittelwertes  $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_n$  bezogen auf  $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_{20}^*$  mit  $N^P = 400$  sowie (b) und (c) auf  $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_n$  bezogene Konfidenzintervalle  $\mathcal{K}_n^{95\%}(\bar{\sigma}_{11})$  und  $\mathcal{K}_n^{95\%}(\bar{\sigma}_{12})$ .

In Abb. 5.2 sind die effektive Magnetisierung, Totalspannung und mechanische Spannung von  $n = 10$  Zellen mit  $\phi = 10\%$  und jeweils 400 Partikeln für den Lastfall  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I}$  und  $\bar{\mathbf{H}} = \bar{H}E_1$  aufgetragen. Dabei zeigt sich, dass die Vertrauensintervalle  $\mathcal{K}_n^{95\%}(\bar{m}_k)$  und  $\mathcal{K}_n^{95\%}(\bar{\sigma}_{kl}^{\text{tot}})$  im Bezug auf die jeweiligen Mittelwerte äußerst gering sind. Die berechnete mechanische Spannung weist dagegen gemäß Abb. 5.2(c) eine deutlich stärkere Streuung auf. Offensichtlich reagiert die Spannungsantwort von RVE also äußerst empfindlich auf Änderungen der Mikrostruktur, was vermutlich auf die starke Nichtlinearität der ponderomotorischen Kraftdichte gemäß (2.26)<sub>1</sub> zurückzuführen ist. Ein äquivalentes Verhalten ist in DANAS [24] für die effektive Magnetisierung und die magnetisch induzierte Dehnung dokumentiert.

Um die statistische Repräsentativität von Zellen mit zufälliger Partikelverteilung zu bewerten, soll nun die sensitivste Größe, also  $\bar{\sigma}$ , herangezogen werden. Dabei fließen jeweils 20 generierte Zellen mit  $\phi = 10\%$ , welche  $N^P = \{100, 200, 300, 400\}$  Einschlüsse aufweisen, in die Analyse ein. Von Interesse sind nun die prognostizierten Mittelwerte  $\langle (\bullet) \rangle_n$  und die zugehörigen Vertrauensintervalle  $\mathcal{K}_n^{95\%}(\bullet)$  in Abhängigkeit der Parameter  $N^P$  und  $n$ . Als Lastfall sei erneut der Zustand  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I}$  und  $\bar{\mathbf{H}} = \bar{H}E_1$  mit  $\bar{H} = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  betrachtet. Die relative Abweichung von  $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_n$ , bezogen auf den Referenzwert  $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_{20}$  der Zellen mit  $N^P = 400$  Einschlüssen, ist in Abb. 5.3(a) zu finden. Bei einem Stichprobenumfang von  $n = 2$  zeigt sich für alle RVE-Klassen, also  $N^P = \{100, 200, 300, 400\}$ , eine Abweichung von ca. 5–6%. Für  $n = 10$  weicht der prognostizierte Mittelwert der Zellen  $N^P = \{300, 400\}$  bereits nur noch geringfügig ab, wohingegen die RVE mit  $N^P = \{100, 200\}$  auch für  $n = 20$  nicht gegen den Referenzwert konvergieren. Es lässt sich also bereits festhalten, dass Zellen mit mindestens 300 Partikeln zu wählen sind, um Repräsentativität mit maximal 20 Realisierungen zu gewährleisten. Die Konfidenzintervalle der prognostizierten Mittelwerte von  $\bar{\sigma}_{11}$  und  $\bar{\sigma}_{12}$  sind in Abb. 5.3(b) und



**Abb. 5.4:** Vergleich der Streuung statistisch-periodischer Zellen mit 10, 25 und 40 % Partikelvolumengehalt und jeweils  $N^P = 400$  Einschlüssen: (a) Relative Abweichung des prognostizierten Mittelwertes  $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_n$  bezogen auf  $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_{20}$  sowie (b) und (c) auf  $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_n$  bezogene Konfidenzintervalle  $\mathcal{K}_n^{95\%}(\bar{\sigma}_{11})$  und  $\mathcal{K}_n^{95\%}(\bar{\sigma}_{12})$ .

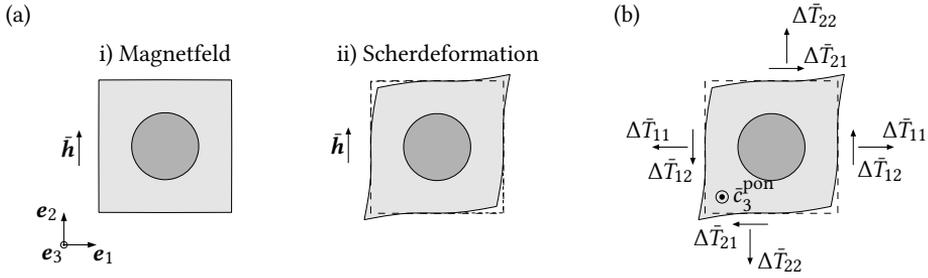
(c) dargestellt. Generell zeigt sich für geringe Stichprobengrößen eine deutlich ausgeprägte Streuung von teilweise mehr als 20 % bezogen auf  $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_n$ . Die anfänglich geringere Streuung der Zellen mit  $N^P = \{200, 300\}$  ist stochastischen Effekten zuzuschreiben. Ab  $n = 10$  bildet sich für RVE mit  $N^P = \{300, 400\}$  ein annähernd konstantes Verhalten bzgl. der Streuung in der Spannungsantwort aus, wobei diese bei  $N^P = 400$  noch etwas geringer ist.

Neben dem Einfluss der Partikelanzahl ist abschließend auch der Einfluss von  $\phi$  auf die Streuung der Spannung  $\bar{\sigma}$  von Interesse. Die in Abb. 5.4(b) und (c) aufgetragenen Konfidenzintervalle für die Volumengehalte  $\phi = \{10, 25, 40\}$  % zeigen, dass die Streuung der Spannungsantwort mit der Verteilung von Abständen gemäß Abb. 5.1 zusammenhängt. Ebenso wie die Breite der Minimalabstands-Verteilung nimmt also die anhand von  $\mathcal{K}_n^{95\%}(\bar{\sigma})$  quantifizierte Streuung für steigende  $\phi$  ab. Abschließend lässt sich daher festhalten, dass bei den nachfolgenden Simulationen für alle  $\phi \geq 10$  % jeweils 10 Zellen a 400 Einschlüsse ausreichen sollten, um Repräsentativität zu gewährleisten.

### 5.1.2 Magnetorheologischer Effekt

Als technisch besonders relevanter Kopplungseffekt von MRE ist der eingangs in Kapitel 1 erläuterte MR-Effekt – also die Steifigkeitsänderung infolge eines aufgeprägten Magnetfelds – anzusehen, s. Abb. 1.2(b). Dieser soll nun detailliert untersucht werden, wobei der Einfluss der Probengeometrie vorerst keine Berücksichtigung findet. Vielmehr ist hier das effektive Schaltverhalten verschiedener Mikrostrukturen bei vorgeschriebenen makroskopischen Feldern von Interesse.

Um die magnetisch induzierte Steifigkeitsänderung zu bestimmen, ist in einem ersten Schritt ein effektives Magnetfeld  $\bar{H}$  mit vorzugebendem Betrag und festzulegender Richtung anzu-



**Abb. 5.5:** Schematische Darstellung eines Scherversuchs zur Bestimmung des MR-Effektes: (a) Lastaufbringung mit Deformation gemäß Gleichung (5.9) und (b) Richtung der Spannungsdifferenzen  $\Delta\bar{T}_{KL}$  an einem Arbeitspunkt  $\mathcal{P}^h = \{\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{H}}\}$  sowie resultierendes ponderomotorisches Moment  $\bar{c}^{\text{pon}}$ .

legen, während für die Deformation  $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{I}}$  gelte. Von Interesse ist nun die Änderung der Spannungs-Dehnungs-Antwort in der Umgebung verschiedener magneto-mechanischer Arbeitspunkte  $\mathcal{P}^h := \{\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{H}}\}$ . Dazu ist in einem zweiten Schritt bei konstantem LAGRANGE'schen Magnetfeld eine kleine Änderung  $\Delta\bar{\mathbf{F}}$  der Deformation aufzubringen. Um das beschriebene virtuelle Experiment auszuwerten, lässt sich die Spannungsdifferenz in der Umgebung von  $\mathcal{P}^h$  näherungsweise mittels der konstanten Tangentenmoduli  $\bar{\mathbf{C}}^{\text{tot}} \in \mathcal{L}_4$  und  $\bar{\mathbf{C}}^{\text{tot}} \in \mathcal{L}_3$  durch die Linearisierung

$$\Delta\bar{\mathbf{T}}^{\text{tot}} = \bar{\mathbf{C}}^{\text{tot}} : \Delta\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{C}}^{\text{tot}} \cdot \Delta\bar{\mathbf{H}} \quad (5.4)$$

beschreiben. Da weiterhin  $\Delta\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$  gewählt wird, reduziert sich der Ausdruck unter Anwendung der additiven Spannungsaufspaltung  $\bar{\mathbf{T}}^{\text{tot}} = \bar{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{T}}^{\text{pon}}$  zu

$$\Delta\bar{\mathbf{T}} + \Delta\bar{\mathbf{T}}^{\text{pon}} = \bar{\mathbf{C}} : \Delta\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{C}}^{\text{pon}} : \Delta\bar{\mathbf{E}}. \quad (5.5)$$

Durch geeignete Wahl der Deformationsmoden  $\Delta\bar{\mathbf{E}}$  lassen sich auf diese Art die Koordinaten des mechanischen Anteils der Steifigkeit an jedem Arbeitspunkt bezüglich des Basissystems  $E_K$  aus

$$\Delta\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{H}}) : \Delta\bar{\mathbf{E}} \xrightarrow{\text{EVZ}} \begin{bmatrix} \Delta\bar{T}_{11} \\ \Delta\bar{T}_{22} \\ \Delta\bar{T}_{12} \\ \Delta\bar{T}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{1111} & \bar{C}_{1122} & \bar{C}_{1112} \\ \bar{C}_{2211} & \bar{C}_{2222} & \bar{C}_{2212} \\ \bar{C}_{1211} & \bar{C}_{1222} & \bar{C}_{1212} \\ \bar{C}_{2111} & \bar{C}_{2122} & \bar{C}_{2112} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{E}_{11} \\ \Delta\bar{E}_{22} \\ 2\Delta\bar{E}_{12} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass die mechanische Spannung aufgrund der ponderomotorischen Momentendichte im Allgemeinen nicht symmetrisch ist, vgl. mit Gleichung (2.30). Anstelle der VOIGT'schen Notation ist folglich die Schreibweise gemäß (5.6) mit einer weiteren Zeile zu wählen.

Auf Basis von Gleichung (5.6) sollen nun exemplarisch die feldabhängigen Schubmoduli, also  $\bar{G}_{1212} = \bar{C}_{1212}$  und  $\bar{G}_{2112} = \bar{C}_{2112}$ , bestimmt werden. Dazu sei ein Magnetfeld  $\bar{H}$  gemäß

$$[\bar{H}_K] = \bar{H} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mit } \bar{H} = \begin{cases} t/t_h \bar{H}^{\max} & \text{für } t \leq t_h \\ \bar{H}^{\max} & \text{für } t > t_h \end{cases} \quad (5.7)$$

aufgeprägt. Um die Schubanteile zu isolieren, ist anschließend die Deformation so einzustellen, dass für den GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor

$$[\Delta \bar{E}_{KL}] = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\gamma}/2 & 0 \\ \bar{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ mit } \bar{\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq t_h \\ (t - t_h)/(t_{\text{ges}} - t_h) \bar{\gamma}^{\max} & \text{für } t > t_h \end{cases} \quad (5.8)$$

gilt, wobei  $\bar{\gamma}$  die Gleitung bezeichnet. Die entsprechende Scherdeformation ist in Abb. 5.5(a) dargestellt. Für den Deformationsgradienten gilt dabei für alle  $\bar{\gamma} > 0$

$$[\bar{F}_{IK}] = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\gamma}}{2\delta(\bar{\gamma})} & \bar{\delta}(\bar{\gamma}) & 0 \\ \bar{\delta}(\bar{\gamma}) & \frac{\bar{\gamma}}{2\delta(\bar{\gamma})} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ mit } \bar{\delta}(\bar{\gamma}) := \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - \bar{\gamma}^2})}. \quad (5.9)$$

Die feldabhängigen Schubmoduli  $\bar{G}_{1212}$  und  $\bar{G}_{2112}$  ergeben sich demnach mit (5.8) aus dem Gleichungssystem (5.6) zu

$$\bar{G}_{1212}(\bar{H}) = \frac{\bar{T}_{12}(\bar{\gamma}, \bar{H}) - \bar{T}_{12}(0, \bar{H})}{\bar{\gamma}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{G}_{2112}(\bar{H}) = \frac{\bar{T}_{21}(\bar{\gamma}, \bar{H}) - \bar{T}_{21}(0, \bar{H})}{\bar{\gamma}}. \quad (5.10)$$

Im Allgemeinen gilt, dass  $\bar{G}_{1212} \neq \bar{G}_{2112}$  ist. Die Richtungen der auszuwertenden Spannungen  $\Delta \bar{T}_{KL}$  sind in Abb. 5.5(b) schematisch dargestellt.

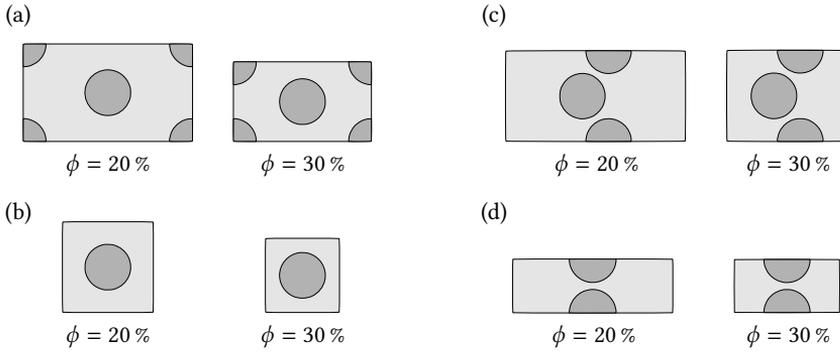
Im Folgenden ist nun die Betrachtung von idealisierten Verteilungen und stochastischen Mikrostrukturen von Interesse. Zur Analyse verschiedener Einflussfaktoren auf den MR-Effekt werden

- (i) die Feldstärke  $\bar{H}$ ,
- (ii) der Partikelvolumengehalt  $\phi$ ,
- (iii) die Steifigkeit der polymeren Matrix, sowie
- (iv) die Richtung des angelegten Feldes  $\bar{H}$  relativ zur aufgeprägten Deformation

systematisch variiert. In den ersten drei Punkten wird dazu exemplarisch die Komponente  $\bar{G}_{2112}$  betrachtet und ein Magnetfeld  $\bar{H} = |\bar{H}|E_2$  in vertikaler Richtung angelegt. Nach dem Aufbringen der effektiven magneto-mechanischen Felder gemäß der Gleichungen (5.7) und (5.9) erfolgt die Auswertung der ermittelten Materialantwort anhand von (5.10).

### Ideale Einheitszellen

Als erster Schritt bietet sich die Untersuchung idealer Einheitszellen an. Dabei sollen als Vertreter klassischer Gitterstrukturen einfache kubische und hexagonale Anordnungen gemäß



**Abb. 5.6:** Einheitszellen idealisierter Mikrostrukturen für die Volumengehalte  $\phi = \{20, 30\} \%$ : (a) und (b) hexagonale und einfach kubisch Anordnungen sowie (c) und (d) idealisierte Kettenstrukturen. Der Partikeldurchmesser beträgt  $d = 5 \mu\text{m}$ . Der Partikel-Mittelpunktabstand in den idealisierten Kettenstrukturen liegt bei  $1,1d$ .

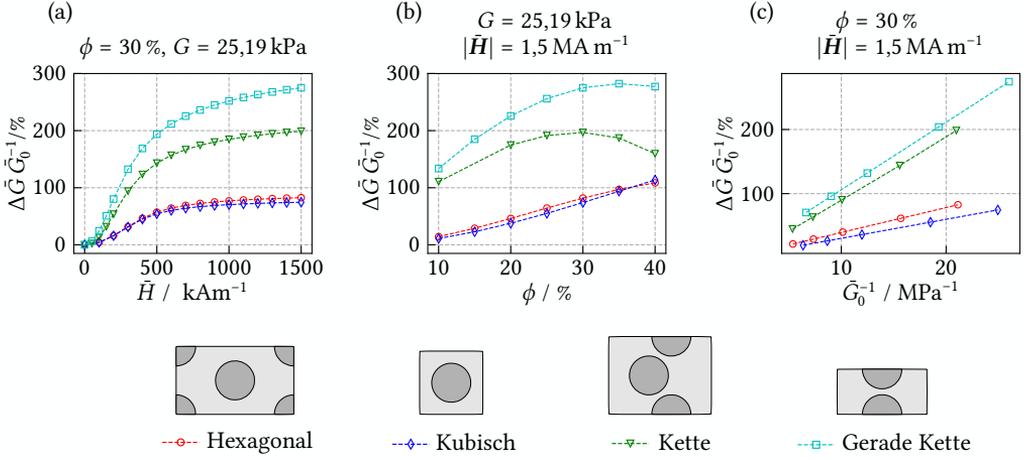
Abb. 5.6(a) und (b) betrachtet werden. Weiterhin stellen idealisierte Ketten mit exakt geradliniger und welliger Anordnung der Partikel gemäß 5.6(c) und (d) interessante Mikrostrukturen dar, die in erster Näherung vorstrukturierte MRE gemäß Abb. 1.1(b) beschreiben.

#### Abhängigkeit von der Feldstärke

Die Abhängigkeit von  $\bar{H}$  wird nun exemplarisch für Zellen mit dem Partikelvolumengehalt  $\phi = 30\%$  und einem Elastomer mit  $\phi_{\text{OI}} = 40\%$  Silikonölgehalt – also  $G = 25,19 \text{ kPa}$  – betrachtet, vgl. Tab. 4.2. Es zeigt sich für alle vier analysierten Einheitszellen die in Abb. 5.7(a) dargestellte S-förmige Abhängigkeit des effektiven Schubmoduls  $\bar{G}_{2112}$  vom angelegten Magnetfeld. Diese ist typisch für MRE und resultiert aus den lokalen magneto-mechanischen Interaktionen der Partikel, aus denen letztendlich die makroskopische Veränderung der elastischen Eigenschaften folgt. Somit lässt sich das beobachtete Verhalten auf die ponderomotorische Volumenkräfte  $f^{\text{pon}} = \mu_0 (\nabla \mathbf{h} + \nabla \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m}$  zurückführen.

Offensichtlich lässt sich nun aber für den betrachteten Fall einer stark heterogenen Mikrostruktur keine geschlossene Lösung für die Feldverteilungen  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  in Abhängigkeit vom effektiven magnetischen Feld angeben. Um dennoch eine qualitative Interpretation zu ermöglichen, ist es daher zweckmäßig, zwei Partikel vereinfachend als magnetische Dipole in einem Fernfeld  $\mathbf{h}^\infty$  zu betrachten. Wird ferner angenommen, dass die Magnetisierung und folglich auch das Dipolmoment

$$\mathbf{m}_\alpha^{\text{Dipol}} := \int_{\mathcal{B}_\alpha^p} \mathbf{m}(\mathbf{h}^\infty) \, d\mathbf{v} \quad (5.11)$$



**Abb. 5.7:** Untersuchung verschiedener Einflussparameter auf den MR-Effekt der Schubkomponente  $\bar{G}_{2112}$  idealer Einheitszellen bei Feld  $\bar{H}$  in vertikale Richtung: Variation von (a) angelegter Feldstärke  $\bar{H}$ , (b) des Partikelvolumenanteiles  $\phi$  und (c) der initialen Steifigkeit  $\bar{G}_0$ .

eines Partikels mit dem Gebiet  $\mathcal{B}_\alpha^p$  ausschließlich von  $\mathbf{h}^\infty$  abhängen, so folgt für die ortsabhängige Feldstärke infolge des Dipols

$$\mathbf{h}_\alpha^{\text{Dipol}}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_{(\alpha)}^{\text{Dipol}}) = \frac{1}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{r}_{(\alpha)} \cdot \mathbf{m}_{(\alpha)}^{\text{Dipol}}) - \mathbf{m}_{(\alpha)}^{\text{Dipol}} |\mathbf{r}_{(\alpha)}|^2}{|\mathbf{r}_{(\alpha)}|^5} \quad (5.12)$$

mit  $\mathbf{r}_\alpha := \mathbf{x} - \mathbf{r}_{0\alpha} \forall \mathbf{x} \notin \mathcal{B}_\alpha^p$ . Auf den Partikel  $\mathcal{B}_2^p$  wirkt also infolge der Anwesenheit vom ersten Einschluss  $\mathcal{B}_1^p$  die Kraft

$$\mathbf{f}_{12}^{\text{Dipol}} = \mu_0 \int_{\mathcal{B}_2^p} [\nabla \mathbf{h}_1^{\text{Dipol}}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_1^{\text{Dipol}})] \cdot \mathbf{m}_2^{\text{Dipol}} \, dv \propto |\mathbf{m}(\mathbf{h}^\infty)|^2. \quad (5.13)$$

Das Ergebnis ist gemäß Gleichung (5.13) proportional zum Quadrat der Magnetisierung. Die geführte Argumentation ist stark abstrahiert und berücksichtigt nicht die komplexen magneto-mechanischen Wechselwirkungen von Partikeln und Matrix. Eine Übertragung auf die betrachtete Problemstellung ermöglicht es dennoch, das berechnete Materialverhalten in qualitativer Art und Weise zu erklären, wobei  $\bar{\mathbf{h}}$  bzw.  $\bar{H}$  an die Stelle von  $\mathbf{h}^\infty$  tritt.

Da das Magnetisierungsverhalten für kleine Felder linear ist, hängt die Partikelwechselwirkung anfangs quadratisch vom effektiven Feld ab. Somit ergibt sich für  $\bar{H} \lesssim 250 \text{ kA m}^{-1}$  ein parabelförmiger Verlauf. Für höhere Feldstärken setzt das für ferromagnetische Materialien typische Sättigungsverhalten der Magnetisierung  $\mathbf{m}$  ein. Dieses führt schließlich zu nichtlinearen Effekten in der magnetisch induzierten Partikelwechselwirkung und damit zu einer Abflachung der Kraftwechselwirkung, vgl. Gleichung (5.13). Auffällig ist die deutlich stärkere Ausprägung des Effektes für die Kettenstrukturen gegenüber den kubischen und hexagonalen Anordnungen. Diese ist auf die geringeren Abstände der Partikel zurückzuführen.

### *Abhängigkeit vom Partikelvolumengehalt $\phi$*

Ein weiterer entscheidender Einfluss auf den MR-Effekt ist der Partikelvolumengehalt des MRE. Für die Füllgrade  $\phi = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$  % ist dieser in Abb. 5.7(b) für die analysierten Typen von Einheitszellen aufgetragen, wobei für Feldstärke und Silikonölgehalt der Matrix  $|\vec{H}| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  bzw.  $\phi_{\text{Öl}} = 40$  % gelten. Verschiedene Geometrien mit variiertem Volumengehalt sind exemplarisch in Abb. 5.6 dargestellt.

Bei den hexagonalen und kubischen Anordnungen ist nun eine Korrelation des Effektes mit dem Füllgrad erkennbar. Da bei diesen Mikrostrukturen der Partikelabstand mit steigendem  $\phi$  stetig sinkt und sich somit die magneto-mechanischen Interaktionen verstärken, ist der ermittelte Anstieg erklärbar. Für die kettenförmigen RVE zeigt sich dagegen eine anfänglich degressive Zunahme des Effektes und ein mehr oder weniger ausgeprägtes Maximum bei  $\phi = 30$  % bzw.  $\phi = 35$  %. Bei diesen Mikrostrukturen ändert sich der minimale Partikelabstand mit  $\phi$  nicht, sodass die Wechselwirkungen innerhalb einer Kette näherungsweise unverändert bleiben. Dennoch steigt der Anteil der Ketten am Gesamtvolumen der Zelle und somit auch die magnetisch induzierte Steifigkeitsänderung. Dem wirkt allerdings die mechanische Versteifung des Komposits durch die Zunahme von  $\phi$  entgegen, sodass sich der maximale Effekt hier nicht für  $\phi = 40$  % einstellt.

### *Abhängigkeit von der Steifigkeit des Elastomers*

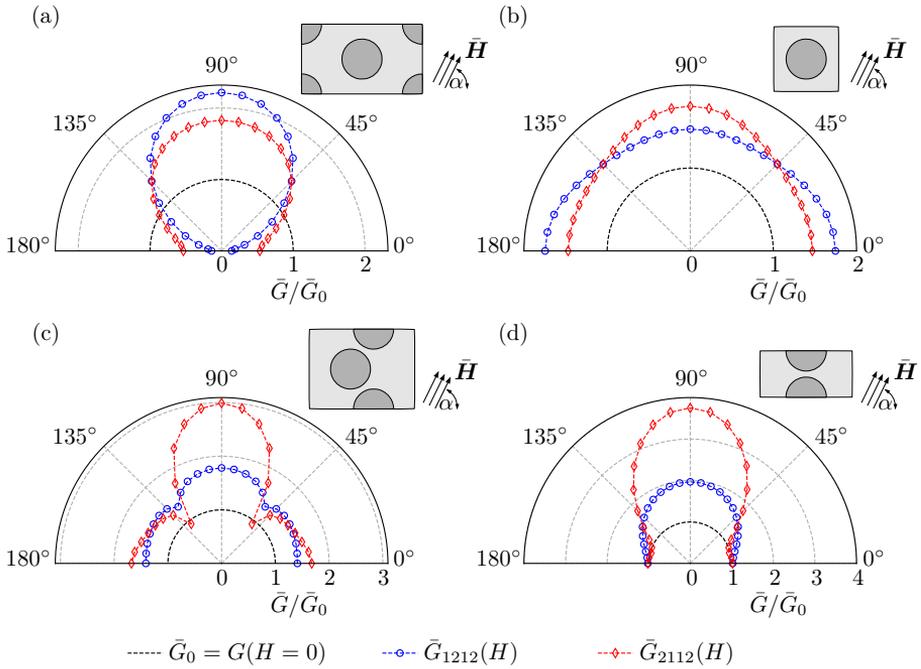
Neben den magnetischen Eigenschaften der Partikel hängt das effektive Verhalten in entscheidendem Maße vom mechanischen Verhalten des Elastomers ab. Da sich das in Abschnitt 4.2 charakterisierte Silikonelastomer annähernd elastisch verhält, ist hier der Einfluss der initialen Steifigkeit des unbeladenen Matrixmaterials von Interesse. Dabei ergeben sich bei Zugabe der Silikonölannteile  $\phi_{\text{Öl}} = \{0, 10, 20, 30, 40\}$  % im Herstellungsprozess initiale Schubmoduli zwischen 99,17 kPa und 25,19 kPa, vgl. Tab. 4.2. Die Steifigkeit der elastomeren Matrix sinkt somit bei zunehmendem Silikonölanteil deutlich ab. Je nach Mikrostruktur ergeben sich nun für  $\phi = 30$  % Partikelvolumengehalt und  $\phi_{\text{Öl}} = 0$  %, also  $G \approx 100$  kPa, effektive Schubmoduli  $\bar{G}_0$  im Bereich von 150 – 185 kPa. Die relative, magnetisch induzierte Versteifung nimmt nun indirekt proportional mit  $\bar{G}_0$  zu, d. h. es gilt

$$\Delta\bar{G}/\bar{G}_0 \propto \bar{G}_0^{-1} . \quad (5.14)$$

für den Zusammenhang zwischen MR-Effekt und initialer Schubkonstante. Durch die Zugabe von Silikonöl im Herstellungsprozess lassen sich die magneto-mechanischen Kopplungseigenschaften des Komposits also signifikant steigern.

### *Abhängigkeit von der Feldrichtung*

Letztendlich ist neben den vorangegangenen Untersuchungen – also dem Einfluss von angelegter Feldstärke  $\vec{H}$ , Partikelvolumengehalt  $\phi$  und Steifigkeit der elastischen Matrix – auch die Richtung des effektiven Magnetfelds von Interesse. Da im Fall der betrachteten weichmagnetischen Materialien der Zusammenhang  $\sigma^{\text{pon}}(\mathbf{h}) = \sigma^{\text{pon}}(-\mathbf{h})$  mit  $\mathbf{m} = \mathcal{M}(|\mathbf{h}|)\mathbf{h}|\mathbf{h}|^{-1}$  gilt, muss die Materialantwort unabhängig von der Mikrostruktur für einen Feldwinkel  $\alpha' = \alpha + \pi$  dieselben Ergebnisse wie für  $\alpha$  liefern. Es reicht also aus, die Richtung für  $\alpha \in [0, \pi]$  abzutasten. Die Ergebnisse sind für die betrachteten Mikrostrukturen in Abb. 5.8 dargestellt, wobei



**Abb. 5.8:** Abhängigkeit des MR-Effektes der Schubkomponenten  $\bar{G}_{1212}$  und  $\bar{G}_{2112}$  von der Richtung  $\alpha$  des angelegten Magnetfelds  $\bar{H}$  mit  $|\bar{H}| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  für verschiedene Einheitszellen bei einem Partikelvolumengehalt von  $\phi = 30\%$ : (a) und (b) hexagonale und einfache kubische Anordnungen sowie (c) und (d) kettenförmige Strukturen.

für die restlichen Parameter  $\phi = 30\%$ ,  $\phi_{\text{OI}} = 40\%$  und  $|\bar{H}| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  gelten. Dabei zeigt sich aufgrund des anisotropen effektiven Materialverhaltens der Mikrostrukturen eine deutlich ausgeprägte unsymmetrische Spannungsantwort, sodass im Allgemeinen  $\bar{G}_{1212} \neq \bar{G}_{2112}$  gilt.

Die kubische Zelle weist über den gesamten Bereich einen positiven Effekt auf. Dabei tritt der maximale MR-Effekt jeweils bei den Winkeln  $0^\circ$  bzw.  $90^\circ$  auf. Bedingt durch die vorhandene Symmetrie gilt außerdem  $\bar{G}_{1221}^{\text{kub}}(\alpha + 90^\circ) = \bar{G}_{2112}^{\text{kub}}(\alpha)$ , vgl. Abb. 5.8(b). Im Gegensatz zur kubischen Mikrostruktur treten bei der hexagonalen Partikelanordnung je nach Feldwinkel negative und positive MR-Effekte auf, vgl. Abb. 5.8(a). Dabei liegen die maximale Erhöhung und Verringerung der Schubsteifigkeit bei  $\alpha = 90^\circ$  und  $\alpha = 0^\circ$  vor. Lediglich unter einem Feldwinkel von  $45^\circ$  stellt sich die Symmetrie der magnetisch induzierten Schubmoduli ein. Trotz des aus magnetischer Sicht rein isotropen Verhaltens der hexagonalen Zelle zeigt sich eine signifikante magneto-mechanische Anisotropie. Diese ist durch die unterschiedliche Ausprägung der kettenartigen Strukturen je nach Blickrichtung zu erklären, vgl. Abb. 2.3(b).

Gemäß Abb. 5.8(c) und (d) zeigt sich für die betrachteten RVE mit kettenartiger Anordnung eine deutlich stärker ausgeprägte Unsymmetrie in den Schubsteifigkeiten. Diese ist auf die besonders starke geometrische Anisotropie zurückzuführen. Die gerade Kette weist dabei die stärkste Richtungsabhängigkeit des MR-Effektes auf. Unter einem Feldwinkel von  $90^\circ$  tritt die maximale relative Steifigkeitsänderung von ca. 280 % auf, wohingegen der Effekt bei  $0^\circ$  fast

gänzlich verschwindet. Die wellige Kettenstruktur zeigt dagegen auch bei  $0^\circ$  einen deutlich positiven MR-Effekt. Interessant ist, dass die Versteifung unter einem Winkel von ca.  $52^\circ$  annähernd verschwindet. Im Herstellungsprozess strukturierter MRE, bei denen während der Vernetzung des Elastomers ein externes Magnetfeld anliegt, lässt sich die resultierende magnetische Schaltbarkeit also gezielt beeinflussen. Dabei sind Kettenstrukturen mit geringer Abweichung von ideal geraden Ketten insbesondere bei höheren Feldern zur Strukturierung zu erwarten.

### Statistisch-monodisperse Partikelverteilung

Im nächsten Schritt soll nun, zumindest unter der Einschränkung zweidimensionaler Problemstellungen, der MR-Effekt realitätsnaher Mikrostrukturen analysiert werden. Wie bereits in Abschnitt 5.1.1 anhand der Abbildungen 5.3 und 5.4 ermittelt, ist es notwendig, je Volumengehalt 10 RVE mit jeweils 400 Partikeln heranzuziehen, um die Ergebnisse statistisch abzusichern. Im Gegensatz zur Berechnung des MR-Effektes idealer Einheitszellen ist nun also das arithmetische Mittel inklusive Vertrauensintervall

$$\langle \Delta \bar{G} \bar{G}_0^{-1} \rangle_{10} \text{ und } \mathcal{K}_{10}^{95\%}(\Delta \bar{G} \bar{G}_0^{-1}) \quad (5.15)$$

auszuwerten. Verschiedene Einflussfaktoren werden durch Variation von Feldstärke, Volumengehalt, initialer mechanischer Steifigkeit und Feldrichtung ermittelt.

#### Abhängigkeit von der Feldstärke

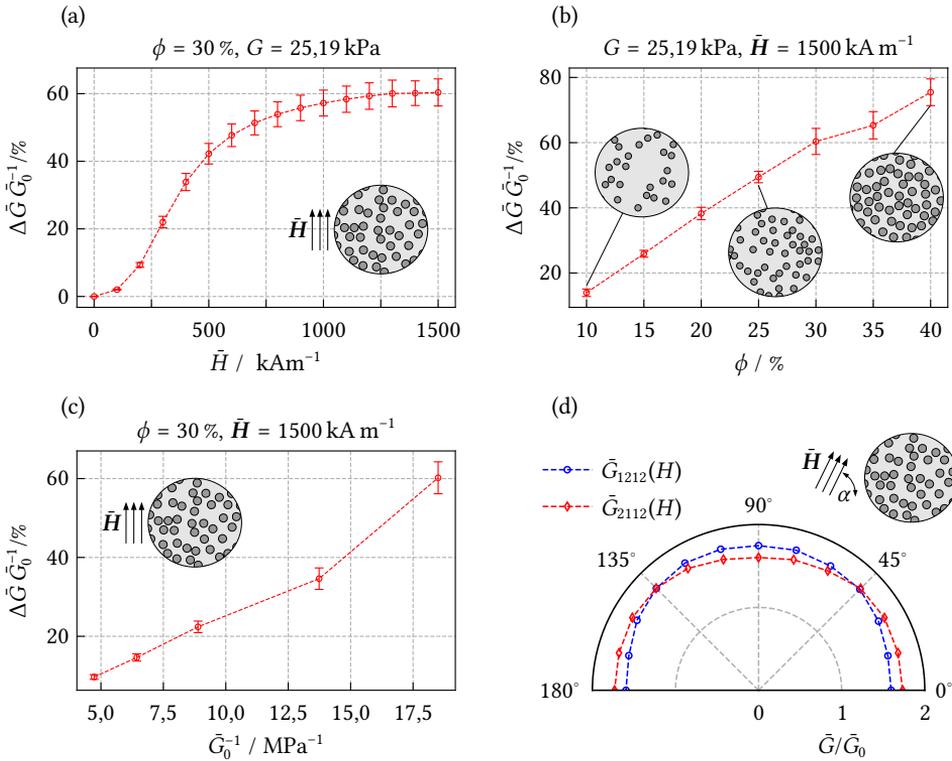
Die Abhängigkeit von  $|\bar{H}|$ , exemplarisch für ein Feld in vertikaler Richtung analysiert, sei erneut für Zellen mit dem Partikelvolumengehalt  $\phi = 30\%$  und einem Polymer mit  $\phi_{OI} = 40\%$  Silikonölgehalt betrachtet. Auch für stochastische Partikelverteilungen zeigt sich die in Abb. 5.9(a) dargestellte S-förmige Abhängigkeit des effektiven Schubmoduls  $\bar{G}_{2112}$  vom angelegten Magnetfeld. Dabei ist der maximale MR-Effekt mit ca.  $60\%$  signifikant schwächer ausgeprägt als bspw. bei den zuvor untersuchten Kettenstrukturen gemäß Abb. 5.6(c) und (d). Durch Strukturierung im Herstellungsprozess lassen sich folglich MRE mit deutlich stärker ausgeprägtem Schaltverhalten produzieren. Dieses Ergebnis stimmt mit den experimentellen Untersuchungen in HIPTMAIR et al. [60] überein.

Das relative Konfidenzintervall des arithmetischen Mittels der magnetisch induzierten Steifigkeitsänderung  $\Delta \bar{G} \bar{G}_0^{-1}$  ist mit dem Maximalwert von  $\max[\mathcal{K}_{10}^{95\%}(\Delta \bar{G} \bar{G}_0^{-1}) \langle \Delta \bar{G} \bar{G}_0^{-1} \rangle_{10}^{-1}] \approx 7,7\%$  noch einmal etwas größer als das der in Abb. 5.3 ausgewerteten mechanischen Spannung. Dieses Verhalten ist darin begründet, dass in die Berechnung des Koeffizienten drei streuungsbehaftete Werte eingehen. Es lässt sich also eine sehr starke Sensitivität des MR-Effektes hinsichtlich mikrostruktureller Änderungen detektieren.

#### Abhängigkeit vom Partikelvolumengehalt $\phi$

Die Variation der Füllgrade  $\phi = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}\%$  ist in Abb. 5.9(b) für ein Magnetfeld in vertikaler Richtung aufgetragen. Für Feldstärke und Silikonölgehalt der Matrix gelten dabei die Werte  $|\bar{H}| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  bzw.  $\phi_{OI} = 40\%$ .

Es zeigt sich ein Anstieg des Effektes für steigende  $\phi$ , wobei der maximale Wert bei ca.  $75\%$  liegt. Das leichte Abknicken der Kurve bei  $\phi = 35\%$  ist dabei vermutlich stochastischen Effek-



**Abb. 5.9:** Untersuchung verschiedener Einflussparameter auf den MR-Effekt statistisch-periodischer RVE: Schubkomponente  $\bar{G}_{2112}$  für Feld in vertikale Richtung bei Variation von (a) angelegter Feldstärke  $|\bar{H}|$ , (b) Partikelvolumengehalt  $\phi$  und (c) der initialen Steifigkeit  $\bar{G}_0$  sowie (d) Schubkomponenten für Feldwinkel  $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$  mit  $\phi = 30\%$ ,  $|\bar{H}| = 1500 \text{ kAm}^{-1}$ ,  $G = 25,19 \text{ kPa}$ . Dargestellt ist das arithmetische Mittel für jeweils 10 RVE inklusive 95%-Vertrauensintervall.

ten zuzuschreiben. Dies verdeutlicht sich anhand der eingetragenen Konfidenzintervalle, welche die Präzision der geschätzten Mittelwerte und somit die Lage der zu erwartenden wahren Werte mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% kennzeichnen. Im Vergleich zu den kettenartigen Strukturen stellt sich also kein Extremum unterhalb eines Füllgrades von 40% ein. Da der MR-Effekt insbesondere von Partikelpaaren mit geringem Abstand  $\Delta l_i^{\min} \approx r^{\min}$  gesteigert wird, soll an dieser Stelle eine Bewertung anhand der in Abb. 5.1(b) dargestellten Verteilungen vorgenommen werden. Dem folgend tritt bei steigendem Füllgrad eine höhere Wahrscheinlichkeit für sehr geringe Abstände auf. Somit ist es auch naheliegend, dass die magnetisch induzierbare Steifigkeitsänderung zunehmen muss. Der simulativ vorhergesagte Anstieg stimmt qualitativ mit den experimentellen Ergebnissen aus LOKANDER & STENBERG [97] und WANG et al. [168] für MRE mit  $11\% \leq \phi \leq 38\%$  bzw.  $10\% \leq \phi \leq 30\%$  überein.

### Abhängigkeit von der Steifigkeit des Polymers

Wie bereits anhand der idealisierten Einheitszellen aufgezeigt, kann der relative MR-Effekt durch Senkung der initialen mechanischen Steifigkeit signifikant gesteigert werden. Dabei ergeben sich bei Zugabe der Silikonölannteile  $\phi_{\text{OI}} = \{0, 10, 20, 30, 40\}$  % im Herstellungsprozess sinkende initiale Schubmoduli gemäß Tab. 4.2. Für eine stochastische Mikrostruktur mit  $\phi = 30$  % Partikelvolumengehalt und  $\phi_{\text{OI}} = 0$  % ergibt sich ein effektiver Schubmodul von ca. 212 kPa. Im Vergleich zu den idealisierten Mikrostrukturen ist die mechanische Versteifung durch Zugabe von Partikeln also stärker ausgeprägt. Die relative magnetisch induzierte Steifigkeitsänderung  $\Delta\bar{G}/\bar{G}_0$  nimmt auch für die statistisch-periodischen Zellen annähernd indirekt proportional mit  $\bar{G}_0$  zu. Durch die Zugabe von Silikonöl im Herstellungsprozess lassen sich die magneto-mechanischen Kopplungseigenschaften des Komposits also signifikant steigern. Konkret folgt aus einer Senkung der mechanischen Steifigkeit um den Faktor Vier eine Erhöhung des relativen MR-Effektes um das sechsfache.

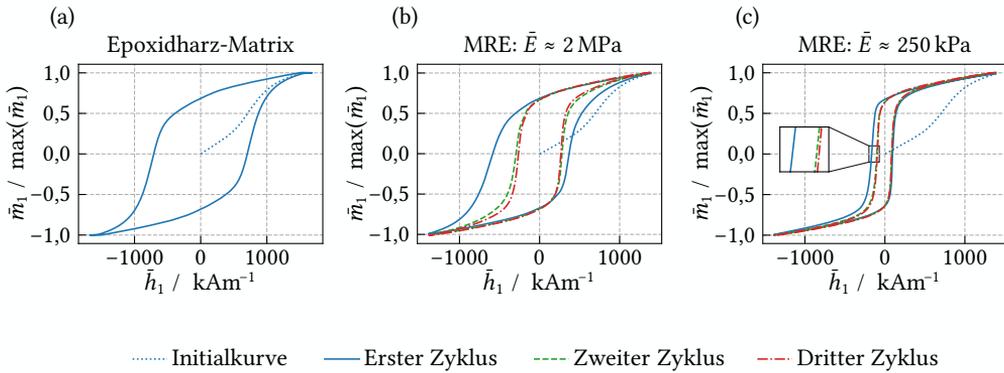
### Abhängigkeit von der Feldrichtung

In einem letzten Schritt ist schließlich auch die Abhängigkeit der magnetischen Schalteigenschaften von der Feldrichtung zu untersuchen. Wie zu erwarten, ist der MR-Effekt aufgrund der isotropen Effektiv-Eigenschaften stochastischer Mikrostrukturen nur geringfügig richtungsabhängig. Wie Abb. 5.9(d) zu entnehmen ist, zeigt sich allerdings eine schwache Anisotropie in den feldabhängigen Schubkomponenten  $\bar{G}_{1212}$  und  $\bar{G}_{2112}$ , welche aus der magnetisch induzierten Vorzugsrichtung folgt. Da die stochastischen Mikrostrukturen im statistischen Mittel in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung annähernd gleiche Verteilungen aufweisen, gilt außerdem in guter Näherung  $\bar{G}_{1221}^{\text{sto}}(\alpha + 90^\circ) \approx \bar{G}_{2112}^{\text{sto}}(\alpha)$ .

## 5.2 Hartmagnetische MRE

Im Gegensatz zu magnetisch weichen MRE führt die Verwendung von hartmagnetischen Füllstoffen wie NdFeB zu stark irreversiblen und pfadabhängigem Verhalten des Komposits. Beispielsweise treten in experimentellen Untersuchungen starke Unterschiede in den  $\bar{m}-\bar{h}$ -Hysteresen hartmagnetischer MRE und denen des reinen NdFeB auf [72, 93, 156]. In Abb. 5.10 sind exemplarisch die VSM-Messungen einer mechanisch steifen Probe auf Basis von Epoxidharz aus LINKE et al. [93] sowie die zweier MRE-Proben mit den effektiven  $E$ -Moduli 2000 kPa und 250 kPa aus KALINA et al. [72] gegenübergestellt. Die in Abb. 5.10(a) dargestellte Hysterese der Epoxidharz-Probe – in der lokale Bewegungen der Partikel nahezu vollständig behindert sind – stimmt dabei im Wesentlichen mit dem typischen Magnetisierungsverhalten von NdFeB überein, wobei für die nicht vorliegenden zweiten und dritten Hysterese-Schleifen kein Unterschied zum ersten Zyklus zu erwarten ist. Im Vergleich dazu zeigen die MRE-Proben deutlich schmalere ausgeprägte Hysteresen sowie eine zusätzliche Pfadabhängigkeit, die sich in einer Abweichung zwischen dem ersten und den darauf folgenden Zyklen widerspiegelt, vgl. Abb. 5.10(b) und (c).

Dieses Verhalten beruht im Wesentlichen auf magnetisch induzierten Rotationen der eingebetteten NdFeB-Partikel, die durch die Invertierung des angelegten makroskopischen  $\bar{h}$ -Feldes ausgelöst werden [72, 156, 158, 163]. Aus energetischer Sicht ist die Umkehr der effektiven Magnetisierungsrichtung durch Partikelrotationen innerhalb der elastomeren Matrix somit günstiger als ein vollständig auf Domänen-Umwandlungen basierender Prozess, wobei im Gegenzug



**Abb. 5.10:** VSM-Messungen des effektiven Magnetisierungsverhaltens hartmagnetischer Kompositmaterialien gefüllt mit NdFeB-Partikeln und verschiedenen Matrixmaterialien: (a) Probe mit Epoxidharzmatrix und Füllgrad  $\phi = 28\%$  sowie (b) und (c) MRE-Proben mit  $\phi = 40\%$  Partikelvolumengehalt und  $\bar{E} \approx \{2000, 250\}$  kPa. Die Messdaten sind LINKE et al. [93] sowie KALINA et al. [72] entnommen.

die mechanischen Rückstellkräfte der Matrix zu überwinden sind, vgl. KALINA et al. [72]. Theoretische Untersuchungen aus SÁNCHEZ et al. [158] sowie VAGANOV et al. [163] belegen allerdings die zusätzliche Relevanz von irreversiblen Schädigungsprozessen an der Grenzfläche bzw. innerhalb des Elastomers: Treten starke Rotationen auf, ist demnach eine vollständige oder teilweise Ablösung der Polymerketten von den Partikeln zu erwarten.

### 5.2.1 Simulation magnetischer Hysteresen

Ausgehend von den vorgestellten experimentellen Daten soll im Folgenden eine Untersuchung der magnetischen Materialantwort hartmagnetischer MRE auf Basis von numerischen Homogenisierungen mittels der Vektorpotential-Formulierung (3.9) erfolgen. Dabei wird das Verhalten der NdFeB-Partikel durch das in Abschnitt 5.2 vorgestellte Hysterese-Modell mit den Parametern gemäß Tab. 4.4 beschrieben. Die zuvor angemerkten Schädigungseffekte von Matrix und Grenzfläche werden in dieser Arbeit jedoch nicht berücksichtigt. Da sich die physikalischen Prozesse somit nicht in voller Gänze abbilden lassen, soll ein magneto-elastisches Modellsystem mit idealer Anbindung der Partikel betrachtet werden. Das mechanische Verhalten der elastischen Matrix wird dabei durch das neo-HOOKE-Modell

$$\varrho_0 \psi^{\text{mech}}(I_1, J) := \frac{E}{4(1+\nu)} \left[ J^{-2/3} I_1 - 3 \right] + \frac{E}{12(1-2\nu)} \left[ J^2 - 2 \ln J - 1 \right] \quad (5.16)$$

beschrieben.<sup>2</sup>

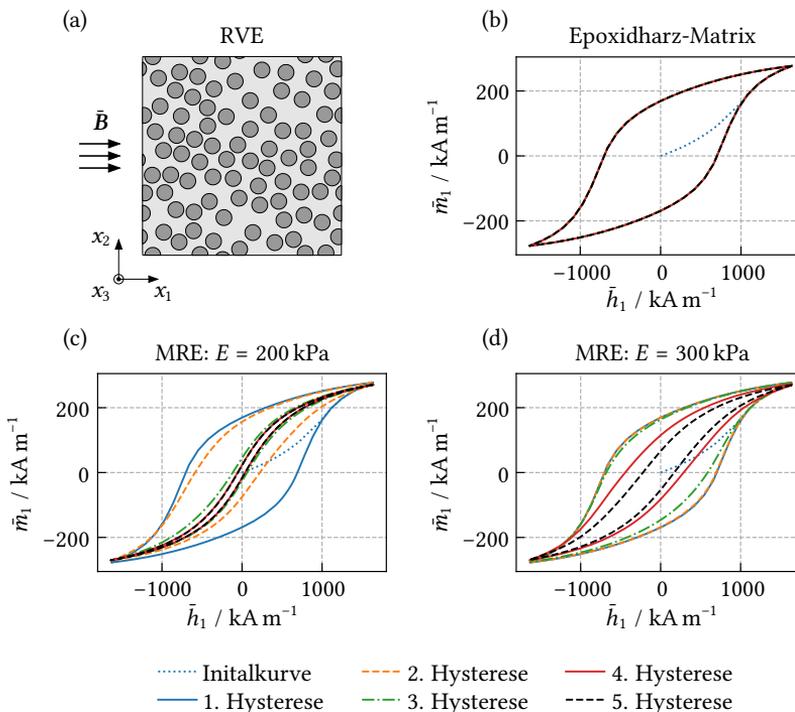
Da für das Nachfahren mehrerer Hysterese-Zyklen eine Vielzahl von Inkrementen notwen-

<sup>2</sup>Obwohl das an experimentelle Daten angepasste OGDEN-Modell gemäß Abschnitt 4.2.2 das mechanische Verhalten von Silikonelastomeren deutlich besser als das Neo-HOOKE-Modell abbildet, ist unter der getroffenen Annahme einer idealen Grenzschicht – also ohne Berücksichtigung von Schädigungseffekten – das neo-HOOKE-Modell vorzuziehen. Dies ist darin begründet, dass das parametrisierte Modell die Partikel-Rotationen aufgrund des extremen Anstiegs der Spannungs-Dehnungs-Kurve bei hohen Streckungen zu sehr behindert, vgl. Abb. 4.5.

dig ist, wird die Partikelanzahl im Vergleich zu den weichmagnetischen MRE deutlich reduziert. Insgesamt seien daher zehn monodisperse RVE mit  $\phi = 40\%$ ,  $r^{\min} = 1,15d$  und jeweils  $N^P = 80$  statistisch verteilten Einschlüssen betrachtet, s. Abb. 5.11(a). Dabei ist anzumerken, dass sich die Repräsentativität statistisch-periodischer Zellen im Bezug auf die Magnetisierung  $\bar{\mathbf{m}}$  deutlich früher einstellt als hinsichtlich der Spannung  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , und diese RVE-Größe hier somit ausreichend ist, vgl. DANAS [24] und Abb. 5.2. Gemäß Abb. 5.4 ist die Streuung der effektiven Materialantwort für den betrachteten Volumengehalt von 40 % außerdem deutlich geringer als für 10 %.

### Vorhersage der idealisierten FE-Simulation

Exemplarisch seien zwei MRE mit den Matrix-Steifigkeiten  $E = \{200, 300\}$  kPa und  $\nu = 0,49$  sowie eine Referenz auf Basis von Epoxidharz mit  $E = 3000$  MPa und  $\nu = 0,4$  betrachtet. Wie in den experimentellen Untersuchungen gemäß Abb. 5.10 wird den RVE ein zyklisches  $\bar{\mathbf{B}}$ -Feld in  $x_1$ -Richtung aufgeprägt, wobei für die effektive Deformation  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I}$  gelte. Insgesamt werden zur Analyse der Systeme volle fünf Hysterese-Zyklen simuliert. Zur Reduktion der Inkrementanzahl kommt eine heuristische Zeitschrittweiten-Steuerung zum Einsatz. Stellt sich im aktu-



**Abb. 5.11:** Simulation hartmagnetischer Kompositmaterialien gefüllt mit NdFeB-Partikeln und verschiedenen Matrixmaterialien: (a) RVE mit 80 Partikeln und einem Füllgrad von  $\phi = 40\%$  sowie (b) – (c) homogenisiertes Magnetisierungsverhalten für  $E$ -Moduli von 3000 MPa, 200 kPa und 300 kPa. Dargestellt ist der Mittelwert  $\langle \bar{m}_1 \rangle_{10}$  aus jeweils 10 Einzelsimulationen.

ellen Inkrement  $t_n$  nach 10 Iterationen keine Konvergenz ein, so erfolgt in diesem Verfahren eine Halbierung des Zeitschrittes  $\Delta t$ . Kann die Lösung des Inkrementes dagegen in weniger als 4 Iterationen erfolgen, so ist der Zeitschritt  $\Delta t$  wieder zu verdoppeln. Zur statistischen Absicherung der Ergebnisse werden die betrachteten zeitlichen Verläufe der effektiven magnetischen Feldgrößen gemittelt. Um diese Auswertung trotz der unterschiedlichen Zeitschritte der einzelnen Simulationen vornehmen zu können, erfolgt vorab eine Spline-Interpolation, s. Gleichung (4.4). Die simulierten  $\bar{m}$ - $\bar{h}$ -Kurven der RVE sind in Abb. 5.11(b) – (d) dargestellt. Aufgetragen ist jeweils der Mittelwert  $\langle \bar{m}_1 \rangle_{10}$ , wobei das zugehörige 95 %-Vertrauensintervall nach Gleichung (5.3)<sub>2</sub> mit einem Maximalwert von  $\pm 0,0152 \bar{M}^S$  für alle Steifigkeiten sehr gering ist.

Für das Komposit auf Basis von Epoxidharz zeigt sich eine zu den Messergebnissen nach Abb. 5.11(a) äquivalente Kurve. Wie zu erwarten, sind die Partikel aufgrund der verhältnismäßig hohen Steifigkeit der umgebenden Matrix nahezu fixiert, sodass Rotationen hier nicht auftreten und erster bis fünfter Hysterese-Zyklus übereinstimmen. Im Gegensatz dazu stellen sich bei den MRE deutliche Unterschiede in den  $\bar{m}$ - $\bar{h}$ -Kurven ein. So zeigt die fünfte Hysterese für beide betrachteten  $E$ -Moduli deutlich geringere Koerzitivfeldstärken als der steifere Epoxidharz-Verbund. Für  $E = 200$  kPa ist dabei bereits ein stationärer Zustand des Systems erreicht, d. h. es tritt kein merklicher Unterschied mehr zur vorherigen Hysterese auf. Es zeigt sich weiterhin eine deutliche Abhängigkeit der Hysteresenform von der Anzahl der zuvor durchlaufenen Zyklen. Zwar sind diese Unterschiede in der Simulation wesentlich stärker ausgeprägt als es die experimentellen Daten aus Abb. 5.10(b) und (c) belegen, aber ein qualitativ ähnliches Verhalten lässt sich offensichtlich grundsätzlich abbilden.

### Mikroskopische Analyse

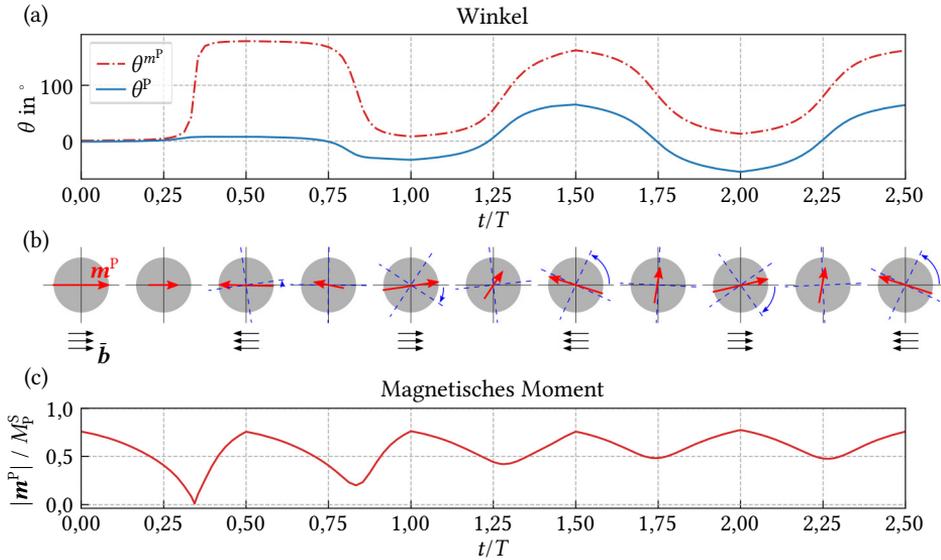
Wie bereits erwähnt, resultiert die Charakteristik der effektiven magnetischen Materialantwort auf Partikelrotationen innerhalb der Mikrostruktur. Für die durchgeführten Simulationen soll daher im Folgenden eine konkrete Analyse dieser lokalen Prozesse stattfinden. Um Änderungen der Magnetisierung einzelner Einschlüsse verfolgen zu können, erfolgt die Aufzeichnung der Rotationswinkel  $\theta_\alpha^p$  und  $\theta_\alpha^{m^p}$  von NdFeB-Partikeln und dem zugehörigen magnetischen Moment

$$\mathbf{m}_\alpha^p := \int_{B_\alpha^p} \mathbf{m} \, dv \quad \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, 80\} \quad (5.17)$$

exemplarisch für eine FE-Simulation mit  $E = 200$  kPa. Die entsprechenden Verläufe von  $\theta^p$ ,  $\theta^{m^p}$  und  $|\mathbf{m}^p|$  innerhalb der ersten zweieinhalb Hysterese-Zyklen mit den Periodendauern  $T$  sind für einen ausgewählten Partikel in Abb. 5.12(a) und (c) dargestellt. Zur Veranschaulichung ist weiterhin der aktuelle Zustand des betrachteten Einschlusses zu jeder viertel Periode in Abb. 5.12(b) schematisch dargestellt.

#### Einzelpartikel

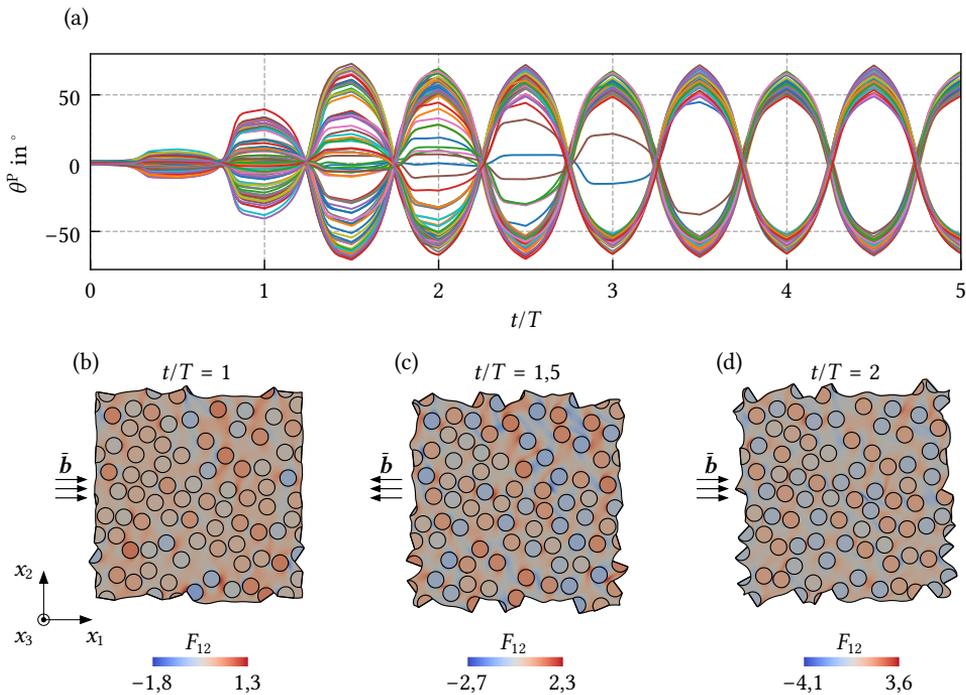
Zu Beginn der ersten Periode ist der Partikel mit etwa 76 % der Sättigung  $M_p^S$  in  $x_1$ -Richtung magnetisiert. Da zum Erreichen der vollständigen Sättigung bei NdFeB deutlich höhere Induktions-Felder notwendig sind, wird dieser Wert im weiteren Lastverlauf auch nicht überschritten, vgl. Abb. 4.10(a). Ausgehend vom Remanenz-Punkt bei  $t/T = 0,25$ , wo die effektive In-



**Abb. 5.12:** Simulierte Rotation eines einzelnen NdFeB-Partikels innerhalb der ersten zweieinhalb Hysterese-Zyklen mit den Periodendauern  $T$  für eine Matrix-Steifigkeit von 200 kPa: (a) Rotationswinkel  $\theta^P$  des Partikels und Winkel  $\theta^{m^P}$  des zugehörigen magnetischen Momentes  $\bar{\mathbf{m}}^P$ , (b) schematische Darstellung des Partikel-Zustandes sowie (c) Betrag  $|\bar{\mathbf{m}}^P|$  normiert auf den Partikel-Sättigungswert  $M_P^S$ .

duktion  $\bar{\mathbf{b}}$  verschwindet, weist der Partikel ein bleibendes magnetisches Moment in die horizontale Richtung auf. Wenn nun das  $\bar{\mathbf{b}}$ -Feld in die entgegengesetzter Richtung erhöht wird, ergibt sich aus der ponderomotorischen Momentendichte  $\mathbf{c}^{\text{pon}}$  gemäß Gleichung (2.26)<sub>2</sub> ein resultierendes Drehmoment. Dieses führt zu einer leichten Rotationsbewegung des Partikels nach der Hälfte der ersten Periode. Dabei ist anzumerken, dass die initiale Drehbewegung des Einschusses aus Inhomogenitäten in den lokalen magnetischen Feldern resultiert. Da die magnetisch induzierte Bewegung durch das Rückstell-Moment der elastomeren Matrix behindert ist und  $\mathbf{m}^P$  nahezu kollinear zu  $\bar{\mathbf{b}}$  ist, tritt vorerst nur eine leichte Rotation von ca.  $2,5^\circ$  auf. Der Großteil der Invertierung der Magnetisierung des Partikels erfolgt also durch Domänen-Umwandlungs-Prozesse.

Wenn das effektive  $\bar{\mathbf{b}}$ -Feld dann in der zweiten Hälfte des ersten Zyklus erneut auf Null zurückgefahren wird, verschwindet das resultierende Drehmoment bei  $t/T = 0,75$  erneut. Aufgrund des Gleichgewichts von elastischem Rückstellmoment und magnetischem Drehmoment geht somit auch die Partikelrotation  $\theta^P$  auf Null zurück und das magnetische Moment  $\mathbf{m}^P$  dreht sich dadurch in mathematisch negativer Richtung. Aus energetischer Sicht wird also die in der umgebenden Matrix gespeicherte Verzerrungsenergie frei, die zu einer inversen Rotation des Partikels führt. Wenn das effektive  $\bar{\mathbf{b}}$ -Feld danach wieder auf den Maximalwert in positiver  $x_1$ -Richtung erhöht wird, ergibt sich aus der Abweichung von  $\mathbf{e}^b := \bar{\mathbf{b}}|\bar{\mathbf{b}}|^{-1}$  bezüglich der Magnetisierungs-Richtung erneut ein Drehmoment. Da die Richtungen  $\mathbf{e}^m := \mathbf{m}^P|\mathbf{m}^P|^{-1}$  und  $\mathbf{e}^b$  in diesem Systemzustand deutlicher voneinander abweichen, führt dies nun zu einer stärkeren Rotation von ca.  $23^\circ$  in mathematisch negativer Richtung, vgl. Abb. 5.12(b). Dabei sinkt



**Abb. 5.13:** Rotationen der Partikel eines RVE mit insgesamt 80 hartmagnetischen Einschlüssen: (a) Rotationswinkel  $\theta^P$  innerhalb von fünf Hysterese-Zyklen sowie (b) – (d)  $F_{12}$ -Koordinate des Deformationsgradienten dargestellt auf der deformierten Konfiguration zu den Zeitpunkten  $t/T = \{1, 3/2, 2\}$ .

der Betrag  $|\mathbf{m}^P|$  zwischen  $t/T = 0,75$  und 1 nicht mehr auf null ab, da infolge der Rotation ein Anteil in  $x_2$ -Richtung verbleibt.

In den folgenden Perioden wiederholen sich die beschriebenen Prozesse, jedoch verstärkt sich die Drehbewegung mit jeder Feldumkehr, bis infolge der Beschränkung durch die elastische Rückstellwirkung der Matrix ein stationärer Zyklus erreicht ist. Zusammenfassend resultieren die auftretenden Effekte somit aus einem magnetisch induzierten Drehmoment sowie der Speicherung und dem anschließenden Freiwerden von elastischer Verzerrungsenergie. In dem betrachteten System treten dabei zusätzlich auch Domänen-Umwandlungs-Prozesse innerhalb der Partikel auf. Das Zusammenwirken der beschriebenen Effekte in einer mechanisch weichen Probe ermöglicht im Vergleich zu einer steifen Probe die schnellere Invertierung des Magnetisierungszustandes der NdFeB-Partikel und führt zu den in der Simulation auftretenden schmaleren Hysteresen.

Mittels der vorgestellten idealisierten Modellierung lässt sich somit das experimentell beobachtete Verhalten bereits nachvollziehen. Wie zuvor erwähnt, ist es jedoch notwendig Schädigungseffekte der Grenzschicht zwischen Partikeln und Matrix zu betrachten, um die auftretenden physikalischen Prozesse vollständig zu erfassen.

### Gesamte Partikel eines RVE

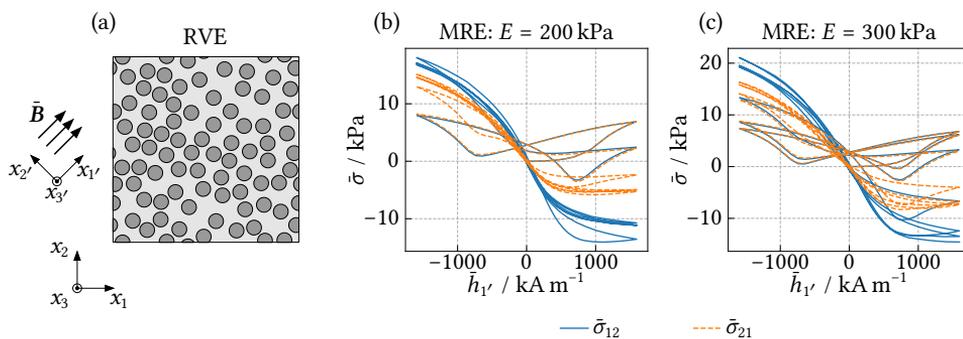
Nach der Betrachtung eines einzelnen Einschlusses soll nun die Analyse des RVE als Gesamtsystem folgen. In diesem resultiert die initiale Rotationsrichtung der einzelnen Partikel aus lokalen magnetischen Interaktionen mit den benachbarten Einschlüssen und dem Deformationszustand der elastomeren Matrix. Gemäß der in Abb. 5.13(a) dargestellten Rotationswinkel  $\theta^P$  der insgesamt 80 Partikel eines RVE mit  $E = 200$  kPa, treten also sowohl Drehungen in die mathematisch positive als auch in die negative Richtung auf. Zur Veranschaulichung ist die  $F_{12}$ -Koordinate des zugehörigen RVE in Abb. 5.13(b) – (d) für  $t/T = \{1, 3/2, 2\}$  dargestellt. Da innerhalb der Partikel  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$  gilt, stellt diese Koordinate mit  $R_{12} = \sin(\theta^P)$  somit ein Maß für den vorliegenden Rotationswinkel dar. Es zeigt sich weiterhin, dass die maximal auftretenden Winkel innerhalb der ersten Periode deutlich schwanken. Erst nach Abschluss des dritten Hysterese-Zyklus erreichen nahezu alle Partikel die jeweils maximale Verdrehung, sodass sich dann ein stationärer Zyklus einstellt. Somit lässt sich auch das Erreichen der stationären Hysterese nach drei durchlaufenen Perioden in der Simulation erklären, vgl. Abb. 5.11(c).

## 5.2.2 Simulation mechanischer Hysteresen

Um neben der magnetischen Materialantwort auch das effektive mechanische Verhalten zu analysieren, sei bei den zuvor betrachteten RVE ein alternierendes  $\vec{B}$ -Feld in  $45^\circ$ -Richtung zur  $x_1$ -Achse aufgebracht, vgl. Abb. 5.14(a). Für die  $E$ -Moduli gilt dabei erneut  $E = \{200, 300\}$  kPa und die effektive Deformation ist zu  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I}$  festgelegt.

### Analyse einer RVE-Geometrie

Die simulierten mechanischen Schubspannungen  $\bar{\sigma}_{12}$  und  $\bar{\sigma}_{21}$  einer ausgewählten RVE-Geometrie sind für die betrachteten Steifigkeiten in Abb. 5.14(b) und (c) aufgetragen. Demnach zeigen beide MRE im ersten Zyklus eine Schmetterlingskurve ähnlich zu Piezokeramiken oder piezomagnetischen Materialien. Dabei ist der mechanische Spannungstensor vorerst nahezu symmetrisch, d. h.  $\bar{\sigma}_{12} \approx \bar{\sigma}_{21}$ .

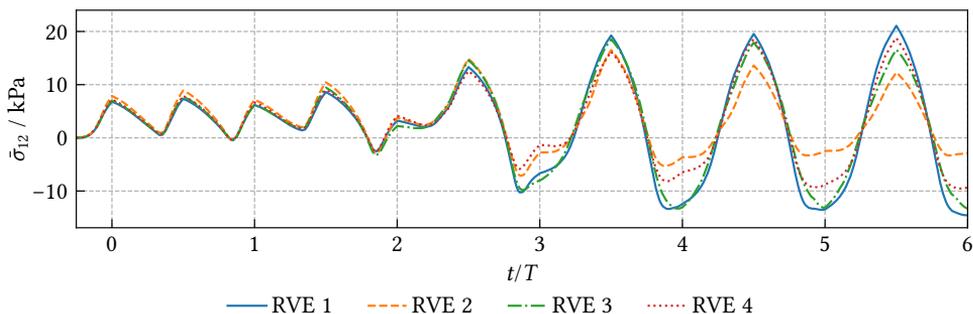


**Abb. 5.14:** Simulation der Spannungsantwort hartmagnetischer MRE: (a) simuliertes RVE mit Richtung der effektiven Induktion und  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I}$  sowie (b) und (c) Schmetterlingskurven für die  $E = 200$  kPa und 300 kPa.

Für das MRE mit  $E = 200$  kPa stellt sich bereits im zweiten Zyklus eine deutliche Abweichung von der initialen Schmetterlingskurve ein. Weiterhin zeigt die homogenisierte Materialantwort eine stark unsymmetrische Spannung auf. Wie bereits bei den Magnetisierungs-Hysteresen stellt sich dieses Verhalten infolge der lokalen Partikelrotationen innerhalb des RVE ein. Da sowohl Rotationen in die mathematisch positive als auch negative Richtung auftreten und diese nicht im Gleichgewicht stehen, tritt ein resultierendes magnetisches Drehmoment auf, das zu dem unsymmetrischen mechanischen Spannungstensor führt. Weiterhin sind auch hier die bereits in der magnetischen Materialantwort beobachteten schmalen Hysteresen erkennbar. Diese Effekte nehmen daher mit der Steigerung lokaler Rotationen der NdFeB-Einschlüsse zu, s. Abb. 5.13(a). Bei dem steiferen MRE mit  $E = 300$  kPa werden die stark nichtlinearen Effekte durch das verzögerte Einsetzen der Partikelrotationen erst etwas später dominant, vgl. Abb. 5.14(c). Insgesamt treten allerdings höhere Spannungswerte auf.

#### Vergleich verschiedener RVE-Geometrien

Abschließend sei exemplarisch die effektive Schubspannung  $\bar{\sigma}_{12}$  von vier äquivalenten RVE mit einem  $E$ -Modul von 300 kPa über insgesamt sechs Perioden verglichen. Die in Abb. 5.15 dargestellten Simulationsergebnisse belegen eine geringe Streuung der Materialantwort bis zum Ende der ersten beiden Perioden. Mit Einsetzen der lokalen Rotationen von eingebetteten NdFeB-Partikeln kommt es jedoch im Gegensatz zur magnetischen Materialantwort zu deutlichen Abweichungen der Spannungsverläufe. Demnach tritt offenbar der Verlust einer systematischen Materialantwort bezüglich der mechanischen Spannungen auf.



**Abb. 5.15:** Vergleich der Schubspannung  $\bar{\sigma}_{12}$  vier hartmagnetischer RVE unter einem  $\vec{B}$ -Feld in  $45^\circ$ -Richtung für 6 Hysterese-Zyklen. Die Matrix-Steifigkeit beträgt  $E = 300$  kPa.

# 6 Makroskopische Materialmodellierung

Im vorherigen Kapitel ist aufgezeigt, dass sich durch die Anwendung der numerischen Homogenisierung das effektive Verhalten von hart- und weichmagnetischen MRE qualitativ abbilden lässt. Dabei werden die makroskopischen Felder, d. h.  $\bar{\mathbf{F}}$  und  $\bar{\mathbf{H}}$  bzw.  $\bar{\mathbf{B}}$ , in der Umgebung eines fiktiven makroskopischen Punktes vorgegeben und dem RVE aufgeprägt. Somit findet bei dieser Methodik keinerlei Berücksichtigung der makroskopischen Geometrie statt. Dieser hat allerdings einen erheblichen Einfluss auf die magneto-mechanische Charakteristik von Proben und Bauteilen [74, 81, 88]. Um also neben mikrostrukturellen Effekten auch Formeinflüsse erfassen zu können, soll in diesem Kapitel die Entwicklung und Parametrisierung eines makroskopischen Materialmodells für weichmagnetische, elastische MRE mit stochastischer Partikelverteilung erfolgen.

In der Literatur sind zahlreiche isotrope, magneto-elastische Modelle zur Beschreibung von MRE zu finden. Die erste Gruppe dieser Modelle stellt Ansätze dar, welche ausgehend von makroskopischen Versuchen entwickelt oder anhand dieser motiviert sind, bspw. ABALI & QUEIRUGA [1], BUSTAMANTE et al. [15], DORFMANN & OGDEN [31, 32], KANKANALA & TRIANTAFYLIDIS [77], PSARRA et al. [130] oder SALAS & BUSTAMANTE [140]. Wie bereits in Kapitel 1 angemerkt, geht die Modellkalibrierung mittels makroskopischer Experimente jedoch mit einem entscheidenden Nachteil einher: Die magnetisch induzierte mechanische Feldverteilung im MRE weist unabhängig von der Probengeometrie starke Inhomogenitäten auf [43, 73, 81, 88]. Somit enthält das parametrisierte Modell unter den zumeist getroffenen vereinfachenden Annahmen stets den Einfluss der Probengeometrie und beschreibt nicht das reine konstitutive Verhalten des Materials.

Diese Problematik umgeht die zweite Gruppe von Modellen, welche auf homogenisierten Daten beruhen und sich somit ohne Einfluss der Probengeometrie kalibrieren lassen. Als Vertreter auf der Basis analytischer Homogenisierungsmethoden sind hier die Arbeiten LEFÈVRE et al. [88] und MUKHERJEE et al. [115] zu nennen. Diese erlauben lediglich eine akkurate Beschreibung bis  $\phi \approx 20\%$  Partikelvolumengehalt [115]. In dieser Arbeit soll daher die in KALINA et al. [74] vorgestellte Methodik, welche eine numerische Homogenisierung gemäß Abschnitt 2.2 zugrunde legt, Anwendung finden. Als weiterer Vorteil der aufgeführten Modelle ist die methodisch bedingte Kenntnis über die kompletten Komponenten von  $\bar{\mathbf{F}}$  und  $\bar{\mathbf{H}}$  sowie effektiver Magnetisierungs- und Spannungsantwort zu nennen. Das zu entwickelnde Materialmodell ermöglicht durch Einbindung in makroskopische Simulationen das effiziente entkoppelte Multiskalenschema [159] gemäß 2.2, welches die implizite Berücksichtigung mikrostruktureller Effekte ermöglicht, s. Kapitel 7.

## 6.1 Generierung der Datenbasis

Für die Modellentwicklung und Parametrisierung ist die Generierung einer geeigneten Datenbasis notwendig. Dabei ist zu beachten, dass ein breites Spektrum von Lastmoden abzudecken ist, um eine sinnvolle Modellkalibrierung für die spätere Anwendung in makroskopischen FE-Simulationen sicherzustellen. Der Modellierungsansatz ist hier für zweidimensionale, monodisperse MRE mit den Partikelvolumengehalten  $\phi = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\} \%$  realisiert. Zur statistischen Absicherung kommen gemäß der Untersuchung in Abschnitt 5.1.1 jeweils 10

RVE a 400 Einschlüsse in den Simulationen zum Einsatz, wobei für den Minimalabstand der Einschlüsse erneut  $r^{\min} = 1,1 d$  gilt. Die konstitutiven Eigenschaften der elastomeren Matrix und der eingebetteten Carbonyleisen-Partikel sind den Tabellen 4.2 und 4.3 zu entnehmen. Zur Reduktion des numerischen Aufwandes wird in den folgenden Simulationen lediglich das Elastomer mit  $\phi_{\text{OI}} = 40\%$  Silikonölgehalt verwendet, da sich mit diesem nach Abb. 5.9(c) die maximalen Kopplungseffekte erzielen lassen. Der initiale  $E$ -Modul des Matrixmaterials liegt damit bei ca. 75 kPa.

Als Datenbasis fungieren insgesamt vier mechanische (M1 – M4) und 10 gekoppelte magneto-mechanische Lastfälle (MM1 – MM10) gemäß Tab. 6.1. Eine gewisse Schwierigkeit stellt hier die Behandlung des quasi-inkompressiblen Verhaltens der elastomeren Matrix dar. Um für die magneto-mechanischen Lastfälle physikalisch sinnvolle Deformationsmoden aufzuprägen, wird bei auftretender Zugdeformation jeweils eine rein mechanische Simulation mit freier Kontraktion quer zur aufgebrachten Streckung  $\bar{\lambda}$  durchgeführt und die Streckung  $\bar{\lambda}_{\perp} = f(\bar{\lambda})$  abgespeichert. Somit lässt sich dann in den gekoppelten Homogenisierungs-Lastfällen  $\bar{F}_{IK}$  inkrementweise vorschreiben. Die entsprechende schematische Darstellung von effektiver Deformation und Feldrichtung ist in Abb. 6.1 exemplarisch für ein RVE mit  $\phi = 30\%$  zu finden. Für jeden Volumengehalt ergeben sich mit der Anzahl von jeweils 10 RVE in Summe 180 Einzelsimulationen.

**Tab. 6.1:** Simulierte rein mechanische Lastfälle M1 – M4 und magneto-mechanische Lastmoden MM1 – MM10. Die Aufbringung von effektiver Deformation  $\bar{F}$  und  $\bar{H}$ -Feld erfolgt simultan, wobei maximal aufgeprägte Streckung  $\bar{\lambda}$  und Scherdeformation  $\bar{\gamma}$  für die jeweiligen Volumengehalte  $\phi$  spezifiziert sind. Für das angelegte magnetische Feld gilt  $|\bar{H}^{\max}| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$ .

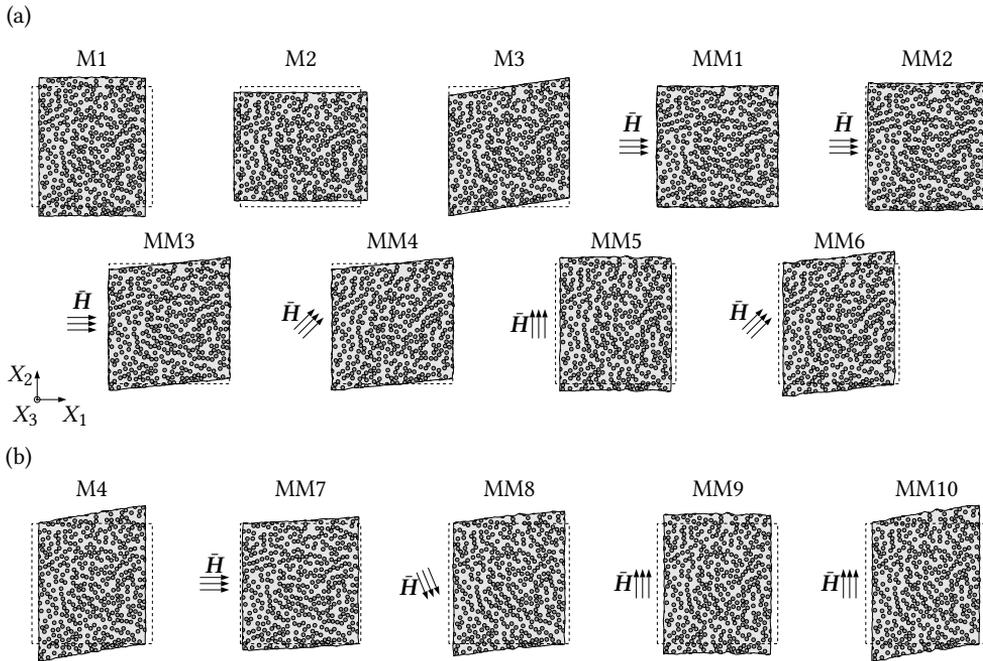
Volumengehalt $\phi$	$\bar{\lambda}_i^{\max}$	$\bar{\lambda}_{ii}^{\max}$	$\bar{\lambda}_{iii}^{\max}$	$\bar{\gamma}_i^{\max}$	$\bar{\gamma}_{ii}^{\max}$	$\bar{\gamma}_{iii}^{\max}$		
10 %, 15 %	1,02	1,05	1,08	0,04	0,08	0,12		
20 %, 25 %	1,04	1,08	1,12	0,04	0,08	0,12		
30 %, 35 %, 40 %	1,05	1,10	1,15	0,05	0,10	0,15		

Lastfall	$\bar{F}_{11}$	$\bar{F}_{12}$	$\bar{F}_{21}$	$\bar{F}_{22}$	$\bar{P}_{11}/\text{kPa}$	$\bar{P}_{22}/\text{kPa}$	Kalibrierung	Validierung
M1	–	0	0	$\bar{\lambda}_{iii}$	0	–	✓	✗
M2	–	0	0	$1 - \bar{\lambda}_{ii}$	0	–	✓	✗
M3	1	0	$\bar{\gamma}_{iii}$	1	–	–	✓	✗
M4	–	0	$\bar{\gamma}_{iii}$	$\bar{\lambda}_{iii}$	0	–	✗	✓

Lastfall	$\bar{F}_{11}$	$\bar{F}_{12}$	$\bar{F}_{21}$	$\bar{F}_{22}$	$\langle (E_1, \bar{H}) \rangle$	Kalibrierung	Validierung
MM1	1	0	0	1	$0^\circ$	✓	✗
MM2	$f(\bar{\lambda}_i)$	0	0	$\bar{\lambda}_i$	$0^\circ$	✓	✗
MM3	1	0	$\bar{\gamma}_{ii}$	1	$0^\circ$	✓	✗
MM4	1	0	$\bar{\gamma}_{ii}$	1	$45^\circ$	✓	✗
MM5	$f(\bar{\lambda}_{ii})$	0	0	$\bar{\lambda}_{ii}$	$90^\circ$	✓	✗
MM6	$f(\bar{\lambda}_{ii})$	0	$\bar{\gamma}_{ii}$	$\bar{\lambda}_{ii}$	$45^\circ$	✓	✗
MM7	$f(\bar{\lambda}_i)$	0	$\bar{\gamma}_i$	$\bar{\lambda}_i$	$0^\circ$	✗	✓
MM8	$f(\bar{\lambda}_{ii})$	0	$\bar{\gamma}_{ii}$	$\bar{\lambda}_{ii}$	$-67,5^\circ$	✗	✓
MM9	$f(\bar{\lambda}_{iii})$	0	0	$\bar{\lambda}_{iii}$	$90^\circ$	✗	✓
MM10	$f(\bar{\lambda}_{iii})$	0	$\bar{\gamma}_{iii}$	$\bar{\lambda}_{iii}$	$90^\circ$	✗	✓



**Abb. 6.1:** Schematische Darstellung der Simulationen zur Anpassung des makroskopischen Materialmodells für ein RVE mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt: (a) Lastfälle zur Parametrisierung und (b) Lastfälle zur Validierung. M1 – M4 bezeichnen rein mechanische Lastfälle und MM1 – MM10 kennzeichnen magneto-mechanische Lastmoden, wobei Deformation  $\bar{\mathbf{F}}$  und  $\bar{\mathbf{H}}$ -Feld simultan aufgebracht sind. Die gestrichelte Linie kennzeichnet jeweils die Ausgangskonfiguration des RVE.

Innerhalb der magneto-mechanischen Lastfälle sind die effektive magnetische Feldstärke  $\bar{\mathbf{H}}$  und der Deformationsgradient  $\bar{\mathbf{F}}$  simultan aufgebracht. Dabei liegt das maximale Feld bei  $|\bar{\mathbf{H}}^{\max}| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$ . Da mit steigendem Partikelvolumengehalt höhere magnetisch induzierte Dehnungen zu erwarten sind, soll außerdem die maximal aufgebrachte Deformation abhängig von  $\phi$  variiert werden, vgl. Tab. 6.1. Somit lässt sich eine bessere Anpassung der kalibrierten Modelle auf die makroskopisch auftretenden Lastzustände erreichen.

## 6.2 Modellformulierung

Es ist nun ein geeignetes makroskopisches Modell zu formulieren, das die Beschreibung des effektiven Verhaltens der analysierten Mikrostrukturen mit ausreichender Güte ermöglicht. Dabei sei angemerkt, dass sich das aus den mikroskopischen Partikel-Matrix-Interaktionen resultierende Verhalten quasi unmöglich in voller Gänze nachbilden lässt. Werden eine ideale Skalenseparation sowie vernachlässigbare Diskretisierungsfehler angenommen, stellt ein Makromodell also im Vergleich zu einem voll gekoppelten Multiskalenschema [80, 81, 136] lediglich eine Approximation dar.

### 6.2.1 Struktur makroskopischer Modelle

Da im Folgenden ausschließlich weichmagnetische MRE mit ideal-elastischer Matrix betrachtet werden, ist das Verhalten vollständig durch  $\bar{\mathbf{C}}$  und  $\bar{\mathbf{B}}$  bzw.  $\bar{\mathbf{H}}$  beschreibbar. Mit der in den Abschnitten 2.1.3 und 2.1.4 diskutierten Zerlegung der erweiterten Energiedichten  $\bar{\Omega}$  bzw.  $\bar{\Omega}^*$  in materialabhängigen Anteil und materialunabhängigen Freifeldterm gilt folglich

$$\bar{\Omega}(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{B}}) := \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{B}}) + \frac{1}{2\mu_0} \bar{\mathbf{J}}^{-1} \bar{\mathbf{C}} : (\bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}}) \quad \text{bzw.} \quad (6.1)$$

$$\bar{\Omega}^*(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{H}}) := \bar{\Psi}^*(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{H}}) - \frac{\mu_0}{2} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{C}}^{-1} : (\bar{\mathbf{H}} \otimes \bar{\mathbf{H}}) . \quad (6.2)$$

An dieser Stelle sei nun die weitere Diskussion, also die Ausarbeitung und Parametrisierung des Modells, auf die  $\bar{\mathbf{C}}\text{-}\bar{\mathbf{H}}$ -Formulierung beschränkt. Diese lässt sich mittels der Skalarpotential-Formulierung nach Gleichung (3.17) in eine FE-Umgebung einbinden und bietet daher den Vorteil, deutlich leichter auf den dreidimensionalen Fall erweiterbar zu sein.

Zur systematischen Entwicklung eines magneto-elastischen Makromodells ist es zweckmäßig, den materialabhängigen Anteil  $\bar{\Psi}^*$  weiter zu untergliedern. Dabei lässt sich ohne Einschränkung der Allgemeinheit eine Unterteilung in mechanischen, magnetischen sowie gekoppelten Anteil vornehmen. Für die erweiterte Energie folgt damit der Ansatz

$$\bar{\Omega}^*(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{H}}) := \bar{\Psi}^{\text{mech}}(\bar{\mathbf{C}}) + \bar{\Psi}^{\text{Kopp}}(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{H}}) + \bar{\Psi}^{\text{mag}}(\bar{\mathbf{H}}) + \bar{\Omega}^{\text{frei}}(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{H}}) . \quad (6.3)$$

#### Analyse der Datenbasis

Aus Gleichung (6.3) lassen sich unter Ausnutzung der konstitutiven Relationen (2.53) die Ausdrücke

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{tot}} = \frac{2}{\bar{\mathbf{J}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}^*}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{mech}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{Kopp}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{frei}} \quad \text{und} \quad (6.4)$$

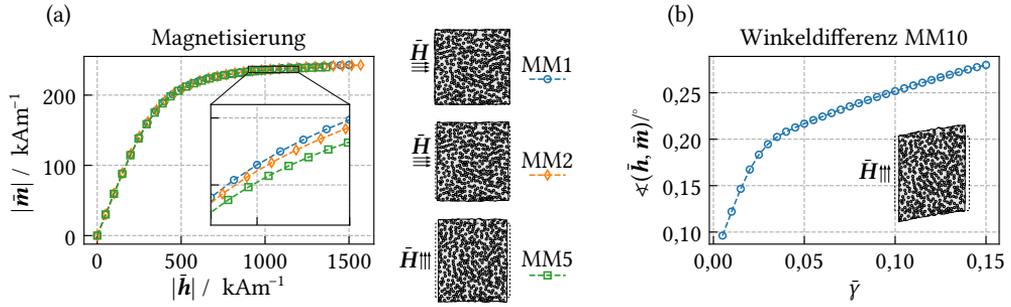
$$\bar{\mathbf{b}} = -\frac{1}{\bar{\mathbf{J}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}^*}{\partial \bar{\mathbf{H}}} = \bar{\mathbf{b}}^{\text{Kopp}} + \bar{\mathbf{b}}^{\text{mag}} + \bar{\mathbf{b}}^{\text{frei}} \quad (6.5)$$

für die Anteile der Totalspannung und der magnetischen Induktion ableiten. Die in (6.4) sowie (6.5) auftretenden Terme  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{frei}}$  und  $\bar{\mathbf{b}}^{\text{frei}}$  sind, unabhängig von den konstitutiven Eigenschaften des MRE, durch

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{frei}} = \mu_0 \left[ \bar{\mathbf{h}} \otimes \bar{\mathbf{h}} - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{h}} \cdot \bar{\mathbf{h}}) \mathbf{i} \right] \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{b}}^{\text{frei}} = \mu_0 \bar{\mathbf{h}} \quad (6.6)$$

festgeschrieben. Weiterhin soll der Spannungsanteil  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{mech}}$  das rein mechanische Verhalten des Komposits erfassen. Somit lassen sich aus einem Vergleich der in Abschnitt 2.1.3 eingeführten CAUCHY-Totalspannung  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{tot}} := \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{pon}}$  in der Form

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{tot}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mu_0 \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{h}} + \frac{1}{2} \mu_0 (\bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{m}}) \mathbf{i} + \mu_0 \left[ \bar{\mathbf{h}} \otimes \bar{\mathbf{h}} - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{h}} \cdot \bar{\mathbf{h}}) \mathbf{i} \right] \quad (6.7)$$



**Abb. 6.2:** Homogenisiertes Magnetisierungsverhalten eines isotropen MRE mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt: (a) Magnetisierungskurve für verschiedene Deformationszustände und (b) Abweichung der Magnetisierungsrichtung  $\bar{e}^m = \bar{\mathbf{m}}|\bar{\mathbf{m}}|^{-1}$  von der Richtung des lokalen  $\bar{\mathbf{h}}$ -Feldes  $\bar{e}^h = \bar{\mathbf{h}}|\bar{\mathbf{h}}|^{-1}$  für den Lastfall MM10. Dargestellt ist das arithmetische Mittel  $\langle(\bullet)\rangle_{10}$  für jeweils 10 RVE

und der Verknüpfungsgleichung (2.16) die Anteile  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{Kopp}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}^{\text{Kopp}}$  und  $\bar{\mathbf{b}}^{\text{mag}}$  durch

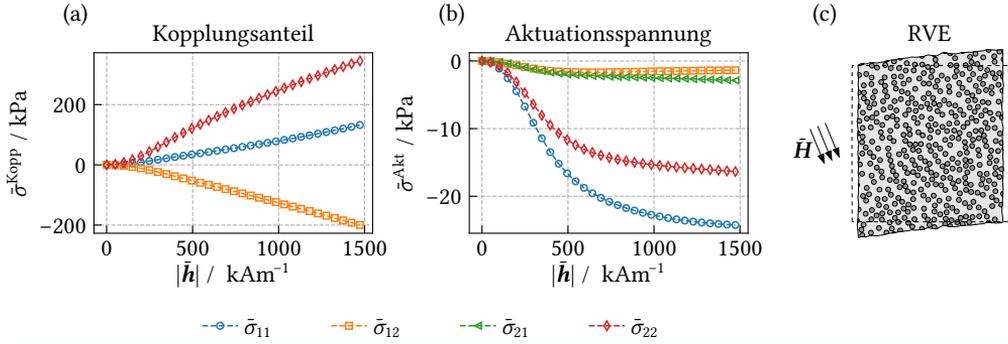
$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{Kopp}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{mech}} + \mu_0 \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{h}} + \frac{1}{2} \mu_0 (\bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{m}}) \mathbf{i} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{\mu_0} (\bar{\mathbf{b}}^{\text{Kopp}} + \bar{\mathbf{b}}^{\text{mag}}) \quad (6.8)$$

identifizieren.<sup>1</sup> Die Struktur der Energieansätze ist mit Kenntnis von (6.8) derart zu wählen, dass die einzelnen Anteile akkurat abbildbar sind. Dabei ist insbesondere die Nichtlinearität infolge des charakteristischen Sättigungsverhaltens der magnetisierbaren Partikel zu beachten. Vor der Modellbildung ist es daher zweckmäßig, die jeweiligen magnetischen und mechanischen Terme genauer anhand der vorhandenen Datenbasis zu untersuchen. Exemplarisch soll dies nun für ein MRE mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt geschehen.

Wie auch das Magnetisierungsverhalten der Partikel, weist die effektive magnetische Materialantwort des Komposits eine signifikant nichtlineare  $\bar{\mathbf{m}}\text{-}\bar{\mathbf{h}}$ -Kurve auf. Nach dem initial linearen Verlauf tritt die typische Sättigung auf, wobei sich die effektive Sättigungsmagnetisierung  $\bar{M}^S = \phi M^S$  direkt aus dem entsprechenden Materialparameter der Partikel und dem Volumengehalt  $\phi$  bestimmen lässt [24].<sup>2</sup> Interessant ist nun, dass der Einfluss des makroskopischen Deformationszustandes auf den Verlauf des Betrags der Magnetisierungskurve  $|\bar{\mathbf{m}}(\bar{\mathbf{h}}, \bar{\mathbf{F}})|$  nur sehr klein ist, sofern diese durch das aktuelle  $\bar{\mathbf{h}}$ -Feld beschrieben wird, vgl. Abb. 6.2(a). Dieses Ergebnis stimmt mit den experimentellen Untersuchungen aus DANAS et al. [25] sowie den Simulationen aus DANAS [24] oder METSCH et al. [104] überein. Der vergrößerte Bereich im Diagramm zeigt allerdings eine, wenn auch nur sehr gering ausgeprägte, Abweichung der jeweiligen Kurven. So liegt die Magnetisierungskurve für  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I}$  über deren für Stauchung bzw. Streckung in Feldrichtung. Gemäß Abb. 6.2(b) ist weiterhin eine deformationsabhängige Abweichung der Magnetisierungsrichtung  $\bar{e}^m = \bar{\mathbf{m}}|\bar{\mathbf{m}}|^{-1}$  von der Richtung des lokalen  $\bar{\mathbf{h}}$ -Feldes  $\bar{e}^h = \bar{\mathbf{h}}|\bar{\mathbf{h}}|^{-1}$  unter Scherung zu beobachten. Beide Effekte resultieren aus der mechanisch indu-

<sup>1</sup>Gleichung (6.7) ergibt sich aus der Definition der ponderomotorischen Spannung nach (2.27) und einer Umformung mit der Verknüpfungsgleichung (2.16), also  $\bar{\mathbf{b}} = \mu_0 (\bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{m}})$ .

<sup>2</sup>Die Magnetisierung der eingebetteten Carbonyleisen-Partikel ist aufgrund ihrer zugrunde liegenden Domänenstruktur auf die Sättigungsmagnetisierung beschränkt [79]. Da die annähernd nicht-magnetisierbare Matrix mit  $\mu_r = 1$  abgebildet wird, kann die effektive Magnetisierung den Wert  $\phi M^S$  nicht überschreiten.



**Abb. 6.3:** Homogenisierte Spannungsanteile eines isotropen MRE mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt für den Lastfall MM8: (a) symmetrischer Kopplungsanteil  $\bar{\sigma}^{\text{Kopp}}$ , (b) Aktuationsspannung  $\bar{\sigma}^{\text{Akt}} := \bar{\sigma} - \bar{\sigma}^{\text{mech}}$  und (c) deformiertes RVE mit Richtung des effektiven  $\bar{\mathbf{H}}$ -Feldes. Dargestellt ist das arithmetische Mittel für jeweils 10 RVE.

zierten räumlichen Anisotropie infolge von Umstrukturierungen der Partikel auf mikroskopischer Ebene.

Bei Betrachtung des Kopplungsanteils  $\bar{\sigma}^{\text{Kopp}}$  der CAUCHY-Spannung ist, ebenso wie bei der Magnetisierung, zwischen dem Initial- und dem Sättigungsbereich zu unterscheiden. Anfänglich treten in allen Komponenten quadratische Verläufe auf, welche infolge der Sättigung langsam abflachen, vgl. Abb. 6.3(a). Dominant ist dabei der Term  $\mu_0 \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{h}}$ , der nach dem Einsättigen von  $\bar{\mathbf{m}}$  in einen linearen Bereich übergeht. Wird außerdem  $\mu_0 \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{h}} + 1/2 \mu_0 (\bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{m}}) \mathbf{i}$  abgezogen, zeigt sich der für MRE charakteristische S-Schlag im verbleibenden Anteil von  $\bar{\sigma}^{\text{Kopp}}$  gemäß Gleichung (6.8), also der magnetisch induzierten Aktuationsspannung  $\bar{\sigma}^{\text{Akt}} := \bar{\sigma} - \bar{\sigma}^{\text{mech}}$ . Die erkennbare Unsymmetrie dieser Spannung lässt sich auf die zuvor diskutierte Abweichung der Richtungen  $\bar{\mathbf{e}}^h$  und  $\bar{\mathbf{e}}^m$  zurückführen.

### Satz von Invarianten für Isotropie

Aufgrund der angenommenen materiellen Isotropie lässt sich die Formulierung weiter spezifizieren, da in diesem Fall

$$\bar{\Psi}^*(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{H}}) = \bar{\Psi}^*(\bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^T, \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{H}}) \quad \forall \bar{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q} \quad (6.9)$$

für die Energiedichte gilt. Hier kennzeichnet  $\mathcal{Q}$  den Raum der eigentlich orthogonalen Tensoren gemäß Gleichung (2.44)<sub>2</sub>. Wird die Beziehung (6.9) vorausgesetzt, so lässt sich die freie HELMHOLTZsche Energiedichte in Abhängigkeit von sechs Invarianten darstellen [30], wobei unendlich viele Sätze irreduzibler Invarianten existieren. In dieser Arbeit werden

$$\bar{I}_1^{\text{so}} := \bar{J}^{-2/3} \text{tr} \bar{\mathbf{C}}, \quad \bar{I}_2^{\text{so}} := \frac{\bar{J}^{-4/3}}{2} \left[ \text{tr}^2 \bar{\mathbf{C}} - \text{tr}(\bar{\mathbf{C}}^2) \right] \quad \text{und} \quad \bar{I}_3 := \bar{J}^2 \quad \text{sowie} \quad (6.10a)$$

$$\bar{I}_4 := |\bar{\mathbf{H}}|^2, \quad \bar{I}_5 := \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{H}} \quad \text{und} \quad \bar{I}_6 := \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-2} \cdot \bar{\mathbf{H}} \quad (6.10b)$$

gewählt. Es sei darauf hingewiesen, dass in vielen Modellen statt  $\bar{I}_5$  und  $\bar{I}_6$  die Invarianten  $\bar{I}_5^* := \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{H}}$  sowie  $\bar{I}_6^* := \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^2 \cdot \bar{\mathbf{H}}$  verwendet werden, bspw. BUSTAMANTE et al. [15],

DORFMANN & OGDEN [32] oder SALAS & BUSTAMANTE [140]. Die unterschiedlichen Sätze von Invarianten lassen sich allerdings mittels des CAYLEY-HAMILTON-Theorems ineinander überführen.<sup>3</sup> Ein Vorteil der gewählten Invarianten gemäß Gleichung (6.10b) besteht darin, dass diese – ausgedrückt durch Tensorgrößen der Momentankonfiguration – als  $\bar{I}_5 = |\bar{\mathbf{h}}|^2$  und  $\bar{I}_6 = \bar{\mathbf{h}} \cdot \bar{\mathbf{c}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{h}}$  gegeben sind. Mittels  $\bar{I}_5$  lässt sich somit das Magnetisierungsverhalten gemäß Abb. 6.2(a) sehr gut modellieren.

## 6.2.2 Nichtlinear-magnetisches Modell

### Energiedichte, Spannungen und Magnetisierung

Wie bereits erwähnt, muss das Verhalten des MRE in Abwesenheit makroskopischer Magnetfelder durch den mechanischen Anteil  $\bar{\Psi}^{\text{mech}}$  abgebildet werden. Um den nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Verlauf akkurat zu beschreiben, wird für diesen Summanden der freien Energie das bereits auf mikroskopischer Ebene verwendete OGDEN-Modell gewählt. Demnach sind die drei mechanischen Invarianten gemäß (6.10a) durch die Hauptstreckungen  $\bar{\lambda}_\alpha$  zu ersetzen, d. h.

$$\bar{I}_1^{\text{iso}} = \bar{J}^{-2/3} \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} v_\alpha \bar{\lambda}_\alpha^2, \quad \bar{I}_2^{\text{iso}} = \frac{\bar{J}^{-4/3}}{2} \left[ \left( \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} v_\alpha \bar{\lambda}_\alpha^2 \right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} v_\alpha \bar{\lambda}_\alpha^4 \right] \quad \text{und} \quad \bar{I}_3 = \prod_{\alpha=1}^{N_\lambda} \lambda_\alpha^{2v_\alpha}. \quad (6.11)$$

Die mechanische Energiedichte ist somit durch

$$\bar{\Psi}^{\text{mech}} := \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left( \sum_{\beta=1}^{N_\lambda} v_\beta \bar{\lambda}_\beta^{\text{iso}\alpha_p} - 3 \right) + \frac{K}{4} (\bar{J}^2 - \ln \bar{J}^2 - 1) \quad (6.12)$$

gegeben [120], wobei für die Abbildung der Spannungen  $\bar{\sigma}$  innerhalb eines Deformationsbereiches von  $0,9 \leq \bar{\lambda} \leq 1,15$  der Streckungen bereits  $N = 1$  Glied ausreicht, s. Abschnitt 6.3.

Unter Beachtung des zuvor analysierten Verhaltens, sind nun funktionale Zusammenhänge für die Energieanteile  $\bar{\Psi}^{\text{Kopp}}$  und  $\bar{\Psi}^{\text{mag}}$  zu wählen. Dabei ist insbesondere die zuvor diskutierte Charakteristik infolge des Sättigungsverhaltens der Partikel zu erfassen. Letztlich haben sich die Ansätze

$$\begin{aligned} \mu_0 \bar{\Psi}^{\text{Kopp}} := & -\frac{\gamma_1}{\delta_1} \ln \left[ \cosh \left( \mu_0 \delta_1 \sqrt{\bar{I}_5} \right) \right] + \gamma_2 \ln \left( 1 + \mu_0^2 \delta_2 \bar{I}_6 \right) \cdots \\ & + \frac{1}{2} \gamma_3 (\bar{J} - 1) \tanh^2 \left( \mu_0 \delta_3 \sqrt{\bar{I}_5} \right) \quad \text{und} \end{aligned} \quad (6.13a)$$

$$\mu_0 \bar{\Psi}^{\text{mag}} := \zeta_1 \ln \left( 1 + \mu_0^2 \xi_1 \bar{I}_4 \right) \quad (6.13b)$$

<sup>3</sup>Das CAYLEY-HAMILTON-Theorem besagt, dass ein Tensor 2. Stufe stets seine eigene Eigenwertgleichung erfüllt, z. B. gilt für den rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensor  $\bar{\mathbf{C}}^3 - \bar{I}_1 \bar{\mathbf{C}}^2 + \bar{I}_2 \bar{\mathbf{C}} - \bar{I}_3 \mathbf{I} = \mathbf{0}$ . Somit folgt für die Inverse von  $\bar{\mathbf{C}}$  der Zusammenhang  $\bar{\mathbf{C}}^{-1} = \bar{I}_3^{-1} (\bar{\mathbf{C}}^2 - \bar{I}_1 \bar{\mathbf{C}} + \bar{I}_2 \mathbf{I})$ , sodass

$$\begin{aligned} \bar{I}_5 &= \bar{I}_3^{-1} (\bar{I}_6^* - \bar{I}_1 \bar{I}_5^* + \bar{I}_2 \bar{I}_4) \quad \text{und} \\ \bar{I}_6 &= \bar{I}_3^{-1} [\bar{I}_6^* - \bar{I}_1 \bar{I}_5^* + \bar{I}_2 \bar{I}_3^{-1} (\bar{I}_6^* - \bar{I}_1 \bar{I}_5^* + \bar{I}_2 \bar{I}_4)] \end{aligned}$$

gelten.

als besonders geeignet herauskristallisiert. Die Wahl der einzelnen Terme wird im Folgenden begründet. Zur besseren Referenzierung seien die drei Summanden des Kopplungsanteils in der Reihenfolge gemäß (6.13a) durch  $\bar{\Psi}^{\text{Kopp}} = \bar{\Psi}_1^{\text{Kopp}} + \bar{\Psi}_2^{\text{Kopp}} + \bar{\Psi}_3^{\text{Kopp}}$  abgekürzt.

Der erste Term in  $\Psi^{\text{Kopp}}$  bildet im Wesentlichen das Magnetisierungsverhalten des MRE ab. Aus der Ableitung nach  $\bar{H}$  bzw.  $\bar{C}$  und anschließendem Push-Forward folgen

$$\bar{\mathbf{m}}_1^{\text{Kopp}} = \mu_0^{-1} J^{-1} \gamma_1 \tanh\left(\mu_0 \delta_1 \sqrt{\bar{I}_5}\right) \frac{\bar{\mathbf{h}}}{\sqrt{\bar{I}_5}} \quad \text{sowie} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\text{Kopp}} = \mu_0 \bar{\mathbf{m}}_1^{\text{Kopp}} \otimes \bar{\mathbf{h}}. \quad (6.14)$$

Interessant ist, dass sich die effektive Magnetisierung nicht durch die für die Carbonylisen-Partikel gewählte LANGEVIN-Funktion beschreiben lässt, sondern deutlich besser mittels der tanh-Funktion abbildbar ist. Eine solche Abweichung von mikroskopischer und makroskopischer Magnetisierungsfunktion ist ebenfalls in MUKHERJEE et al. [115] beschrieben. Der zweite und dritte Summand  $\bar{\Psi}_2^{\text{Kopp}} + \bar{\Psi}_3^{\text{Kopp}}$  sind dafür zuständig, die magnetisch induzierte Aktuati-ons-Spannung  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{Akt}}$  sowie den Term  $1/2\mu_0(\bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{m}})\mathbf{i}$  zu erfassen. Eine partielle Ableitung nach  $\bar{C}$  und ein anschließender Push-Forward ergeben

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_2^{\text{Kopp}} = -2J^{-1} \frac{\gamma_2 \mu_0 \delta_2}{1 + \mu_0^2 \delta_2 \bar{I}_6} (\bar{\mathbf{c}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{h}} \otimes \bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{h}} \otimes \bar{\mathbf{c}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{h}}) \quad \text{und} \quad (6.15a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_3^{\text{Kopp}} &= \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \gamma_3 \tanh^2\left(\mu_0 \delta_3 \sqrt{\bar{I}_5}\right) \mathbf{i} \cdots \\ &- \delta_3 \gamma_3 (\bar{J} - 1) \left[ \tanh\left(\mu_0 \delta_3 \sqrt{\bar{I}_5}\right) - \tanh^3\left(\mu_0 \delta_3 \sqrt{\bar{I}_5}\right) \right] \frac{\bar{\mathbf{h}} \otimes \bar{\mathbf{h}}}{\sqrt{\bar{I}_5}}. \end{aligned} \quad (6.15b)$$

Der zweite Summand in (6.15b) stellt dabei einen Störanteil dar, der zu Lasten des volumetri-schen Terms in das Modell eingebracht wird. Da für die betrachteten quasi-inkompressiblen MRE allerdings  $\bar{J} \approx 1$  gilt, fällt der Einfluss vernachlässigbar klein aus. Schließlich folgen aus der Ableitung nach  $\bar{H}$  und einem darauf folgenden Push-Forward

$$\bar{\mathbf{m}}_2^{\text{Kopp}} = -2J^{-1} \frac{\gamma_2 \delta_2}{1 + \mu_0^2 \delta_2 \bar{I}_6} \bar{\mathbf{c}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{h}}, \quad (6.16a)$$

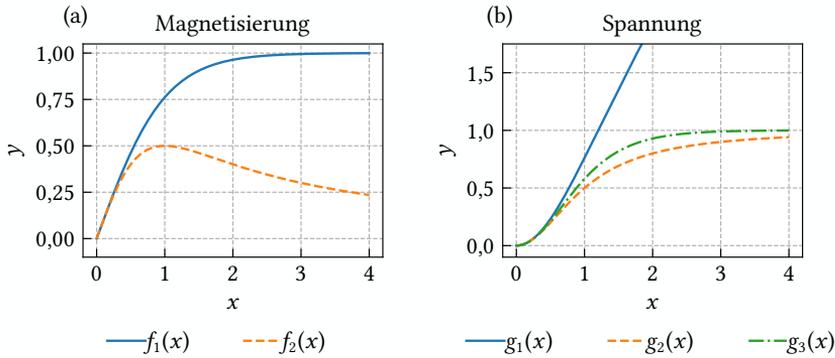
$$\bar{\mathbf{m}}_3^{\text{Kopp}} = -\delta_3 \gamma_3 \mu_0^{-1} (1 - \bar{J}^{-1}) \left[ \tanh\left(\mu_0 \delta_3 \sqrt{\bar{I}_5}\right) - \tanh^3\left(\mu_0 \delta_3 \sqrt{\bar{I}_5}\right) \right] \frac{\bar{\mathbf{h}}}{\sqrt{\bar{I}_5}} \quad \text{und} \quad (6.16b)$$

$$\bar{\mathbf{m}}^{\text{mag}} = -2J^{-1} \frac{\zeta_1 \xi_1}{1 + \mu_0^2 \xi_1 \bar{I}_6} \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{h}}. \quad (6.16c)$$

### Eigenschaften der Sättigungsfunktionen

Um die Eigenschaften der gewählten Sättigungsfunktionen kurz zu diskutieren, seien diese für den eindimensionalen, deformationsfreien Fall betrachtet. Die Funktionen zur Beschreibung der Magnetisierung sind folglich durch

$$f_1(x) = \tanh(x) \quad \text{und} \quad f_2(x) = \frac{x}{1 + x^2} \quad (6.17)$$



**Abb. 6.4:** Dimensionslose Sättigungsfunktionen des Makromodells: (a) Funktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  zur Beschreibung der Magnetisierung sowie (b)  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  und  $g_3(x)$  zur Abbildung der Spannungsantwort. Die Variable  $x$  in den Funktionen gemäß (6.17) und (6.18) ist äquivalent zur effektiven magnetischen Feldstärke  $\bar{h}$ .

gegeben, wobei die Variable  $x$  die Rolle des effektiven magnetischen Feldes  $\bar{h}$  einnimmt. Analog ergeben sich für die Beschreibung der Spannungsantwort

$$g_1(x) = x \tanh(x), \quad g_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{und} \quad g_3(x) = \tanh^2(x). \quad (6.18)$$

Zur Veranschaulichung sind die gewählten Sättigungsfunktionen in Abb. 6.4 dargestellt. Bei den Funktionen (6.17) zeigt sich ein anfänglich linearer Verlauf mit einem Übergang in den Sättigungsbereich. Im Gegensatz dazu weisen die Funktionen (6.18) einen initial quadratischen Verlauf auf. Ein Vergleich mit den Abbildungen 6.2 und 6.3 zeigt, dass in den gewählten Sättigungsfunktionen die charakteristischen Verläufe der jeweiligen Anteile enthalten sind.

Die zur Einbindung des Modells in eine FE-Umgebung notwendigen Tangentenmodule ergeben sich aus den Gleichungen (3.28a) – (3.28c) sowie (4.21).

### 6.2.3 Linearisiertes Modell

In technischen Anwendungen ist oftmals lediglich das Verhalten für kleine Magnetfelder, in denen die relative Permeabilität  $\bar{\mu}_r$  nahezu konstant ist, von Interesse. Im initialen Bereich treten in der Magnetisierung lineare Terme und in den Spannungen quadratische Terme bezüglich  $\bar{H}$  auf. Folglich müssen in der freien Energie ebenfalls Terme proportional zu  $|\bar{H}|^2$  auftreten. Da die Invarianten  $\bar{I}_4$ ,  $\bar{I}_5$  und  $\bar{I}_6$  quadratisch in  $\bar{H}$  sind und in den einzelnen Summanden der Energiedichten (6.13a) und (6.13b) keine Produkte verschiedener Invarianten auftreten, ergibt sich die Energiedichte  $\Psi_{\text{lin}}^*$  für den linear-magnetischen Bereich aus einer TAYLOR-Reihenentwicklung bezüglich  $\sqrt{\bar{I}_\alpha}$  mit Abbruch nach dem quadratischen Term:

$$\Psi_{\text{lin}}^* := \Psi^* \Big|_{\bar{I}_{4,5,6}=0} + \sum_{\alpha=4}^6 \frac{\partial \Psi^*}{\partial \sqrt{\bar{I}_\alpha}} \Big|_{\bar{I}_\alpha=0} \sqrt{\bar{I}_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=4}^6 \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \sqrt{\bar{I}_\alpha} \partial \sqrt{\bar{I}_\alpha}} \Big|_{\bar{I}_\alpha=0} \bar{I}_\alpha. \quad (6.19)$$

Aus Gleichung (6.19) folgen die freien HELMHOLTZschen Energiedichten des Kopplungsanteils und des magnetischen Anteils für kleine Magnetfelder zu

$$\bar{\Psi}_{\text{lin}}^{*\text{Kopp}} = -\frac{1}{2}\mu_0 \underbrace{\gamma_1 \delta_1}_{=A_1} \bar{I}_5 + \mu_0 \underbrace{\gamma_2 \delta_2}_{=A_2} \bar{I}_6 + \frac{1}{2}\mu_0 \underbrace{\gamma_3 \delta_3^2}_{=A_3} (J-1)\bar{I}_5 \quad \text{und} \quad (6.20a)$$

$$\bar{\Psi}_{\text{lin}}^{*\text{mag}} = \mu_0 \underbrace{\xi_1 \delta_1}_{=A_4} \bar{I}_4. \quad (6.20b)$$

Der mechanische Anteil  $\bar{\Psi}^{*\text{mech}}$  sowie der Freifeldanteil  $\bar{\Omega}^{*\text{frei}}$  bleiben unverändert. Insgesamt verringert sich die Anzahl der Modellparameter von  $\bar{\Psi}^{*\text{Kopp}}$  und  $\bar{\Psi}^{*\text{mag}}$  damit von Acht auf Vier. Gemäß Abb. 6.2(a), ist das vereinfachte Modell bis zu einer lokalen magnetischen Feldstärke von ca. 250 kA m<sup>-1</sup> sinnvoll anwendbar.

## 6.3 Parametrisierung

Neben der Formulierung des makroskopischen Materialmodells besteht die entscheidende Schwierigkeit im Auffinden der mechanischen, gekoppelten und magnetischen Parametersätze

$$\underline{\kappa}^{\text{mech}} = [K \quad \mu_1 \quad \alpha_1]^T, \quad \underline{\kappa}^{\text{Kopp}} = [\gamma_1 \quad \delta_1 \quad \gamma_2 \quad \delta_2 \quad \gamma_3 \quad \delta_3]^T, \quad \underline{\kappa}^{\text{mag}} = [\xi_1 \quad \xi_1]^T. \quad (6.21)$$

Um eine physikalisch sinnvolle Kalibrierung vorzunehmen, soll das durch (6.12), (6.13a) und (6.13b) gegebene Modell gewährleisten, dass die effektive homogenisierte Magnetisierung  $\bar{\mathbf{m}}$  sowie die totalen und mechanischen Spannungen  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{tot}}$  und  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  bestmöglich abgebildet werden.

### 6.3.1 Modell-Kalibrierung

Zur Bestimmung der Parameter findet hier der schrittweise vorgehende Identifikations-Algorithmus gemäß KALINA et al. [74] für linear-magnetische Modelle Anwendung. Dazu ist dieser auf den Fall nichtlinear-magnetischer Modelle zu erweitern. Die besondere Anforderung besteht nun darin, sowohl den initialen Bereich als auch das Sättigungsverhalten zu erfassen.

#### Optimierungen (i.i) – (i.iii)

Im ersten Hauptschritt (i) werden die Parametersätze  $\underline{\kappa}^{\text{mech}}$ ,  $\underline{\kappa}^{\text{Kopp}}$  und  $\underline{\kappa}^{\text{mag}}$  durch die drei separaten Optimierungsprobleme (i.i) – (i.iii) gemäß Tab. 6.2 bestimmt. Dabei erfolgt die Kalibrierung des Anteils  $\bar{\Psi}^{*\text{mech}}$  anhand der rein mechanischen Lastfälle M1 – M3 im Schritt (i.i). Es zeigt sich, dass für den betrachteten Deformationsbereich bereits  $N = 1$  Glied im OGDEN-Modell ausreicht, um die homogenisierten Spannungs-Dehnungs-Kurven des Verbundmaterials mit hoher Genauigkeit zu beschreiben, vgl. Abb. 6.5. Die bestimmten Parameter sowie der initiale Schubmodul sind für die betrachteten Volumengehalte in Tab. 6.3 aufgeführt.

Mit Kenntnis der Parameter  $\underline{\kappa}^{\text{mech}}$  lassen sich in den Schritten (i.ii) und (i.iii) die Anteile  $\bar{\Psi}^{*\text{Kopp}}$  und  $\bar{\Psi}^{*\text{mag}}$  anhand der gekoppelten magneto-mechanischen Lastfälle MM1 – MM6 kalibrieren. Dabei dienen die aus den magnetisch linearen Modellen (6.20a) und (6.20b) abgeleiteten Nebenbedingungen  $C^{\text{Kopp}}$  und  $C^{\text{mag}}$  zur akkuraten Anpassung des initialen Bereiches. In diesem sind insbesondere die Spannungen um ein vielfaches kleiner als in der Sättigung. Zur

Vorgabe der Zwangsbedingungen aus Schritt (i.ii) und (i.iii) gemäß Tab. 6.2, ist vor der Kalibrierung über den gesamten Bereich von Feldstärken – also  $|\bar{\mathbf{H}}| \in [0, 1500] \text{ kA m}^{-1}$  – der komplette Optimierungs-Algorithmus für  $|\bar{\mathbf{H}}| \leq H^{\text{NB}}$  durchzuführen um  $A_1$  bis  $A_4$  zu ermitteln. Es hat sich allerdings gezeigt, dass es deutlich zu restriktiv ist, die Zwangsbedingungen aus dem vollständig linear-magnetischen Regime bis  $H^{\text{NB}} \approx 250 \text{ kA m}^{-1}$  zu bestimmen, da sich

**Tab. 6.2:** Algorithmus zur Parameteridentifikation des makroskopischen Materialmodells auf Basis der Fehlerquadrat-Optimierungen (i.i) – (i.iii) und (ii). Der Index  $i$  bezeichnet ein Tupel zusammengehörender Tensorfelder  $\{\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i\} \rightarrow \{\bar{\mathbf{b}}_i, \bar{\sigma}_i^{\text{tot}}\}$  und  $N$  ist die Gesamtanzahl der Tupel. Im Schritt (ii) sind  $\omega_i^m$  und  $\omega_i^\sigma$  Wichtungsfaktoren für die einzelnen Fehlersummen, die sich für jeden Lastfall aus den Maxima von  $|\bar{\sigma}_{kl}^{\text{Akt}}|$  und  $|\bar{m}_k|$  ermitteln.

- (i.i) Bestimmung der Parameter des mechanischen Teils  $\bar{\Psi}^{\text{mech}}$  anhand der Lastfälle M1 – M3 durch

$$\underline{\kappa}^{\text{mech}} = \arg \left\{ \min_{\underline{\kappa}^{\text{mech}} \in \mathcal{C}^{\text{mech}}} \sum_{i=1}^N \left\| \bar{\sigma}^{\text{mech}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \underline{\kappa}^{\text{mech}}) - \bar{\sigma}_i \right\|^2 \right\} \text{ mit}$$

$$\mathcal{C}^{\text{mech}} := \left\{ \mu_p, \alpha_p \in \mathcal{R} \mid (\alpha_p < -1 \vee \alpha_p \geq 2) \wedge \alpha_p \mu_{(p)} \geq 0 \right\} .$$

- (i.ii) Bestimmung der Parameter  $\bar{\Psi}^{\text{Kopp}}$  anhand von MM1 – MM6 mit  $\underline{\kappa}^{\text{mech}}$  aus (i.i) festgehalten:

$$\underline{\kappa}^{\text{Kopp}} = \arg \left\{ \min_{\underline{\kappa}^{\text{Kopp}} \in \mathcal{C}^{\text{Kopp}}} \sum_{i=1}^N \left\| \bar{\sigma}^{\text{Kopp}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i, \underline{\kappa}^{\text{Kopp}}) - \left[ \bar{\sigma}_i^{\text{tot}} - \bar{\sigma}^{\text{mech}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \underline{\kappa}^{\text{mech}}) - \bar{\sigma}^{\text{frei}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i) \right] \right\|^2 \right\}$$

$$\mathcal{C}^{\text{Kopp}} := \left\{ \underline{\kappa}^{\text{Kopp}} \in \mathcal{R}^{6 \times 1} \mid \gamma_1 \delta_1 = A_1 \wedge \gamma_2 \delta_2 = A_2 \wedge \gamma_3 \delta_3^2 = A_3 \right\} .$$

- (i.iii) Bestimmung der restlichen Parameter des magnetischen Anteils  $\bar{\Psi}^{\text{mag}}$  anhand von MM1 – MM6 für fixierte  $\underline{\kappa}^{\text{Kopp}}$  von (i.ii):

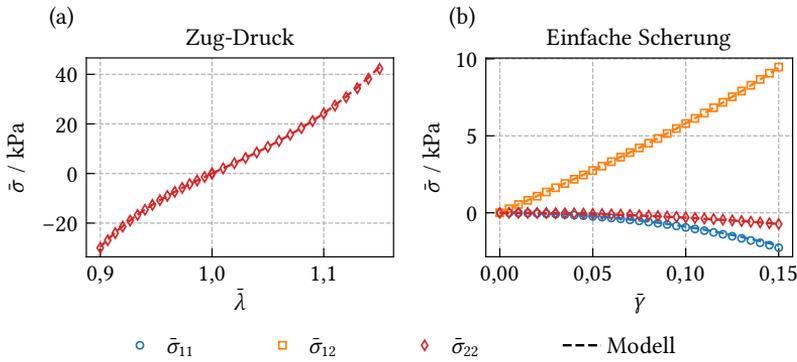
$$\underline{\kappa}^{\text{mag}} = \arg \left\{ \min_{\underline{\kappa}^{\text{mag}}} \sum_{i=1}^N \left\| \bar{\mathbf{b}}^{\text{mag}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i, \underline{\kappa}^{\text{mag}}) - \left[ \bar{\mathbf{b}}_i - \bar{\mathbf{b}}^{\text{Kopp}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i, \underline{\kappa}^{\text{Kopp}}) - \bar{\mathbf{b}}^{\text{frei}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i) \right] \right\|^2 \right\} \text{ mit}$$

$$\mathcal{C}^{\text{mag}} := \left\{ \underline{\kappa}^{\text{mag}} \in \mathcal{R}^{2 \times 1} \mid \zeta_1 \xi_1 = A_4 \right\} .$$

- (ii) Festhalten der Parameter  $\underline{\kappa}^{\text{mech}}$  von (i.i) und finale Kalibrierung von  $\bar{\Psi}^{\text{Kopp}} + \bar{\Psi}^{\text{mag}}$  mit den in (i.ii) und (i.iii) ermittelten Werten von  $\underline{\kappa}^{\text{Kopp}}$  und  $\underline{\kappa}^{\text{mag}}$  als Startwerte:

$$\{\underline{\kappa}^{\text{Kopp}}, \underline{\kappa}^{\text{mag}}\} = \arg \left\{ \min_{\underline{\kappa}^{\text{Kopp}} \in \mathcal{C}^{\text{Kopp}}} \min_{\underline{\kappa}^{\text{mag}} \in \mathcal{C}^{\text{mag}}} \sum_{i=1}^N \left( \omega_i^\sigma \left\| \bar{\sigma}^{\text{Akt}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i, \underline{\kappa}^{\text{mech}}, \underline{\kappa}^{\text{Kopp}}, \underline{\kappa}^{\text{mag}}) - \bar{\sigma}_i^{\text{Akt}} \right\|^2 \dots \right. \right.$$

$$\left. \left. + \omega_i^m \left\| \bar{\mathbf{m}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i, \underline{\kappa}^{\text{Kopp}}, \underline{\kappa}^{\text{mag}}) - \bar{\mathbf{m}}_i \right\|^2 \right) \right\} .$$



**Abb. 6.5:** Angepasste mechanische Lastfälle M1 – M3 für ein MRE mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt: (a) uniaxialer Zug-Druck-Versuch mit freier Kontraktion in  $x_1$ -Richtung und (b) einfache Scherung.

dann der Sättigungsbereich nicht mehr mit hinreichender Genauigkeit anpassen lässt. Bessere Ergebnisse lassen sich erzielen, wenn das Auftreten erster Nichtlinearitäten bereits in der Vorbetrachtung mit erfasst wird. Als guter Wert erweist sich  $H^{\text{NB}} = 500 \text{ kA m}^{-1}$ . Die Optimierungsaufgabe ist in einem MATLAB-Code umgesetzt, wobei für die einzelnen Schritte die Funktion `fmincon` mit einem interior-point-Verfahren angewendet wird.

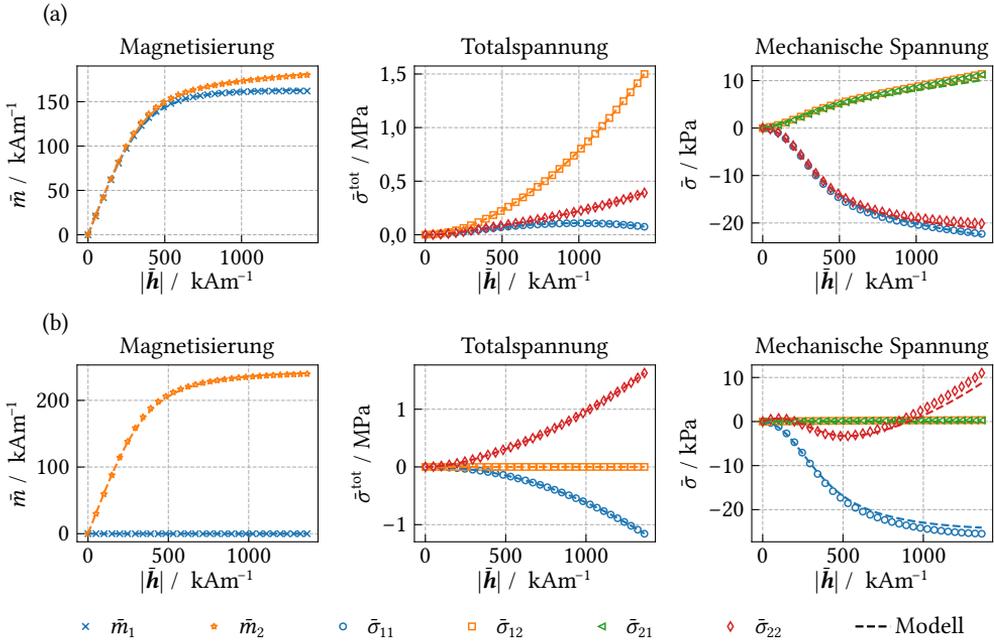
Durch Anwendung der beschriebenen Prozedur ist es möglich, sowohl den totalen Spannungstensor  $\bar{\sigma}^{\text{tot}} = \bar{\sigma}^{\text{mech}} + \bar{\sigma}^{\text{Kopp}} + \bar{\sigma}^{\text{frei}}$  als auch die Magnetisierung  $\bar{m}$  mit hoher Genauigkeit durch das Makromodell abzubilden. Allerdings tritt an dieser Stelle eine entscheidende Schwierigkeit auf: Da der in Schritt (i.ii) angepasste Kopplungsanteil und die Aktuationsspannungen nach Abb. 6.3 mehr als eine Größenordnung voneinander abweichen, lässt sich  $\bar{\sigma}^{\text{Akt}}$  – und folglich auch  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{\text{mech}} + \bar{\sigma}^{\text{Akt}}$  – im Allgemeinen nicht mit entsprechender Präzision abbilden.

### Optimierungsschritt (ii)

Demnach erfolgt in einem zweiten und finalen Schritt (ii) durch simultane Anpassung der Größen  $\bar{\sigma}^{\text{Akt}}$  und  $\bar{m}$  die Feinabstimmung von  $\underline{\kappa}^{\text{Kopp}}$  und  $\underline{\kappa}^{\text{mag}}$ . Um gleichermaßen Magnetisie-

**Tab. 6.3:** Initialer Schubmodul  $\bar{G}$  sowie identifizierte mechanische Parameter des makroskopischen OGDEN-Modells gemäß Gleichung (6.12) für die analysierten Partikelvolumengehalte  $\phi$ .

$\phi/\%$	$\bar{G}/\text{kPa}$	$K/\text{MPa}$	$\mu_1/\text{kPa}$	$\alpha_1/-$
10	31,65	1,39	-7,99	-7,92
15	35,63	1,48	-7,92	-8,99
20	40,62	1,57	-7,79	-10,42
25	46,63	1,67	-7,99	-11,67
30	54,21	1,80	-8,33	-13,01
35	64,04	1,93	-8,70	-14,72
40	78,24	2,08	-9,48	-16,51



**Abb. 6.6:** Angepasste magneto-mechanische Lastfälle für ein MRE mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt: Magnetisierung, Totalspannung und mechanische Spannung der Lastfälle (a) MM4 und (b) MM6.

rung und Spannung anzupassen, erfolgt eine Skalierung der einzelnen Fehlerquadrat-Summen durch die Wichtungsfaktoren  $\omega_i^m$  und  $\omega_i^\sigma$ , die als das Inverse des maximalen Wertes der Koordinaten  $|\bar{\sigma}_{kl}^{\text{Akt}}|$  bzw.  $|\bar{m}_k|$  für jeden Lastfall bestimmt werden. Der Schritt (ii) gewährleistet folglich mit Kenntnis von  $\underline{\kappa}^{\text{mech}}$  aus (i.i) eine Optimierung bzgl.  $\bar{\sigma}$  und  $\bar{m}$  und führt somit ebenfalls auf eine akkurate Beschreibung der Totalspannung:

$$\bar{\sigma}^{\text{tot}} = \bar{\sigma}^{\text{mech}} + \bar{\sigma}^{\text{Akt}} + \mu_0 \bar{m} \otimes \bar{h} + \frac{1}{2} \mu_0 (\bar{m} \cdot \bar{m}) \mathbf{i} + \bar{\sigma}^{\text{frei}}. \quad (6.22)$$

Die in den Schritten (i.ii) – (i.iii) ermittelten Parameter dienen als Startwerte des stark nicht-linearen Optimierungsproblems. Exemplarisch sind die angepassten Kurven von Magnetisierung, Totalspannung und mechanischer Spannung der Lastfälle MM4 und MM6 für ein MRE mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt in Abb. 6.6 dargestellt. Für diese Lastfälle zeigt sich, dass mit dem entwickelten Modell in Verbindung mit dem Algorithmus gemäß Tab. 6.2 eine sehr gute Wiedergabe der homogenisierten Materialantwort möglich ist. Die bestimmten Materialparameter sind in Tab. 6.4 für die untersuchten Volumengehalte zu finden.

### 6.3.2 Fehlerbetrachtung und Modell-Validierung

Im Anschluss an die zuvor beschriebene Parametrisierung des makroskopischen Materialmodells sind die erzielten Ergebnisse nun hinsichtlich der erreichten Genauigkeit zu bewerten.

**Tab. 6.4:** Identifizierte Parameter von Kopplungsanteil und magnetischem Anteil des makroskopischen Modells gemäß der Gleichungen (6.13a) und (6.13b) für die analysierten Partikelvolumenanteile  $\phi$ .

$\phi/\%$	$\gamma_1/T$	$\delta_1/T^{-1}$	$\gamma_2/T^2$	$\delta_2/T^{-2}$	$\gamma_3/T^2$	$\delta_3/T^{-1}$	$\zeta_1/T^2$	$\xi_1/T^{-2}$
10	0,11	2,05	$1,55 \cdot 10^{-3}$	7,25	$3,86 \cdot 10^{-3}$	2,09	$2,00 \cdot 10^{-3}$	6,34
15	0,16	2,34	$3,52 \cdot 10^{-3}$	8,23	$8,26 \cdot 10^{-3}$	2,22	$4,67 \cdot 10^{-3}$	6,57
20	0,21	2,46	$4,56 \cdot 10^{-3}$	7,77	$1,40 \cdot 10^{-2}$	2,26	$6,74 \cdot 10^{-3}$	6,65
25	0,27	2,53	$6,48 \cdot 10^{-3}$	6,39	$2,17 \cdot 10^{-2}$	2,27	$1,02 \cdot 10^{-2}$	5,48
30	0,33	2,65	$7,32 \cdot 10^{-3}$	6,76	$2,97 \cdot 10^{-2}$	2,40	$1,30 \cdot 10^{-2}$	5,77
35	0,38	2,82	$6,92 \cdot 10^{-3}$	7,63	$3,83 \cdot 10^{-2}$	2,48	$1,56 \cdot 10^{-2}$	6,41
40	0,43	2,99	$6,63 \cdot 10^{-3}$	9,14	$4,92 \cdot 10^{-2}$	2,65	$1,83 \cdot 10^{-2}$	6,89

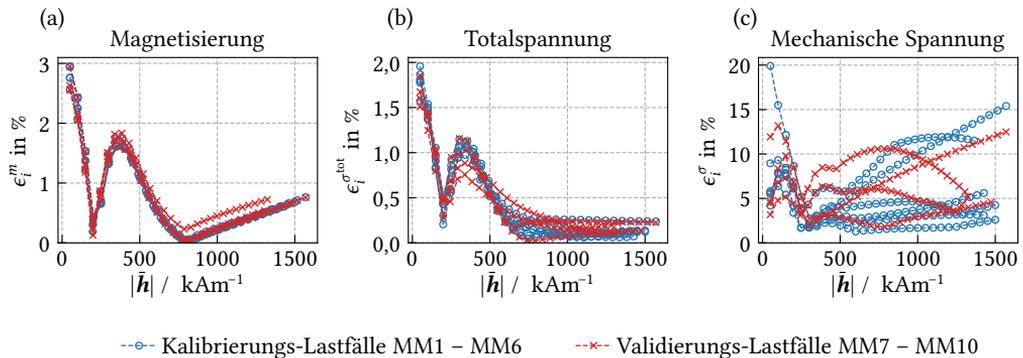
Weiterhin ist zu prüfen, inwiefern die nicht angepassten Validierungs-Lastfälle ebenfalls mit ausreichender Güte durch das Modell nachgebildet werden.

### Fehlerbetrachtung

Um die Qualität des Makromodells zu bewerten, sollen erneut die Magnetisierung sowie die totale und mechanische Spannung betrachtet werden. Ein gutes Maß zur Quantifizierung stellen dabei die relativen Fehler

$$\epsilon_i^m := \frac{|\bar{\mathbf{m}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i) - \bar{\mathbf{m}}_i|}{|\bar{\mathbf{m}}_i|}, \quad \epsilon_i^{\sigma^{\text{tot}}} := \frac{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{tot}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i^{\text{tot}}\|}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i^{\text{tot}}\|} \quad \text{und} \quad \epsilon_i^\sigma := \frac{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{F}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i\|}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i\|} \quad (6.23)$$

der EUKLIDISCHEN Norm bzw. der FROBENIUS-Norm nach Gleichung (A.7) dar [74]. Die eingeführten Fehlermaße der angepassten Lastfälle MM1 – MM6 sind in Abb. 6.7 für ein MRE mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt über  $|\bar{\mathbf{h}}|$  aufgetragen. Wie bereits den Diagrammen aus Abb. 6.6(a) und (b) zu entnehmen ist, stellen sich sowohl für die Magnetisierung als auch für die Totalspannung sehr geringe relative Abweichungen der durch das Makromodell prognosti-



**Abb. 6.7:** Relative Fehler des kalibrierten Makromodells für ein MRE mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt: (a) – (c) Fehlermaße  $\epsilon_i^m$ ,  $\epsilon_i^{\sigma^{\text{tot}}}$  und  $\epsilon_i^\sigma$  gemäß Gleichung (6.23).

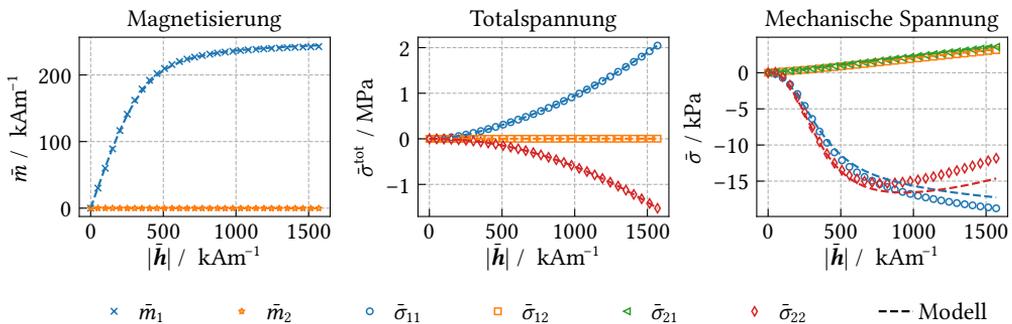
zierten Materialantwort bezüglich der homogenisierten Größen ein. Dabei treten die größten Fehler von 2 % bzw. 3 % im Initialbereich auf und sinken in der Sättigung auf Werte von unter 1 %. Der lokale Anstieg der Fehler ab ca. 200 kA m<sup>-1</sup> folgt aus dem Einsetzen der Nichtlinearität in der effektiven Magnetisierungskurve.

Im Gegensatz zu  $\bar{m}$  und  $\bar{\sigma}^{\text{tot}}$  zeigen sich für die mechanische Spannung  $\bar{\sigma}$  deutlich größere Fehler. Aufgrund der in Abschnitt 5.1.1 diskutierten stark ausgeprägten Sensitivität dieser Größe bezüglich kleinster Änderungen in der Mikrostruktur ist dieses Verhalten naheliegend. Dennoch liegen die Fehler für vier der sechs Kalibrierungs-Lastfälle über den gesamten Bereich unter 10 %. Lediglich beim Lastfall MM2 treten im Initialbereich 20 % Fehler auf. Für den Sättigungsbereich zeigt MM2 mit 15,4 % ebenfalls den größten Fehler der herangezogenen Lastfälle.

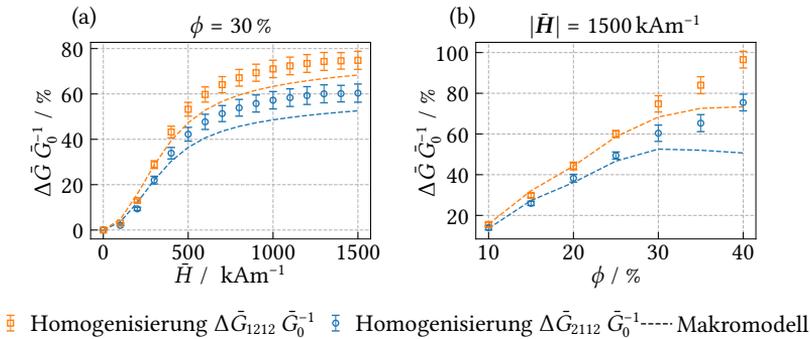
### Validierung

Um das Modell zu validieren, sind neben MM1 – MM6 auch die Modell-Vorhersagen für die Lastfälle MM7 – MM10 mit der homogenisierten Materialantwort zu vergleichen. Die relativen Fehlermaße gemäß Gleichung (6.23) sind für ein MRE mit  $\phi = 30\%$  ebenfalls in Abb. 6.7 aufgetragen. Dabei zeigt sich, dass die Abweichung der nicht zur Parametrisierung verwendeten Lastfälle in einem ähnlichen Bereich wie die zuvor betrachteten Kalibrierungs-Lastfälle liegen. Exemplarisch sind die Kurven von  $\bar{m}$ ,  $\bar{\sigma}^{\text{tot}}$  und  $\bar{\sigma}$  für MM7 in Abb. 6.8 dargestellt. Dabei stellt sich im Sättigungsbereich eine Abweichung der Spannungen  $\bar{\sigma}_{11}$  und  $\bar{\sigma}_{22}$  ein, die zu einem maximalen Fehler von ca. 12,5 % führt. Die vorgestellte Analyse belegt somit die Prädiktivität des makroskopischen Materialmodells. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass der Gültigkeitsbereich des Modells auf die in Tab. 6.1 aufgeführten Maxima der Lastmoden  $\bar{F}_{IK}$  sowie  $|\bar{H}|$  beschränkt ist.

In Anbetracht der stark nichtlinearen elastischen bzw. magnetischen Charakteristika von Partikeln und Matrix sowie den komplexen mikrostrukturellen Wechselwirkungen ist die Approximation des Makromodells als insgesamt sehr gut zu bewerten. Für die restlichen analysierten Volumengehalte liegen die relativen Fehler in einem ähnlichen Bereich. Die entsprechenden



**Abb. 6.8:** Homogenisierte Magnetisierung, Totalspannung und mechanische Spannung sowie Vorhersage des kalibrierten Modells für den magneto-mechanischen Validierungs-Lastfall MM7. Der Volumengehalt des MRE beträgt  $\phi = 30\%$ .



**Abb. 6.9:** Vergleich des simulierten MR-Effektes statistisch-periodischer Zellen mit der Vorhersage des kalibrierten Makromodells (6.12) – (6.13b): (a) Abhängigkeit von der Feldstärke für  $\phi = 30\%$  und (b) Effekt über dem Volumengehalt für  $|\bar{H}| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$ .

Kurven für MM1 – MM10 sind in Anhang C zu finden.

Zuletzt soll auch noch eine Bewertung des durch das Makromodell vorhergesagten MR-Effektes, also der magnetisch induzierten Steifigkeitsänderung, erfolgen. Dazu wird das in Abschnitt 5.1.2 beschriebene Vorgehen angewendet, sodass der Effekt für die Schubkomponenten  $\bar{G}_{1212}$  und  $\bar{G}_{2112}$  durch Nachfahren der Lastfolge (5.7) und (5.8) ermittelbar ist. Eine Bewertung erfolgt durch Vergleich mit den Resultaten der numerischen Homogenisierung gemäß Abb. 5.7. Die in Abb. 6.9(a) dargestellten Ergebnisse für  $\phi = 30\%$  zeigen, dass der MR-Effekt für kleine Feldstärken bis ca.  $|\bar{H}| = 300 \text{ kA m}^{-1}$  sehr gut getroffen wird. In der Sättigung unterschätzt das makroskopische Modell den Effekt für beide Schubsteifigkeit-Komponenten allerdings um ca. 10%. Die auftretende Differenz  $(\bar{\Delta}G_{1212} - \bar{\Delta}G_{2112})\bar{G}_0^{-1}$  der relativen Steifigkeitsänderungen wird aber trotz der Abweichung der einzelnen Anteile gut wiedergegeben. Für  $|\bar{H}| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  stimmt die relative Steifigkeitsänderung der für die Volumengehalte  $\phi = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}\%$  kalibrierten Modelle bis 25% sehr gut mit den Daten aus der Homogenisierung überein und fällt dann ab 30% ab. Obwohl der MR-Effekt nicht explizit in die Modell-Kalibrierung eingeflossen ist, wird dieser also bis ca. 25% sehr gut vorausgesagt. Um bessere Ergebnisse für diesen Effekt zu erzielen, müsste folglich eine Anpassung des Parametrisierungs-Prozesses stattfinden. Da es sich bei dem MR-Effekt um eine magnetisch induzierte Steifigkeitsänderung handelt, ist dazu nicht nur die Modell-Kalibrierung anhand der Spannungen, sondern auch der entsprechenden abgeleiteten Größen notwendig. Der zusätzliche Aufwand ist demnach als beträchtlich einzustufen.

# 7 Simulation makroskopischer Proben

Im Folgenden kommt das im vorherigen Kapitel 6 entwickelte Makromodell zur Simulation makroskopischer MRE-Proben zum Einsatz. Dabei wird der Einfluss mikrostruktureller Effekte implizit durch das mittels der homogenisierten Materialantwort stochastischer RVE kalibrierte Modell gemäß der Gleichungen (6.12), (6.13a) und (6.13b) erfasst. Da die explizite Simulation des zugrunde liegenden RVE an jedem makroskopischen Quadraturpunkt dadurch vermieden wird, ist das gewählte Vorgehen im Vergleich zur numerisch deutlich aufwändigeren FE<sup>2</sup>-Methode [80, 81, 136, 175] besonders effizient. Sind neben den makroskopischen Feldgrößen die Feldverteilungen innerhalb der Mikrostruktur von Interesse, so kann eine Lokalisierung durchgeführt werden.

Betrachtet werden der MS-Effekt, also die freie Deformation infolge eines externen magnetischen Feldes, sowie der MR-Effekt, also die magnetisch induzierte Steifigkeitsänderung eines MRE. Um die Situation in einem homogenen magnetischen Fernfeld  $\bar{\mathbf{h}}^\infty$  betrachten zu können, wird die MRE-Probe innerhalb der FE-Simulationen in eine nicht-magnetisierbare Umgebung – dem Vakuumbereich  $\bar{\mathcal{F}}$  – eingebettet, vgl. Abschnitt 2.2.3. Dabei sind die Gebietsabmessungen  $\bar{\ell}^{\mathcal{F}} \times \bar{\ell}^{\mathcal{F}}$  so gewählt, dass  $\bar{\ell}^{\mathcal{F}} = 15\bar{\ell}^{\mathcal{B}}$  gilt, wobei  $\bar{\ell}^{\mathcal{B}}$  die größte Abmessung der MRE-Probe bezeichnet. Somit ist gewährleistet, dass der Proben-Randeffluss vernachlässigbar klein ist [140]. Zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$  für alle  $\bar{\mathbf{X}} \in \bar{\mathcal{F}}$ , werden die mechanischen Eigenschaften durch das neo-HOOKE-Modell

$$\bar{\Psi} := \frac{1}{2} \left[ \bar{G}(\bar{I}_1 - \ln \bar{J}^2 - 3) + \frac{\bar{G}\bar{\nu}}{1 - 2\bar{\nu}}(\bar{J}^2 - \ln \bar{J}^2 - 1) \right] \quad (7.1)$$

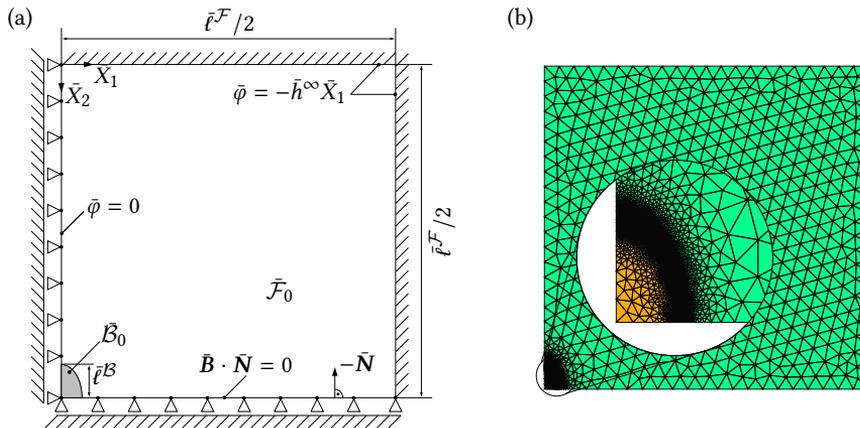
mit  $\bar{G} = 30$  Pa und  $\bar{\nu} = 0,4$  angenähert. Da der initiale Schubmodul des MRE mit der geringsten Steifigkeit nach Tab. 6.3 bei ca. 32 kPa liegt, lässt sich so ein vernachlässigbarer mechanischer Einfluss auf das Verhalten der Proben gewährleisten.

## 7.1 Magnetostriktiver Effekt

Als erster wesentlicher Effekt wird die magnetisch induzierbare Dehnung von MRE untersucht, sodass für den vorzugebenden mechanischen Spannungsvektor

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial\bar{\mathcal{B}}_0 \quad (7.2)$$

gilt, s. Gleichung (2.69). Da im Folgenden lediglich bezüglich der  $\bar{x}_1$ - und  $\bar{x}_2$ -Achse symmetrische Probengeometrien von Interesse sind und das externe Feld  $\bar{\mathbf{h}}^\infty$  ebenfalls in  $\bar{x}_1$ -Richtung orientiert ist, lässt sich der Simulationsaufwand reduzieren. Durch Ausnutzen der Symmetrien innerhalb der Anordnung reicht es aus, ein Viertel des Gebietes zu betrachten. Das Viertel-Modell mit entsprechenden RB ist in Abb. 7.1(a) schematisch dargestellt. Die vernetzte Geometrie ist in Abb. 7.1(b) zu finden. Um die Sprungbedingungen der relevanten magnetischen und mechanischen Feldgrößen möglichst genau abzubilden, ist die Vernetzung an der Materialgrenze  $\partial\bar{\mathcal{B}}$  stark verfeinert.



**Abb. 7.1:** Makroskopische FE-Simulation des MS-Effektes: (a) Viertel-Modell des MRE  $\vec{B}_0$  in Vakuum  $\vec{F}_0$  mit Randbedingungen sowie (b) vernetzte Geometrie bestehend aus 4686 Dreiecks-Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen.

### 7.1.1 Analyse von Kreis- und Quadratgeometrie

Von Interesse ist nun die magnetisch induzierte Gesamtdehnung von MRE-Proben in Abhängigkeit der angelegten Feldstärke. Exemplarisch seien an erster Stelle eine kreisförmige sowie eine quadratische MRE-Probe mit einem Volumengehalt von jeweils  $\phi = 30\%$  analysiert. Die Längen der Proben betragen dabei 2 cm. Um bei der quadratischen Geometrie an den Ecken auftretende Singularitäten zu vermeiden, sind diese mit einem Radius von 0,05 cm abgerundet.

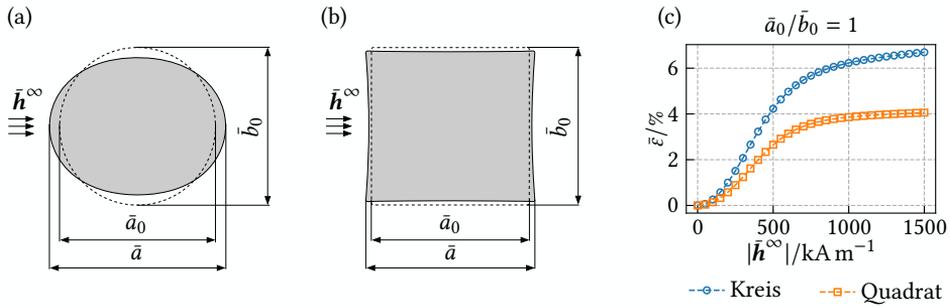
#### Gesamtdehnung der Proben

Da die magnetisch induzierten Deformationsfelder innerhalb der Probe in jedem Fall stark inhomogen sind [74], ist es zweckmäßig, die resultierende magnetostriktive Dehnung

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}_0} = \frac{\bar{a} - \bar{a}_0}{\bar{a}_0} \quad (7.3)$$

in Richtung des äußeren Feldes auszuwerten, wobei  $\Delta \bar{a} = \bar{a} - \bar{a}_0$  die Längenänderung der Probe kennzeichnet. Die Definition von  $\Delta \bar{a}$  für beide Klassen von Probengeometrien ist anhand der verformten Konfigurationen in Abb. 7.2(a) und (b) dargestellt.

Von Interesse ist nun der Verlauf von  $\bar{\varepsilon}$  in Abhängigkeit von  $|\vec{h}^\infty|$ . Dieser ist in Abb. 7.2(c) bis zu einer maximalen Feldstärke von  $1500 \text{ kA m}^{-1}$  für beide Proben aufgetragen. Sowohl für rechteckige als auch für kreisförmige MRE stellt sich eine Verlängerung in Feldrichtung ein. Dabei zeigt sich der für MRE charakteristische Verlauf mit einem quadratischen Initialbereich und daran anschließendem Abflachen infolge von Sättigungseffekten. Der simulierte Effekt stimmt qualitativ mit den experimentellen Ergebnissen aus GUAN et al. [51], HAN et al. [55], PÖSSINGER [133], SAVELIEV et al. [141] oder STEPANOV et al. [157] überein, die für sphärische und zylindrische Proben aus isotropem Material ebenfalls eine Verlängerung in Feldrichtung aufzeigen.



**Abb. 7.2:** MS-Effekt kreisförmiger und quadratischer MRE-Proben: (a) und (b) unverformte und verformte Proben sowie (c) induzierte Dehnung  $\bar{\epsilon}$  in Abhängigkeit der angelegten Feldstärke.

Aus mikroskopischer Sicht lässt sich dieser Effekt durch die magnetisch getriebene Bildung von Partikelketten innerhalb der stochastischen Mikrostruktur erklären. Dabei kommt es zur Bewegung von Partikeln in Lücken zwischen benachbarten Einschlüssen, die schließlich zur Verdrängung der quasi-inkompressiblen Matrix und folglich zu einer Verlängerung in Feldrichtung führt [75, 104]. Es zeigt sich allerdings eine deutlich ausgeprägte Abhängigkeit von der Probengeometrie, die im Folgenden genauer analysiert werden soll.

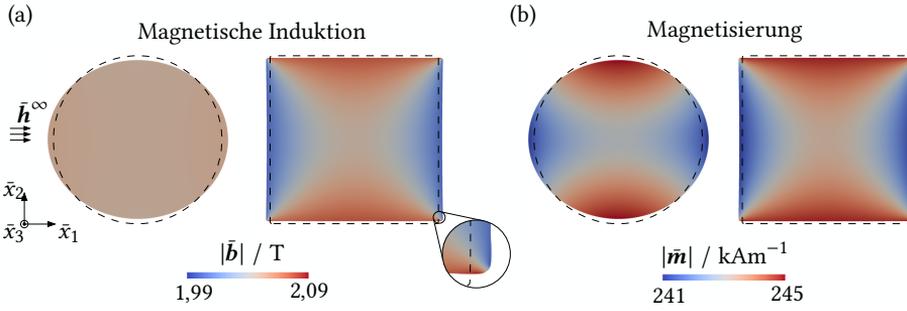
### Lokale Felder in den Proben

Die magnetisch induzierbare Gesamtdeformation einer MRE-Probe hängt gemäß Abb. 7.2(c) neben mikrostrukturellen Effekten von der makroskopischen Geometrie ab. So lässt sich bei gleicher Materialzusammensetzung für die kreisförmige Probe ein deutlich größerer MS-Effekt erzielen. Dieses Verhalten resultiert im Wesentlichen aus der Verteilung makroskopischer Feldgrößen innerhalb der MRE-Proben und den entsprechenden Sprüngen der Felder auf  $\partial\bar{\mathcal{B}}$ . Anhand der beiden Proben folgt nun ein Vergleich der einzelnen Aspekte, wobei exemplarisch die Zustände für ein Fernfeld in  $\bar{x}_1$ -Richtung mit  $|\bar{h}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  analysiert werden.

### Magnetische Feldgrößen

Die magnetischen Felder, also  $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\bar{\mathbf{h}}$  und  $\bar{\mathbf{m}}$ , wirken sich über die ponderomotorischen Kopplungsterme gemäß Gleichung (2.26) auf die auftretenden Spannungen und somit auch auf die Deformationen innerhalb der MRE aus. Bei Betrachtung des Betrages der lokalen magnetischen Induktion  $\bar{\mathbf{b}}$  ist nach Abb. 7.3(a) eine nahezu homogene Feldverteilung für die kreisförmige Probe zu erkennen. Im Vergleich dazu zeigt sich für die quadratische Geometrie eine deutlich ausgeprägte inhomogene Verteilung, wobei sich an der Ober- und Unterseite der Probe stärkere Induktionsfelder als in der Mitte sowie links und rechts einstellen. Das Maximum des Betrages  $|\bar{\mathbf{b}}|$  liegt in den Eckbereichen vor, wo auch der größte Gradient  $\nabla\bar{\mathbf{b}}$  auftritt, s. Vergrößerung in Abb. 7.3(a)

Da sich beide Proben für das angelegte Fernfeld nahezu im Sättigungszustand befinden, tritt eine annähernd homogene Magnetisierung  $\bar{\mathbf{m}}$  mit einer Schwankung von ca. 1 % um den mittleren Wert von  $|\bar{\mathbf{m}}| = 243 \text{ kA m}^{-1}$  auf. Die schwachen Inhomogenitäten lassen sich darauf zurückführen, dass die Sättigungsmagnetisierung  $\bar{M}^S$  nicht vollständig erreicht ist. Da bei der Kreis-Geometrie an der Ober- und Unterseite geringere Deformationen als links und rechts



**Abb. 7.3:** Verteilung magnetischer Felder in kreisförmigen und quadratischen MRE-Proben bei Striktion: (a) Betrag der magnetischen Induktion  $\vec{b}$  und (b) Betrag der Magnetisierung  $\vec{m}$  für ein Fernfeld von  $|\vec{h}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  in  $\vec{x}_1$ -Richtung.

sowie im Zentrum auftreten, ist dort die Ausprägung der stärksten Magnetisierung gemäß der Untersuchung in Abb. 6.2(a) plausibel. Bei der Rechteck-Geometrie ist das Maximum dagegen im Wesentlichen auf den betragsmäßig größten Wert von  $|\vec{b}|$  und somit auch  $|\vec{h}|$  zurückzuführen. Es sei abschließend darauf hingewiesen, dass sich aus der Anwendung des Makromodells innerhalb der Simulation auch in den magnetischen Größen gewisse Fehler ergeben können, s. Abb. 6.7(a).

#### Auftretende Spannungen

Entscheidend für die resultierende magnetostriktive Dehnung  $\bar{\epsilon}$  sind neben der Mikrostruktur die sich einstellenden mechanischen Spannungen innerhalb der MRE-Proben. Dabei muss  $\bar{\sigma}$  die Gleichgewichtsbeziehungen (2.38b) erfüllen, die sich für verschwindende Steifigkeit des umgebenden Vakuumbereiches und mittels (2.26)<sub>1</sub> durch

$$\nabla \cdot \bar{\sigma} + \underbrace{(\nabla \bar{b}) \cdot \bar{m}}_{=\hat{f}^{\text{pon}}} = \mathbf{0} \quad \forall \bar{X} \in \bar{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad \bar{n} \cdot \bar{\sigma} = \hat{t}^{\text{pon}} \quad \forall \bar{X} \in \partial \bar{\mathcal{B}}. \quad (7.4)$$

ausdrücken lassen. Hier bezeichnet  $\hat{t}^{\text{pon}}$  den ponderomotorischen Spannungsvektor, welcher aus der Sprungbedingung (2.69)<sub>2</sub> mit  $\hat{p} = \mathbf{0}$  folgt. Ausgedrückt durch Tensorgrößen der Momentankonfiguration ist diese als  $\bar{n} \cdot \llbracket \bar{\sigma}^{\text{tot}} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \forall \bar{X} \in \partial \bar{\mathcal{B}}$  gegeben. Mit der Zerlegung der Totalspannung  $\bar{\sigma}^{\text{tot}} := \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^{\text{pon}}$  und für  $\bar{\sigma} = \mathbf{0}$  im umgebenden Vakuum folgt

$$\hat{t}^{\text{pon}} = \bar{n} \cdot \llbracket \bar{\sigma}^{\text{pon}} \rrbracket = \bar{n} \cdot \bar{\sigma}. \quad (7.5)$$

Sind Magnetisierung  $\bar{\mathbf{m}}$  und magnetische Feldstärke  $\bar{\mathbf{h}}$  an der Oberfläche  $\partial\bar{\mathcal{B}}$  eines Körpers mit isotropen Eigenschaften bekannt, lässt sich Gleichung (7.5) analytisch auswerten. Nach einigen Umformungen<sup>1</sup> ergibt sich der Ausdruck

$$\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}} = \frac{\mu_0}{2} (\bar{m}_\perp^2 - |\bar{\mathbf{m}}|^2) \bar{\mathbf{n}} \text{ mit } \bar{m}_\perp := \bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{n}}. \quad (7.6)$$

Da für den Anteil der Magnetisierung in Normalenrichtung  $\bar{m}_\perp \leq |\bar{\mathbf{m}}|$  gilt, wirkt also gemäß Gleichung (7.6) auf  $\partial\bar{\mathcal{B}}$  ein ponderomotorischer Spannungsvektor entgegengesetzt zu  $\bar{\mathbf{n}}$ . Aus Gleichung (7.4) geht nun hervor, dass die Deformation der Proben durch die auftretenden Lastterme  $\bar{\mathbf{f}}^{\text{pon}}$  und  $\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}}$  beeinflusst wird, wobei sich für die ponderomotorische Kraftdichte kein allgemeingültiger Ausdruck gewinnen lässt. Um ein gewisses Verständnis für die auftretenden Phänomene zu erlangen, soll im Folgenden eine Analyse der vektorwertigen Größen unter vereinfachenden Annahmen erfolgen.

Unter Vernachlässigung der Verformung des kreisförmigen MRE folgt der ponderomotorische Spannungsvektor für eine homogene Verteilung von  $\bar{\mathbf{m}}$  in  $\bar{x}_1$ -Richtung zu

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_1^{\text{pon}} \\ \hat{i}_l^{\text{pon}} \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{2} |\bar{\mathbf{m}}|^2 (\cos^2 \alpha - 1) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi] \quad (7.7)$$

und ist in Abb. 7.4(a) aufgetragen. Infolge der Proben-Magnetisierung stellt sich somit ein radialer Spannungsvektor in Richtung der Kreismitte ein. Dabei liegt der größte Betrag des Vektors an der Ober- und Unterseite, also bei  $\alpha = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ . Da für den betrachteten Kreis auch  $\bar{\mathbf{h}}$  und  $\bar{\mathbf{b}}$  innerhalb von  $\bar{\mathcal{B}}$  homogen sind, gilt weiterhin  $\bar{\mathbf{f}}^{\text{pon}} = (\nabla \bar{\mathbf{b}}) \cdot \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{0} \quad \forall \bar{\mathbf{X}} \in \bar{\mathcal{B}}$ . Es sei an dieser Stelle allerdings darauf hingewiesen, dass sich die Ausprägungen von  $\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}}$  sowie  $\bar{\mathbf{f}}^{\text{pon}}$  infolge der magnetisch induzierten Verformung des MRE leicht ändern werden.

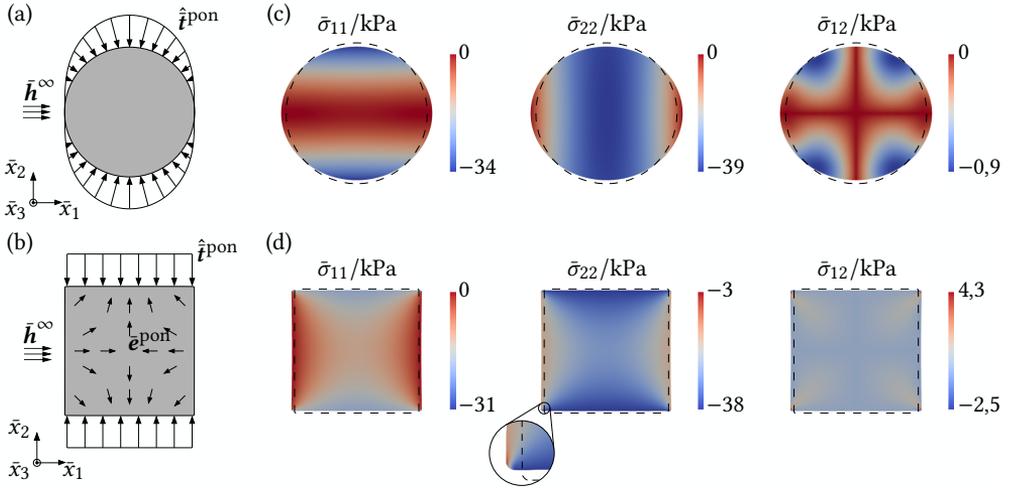
Für die Rechteck-Probe sind die vorangestellten Untersuchungen aufgrund der im Allgemeinen inhomogenen magnetischen Felder nicht ohne weiteres möglich. Gemäß Abb. 7.3(b) stellt sich aber nahe der Sättigung ein annähernd homogenes  $\bar{\mathbf{m}}$ -Feld in  $\bar{x}_1$ -Richtung ein. Wird nun

<sup>1</sup>Betrachtet wird ein magnetisierbarer Körper  $\bar{\mathcal{B}}^-$  innerhalb eines nicht-magnetisierbaren Mediums  $\bar{\mathcal{B}}^+$ . Für den Körper sowie die Tensorgrößen gelten die vereinfachenden Annahmen zweidimensionaler Problemstellungen gemäß Abschnitt 3.1. Die Felder  $\bar{\mathbf{b}}^-$ ,  $\bar{\mathbf{h}}^-$  und  $\bar{\mathbf{m}}^-$  auf der Minus-Seite der Oberfläche  $\partial\bar{\mathcal{B}}$  seien nun als bekannt angenommen. Verhält sich der Körper außerdem isotrop, zeigen alle Felder in die gleiche Richtung. Mit einer Aufteilung der magnetischen Größen in Normal- und Tangentialanteil gemäß  $\bar{\mathbf{h}}^- = \bar{h}_\parallel^- \mathbf{e}_\parallel + \bar{h}_\perp^- \mathbf{e}_\perp$  mit  $\bar{h}_\perp^- = \bar{\mathbf{h}}^- \cdot \mathbf{e}_\perp$  und  $\bar{h}_\parallel^- = \bar{\mathbf{h}}^- \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\perp)$  folgt aus den Sprungbedingungen (2.15a)<sub>2</sub> und (2.15b)<sub>2</sub>

$$\bar{\mathbf{h}}^+ = \bar{h}_\parallel^- \mathbf{e}_\parallel + (\bar{h}_\perp^- + \bar{m}_\perp^-) \mathbf{e}_\perp$$

für das Feld auf der Plus-Seite der Oberfläche. Dabei gelten zwischen den eingeführten Einheitsvektoren und dem Normalenvektor  $\bar{\mathbf{n}}$  auf  $\partial\bar{\mathcal{B}}$  die Beziehungen  $\mathbf{e}_\perp \cdot \bar{\mathbf{n}} = 1$  und  $\mathbf{e}_\parallel \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$ . Da nun die magnetischen Felder auf der Minus- und Plus-Seite der Sprungfläche bekannt sind, ist der Sprung  $\bar{\mathbf{n}} \cdot \llbracket \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{pon}} \rrbracket$  des ponderomotorischen Spannungstensors direkt auswertbar und ergibt sich zu

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \left\| \mu_0 \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{h}} + \frac{1}{2} \mu_0 |\bar{\mathbf{m}}|^2 \mathbf{i} + \mu_0 \left( \bar{\mathbf{h}} \otimes \bar{\mathbf{h}} - \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{h}}|^2 \mathbf{i} \right) \right\| = \frac{\mu_0}{2} (\bar{m}_\perp^2 - |\bar{\mathbf{m}}|^2) \bar{\mathbf{n}}.$$



**Abb. 7.4:** Spannungszustände bei Magnetostraktion von MRE-Proben: (a) analytisch berechneter ponderomotorischer Spannungsvektor  $\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}}$  an einem homogen magnetisierten Kreiskörper gemäß Gleichung (7.7), (b) idealisierter Spannungsvektor  $\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}}$  und schematisierte Richtungen der ponderomotorischen Kraftdichten  $\hat{\mathbf{e}}^{\text{pon}} := \hat{\mathbf{f}}^{\text{pon}}/|\hat{\mathbf{f}}^{\text{pon}}|^{-1}$  an einem als homogen magnetisiert angenommenen Rechteckkörper sowie (c) und (d) simulierte Feldverteilungen des mechanischen Anteils der CAUCHY-Spannung  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  für ein Fernfeld von  $|\hat{\mathbf{h}}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$ .

ein rechteckiges MRE betrachtet, das vollständig gesättigt ist, und werden die Abweichungen der Feldrichtung infolge der Ecken vernachlässigt, ergibt sich

$$\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{auf der linken und rechten Seite} \\ -\frac{\mu_0}{2} |\hat{\mathbf{m}}|^2 \mathbf{e}_2 & \text{auf der Oberseite} \\ \frac{\mu_0}{2} |\hat{\mathbf{m}}|^2 \mathbf{e}_2 & \text{auf der Unterseite} \end{cases} \quad (7.8)$$

Infolge der Proben-Magnetisierung muss sich somit an Ober- und Unterseite eine Druckspannung proportional zum Quadrat von  $|\hat{\mathbf{m}}|$  einstellen, vgl. Abb. 7.4(b). Im Gegensatz zur Kreis-Geometrie ergibt sich aber beim Viereck keine homogene Verteilung von  $\hat{\mathbf{b}}$  und  $\hat{\mathbf{h}}$ , was Abb. 7.3(a) folgend auch für den gesättigten Zustand gilt. Daraus folgt, dass neben  $\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}}$  auch der Lastterm  $\hat{\mathbf{f}}^{\text{pon}}$  auftreten muss, der sich unter den zuvor getroffenen Annahmen des Magnetisierungs-Zustandes zu  $\hat{\mathbf{f}}_l^{\text{pon}} = \hat{m}_1 \partial_{x_l} \hat{b}_1$  ergibt. Aus einem qualitativen Vergleich mit Abb. 7.3(a) sowie den vorhandenen Symmetrien lassen sich damit in erster Näherung die in Abb. 7.4(b) schematisch dargestellten Richtungen des Volumenlastterms feststellen. Werden die Resultierenden von  $\hat{\mathbf{f}}^{\text{pon}}$  und  $\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}}$  für Ober- bzw. Unterseite der Probe getrennt betrachtet, wirken die magnetisch induzierten Lastterme also entgegengesetzt zueinander. Der größte Betrag des Gradiententerms  $\nabla \hat{\mathbf{b}}$ , und damit auch von  $\hat{\mathbf{f}}^{\text{pon}}$ , ist direkt an den Ecken zu erwarten.

Mit den durchgeführten Betrachtungen lassen sich nun die simulierte Spannungszustände in beiden Proben plausibilisieren. Dabei ist zu beachten, dass in den durchgeführten FE-Simulationen keine der angemerkt Vereinfachungen zu treffen sind. Für die kreisförmige Probe ist  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  in Abb. 7.4(c) aufgetragen. An der Ober- und Unterseite tritt dabei in einem klei-

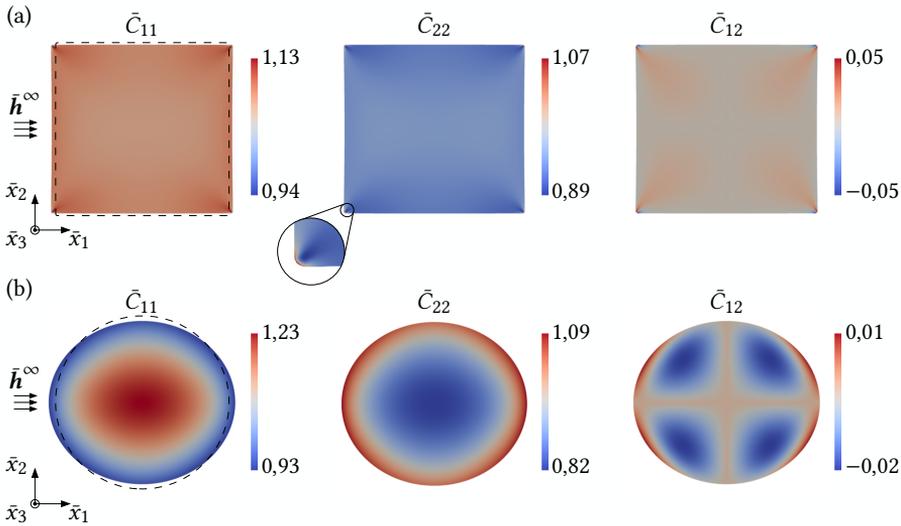
nen Bereich eine Druckspannung in  $\bar{x}_1$ -Richtung auf, die aus dem horizontalen Anteil  $\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}}$  resultiert. Insgesamt zeigt sich, dass der auf  $\partial\bar{\mathcal{B}}$  wirkende Spannungsvektor zu einem magnetisch induzierten Druckspannungszustand senkrecht zum angelegten Feld  $\bar{\mathbf{h}}^\infty$  führt. Für die Rechteck-Geometrie sind die simulierten Spannungen in Abb. 7.4(d) dargestellt. Auch hier stellen sich infolge von  $\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}}$  Druckspannungen in  $\bar{x}_2$ -Richtung ein. Diese sind an der Ober- und Unterseite maximal und fallen zur Mitte sowie zum linken bzw. rechten Rand hin deutlich ab. Das beschriebene Abklingen der Spannungen lässt sich durch das Auftreten der  $\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}}$  entgegengerichteten Volumenlast  $\bar{\mathbf{f}}^{\text{pon}}$  begründen. Zu bemerken ist außerdem, dass durch den starken Gradienten des  $\bar{\mathbf{b}}$ -Feldes im Eckbereich bereits direkt unter bzw. über den Ecken ein nahezu vollständiger Abbau der Druckspannungen vollzogen ist, s. vergrößerter Bereich in Abb. 7.4(d).

Infolge des quasi-inkompressiblen Verhaltens ergibt sich also aus dem Druckspannungs-Zustands in  $\bar{x}_2$ -Richtung für beide Proben eine Verlängerung in Feldrichtung. Dabei lässt sich die stärkere Ausprägung des MS-Effektes für die Kreis-Probe im Wesentlichen mittels des räumlich deutlich ausgeprägteren Druckbereiches begründen. Der beschriebene rein makroskopisch getriebene Effekt überlagert sich mit der mikrostrukturellen Partikelwechselwirkung, die je nach Partikelverteilung zu einer Verlängerung oder Verkürzung in Feldrichtung führt [75, 105]. Beispielsweise neigen im Gegensatz zu stochastischen Anordnungen die in Abb. 5.6(b) und (d) dargestellten kubischen Mikrostrukturen und idealen Ketten zu einer Kontraktion [75, 105]. Insgesamt ist so durchaus eine Verkürzung von MRE-Proben in Feldrichtung möglich. Dieses Verhalten bestätigen FE<sup>2</sup>-Simulationen aus KEIP & RAMBAUSEK [81] oder RAMBAUSEK et al. [136] für kubische Anordnungen. Experimentelle Untersuchungen mechanisch vorgespannter MRE-Proben mit kettenartiger Mikrostruktur aus DANAS et al. [25] belegen ebenfalls die Möglichkeit einer Kontraktion in Feldrichtung. Insbesondere anhand der Rechteck-Geometrie wird nun klar, dass die Erfassung der Vielzahl von nichtlinearen makroskopischen und mikroskopischen Effekten eine Simulation der Problemstellung zwingend erfordert.

### Lokale Deformationen

Abschließend soll nach der Auswertung von magnetischen Feldern sowie der mechanischen Spannung die Bewertung der lokalen Deformationen erfolgen. Für das quadratische MRE ist das Deformationsmaß  $\bar{C}$  in Abb. 7.5(a) über der Probengeometrie dargestellt. Die höchsten Deformationen treten im Eckbereich der Probe auf, wobei sich für einen Abrundungsradius von  $\bar{r} \rightarrow 0$  eine Singularität ergeben würde. Das Auftreten der maximalen Deformation  $\bar{C}_{11}$  unmittelbar in den Eckbereichen bedingt, dass sich diese stärker als die restliche Probe nach außen bewegen. Da die Druckspannungen im oberen und unteren Probenbereich maximal sind, ist dieses Verhalten plausibel.

Im Gegensatz zur quadratischen Probe weist das kreisförmige MRE keine stark lokalisierte Konzentration der maximalen Zug- und Druckbereiche auf. Infolge des makroskopischen Spannungsfeldes und der Überlagerung mit mikrostrukturellen Effekten stellen sich allerdings stark inhomogene Deformationsfelder innerhalb der Probe ein, vgl. Abb. 7.3(b). Interessant ist dabei, dass sich im Zentrum des MRE eine Zugdeformation und am Probenrand eine Druckdeformation in Feldrichtung ergeben. Im Vergleich zur quadratischen Geometrie ist insbesondere der maximale Wert von  $\bar{C}_{11}$  deutlich größer und erstreckt sich über einen weiten Bereich des Probeninneren.



**Abb. 7.5:** Feldverteilung der Koordinaten des Rechts-CAUCHY-GREEN-Deformationstensors  $\tilde{C}$  in MRE-Proben für Striktion bei  $|\vec{h}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$ : (a) quadratische Probe und (b) kreisförmige Probe.

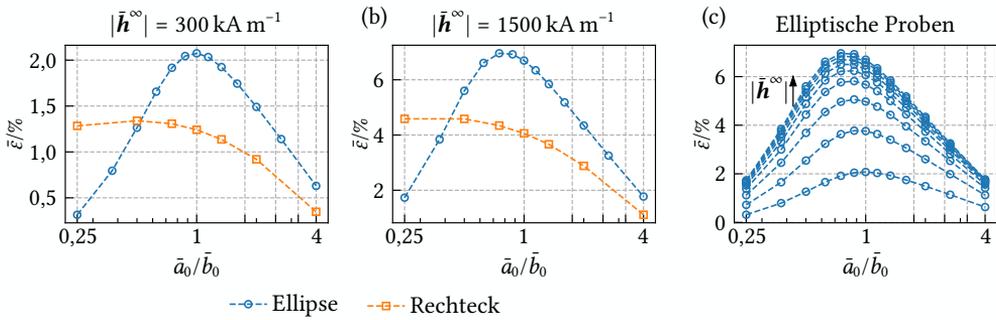
### 7.1.2 Einfluss von Seitenverhältnis und Partikelvolumengehalt

Im Anschluss an die vorangestellte Analyse kreisförmiger und quadratischer MRE-Proben mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt soll nun die Untersuchung verschiedener Einflussfaktoren auf den MS-Effekt vorgenommen werden. Dabei seien die betrachteten Geometrien auf rechteckige und elliptische Proben beschränkt.

#### Variation der Seitenverhältnisse

Von Interesse ist zuerst, bei welchem Seitenverhältnis  $\bar{a}_0/\bar{b}_0$  sich für die elliptische sowie rechteckige Geometrie der maximale MS-Effekt gemäß Gleichung (7.3) erzielen lässt. Dabei sei der Volumengehalt erneut auf 30% festgelegt. In der folgenden Studie wird das Verhältnis der Länge  $\bar{a}_0$  in Feldrichtung zur Breite  $\bar{b}_0$  quer dazu zwischen den Werten  $1/4$  und  $4$  variiert, wobei für die Rechteck-Geometrien  $\bar{a}_0/\bar{b}_0 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{2}, \frac{4}{1} \right\}$  und für die Ellipsen  $\bar{a}_0/\bar{b}_0 = \left\{ \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \dots, \frac{8}{8}, \frac{8}{7}, \frac{8}{6}, \dots, \frac{8}{2} \right\}$  gelten soll. Die Abmessungen sind gemäß  $\max\{\bar{a}_0, \bar{b}_0\} = 2 \text{ cm}$  definiert. Um bei der Rechteck-Geometrie an den Ecken auftretende Singularitäten zu vermeiden, sind diese wie bereits beim Quadrat mit einem Radius von  $0,05 \text{ cm}$  abgerundet.

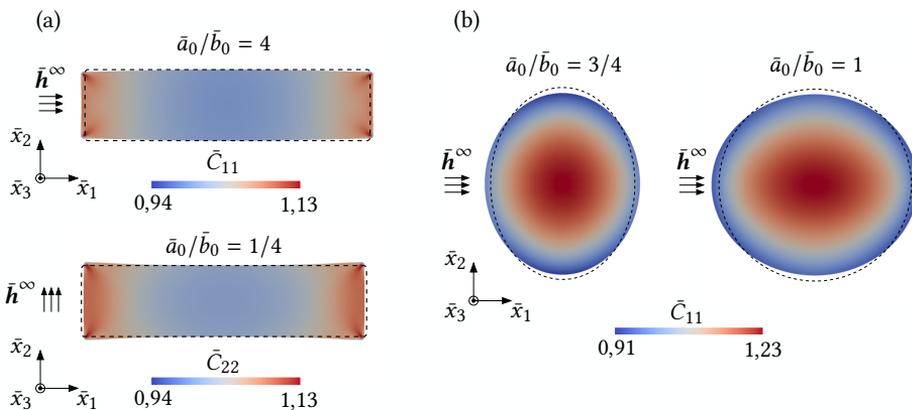
Für den linear-magnetischen Bereich ist die Dehnung  $\bar{\varepsilon}$  rechteckiger Proben über  $\bar{a}_0/\bar{b}_0$  exemplarisch für ein externes Feld von  $|\vec{h}^\infty| = 300 \text{ kA m}^{-1}$  in Abb. 7.6(a) aufgetragen. Ausgehend von  $\bar{a}_0/\bar{b}_0 = 4$  ergibt sich mit sinkendem Seitenverhältnis der Proben in Feldrichtung ein deutlicher Anstieg von  $\bar{\varepsilon}$ , der allerdings ab  $\bar{a}_0/\bar{b}_0 \leq 3/4$  nicht mehr stark anwächst und dann bei  $\bar{a}_0/\bar{b}_0$  noch einmal leicht abfällt. Im nichtlinear-magnetischen Bereich zeigt sich für die Rechteck-Geometrien im Wesentlichen ein ähnlicher Verlauf, vgl. Abb. 7.6(b). Bei der vorgestellten Untersuchung ist zu beachten, dass sich die Dehnung  $\bar{\varepsilon}$  gemäß der Definition in Abb. 7.2(a) aus der Verschiebung der Eckbereiche ergibt. Wie in Abb. 7.7(a) dargestellt, sind



**Abb. 7.6:** MS-Effekt elliptischer und rechteckiger MRE-Proben mit verschiedenen Seitenverhältnissen: (a) und (b) induzierte Dehnung für den linear- und nichtlinear magnetischen Bereich sowie (c) Verhalten elliptischer Proben für steigende magnetische Feldstärken von  $|\bar{h}^\infty| = \{300, 450, \dots, 1500\} \text{ kA m}^{-1}$ .

die absoluten Verschiebungen der Ecken ebenso wie die auftretenden Deformationen  $\bar{C}_{K(K)}$  in Feldrichtung für die Seitenverhältnisse ähnlich. Die größere Dehnung für  $\bar{a}_0/\bar{b}_0 = 1/4$  resultiert also im Wesentlichen aus dem Bezug auf die kleinere Ausgangslänge in Feldrichtung. Es zeigt sich weiterhin, dass für die beiden dargestellten Seitenverhältnisse der zentrale Probenbereich nahezu undeformiert bleibt.

Verglichen mit den rechteckigen MRE lassen sich mit elliptischen Geometrien generell deutlich größere Effekte erzielen. Dabei stellt sich für  $|\bar{h}^\infty| = 300 \text{ kA m}^{-1}$  ein Maximum für  $\bar{a}_0/\bar{b}_0 = 1$  ein, vgl. Abb. 7.6(a). Interessant ist auch, dass die Kurve im logarithmischen Bereich näherungsweise eine Symmetrie um das Extremum aufweist. Gemäß KEIP & RAMBAUSEK [81] lässt sich das auftretende Maximum für eine Kreisgeometrie mittels des ponderomotorischen Span-



**Abb. 7.7:** Feldverteilung der Deformation in verformten MRE-Proben mit verschiedenen Seitenverhältnissen  $\bar{a}_0/\bar{b}_0$  für Striktion bei  $|\bar{h}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$ : (a) rechteckige Proben mit zweifach überhöhter Darstellung der Verformung und (b) elliptische Proben dargestellt ohne Überhöhung der Verformungen.

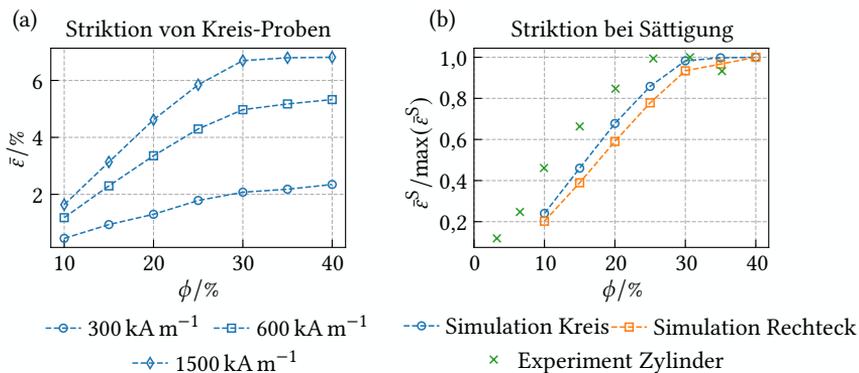
nungsvektors  $\hat{\mathbf{t}}^{\text{pon}}$  nach (7.6) begründen. Dazu wird eine Integration über die Oberfläche  $\partial\bar{\mathcal{B}}$  durchgeführt, sodass sich durch Mittelung ein representatives Spannungsmaß definieren lässt. Dieses zeigt ein Maximum für das Verhältnis  $\bar{a}_0/\bar{b}_0 = 1$ .

Wird der nichtlinear-magnetische Bereich bei  $|\bar{\mathbf{h}}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  betrachtet, verschiebt sich der maximale Effekt gemäß Abb. 7.6(b) zu Verhältnissen  $\bar{a}_0/\bar{b}_0 < 1$ . Dieses Verhalten resultiert aus der magnetisch induzierten Verformung der Proben, welche für die Seitenverhältnisse 3/4 und 1 in Abb. 7.7(b) dargestellt ist. Da sich eine deutliche Elongation in Feldrichtung einstellt, liegt der größte MS-Effekt nun bei einer im undeformierten Zustand nicht-kreisförmigen Probe mit  $\bar{a}_0/\bar{b}_0 = 3/4$ . Die Änderung der Kurve für ein steigendes Feld  $|\bar{\mathbf{h}}^\infty|$  ist in Abb. 7.6(c) dargestellt. Die vorausgesagte Verschiebung der maximalen Striktion zu Werten  $\bar{a}_0/\bar{b}_0 < 1$  für hohe äußere Felder stimmt qualitativ mit FE<sup>2</sup>-Simulationen von KEIP & RAMBAUSEK [81] überein. Diese betrachten elliptische Proben mit zur Feldrichtung rotierten kubischen Mikrostrukturen.

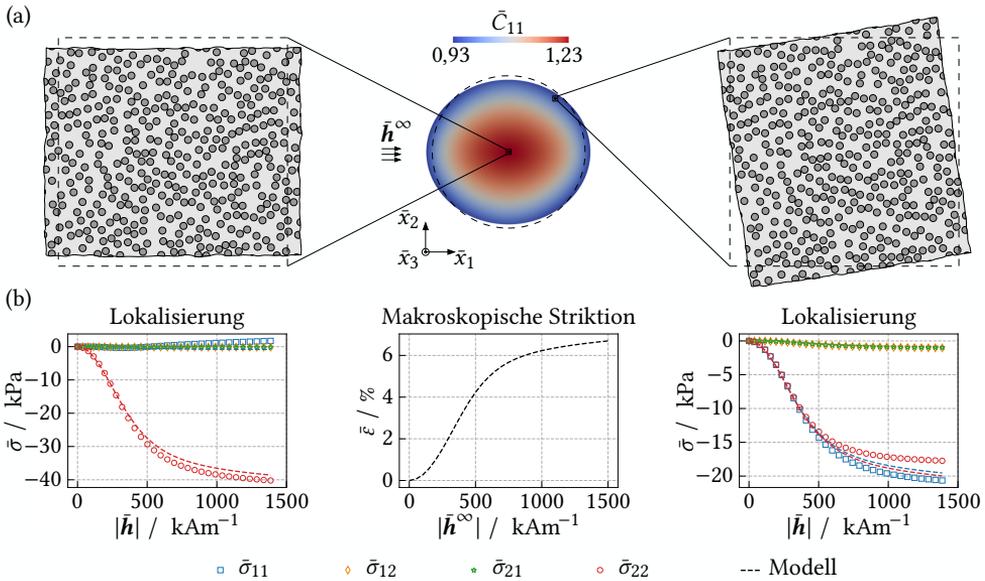
### Variation des Partikelvolumengehaltes

Eine weitere Möglichkeit, den MS-Effekt von MRE-Proben gezielt zu beeinflussen, besteht in der Variation des Partikelvolumengehaltes  $\phi$  im Herstellungsprozess. Exemplarisch seien nun kreisförmige ( $\bar{a}_0/\bar{b}_0 = 1$ ) sowie rechteckige ( $\bar{a}_0/\bar{b}_0 = 1/2$ ) MRE-Proben mit den bereits in den vorherigen Kapiteln betrachteten Partikelvolumengehalten  $\phi = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\} \%$  analysiert. Das äußere Feld  $\bar{\mathbf{h}}^\infty$  wird dabei bis auf maximal  $1500 \text{ kA m}^{-1}$  hochgefahren.

Die simulierten Ergebnisse der kreisförmigen Probe sind in Abb. 7.8(a) für die externen magnetischen Felder  $|\bar{\mathbf{h}}^\infty| = \{300, 600, 1500\} \text{ kA m}^{-1}$  aufgetragen. Dabei erhöht sich die induzierte Dehnung für den linear-magnetischen Bereich mit steigendem Volumengehalt deutlich. Für stärkere externe Felder stellt sich allerdings ab  $\phi = 30 \%$  eine ausgeprägte Sättigung ein. Da der MS-Effekt sowohl aus dem magnetischen als auch aus dem mechanischen Verhalten von MRE resultiert, ist die Ursache der beobachteten Systematik in verschiedenen Einflussfaktoren zu suchen. Einerseits nimmt die Steifigkeit des Verbundwerkstoffes mit



**Abb. 7.8:** MS-Effekt von MRE-Proben mit verschiedenen Partikelvolumengehalten: (a) induzierte Dehnung kreisförmiger Proben für verschiedene externe Feldstärken und (b) Vergleich der normierten Striktion  $\varepsilon^S$  bei Sättigung für Kreis- und Rechteckgeometrie mit experimentellen Daten von Zylinderproben aus DIGUET et al. [28].



**Abb. 7.9:** Entkoppeltes Multiskalenschema für ein kreisförmiges MRE mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt bei Striktion: (a) Deformationsfeld in der Probe und Momentankonfigurationen der Mikrostruktur an zwei Quadraturpunkten sowie (b) Vergleich der homogenisierten effektiven Spannung  $\bar{\sigma}$  an den Quadraturpunkten mit dem kalibrierten Makromodell.

steigendem  $\phi$  gemäß Tab. 6.3 deutlich zu, gleichzeitig aber auch die initiale Permeabilität  $\bar{\mu}_r$  und die Sättigungsmagnetisierung  $\bar{M}^S$ , sodass sich der Betrag des ponderomotorischen Spannungsvektors  $\hat{\mathbf{i}}^{\text{pon}} \propto |\bar{\mathbf{m}}|^2$  ebenfalls erhöht. Auf mikroskopischer Ebene verstärken sich die magneto-mechanischen Partikel-Partikel- und Partikel-Matrix-Wechselwirkungen für geringere Partikel-Relativabstände, die gemäß Abb. 5.1 mit steigendem  $\phi$  wahrscheinlicher werden. Es lässt sich also festhalten, dass die effektive Probendehnung  $\bar{\varepsilon}$  aus der Überlagerung all dieser Effekte resultiert. Wie im vorherigen Abschnitt 7.1.1 diskutiert, ist eine Trennung aufgrund des stark nichtlinearen Charakters nur schwer möglich.

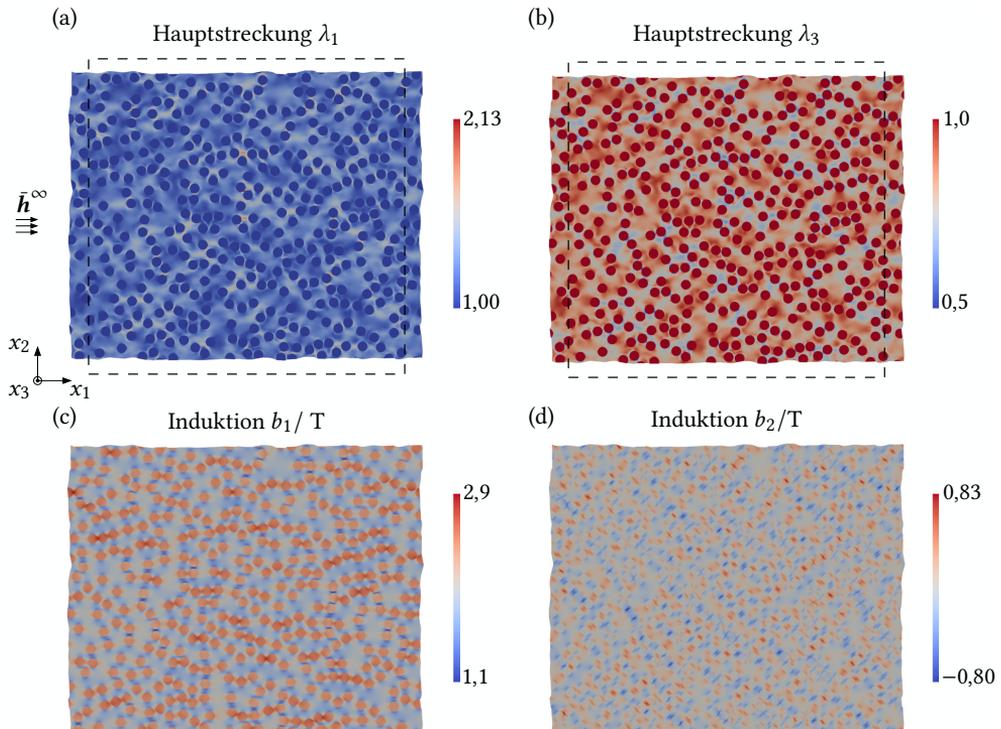
Die makroskopischen Modelle von LEFÈVRE et al. [88] und MUKHERJEE et al. [115] auf Basis analytischer Homogenisierungsmethoden betrachten zwar nur MRE mit Füllgraden zwischen 5 bis maximal 30 Prozent, belegen allerdings innerhalb dieses Bereiches ebenfalls einen Anstieg des Effektes. Im Gegensatz zu Abb. 7.8 zeigen die Ergebnisse der in DANAS [24] durchgeführten Homogenisierung ein deutlich ausgeprägtes Maximum bei  $\phi = 30\%$ . Es besteht allerdings ein wesentlicher Unterschied in der angewendeten Methodik: So erfasst diese keine makroskopischen Probeneinflüsse und es wird für die effektiven Werte  $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{21} = 0$  und  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = 0$  gewählt, was in Widerspruch zu den simulierten Spannungsfeldern gemäß Abb. 7.4 steht. Ferner ist die lokale Induktion  $\bar{\mathbf{b}}$  anstelle des in der vorliegenden Studie aufgebraachten Fernfeldes  $\bar{\mathbf{b}}^\infty = \mu_0 \bar{\mathbf{h}}^\infty$  vorgeschrieben.

Ein qualitativer Vergleich der berechneten Striktion  $\bar{\varepsilon}^S$  im Sättigungsbereich mit den Messungen zylindrischer Proben aus DIGUET et al. [28] ergibt eine gute Übereinstimmung, vgl. Abb. 7.8(b). Das schwach ausgeprägte Maximum bei einem Volumengehalt von etwa 30% stellt sich

in den Simulationen allerdings weder für die Kreis- noch für die Rechteck-Geometrie ein.

### 7.1.3 Lokalisierung

Zur Validierung der erzielten Ergebnisse soll im Rahmen des angewendeten entkoppelten Multiskalenschemas [159] eine Lokalisierung für einzelne Quadraturpunkte der simulierten makroskopischen Proben vorgenommen werden. Diese ermöglicht gleichzeitig die Analyse der mikroskopischen Verteilung magnetischer und mechanischer Felder. Exemplarisch erfolgt der Lokalisierungs-Schritt für die in 7.1.1 ausführlich betrachtete kreisförmige Probe mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt. Dabei findet eine Auswertung für einen Punkt in der Probenmitte sowie einen Randpunkt unter einem Winkel von  $\alpha \approx 45^\circ$  in mathematisch positiver Richtung – ausgehend von der  $\bar{x}_1$ -Achse – statt, vgl. Abb. 7.9(a). In der makroskopischen FE-Simulation sind dazu die effektiven Felder  $\bar{\mathbf{F}}$  und  $\bar{\mathbf{H}}$  zu speichern, um diese in der RVE-Simulation der zugrunde liegenden Mikrostruktur aufzuprägen. Die Bewertung der Güte des kalibrierten Makromodells erfolgt nun anhand des Vergleichs mit der homogenisierten effektiven Materialantwort der RVE. Dabei sind, wie bereits bei der Parametrisierung des Modells, die simulierte



**Abb. 7.10:** Lokalisierte Felder innerhalb der Mikrostruktur im Zentrum einer kreisförmigen MRE-Probe mit 30 % Partikelvolumengehalt für  $|\bar{\mathbf{h}}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$ : (a) und (b) Hauptstreckungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_3$  mit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ ,  $\lambda_2 \equiv 1$  sowie (c) und (d) Koordinaten  $b_1$  und  $b_2$  der magnetischen Induktion.

effektive Spannung  $\bar{T}^{\text{tot}}$  und Induktion  $\bar{B}$  von jeweils 10 RVE zu mitteln.

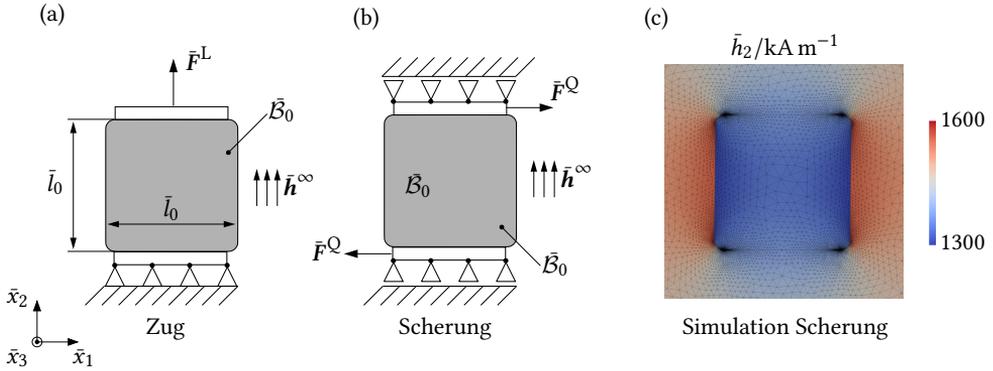
Gemäß der Betrachtung relativer Fehler des Makromodells in Abschnitt 6.3.2 hat sich gezeigt, dass es sich bei der mechanischen Spannung  $\bar{\sigma}$  um die sensitivste makroskopische Größe handelt – diese also in der Regel den größten relativen Fehler aufweist. Demnach soll hier ein Vergleich der Homogenisierung mit der durch das kalibrierte Makromodell vorausgesagten Spannung  $\bar{\sigma}$  vorgenommen werden. Für die betrachteten Quadraturpunkte ergibt sich nach Abb. 7.9 eine sehr gute Übereinstimmung der Koordinaten  $\bar{\sigma}_{kl}$  mit  $k, l \in \{1, 2\}$  bis zu Feldern von ca.  $|\bar{h}| = 500 \text{ kA m}^{-1}$ . Im Sättigungsbereich zeigt sich eine leichte Abweichung, wobei die relativen Fehler deutlich unter 10 % liegen. Insgesamt lässt sich daher festhalten, dass sich mit dem entwickelten Modell in Verbindung mit dem vorgeschlagenen Parametrisierungs-Algorithmus gemäß Tab. 6.2 die Magnetostraktion von MRE-Proben sehr gut abbilden lässt. Infolge der heterogenen Mikrostruktur kommt es zu stark inhomogenen mikroskopischen Feldern in der Umgebung der betrachteten makroskopischen Punkte. Dabei sind insbesondere die auftretenden Deformationen um ein Vielfaches höher als die gemittelten Effektivwerte. In Abb. 7.10(a) und (b) sind die Hauptstreckungen  $\lambda_1$  sowie  $\lambda_3$  mit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  und  $\lambda_2 \equiv 1$  dargestellt. Hier treten im Zugbereich Streckungen bis zu maximalen Werten von  $\lambda_1 \approx 2,13$  auf. Im Druckbereich stellen sich vereinzelte Regionen mit  $\lambda_3 \approx 0,5$  ein. Neben der makroskopischen Streckung von  $\bar{\lambda}_1 \approx 1,1$  resultiert das Deformationsfeld aus den magnetischen Wechselwirkungen der Partikel. Bei entsprechend geringer Steifigkeit der umgebenden Matrix ist es gemäß BILLER et al. [11] und PULJIZ et al. [132] durchaus möglich, dass diese sich nahezu in den Kontakt bewegen. Anhand der Lokalisierung zeigt sich somit die große Relevanz der Berücksichtigung finiter Deformationen zur Beschreibung von MRE.

Auch die magnetischen Felder innerhalb der Mikrostruktur sind aufgrund der unterschiedlichen magnetischen Eigenschaften von Partikeln und Matrix stark inhomogen. Exemplarisch ist die magnetische Induktion in Abb. 7.10(c) und (d) dargestellt. Auffällig ist die Verstärkung der lokalen Felder für besonders nah beieinander liegende Einschlüsse. Neben geometrischen Aspekten hängt diese auch von dem nichtlinearen Magnetisierungsverhalten des Carboneisens ab. Es wird deutlich, dass es nicht ausreichend ist, die Partikel als magnetische Dipole zu betrachten. Dies gilt insbesondere für hoch gefüllte Systeme, in denen die Wahrscheinlichkeit nah beieinander liegender Einschlüsse deutlich steigt.

## 7.2 Magnetorheologischer Effekt

Besondere technische Relevanz ist neben dem MS-Effekt dem MR-Effekt, der die Umsetzung magnetisch schaltbarer Dämpfer oder Lastaufnahmen ermöglicht, zuzusprechen. Die folgende Betrachtung dieses Effektes gliedert sich an die Analyse des effektiven Verhaltens verschiedener Mikrostrukturen weichmagnetischer MRE in Abschnitt 5.1.2 an. Mittels des Makromodells ist nun aber auch die Erfassung von makroskopischen Einflussfaktoren – wie etwa der Probengeometrie – möglich, die gemäß den Untersuchungen des vorherigen Abschnittes 7.1 einen entscheidenden Einfluss auf die lokalen Felder und damit auf das effektive Verhalten von MRE hat.

Um den MR-Effekt zu untersuchen, sei im Folgenden eine quadratische Probe mit  $\bar{l}_0 = 2 \text{ cm}$  und einem Ecken-Abrundungsradius von  $\bar{r}_0 = 0,14 \text{ cm}$  gemäß Abb. 7.11(a) betrachtet. Wie be-



**Abb. 7.11:** Makroskopische FE-Simulation des MR-Effektes: (a) und (b) MRE-Probe  $\bar{\mathcal{B}}_0$  mit Lagerung und aufprägten Kräften für Zug und Scherung sowie (c) Ausschnitt des simulierten  $\bar{\mathbf{h}}$ -Feldes der Probe unter Scherung mit Umgebung und Fernfeld von  $|\bar{\mathbf{h}}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$ .

reits bei der Analyse des MS-Effektes wird die Probe dabei vor der mechanischen Belastung in ein homogenes Magnetfeld

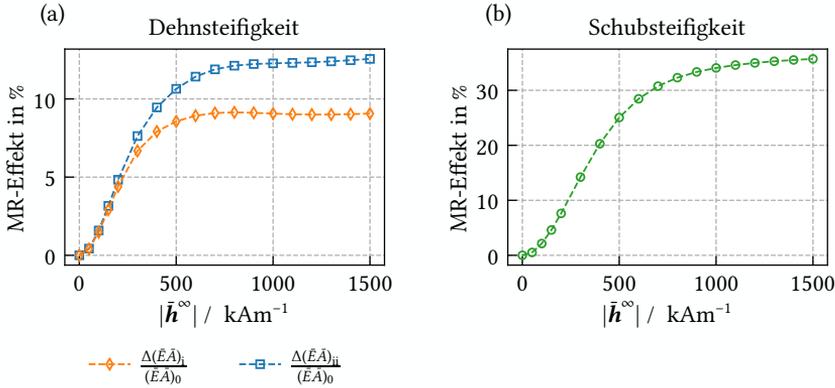
$$\bar{\mathbf{h}}^\infty = \bar{h}^\infty \mathbf{e}_2 \text{ mit } \bar{h}^\infty = \begin{cases} t/t_h \bar{h}_{\max}^\infty & \text{für } t \leq t_h \\ \bar{h}_{\max}^\infty & \text{für } t > t_h \end{cases} \quad (7.9)$$

in  $\bar{x}_2$ -Richtung eingebracht, welches dann konstant gehalten wird. Von Interesse ist nun, wie sich die initialen Dehn- und Schubsteifigkeiten ( $\bar{E}\bar{A}$ ) und ( $\bar{G}\bar{A}$ ) der betrachteten Probe in Abhängigkeit des äußeren Magnetfelds  $\bar{\mathbf{h}}^\infty$  ändern. Dazu erfolgt an der Probeneinspannung die Aufbringung von Längs- bzw. Querkraften  $\bar{\mathbf{F}}^L$  und  $\bar{\mathbf{F}}^Q$  mit dem zeitlichen Verlauf

$$\bar{\mathbf{F}}^\bullet = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{für } t \leq t_h \\ (t - t_h)/(t_{\text{ges}} - t_h) \bar{\mathbf{F}}_{\max}^\bullet & \text{für } t > t_h \end{cases} \quad (7.10)$$

Die entsprechenden Lagerungen und Lasteinleitungen sind für den Zug- und den Schublastfall in Abb. 7.11(a) und (b) zu finden. Das simulierte  $\bar{\mathbf{h}}$ -Feld in der Probe und der Umgebung ist für ein Fernfeld von  $|\bar{\mathbf{h}}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  sowie eine mechanische Scherung in Abb. 7.11(c) dargestellt. Da am Übergang von MRE zur Einspannung jeweils eine einspringende Ecke auftritt, ist die Vernetzung an diesen Stellen stark verfeinert.

Werden Zugkraft bzw. Schubkraft in der Simulation vorgeschrieben, ergeben sich je nach Steifigkeit der Probe eine resultierende Längsdehnung  $\bar{\varepsilon}$  und Scherung  $\bar{\gamma}$  des Prüfkörpers. Da hier lediglich der MR-Effekt im initialen Bereich der Spannungs-Dehnungs-Kurven untersucht werden soll, erfolgt die Wahl der eingeleiteten Lasten derart, dass die auftretenden Dehnungen für alle externen Felder unter 2% liegen. Für die Untersuchung der Dehnsteifigkeit ist nun zu beachten, dass infolge des MS-Effektes bereits vor der Aufbringung der mechanischen Zugkraft eine magnetisch induzierte Längenänderung der Probe erfolgt. Somit sind zwei Möglichkeiten zur Definition der Längsdehnung möglich. Zum einen lässt sich diese auf die Länge



**Abb. 7.12:** Simulierter MR-Effekt einer rechteckigen MRE-Probe für verschiedene Lastfälle: (a) und (b) relative Änderungen von Dehn- und Schubsteifigkeiten mit Bezug auf den Referenzwert ohne externes Magnetfeld.

$\bar{l}_0$  des undeformierten Zustands und zum anderen auf die Länge der Probe nach der Aufbringung des externen Feldes beziehen, also

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{\Delta \bar{l}^F}{\bar{l}_0} \quad \text{oder} \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\Delta \bar{l}^F}{\bar{l}_0 + \Delta \bar{l}^h}. \quad (7.11)$$

In der oberen Gleichung bezeichnen  $\Delta \bar{l}^F$  die infolge der mechanischen Zugkraft  $\bar{F}^L$  eingeprägte und  $\Delta \bar{l}^h$  die magnetisch induzierten Längenänderung durch Striktion in  $\bar{x}_2$ -Richtung. Da lediglich ein externes Magnetfeld in  $\bar{x}_2$ -Richtung vorgegeben wird, ergibt sich für die Scherung die Definition  $\bar{\gamma} = \Delta \bar{l}^F / \bar{l}_0$ . Mit Gleichung (7.11) ergeben sich nun für die initialen Bereiche der Kraft-Dehnungs-Kurven bzw. Kraft-Schub-Kurven die Probensteifigkeiten gemäß

$$(\bar{E}\bar{A})_i = \frac{\bar{F}^L}{\bar{\varepsilon}_i} \quad \text{bzw.} \quad (\bar{E}\bar{A})_{ii} = \frac{\bar{F}^L}{\bar{\varepsilon}_{ii}} \quad \text{und} \quad (\bar{G}\bar{A}) = \frac{\bar{F}^Q}{\bar{\gamma}}. \quad (7.12)$$

### 7.2.1 Einfluss der Feldstärke

Im ersten Schritt sei der Effekt nun für eine MRE-Probe mit  $\phi = 30\%$  Partikelvolumengehalt analysiert. Die simulierten Ergebnisse der magnetisch induzierten Dehnsteifigkeits-Änderung sind in Abb. 7.12(a) über  $\bar{h}^\infty$  aufgetragen. Wie bereits bei der Betrachtung des MR-Effektes in Kapitel 5 zeigt die Probe ebenfalls den für MRE typischen Verlauf mit quadratischem Initialbereich und anschließender Einsättigung. Dabei ist die Steifigkeitsänderung  $\Delta(\bar{E}\bar{A})_{ii}$  etwas stärker ausgeprägt als  $\Delta(\bar{E}\bar{A})_i$ , was auf die magnetostriktive Längenänderung in Richtung des äußeren Feldes zurückzuführen ist. Da der MS-Effekt rechteckiger Proben Abschnitt 7.1.1 folgend einen ähnlichen Verlauf über  $\bar{h}^\infty$  wie der MR-Effekt aufweist, nimmt die Differenz der beiden Dehnsteifigkeiten bis zum Sättigungswert der Striktion deutlich zu und bleibt dann nahezu konstant. Ein Vergleich mit den experimentellen Daten aus BORIN et al. [13] führt zu einer qualitativen Übereinstimmung des prognostizierten Verlaufs der magnetisch induzierten

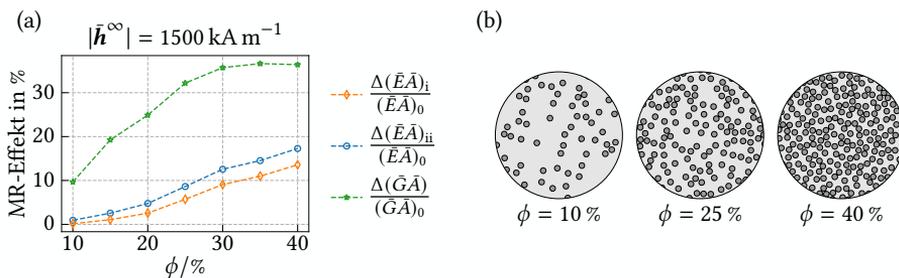
Steifigkeitsänderung. Jedoch sind die gemessenen Schalteffekte aufgrund der deutlich geringeren Steifigkeit der synthetisierten MRE-Proben signifikant höher als in der Simulation. Hier sei auf die in Abb. 5.9(c) aufgetragene Kurve verwiesen, welche ein annähernd indirekt proportionales Verhältnis von  $\Delta\bar{G}/\bar{G}_0$  zur initialen Steifigkeit des Verbundmaterials aufzeigt.

Die in Abb. 7.12(b) dargestellten Simulationsergebnisse der relativen Änderung der Schubsteifigkeit zeigen einen im Vergleich zum Zuglastfall deutlich erhöhten Effekt mit einem Maximalwert von etwa 35 %. Die Sättigung stellt sich hier auch bei  $1500 \text{ kA m}^{-1}$  nicht vollständig ein und wird somit deutlich später als bei der Dehnsteifigkeit erreicht. Experimentelle Daten, welche die vorhergesagte stärkere Ausprägung des MR-Effektes unter Schub bestätigen, liegen dem Autor aktuell nicht vor.

Verglichen mit dem simulierten MS-Effekt rechteckiger MRE-Proben von ca. 4 % in der Sättigung sagt die Simulation sowohl für Zug als auch für Schub deutlich stärkere MR-Effekte voraus. Dieses Ergebnis stimmt STEPANOV et al. [157] folgend mit Erkenntnissen experimenteller Untersuchungen überein. Die ermittelte relative Änderung der Schubsteifigkeit ist allerdings wesentlich schwächer ausgeprägt als die mittels Homogenisierung vorausgesagte Änderung der initialen Schubmoduli  $\bar{G}_{1212}$  und  $\bar{G}_{1221}$  gemäß Abb. 6.9(a). Teilweise lässt sich diese Abweichung auf die fehlerbehaftete Vorhersage der magnetisch induzierten Steifigkeitsänderung durch das Makromodell zurückführen: Für den betrachteten Partikelvolumengehalt von 30 % liegen die Werte für  $\Delta\bar{G}_{1212}\bar{G}_0^{-1}$  und  $\bar{G}_{1221}\bar{G}_0^{-1}$  jeweils ca. 10% unter den Ergebnissen der Homogenisierung, vgl. Abb. 6.9(a). Da allerdings in der makroskopischen Simulation eine deutlich größere Differenz gegenüber der Homogenisierung als die zuvor genannte Abweichung auftritt, ist festzuhalten, dass der Einfluss von Probeneffekten offenbar einen erheblichen Einfluss auf den MR-Effekt hat. Ursachen sind ebenso wie beim MS-Effekt in Gradienten und Sprüngen makroskopischer Feldgrößen zu suchen, s. Abschnitt 7.1.1.

## 7.2.2 Variation des Partikelvolumengehaltes

Abschließend sei neben dem Einfluss des externen Feldes auch das Verhalten für verschiedene Partikelvolumengehalte betrachtet. Es werden erneut MRE-Proben mit den bereits in den vorherigen Kapiteln betrachteten Werten  $\phi = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$  % analysiert, wobei lediglich ein Vergleich des Effektes für ein äußeres Feld von  $|\bar{\mathbf{h}}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  erfolgen soll. Die simulierten Ergebnisse für die betrachteten rechteckigen MRE-Proben sind in Abb. 7.13(a)



**Abb. 7.13:** MR-Effekt von MRE-Proben mit verschiedenen Partikelvolumengehalten: (a) induzierte relative Steifigkeitsänderung für ein Feld von  $|\bar{\mathbf{h}}^\infty| = 1500 \text{ kA m}^{-1}$  in vertikale Richtung und (b) Ausschnitte der zugrunde liegenden Mikrostrukturen für  $\phi = \{10, 25, 40\}$  %.

aufgetragen. Für die Dehnsteifigkeit ergibt sich demnach mit steigendem Volumengehalt ein deutlicher Anstieg des relativen MR-Effektes. Dabei tritt über dem gesamten Bereich von  $\phi$  eine Differenz zwischen den beiden Auswertungsmethoden der Längsdehnungen nach Gleichung (7.11) und den daraus resultierenden Dehnsteifigkeiten gemäß Gleichung (7.12) auf. Erklärbar ist dieses Ergebnis durch die deutlich höhere Wahrscheinlichkeit geringer Partikel-Relativabstände mit steigendem  $\phi$ . Diese bedingen stärkere magneto-mechanische Wechselwirkungen innerhalb der Mikrostruktur. Exemplarisch sind Ausschnitte zugrunde liegender Partikelverteilungen in Abb. 7.13(b) dargestellt. Der prognostizierte Anstieg des MR-Effektes zeigt sich ebenfalls in experimentellen Ergebnissen für MRE mit Partikelvolumengehalten von  $11\% \leq \phi \leq 38\%$  aus LOKANDER & STENBERG [97].

Ein Vergleich von Dehn- und Schubsteifigkeit zeigt erneut einen merklich größeren MR-Effekt unter Schublast über den gesamten Bereich von  $\phi$ . Dabei zeigt sich in etwa eine Verdreieinhalbfachung der relativen Schubsteifigkeitsänderung von  $\phi = 10\%$  auf  $\phi = 30\%$ . Im Gegensatz zur Dehnsteifigkeit stellt sich hier eine Sättigung des Effektes ab  $30\%$  Partikelvolumengehalt ein. Gemäß dem in Abb. 6.9(b) dargestellten Vergleich ist allerdings zu beachten, dass der MR-Effekt für die Schubkomponenten des Steifigkeitstensors für  $\phi \geq 35\%$  deutlich unterschätzt wird.

# 8 Abschließende Bemerkungen

## 8.1 Zusammenfassung und Bewertung

Die effektive Materialantwort von MRE hängt stark von den konstitutiven Eigenschaften der Bestandteile, also den magnetisierbaren Einschlüssen und der elastomeren Matrix, sowie der mikrostrukturellen Partikelverteilung ab. Um das Verhalten von MRE-Proben und -Bauteilen theoretisch beschreiben zu können und so eine virtuelle Auslegung zu ermöglichen, sind demnach sowohl mikroskopische als auch makroskopische Einflussfaktoren zu berücksichtigen. Ausgehend von dieser Problemstellung stellt die vorliegende Arbeit eine mehrskalige Modellierungs-Strategie für die Beschreibung von MRE vor, die auf Basis der Partikelverteilung und den Materialeigenschaften der Mikroebene eine Vorhersage des effektiven Verhaltens hart- und weichmagnetischer Komposite ermöglicht. Durch mikroskopisch kalibrierte Makromodelle wird außerdem eine Methodik zur effizienten Simulation weichmagnetischer Proben umgesetzt, wobei eine implizite Berücksichtigung mikrostruktureller Effekte erfolgt.

### *Kontinuumsformulierung und numerische Lösung*

Die vorgestellten mikro- und makroskopischen Modelle basieren auf einer Kontinuumsformulierung mit Gültigkeit für finite Deformationen. Nach einer Zusammenstellung allgemeingültiger magneto-mechanischer Feldgleichungen und eines Satzes konstitutiver Relationen folgt die Vorstellung der benötigten Grundlagen zur mehrskaligen Beschreibung der mikroheterogenen MRE. Dies beinhaltet die Schritte zur Homogenisierung und Lokalisierung, den Vergleich von gekoppelten und entkoppelten Multiskalenschemata sowie die Formulierung makroskopischer RB.

Um das resultierende System von PDGL, RB und AB einer Lösung zugänglich zu machen, erfolgt im Anschluss an die kontinuumsphysikalischen Grundgleichungen die Betrachtung der nichtlinearen FEM. Nach einer Diskussion zur Vereinfachung auf zweidimensionale Problemstellungen werden die entsprechenden schwachen Formen der mechanischen und magnetischen Teilprobleme aufgestellt, diskretisiert und innerhalb einer totalen LAGRANGE-Formulierung linearisiert.

### *Charakterisierung der Konstituenten*

Um mikroskopische Einflüsse zu erfassen, erfolgt auf Basis der vorgestellten Grundlagen die Untersuchung und Beschreibung der Konstituenten, also der weich- und hartmagnetischen Partikeln sowie der elastomeren Matrix. Dazu wird eine umfangreiche experimentelle Charakterisierung eines Silikonelastomers vorgestellt. Im betrachteten Bereich von Deformationsgeschwindigkeiten zeigt sich dabei ein nahezu elastisches Verhalten mit stark nichtlinearen Spannungs-Streckungs-Kurven. Eine Studie zeigt weiterhin, dass sich die elastischen Eigenschaften des Elastomers durch Zugabe von Silikonöl signifikant beeinflussen lassen. Auf Basis der experimentellen Datensätze erfolgt die Parametrisierung von OGDEN-Modellen für verschiedene Silikonölgehalte.

Der Formulierung von Materialmodellen für die eingebetteten Partikel liegt in dieser Arbeit

eine additive Aufspaltung der freien HELMHOLTZschen Energiedichte in mechanische und magnetische Anteile zugrunde. Zur Beschreibung dissipativen magnetischen Verhaltens wird neben dem pfadunabhängigen Modell für Weichmagneten das BERGQVIST-Vektor-Hysterese-Modell erweitert. Es erfolgt eine Anpassung der Ansätze an vorhandene experimentelle Daten für weichmagnetisches Carbonyleisen und hartmagnetisches NdFeB. Die kalibrierten Materialmodelle sind für alle drei betrachteten Konstituenten in der Lage, die stark nichtlinearen Materialantworten sehr gut abzubilden.

### *Studie der effektiven Materialantwort*

Mit der Kenntnis der spezifischen Charakteristika von Partikeln und Matrix erfolgt im Anschluss eine Studie zum effektiven Verhalten weich- und hartmagnetischer MRE. Eine erste Analyse der Repräsentativität statistisch-periodischer Zellen mit weichmagnetischen Partikeln zeigt dabei, dass die klassische Vorstellung eines RVE bei MRE mit stochastischer Mikrostruktur verloren geht. Da die Materialantwort im Hinblick auf den mechanischen Anteil des Spannungstensors extrem sensitiv ist, zeigt sich, dass es notwendig ist, die effektive Antwort mehrerer Zellen zu mitteln, um Repräsentativität mit vertretbarem numerischen Aufwand zu gewährleisten. Eine Analyse der zugrunde liegenden Partikelverteilungen belegt weiterhin die Reduzierung der Streuung für einen steigenden Partikelvolumengehalt.

Im Anschluss daran wird der MR-Effekt weichmagnetischer MRE mit verschiedenen Mikrostrukturen untersucht. Die Variation idealisierter Geometrien zeigt dabei einen sehr deutlichen Einfluss auf die effektiven Eigenschaften, die für alle betrachteten RVE ein stark anisotropes Verhalten aufweisen. Mit steigendem Volumengehalt lässt sich weiterhin eine zunehmende relative Steifigkeitsänderung von bis zu 300 % erzielen. Für kettenartige Strukturen ist das Maximum dabei bereits vor dem größten betrachteten Partikelanteil von 40 Volumenprozent erreicht. Letztlich ergibt die Variation der elastischen Eigenschaften des Elastomers einen annähernd indirekt proportionalen Zusammenhang zwischen relativem MR-Effekt und initialer Steifigkeit. Die anschließende Untersuchung stochastischer Zellen führt zu ähnlichen Resultaten. Im Vergleich zu den Zellen mit kettenartigen Strukturen ist der MR-Effekt der stochastischen RVE dabei deutlich schwächer ausgeprägt. Ebenso zeigt sich nur eine geringe Anisotropie, die aus der magnetisch induzierten Vorzugsrichtung folgt. Die erzielten Resultate zeigen eine qualitative Übereinstimmung mit experimentellen Befunden und belegen so die Validität der angewandten Methodik.

Die anschließende Untersuchung von MRE mit hartmagnetischen Partikeln belegt das Auftreten zusätzlicher Kopplungseffekte. Es zeigt sich, dass die Einschlüsse infolge von magnetischen Momentendichten zu starken Rotationen innerhalb von magnetischen Lastzyklen neigen. Dieses Verhalten führt zu einer deutlichen Verringerung der Koerzitivfeldstärke im Vergleich zur Hysterese von reinem NdFeB. Die detektierten Effekte können experimentell aufgezeichnete Hysteresen hartmagnetischer Komposite mit verschiedenen Steifigkeiten so bereits teilweise erklären. In der zugehörigen Spannungsantwort zeigen sich erwartungsgemäß Schmetterlingskurven, wobei sich mit Einsetzen der lokalen Partikelrotationen ein deutlich unsymmetrischer Spannungstensor einstellt. Der Vergleich mehrerer RVE führt auf eine starke Streuung in den mechanischen Spannungen und deutet damit auf den Verlust einer systematischen Materialantwort hin.

### *Makroskopische Materialmodellierung und Simulation*

Um eine numerisch effiziente Simulation makroskopischer MRE-Proben und -Bauteile zu ermöglichen, erfolgt nach den Untersuchungen der effektiven Eigenschaften die Formulierung eines makroskopischen Materialmodells für weichmagnetische, isotrope MRE. Ausgehend von einer homogenisierten Datenbasis wird ein Energieansatz formuliert, der die Nichtlinearität infolge der elastomeren Matrix und der Partikel gut abbilden kann. Das Modell wird innerhalb eines speziell entwickelten Parametrisierungs-Prozesses an die vorhandenen Daten angepasst. So lässt sich erreichen, dass sowohl die mechanische als auch die magnetische Materialantwort möglichst gut abbildbar sind. Die Betrachtung der relativen Fehler für sieben analysierte Partikelvolumenanteile zwischen 10 % und 40 % belegt die Güte des Modells sowohl für die Kalibrierungs- als auch für die Validierungs-Lastfälle. Abschließend zeigt die Modellvorhersage des nicht in der Parametrisierung berücksichtigten MR-Effektes eine sehr gute Übereinstimmung bis zu Volumenanteilen von ca. 25 %.

Mit den so kalibrierten makroskopischen Materialmodellen erfolgt im Anschluss die Untersuchung des MS-Effektes verschiedener MRE-Proben. Dabei lassen sich unabhängig von der Probenform stark heterogene Spannungs- und Dehnungsfelder in den MRE feststellen. Eine systematische Untersuchung makroskopischer Lastterme kann diese Charakteristik in den Sprüngen der ponderomotorischen Spannung sowie der auftretenden ponderomotorischen Volumenkraftdichte begründen. Die Untersuchungen verdeutlichen, dass sich mikro- und makroskopische Einflüsse in Proben nicht getrennt voneinander betrachten lassen und belegen so die Vorteile der gewählten mehrskaligen Vorgehensweise. Eine Untersuchung von rechteckigen und elliptischen Proben mit verschiedenen Seitenverhältnissen ergibt schließlich einen maximalen MS-Effekt von ca. 7 % für eine elliptische Geometrie mit dem Seitenverhältnis von Drei zu Vier in Feldrichtung. Weiterhin zeigt sich eine Zunahme der magnetisch induzierten Dehnung mit steigendem Partikelvolumenanteil, die in qualitativer Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen steht. Letztlich ergibt eine Lokalisierung an ausgewählten Punkten einer Kreisprobe eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Makromodell und der effektiven Antwort der zugrunde liegenden RVE.

Neben dem MS-Effekt erfolgt eine abschließende Analyse des MR-Effektes makroskopischer Proben. Dabei zeigen sich sowohl unter Zug als auch unter Scherung im Vergleich zum MS-Effekt deutlich stärker ausgeprägte Effekte von maximal 12 % bzw. 35 %. Auch hier ergibt eine Untersuchung, dass die erzielbaren Effekte mit Erhöhung des Partikelvolumenanteiles zunehmen.

### *Fazit*

Insgesamt stellt der vorgestellte mehrskalige Modellierungsansatz ein effizientes Werkzeug zur Beschreibung von MRE dar. Dabei erlauben die mittels experimenteller Daten parametrisierten Materialmodelle für die Konstituenten in Verbindung mit numerischen Homogenisierungen die effektive Materialantwort simulativ vorherzusagen. Mit Hilfe des mikroskopisch kalibrierten Makromodells können außerdem typische Kopplungseffekte weichmagnetischer MRE-Proben abgebildet und makroskopische Einflussfaktoren untersucht werden, wobei durch Lokalisierungen auch mikroskopische Spannungen, Dehnungen und magnetische Felder ermittelbar sind. Aufgrund des beträchtlichen numerischen Aufwandes beschränken sich die durchgeführten Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit auf zweidimensionale Problemstellungen.

## 8.2 Ausblick

Aus den erzielten Ergebnissen resultiert eine Vielzahl von relevanten Punkten zur Fortführung dieser Arbeit, die im Folgenden diskutiert werden.

Um in Zukunft quantitative Vorhersagen der effektiven Materialantwort mittels mikroskopischer Simulationen zu ermöglichen, stellt eine valide Datenbasis der konstitutiven Eigenschaften von Partikeln und Matrix eine wesentliche Voraussetzung dar. Die experimentelle Untersuchung der magnetischen Eigenschaften von Mikropartikeln ist allerdings nicht frei von Problemen. Da die in der Literatur vorhandenen Daten für Carbonyleisen und NdFeB auf Messungen von gepresstem Pulver bzw. makroskopischen Prüfkörpern basieren, liegen keine belastbaren Daten vor, die das reine konstitutive Verhalten in quantitativer Art und Weise zugänglich machen. Geeigneter sind dagegen Einzelpartikel-Messungen wie sie etwa für Nickel-Partikel mit einer Größe im Bereich von ca. 200  $\mu\text{m}$  in METSCH et al. [106] beschrieben sind. Aufgrund der geringen Abmessungen von CEP ist diese Technik allerdings für Carbonyleisen nicht sinnvoll umsetzbar. Eine Alternative stellen daher Messungen sphärischer Probekörper dar, die aufgrund ihrer Form makroskopisch homogene Felder im Inneren aufweisen. Ist der Partikelvolumengehalt der Proben außerdem niedrig, nimmt die Wahrscheinlichkeit von Partikeln mit geringen Relativabständen deutlich ab. Somit lässt sich dann auf die lokalen Felder innerhalb der magnetisierbaren Einschlüsse mittels analytischer Homogenisierungsmethoden mit hoher Genauigkeit rückschließen.

Die hier getroffene Vereinfachung auf zweidimensionale Problemstellungen ermöglicht zwar die qualitative Analyse von MRE, schließt jedoch eine quantitative Auslegung realer MRE-Bauteile aus. In Zukunft ist daher eine Erweiterung auf dreidimensionale Problemstellungen, wie bei MUKHERJEE et al. [115, 116], von besonderer Relevanz. Dabei ist allerdings eine immense Steigerung des numerischen Aufwandes zu bewältigen. Da neben den konstitutiven Eigenschaften von Partikeln und Matrix auch deren mikrostrukturelle Anordnung von äußerster Relevanz ist, muss außerdem die Berücksichtigung realer Partikelverteilungen erfolgen. Dies lässt sich einerseits durch die direkte Erstellung von FE-Netzen aus Computer-Tomographie (CT)-Daten oder indirekt durch die Generierung statistisch äquivalenter Volumenelemente (SVE) erreichen, s. BALZANI et al. [4] oder SCHEUNEMANN et al. [145]. Dabei sind SVE aufgrund der deutlichen Reduktion der im Materialausschnitt enthaltenen Einschlüsse aus rechentechnischer Sicht erheblich effizienter.

Da sich mit strukturierten MRE deutlich größere Effekte als mit klassischen MRE erzielen lassen [60], ist auch die makroskopische Modellierung dieser Materialklasse anzustreben. Diese verhalten sich allerdings im Gegensatz zu MRE mit vollständig stochastischer Partikelverteilung stark anisotrop. In Anbetracht der komplexen Mikrostruktur, die sich beim Vernetzungsprozess unter Feldeinfluss ausbildet, wird eine idealisierte Beschreibung als transversalisotropes Ersatzkontinuum unter Umständen nicht ausreichen. Hier stellt daher ein hybrider Modellierungsansatz gemäß IBÁÑEZ et al. [64] und SETTGAST et al. [149, 150] einen möglichen Zugang dar. Dabei werden die Abweichungen zwischen Modell und homogenisierter Materialantwort durch ein künstliches neuronales Netz abgebildet.

Weiterer Forschungsbedarf besteht auch bei der Modellierung hartmagnetischer MRE. Hier zeigt sich, dass neben den Eigenschaften von Partikeln und Matrix auch Informationen über die Grenzschicht benötigt werden [158, 163]. Dabei stellt sich die Frage, wie Schädigungsprozesse experimentell ermittelbar sind, um diese einem geeigneten Modell zugänglich zu machen. Unter Voraussetzung solcher Daten ist bspw. die Verwendung von Kohäsivzonen-Elementen

in FE-Simulationen denkbar. Weiterhin erfordert die simulative Analyse dieser Materialklasse die Anwendung von Algorithmen zur Neuvernetzung während der Berechnung. Nur so lässt sich eine stabile Simulation bis hin zu sehr geringen Steifigkeiten erzielen.

Die vorgeschlagenen Verbesserungen und Erweiterungen der entwickelten Modellierungsstrategie stellen wesentliche Schritte hin zur quantitativen Vorhersage des Verhaltens von MRE dar. Durch virtuelles Designen kann so in Zukunft die Nutzung dieser vielversprechenden Materialien in technischen Anwendungen vorangetrieben werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] ABALI, B. & QUEIRUGA, A.: Theory and computation of electromagnetic fields and thermomechanical structure interaction for systems undergoing large deformations. *Journal of Computational Physics* 394 (2019), S. 200–231.
- [2] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 2. Aufl. Berlin: Springer Vieweg, 2012.
- [3] ASADI KHANOUKI, M.; SEDAGHATI, R. & HEMMATIAN, M.: Experimental characterization and microscale modeling of isotropic and anisotropic magnetorheological elastomers. *Composites Part B: Engineering* 176 (2019), S. 107311.
- [4] BALZANI, D.; SCHEUNEMANN, L.; BRANDS, D. & SCHRÖDER, J.: Construction of two- and three-dimensional statistically similar RVEs for coupled micro-macro simulations. *Computational Mechanics* 54.5 (2014), S. 1269–1284.
- [5] BASTOLA, A. K. & HOSSAIN, M.: A review on magneto-mechanical characterizations of magnetorheological elastomers. *Composites Part B: Engineering* 200 (2020), S. 108348.
- [6] BECKER, T. I.; BÖHM, V.; CHAVEZ VEGA, J.; ODENBACH, S.; RAIKHER, Y. L. & ZIMMERMANN, K.: Magnetic-field-controlled mechanical behavior of magneto-sensitive elastomers in applications for actuator and sensor systems. *Archive of Applied Mechanics* 89.1 (2019), S. 133–152.
- [7] BEHROOZ, M. & GORDANINEJAD, F.: A flexible micro fluid transport system featuring magnetorheological elastomer. *Smart Materials and Structures* 25.2 (2016), S. 025011.
- [8] BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. & ELKHODARY, K. I.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Second edition. Chichester, West Sussex, United Kingdom: Wiley, 2014.
- [9] BENGISU, M. & FERRARA, M.: *Materials that Move: Smart Materials, Intelligent Design*. Springer, 2018.
- [10] BERGQVIST, A.: Magnetic vector hysteresis model with dry friction-like pinning. *Physica B: Condensed Matter* 233.4 (1997), S. 342–347.
- [11] BILLER, A. M.; STOLBOV, O. V. & RAIKHER, Y. L.: Modeling of particle interactions in magnetorheological elastomers. *Journal of Applied Physics* 116.11 (2014), S. 114904.
- [12] BODELOT, L.; VOROPAIEFF, J.-P. & PÖSSINGER, T.: Experimental investigation of the coupled magneto-mechanical response in magnetorheological elastomers. *Experimental Mechanics* 58.2 (2018), S. 207–221.
- [13] BORIN, D. Y.; STEPANOV, G. V. & ODENBACH, S.: Tuning the tensile modulus of magnetorheological elastomers with magnetically hard powder. *Journal of Physics: Conference Series* 412 (2013), S. 012040.
- [14] BRUMMUND, J.: “Eine Notiz zur Ableitung von Sprungbedingungen und Feldgleichungen in einer Fläche aus den zugehörigen Feldgleichungen im Raum mittels Distributionen und Anwendungen”. Dresden, 2013.

- 
- [15] BUSTAMANTE, R.; DORFMANN, A. & OGDEN, R. W.: Numerical solution of finite geometry boundary-value problems in nonlinear magnetoelasticity. *International Journal of Solids and Structures* 48.6 (2011), S. 874–883.
- [16] BUSTAMANTE, R.: Transversely isotropic nonlinear magneto-active elastomers. *Acta Mechanica* 210.3 (2010), S. 183–214.
- [17] BÖSE, H.; RABINDRANATH, R. & EHRLICH, J.: Soft magnetorheological elastomers as new actuators for valves. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 23.9 (2012), S. 989–994.
- [18] CANTERA, M. A.; BEHROOZ, M.; GIBSON, R. F. & GORDANINEJAD, F.: Modeling of magneto-mechanical response of magnetorheological elastomers (MRE) and MRE-based systems: a review. *Smart Materials and Structures* 26.2 (2017), S. 023001.
- [19] CARLSON, J. D. & JOLLY, M. R.: MR fluid, foam and elastomer devices. *Mechatronics* 10.4–5 (2000), S. 555–569.
- [20] CHATZIGEORGIOU, G.; JAVILI, A. & STEINMANN, P.: Unified magnetomechanical homogenization framework with application to magnetorheological elastomers. *Mathematics and Mechanics of Solids* 19.2 (2014), S. 193–211.
- [21] CHAVEZ VEGA, J.; KAUFHOLD, T.; BÖHM, V.; BECKER, T.; ZIMMERMANN, K.; MARTENS, M.; SCHILLING, M.; GUNDERMANN, T. & ODENBACH, S.: Field-induced plasticity of magneto-sensitive elastomers in context with soft robotic gripper applications. *PAMM* 17.1 (2017), S. 23–26.
- [22] COLEMAN, B. D. & NOLL, W.: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13.1 (1963), S. 167–178.
- [23] CREMER, P.; LÖWEN, H. & MENZEL, A. M.: Tailoring superelasticity of soft magnetic materials. *Applied Physics Letters* 107.17 (2015), S. 171903.
- [24] DANAS, K.: Effective response of classical, auxetic and chiral magnetoelastic materials by use of a new variational principle. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 105 (2017), S. 25–53.
- [25] DANAS, K.; KANKANALA, S. & TRIANTAFYLIDIS, N.: Experiments and modeling of iron-particle-filled magnetorheological elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60.1 (2012), S. 120–138.
- [26] DENG, H.-x.; GONG, X.-l. & WANG, L.-h.: Development of an adaptive tuned vibration absorber with magnetorheological elastomer. *Smart Materials and Structures* 15.5 (2006), N111–N116.
- [27] DESTRADE, M.; SACCOMANDI, G. & SGURA, I.: Methodical Fitting for Mathematical Models of Rubber-like Materials. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 473.2198 (2017), S. 20160811.
- [28] DIGUET, G.; BEAUGNON, E. & CAVAILLÉ, J. Y.: Shape effect in the magnetostriction of ferromagnetic composite. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 322.21 (2010), S. 3337–3341.
- [29] DOHMEN, E.: Zum einatz magnetischer hybridmaterialien in adaptiven leichtbaustrukturen. Diss. TU Dresden, 2016.

- [30] DORFMANN, A. & OGDEN, R. W.: Magnetoelastic modelling of elastomers. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 22.4 (2003), S. 497–507.
- [31] DORFMANN, A. & OGDEN, R. W.: Nonlinear magnetoelastic deformations. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 57.4 (2004), S. 599–622.
- [32] DORFMANN, A. & OGDEN, R. W.: Nonlinear magnetoelastic deformations of elastomers. *Acta Mechanica* 167.1-2 (2004), S. 13–28.
- [33] DU, H.; LI, W. & ZHANG, N.: Semi-active variable stiffness vibration control of vehicle seat suspension using an MR elastomer isolator. *Smart Materials and Structures* 20.10 (2011), S. 105003.
- [34] ERINGEN, A. C. & MAUGIN, G. A.: *Electrodynamics of continua I: Foundations and solid media*. New York: Springer, 1990.
- [35] FISCHER, L. & MENZEL, A. M.: Magnetically induced elastic deformations in model systems of magnetic gels and elastomers containing particles of mixed size. *Smart Materials and Structures* 30.1 (2020), S. 014003.
- [36] FLORY, P.: Thermodynamic relations for high elastic materials. *Transactions of the Faraday Society* 57 (1961), S. 829–838.
- [37] GALIPEAU, E. & PONTE CASTAÑEDA, P.: The effect of particle shape and distribution on the macroscopic behavior of magnetoelastic composites. *International Journal of Solids and Structures* 49.1 (2012), S. 1–17.
- [38] GALIPEAU, E. & PONTE CASTAÑEDA, P.: A finite-strain constitutive model for magnetorheological elastomers: Magnetic torques and fiber rotations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 61.4 (2013), S. 1065–1090.
- [39] GALIPEAU, E.; RUDYKH, S.; DEBOTTON, G. & PONTE CASTAÑEDA, P.: Magnetoactive elastomers with periodic and random microstructures. *International Journal of Solids and Structures* 51.18 (2014), S. 3012–3024.
- [40] GAO, W. & WANG, X.: Steady shear characteristic and behavior of magneto-thermoelasticity of isotropic MR elastomers. *Smart Materials and Structures* 25.2 (2016), S. 025026.
- [41] GARCIA-GONZALEZ, D. & HOSSAIN, M.: A microstructural-based approach to model magneto-viscoelastic materials at finite strains. *International Journal of Solids and Structures* 208-209 (2021), S. 119–132.
- [42] GEBHART, P.; ATTARAN, A. & WALLMERSPERGER, T.: Multiphysics modeling of porous ferrogels at finite strains. *Physical Sciences Reviews* (2020).
- [43] GEBHART, P. & WALLMERSPERGER, T.: A general framework for the modeling of porous ferrogels at finite strains. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 122 (2019), S. 69–83.
- [44] GINDER, J. M.; CLARK, S. M.; SCHLOTTER, W. F. & NICHOLS, M. E.: Magnetostrictive Phenomena in Magnetorheological Elastomers. *International Journal of Modern Physics B* 16.17-18 (2002), S. 2412–2418.
- [45] GINDER, J. M.; NICHOLS, M. E.; ELIE, L. D. & TARDIFF, J. L.: “Magnetorheological elastomers: properties and applications”. Hrsg. von WUTTIG, M. R. Newport Beach, CA, 1999, S. 131–138.

- 
- [46] GOLDMANN, J.: Schädigungsprognose mittels Homogenisierung und mikromechanischer Materialcharakterisierung. Diss. TU Dresden, 2018.
- [47] GOSHKODERIA, A. & RUDYKH, S.: Stability of magnetoactive composites with periodic microstructures undergoing finite strains in the presence of a magnetic field. *Composites Part B: Engineering* 128 (2017), S. 19–29.
- [48] GREVE, R.: *Kontinuumsmechanik Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*. Berlin: Springer Berlin, 2013.
- [49] GROOT, S. R. de & SUTTORP, L. G.: *Foundations of electrodynamics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1972.
- [50] GROSS, D. & SEELIG, T.: *Bruchmechanik: mit einer Einführung in die Mikromechanik*. 3., neu bearb. und erw. Aufl. Berlin: Springer, 2001.
- [51] GUAN, X.; DONG, X. & OU, J.: Magnetostrictive effect of magnetorheological elastomer. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 320.3-4 (2008), S. 158–163.
- [52] GUÐMUNDSSON, Í.: *A Feasibility Study of Magnetorheological Elastomers for a Potential Application in Prosthetic Devices*. Masterarbeit. University of Iceland, 2011.
- [53] HAASEMANN, G.; KÄSTNER, M. & ULBRICHT, V.: “Multi-Scale Modelling and Simulation of Textile Reinforced Materials”. *III European Conference on Computational Mechanics*. Hrsg. von MOTASOARES, C. A.; MARTINS, J. A. C.; RODRIGUES, H. C.; AMBRÓSIO, J. A. C.; PINA, C. A. B.; MOTASOARES, C. M.; PEREIRA, E. B. R. & FOLGADO, J. Dordrecht: Springer Netherlands, 2006, S. 510–510.
- [54] HALDAR, K.; KIEFER, B. & MENZEL, A.: Finite element simulation of rate-dependent magneto-active polymer response. *Smart Materials and Structures* 25.10 (2016), S. 104003.
- [55] HAN, Y.; MOHLA, A.; HUANG, X.; HONG, W. & FAIDLEY, L. E.: Magnetostriction and Field Stiffening of Magneto-Active Elastomers. *International Journal of Applied Mechanics* 7.1 (2015), S. 1550001.
- [56] HAUPT, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [57] HENROTTE, F. & HAMEYER, K.: A dynamical vector hysteresis model based on an energy approach. *IEEE Transactions on Magnetics* 42.4 (2006), S. 899–902.
- [58] HENROTTE, F.; NICOLET, A. & HAMEYER, K.: An energy-based vector hysteresis model for ferromagnetic materials. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* 25.1 (2006). Hrsg. von DEMENKO, A., S. 71–80.
- [59] HILL, R.: Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11.5 (1963), S. 357–372.
- [60] HIPTMAIR, F.; MAJOR, Z.; HABLACHER, R. & HILD, S.: Design and application of permanent magnet flux sources for mechanical testing of magnetoactive elastomers at variable field directions. *Review of Scientific Instruments* 86.8 (2015), S. 085107.
- [61] HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear solid mechanics - A continuum approach for engineering*. Chichester: John Wiley & Sons, 2000.

- [62] HU, W.; LUM, G. Z.; MASTRANGELI, M. & SITTI, M.: Small-scale soft-bodied robot with multimodal locomotion. *Nature* 554.7690 (2018), S. 81–85.
- [63] HUBER, C. et al.: 3D print of polymer bonded rare-earth magnets, and 3D magnetic field scanning with an end-user 3D printer. *Applied Physics Letters* 109.16 (2016), S. 162401.
- [64] IBÁÑEZ, R.; ABISSET-CHAVANNE, E.; GONZÁLEZ, D.; DUVAL, J.-L.; CUETO, E. & CHINESTA, F.: Hybrid constitutive modeling: data-driven learning of corrections to plasticity models. *International Journal of Material Forming* 12.4 (2019), S. 717–725.
- [65] ITSKOV, M. & KHIÊM, V. N.: A polyconvex anisotropic free energy function for electro- and magneto-rheological elastomers. *Mathematics and Mechanics of Solids* 21.9 (2016), S. 1126–1137.
- [66] JACKSON, J. D.: *Klassische elektrodynamik*. 4. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter, 2006.
- [67] JAVILI, A.; CHATZIGEORGIOU, G. & STEINMANN, P.: Computational homogenization in magneto-mechanics. *International Journal of Solids and Structures* 50.25-26 (2013), S. 4197–4216.
- [68] JILES, D.: *Introduction to magnetism and magnetic materials*. Third edition. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016.
- [69] JILES, D. & ATHERTON, D.: Theory of ferromagnetic hysteresis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 61.1 (1986), S. 48 –60.
- [70] JOLLY, M. R.; CARLSON, J. D. & MUÑOZ, B. C.: A model of the behaviour of magnetorheological materials. *Smart Materials and Structures* 5.5 (1996), S. 607–614.
- [71] JOLLY, M. R.; CARLSON, J. D.; MUÑOZ, B. C. & BULLIONS, T. A.: The Magnetoviscoelastic Response of Elastomer Composites Consisting of Ferrous Particles Embedded in a Polymer Matrix. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 7.6 (1996), S. 613–622.
- [72] KALINA, K. A.; BRUMMUND, J.; METSCH, P.; KÄSTNER, M.; BORIN, D. Y.; LINKE, J. M. & ODENBACH, S: Modeling of magnetic hystereses in soft MREs filled with NdFeB particles. *Smart Materials and Structures* 26.10 (2017), S. 105019.
- [73] KALINA, K. A.; METSCH, P.; BRUMMUND, J. & KÄSTNER, M.: Development of a Macro-Model for Magnetorheological Elastomers based on Microscopic Simulations. *PAMM* 19.1 (2019).
- [74] KALINA, K. A.; METSCH, P.; BRUMMUND, J. & KÄSTNER, M.: A macroscopic model for magnetorheological elastomers based on microscopic simulations. *International Journal of Solids and Structures* 193-194 (2020), S. 200–212.
- [75] KALINA, K. A.; METSCH, P. & KÄSTNER, M.: Microscale modeling and simulation of magnetorheological elastomers at finite strains: A study on the influence of mechanical preloads. *International Journal of Solids and Structures* 102-103 (2016), S. 286–296.
- [76] KALINA, K. A.; RAßLOFF, A.; WOLLNER, M.; METSCH, P.; BRUMMUND, J. & KÄSTNER, M.: Multiscale modeling and simulation of magneto-active elastomers based on experimental data. *Physical Sciences Reviews* (2020), S. 20200012.
- [77] KANKANALA, S. & TRIANTAFYLIDIS, N.: On finitely strained magnetorheological elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 52.12 (2004), S. 2869 –2908.

- 
- [78] KARACA, H. E.; KARAMAN, I.; BASARAN, B.; REN, Y.; CHUMLYAKOV, Y. I. & MAIER, H. J.: Magnetic Field-Induced Phase Transformation in NiMnCoIn Magnetic Shape-Memory Alloys-A New Actuation Mechanism with Large Work Output. *Advanced Functional Materials* 19.7 (2009), S. 983–998.
- [79] KEIP, M.-A. & SRIDHAR, A.: A variationally consistent phase-field approach for micro-magnetic domain evolution at finite deformations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 125 (2019), S. 805–824.
- [80] KEIP, M.-A. & RAMBAUSEK, M.: A multiscale approach to the computational characterization of magnetorheological elastomers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 107.4 (2016), S. 338–360.
- [81] KEIP, M.-A. & RAMBAUSEK, M.: Computational and analytical investigations of shape effects in the experimental characterization of magnetorheological elastomers. *International Journal of Solids and Structures* 121 (2017), S. 1–20.
- [82] KEIP, M. & POLUKHOV, E.: Computational stability analysis of magnetorheological elastomers across scales. *PAMM* 18.1 (2018).
- [83] KIEFER, B. & LAGOUDAS, D. C.: Magnetic field-induced martensitic variant reorientation in magnetic shape memory alloys. *Philosophical Magazine* 85.33-35 (2005), S. 4289–4329.
- [84] KIEFER, B. & LAGOUDAS, D.: Modeling the Coupled Strain and Magnetization Response of Magnetic Shape Memory Alloys under Magnetomechanical Loading. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 20.2 (2009), S. 143–170.
- [85] KIM, Y.; PARADA, G. A.; LIU, S. & ZHAO, X.: Ferromagnetic soft continuum robots. *Science Robotics* 4.33 (2019).
- [86] KREISSL, P.; HOLM, C. & WEEBER, R.: Frequency-dependent magnetic susceptibility of magnetic nanoparticles in a polymer solution: a simulation study. *Soft Matter* 17.1 (2021), S. 174–183.
- [87] KÄSTNER, M.: Skalenübergreifende Modellierung und Simulation des mechanischen Verhaltens von textilverstärktem Polypropylen unter Nutzung der XFEM. Diss. TU Dresden, 2009.
- [88] LEFÈVRE, V.; DANAS, K. & LOPEZ-PAMIES, O.: Two families of explicit models constructed from a homogenization solution for the magnetoelastic response of MREs containing iron and ferrofluid particles. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 119 (2020), S. 103362.
- [89] LEONARD, M.; WANG, N.; LOPEZ-PAMIES, O. & NAKAMURA, T.: The nonlinear elastic response of filled elastomers: Experiments vs. theory for the basic case of particulate fillers of micrometer size. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 135 (2020), S. 103781.
- [90] LI, W. H.; ZHOU, Y. & TIAN, T. F.: Viscoelastic properties of MR elastomers under harmonic loading. *Rheologica Acta* 49.7 (2010), S. 733–740.
- [91] LI, Y.; LI, J.; LI, W. & DU, H.: A state-of-the-art review on magnetorheological elastomer devices. *Smart Materials and Structures* 23.12 (2014), S. 123001.

- [92] LI, Y.; LI, J.; TIAN, T. & LI, W.: A highly adjustable magnetorheological elastomer base isolator for applications of real-time adaptive control. *Smart Materials and Structures* 22.9 (2013), S. 095020.
- [93] LINKE, J.; BORIN, D. Y. & ODENBACH, S.: First-order reversal curve analysis of magnetoactive elastomers. *RSC Advances* 6.102 (2016), S. 100407–100416.
- [94] LINNEMANN, K.; KLINKEL, S. & WAGNER, W.: A constitutive model for magnetostrictive and piezoelectric materials. *International Journal of Solids and Structures* 46.5 (2009), S. 1149–1166.
- [95] LINNEMANN, K.: Magnetostruktive und piezoelektrische Materialien: konstitutive Modellierung und Finite-Elemente-Formulierung. Diss. Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH), 2008.
- [96] LIU, Y.; CHEN, S.; TAN, X. & CAO, C.: A Finite Element Framework for Magneto-Actuated Large Deformation and Instability of Slender Magneto-Active Elastomers. *International Journal of Applied Mechanics* 12.01 (2020), S. 2050013.
- [97] LOKANDER, M. & STENBERG, B.: Improving the magnetorheological effect in isotropic magnetorheological rubber materials. *Polymer Testing* 22.6 (2003), S. 677–680.
- [98] LUX, C.: Modellierung, Simulation und Homogenisierung des magnetomechanischen Feldproblems für magnetorheologische Elastomere. Diss. TU Dresden, 2016.
- [99] MA, B.; HERCHENROEDER, J.; SMITH, B.; SUDA, M.; BROWN, D. & CHEN, Z.: Recent development in bonded NdFeB magnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 239.1-3 (2002), S. 418–423.
- [100] MARTIN, J. E.; ANDERSON, R. A.; READ, D. & GULLEY, G.: Magnetostriction of field-structured magnetoelastomers. *Physical Review E* 74.5 (2006), S. 051507.
- [101] MARTIN, J. E.; ANDERSON, R. A. & WILLIAMSON, R. L.: Generating strange magnetic and dielectric interactions: Classical molecules and particle foams. *The Journal of chemical physics* 118.3 (2003), S. 1557–1570.
- [102] MELENEV, P.; RAIKHER, Y.; STEPANOV, G.; RUSAKOV, V. & POLYGALOVA, L.: Modeling of the Field-Induced Plasticity of Soft Magnetic Elastomers. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 22.6 (2011), S. 531–538.
- [103] MENZEL, A. M.: Mesoscopic characterization of magnetoelastic hybrid materials: magnetic gels and elastomers, their particle-scale description, and scale-bridging links. *Archive of Applied Mechanics* 89.1 (2019), S. 17–45.
- [104] METSCH, P.; KALINA, K. A.; BRUMMUND, J. & KÄSTNER, M.: Two- and three-dimensional modeling approaches in magneto-mechanics: a quantitative comparison. *Archive of Applied Mechanics* 89.1 (2019), S. 47–62.
- [105] METSCH, P.; KALINA, K. A.; SPIELER, C. & KÄSTNER, M.: A numerical study on magnetostrictive phenomena in magnetorheological elastomers. *Computational Materials Science* 124 (2016), S. 364–374.
- [106] METSCH, P.; SCHMIDT, H.; SINDERSBERGER, D.; KALINA, K. A.; BRUMMUND, J.; AUERNHAMMER, G. K.; MONKMAN, G. J. & KÄSTNER, M.: Field-induced interactions in magnetoactive elastomers - A comparison of experiments and simulations. *Smart Materials and Structures* 29.8 (2020).

- 
- [107] MIEHE, C.; ROSATO, D. & KIEFER, B.: Variational principles in dissipative electro-magneto-mechanics: A framework for the macro-modeling of functional materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86.10 (2011), S. 1225–1276.
- [108] MIEHE, C.: Comparison of two algorithms for the computation of fourth-order isotropic tensor functions. *Computers & structures* 66.1 (1998), S. 37–43.
- [109] MIEHE, C. & KECK, J.: Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48.2 (2000), S. 43.
- [110] MIEHE, C.; KIEFER, B. & ROSATO, D.: An incremental variational formulation of dissipative magnetostriction at the macroscopic continuum level. *International Journal of Solids and Structures* 48.13 (2011), S. 1846–1866.
- [111] MIEHE, C. & LAMBRECHT, M.: Algorithms for computation of stresses and elasticity moduli in terms of Seth-Hill’s family of generalized strain tensors. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 17.5 (2001), S. 337–353.
- [112] MIEHE, C.; VALLICOTTI, D. & TEICHTMEISTER, S.: Homogenization and multiscale stability analysis in finite magneto-electro-elasticity. Application to soft matter EE, ME and MEE composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 300 (2016), S. 294–346.
- [113] MUKHERJEE, D. & DANAS, K.: An evolving switching surface model for ferromagnetic hysteresis. *Journal of Applied Physics* 125.3 (2019), S. 033902.
- [114] MUKHERJEE, D.: Theoretical and numerical modeling of magnetorheological elastomers comprising magnetically soft and hard particles. Diss. École Polytechnique, 2020.
- [115] MUKHERJEE, D.; BODELOT, L. & DANAS, K.: Microstructurally-guided explicit continuum models for isotropic magnetorheological elastomers with iron particles. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 120 (2019), S. 103380.
- [116] MUKHERJEE, D.; RAMBAUSEK, M. & DANAS, K.: An explicit dissipative model for isotropic hard magnetorheological elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 151 (2021), S. 104361.
- [117] MULLINS, L.: Effect of stretching on the properties of rubber. *Rubber Chemistry and Technology* 21.2 (1948), S. 281–300.
- [118] ODENBACH, S.: Recent progress in magnetic fluid research. *Journal of Physics: Condensed Matter* 16.32 (2004), R1135–R1150.
- [119] ODENBACH, S. E.: *Ferrofluids: Magnetically Controllable Fluids and Their Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Lecture Notes in Physics 594, 2003.
- [120] OGDEN, R. W.: *Non-linear elastic deformations*. Mineola, N.Y: Dover Publications, 1997.
- [121] PAO, Y.-H.: “Electromagnetic forces in deformable continua”. *Mechanics today*. Hrsg. von NEMAT-NASSER, S. Bd. 4. Pergamon Press, 1978, S. 209–305.
- [122] PELTERET, J.-P.; DAVYDOV, D.; McBRIDE, A.; VU, D. K. & STEINMANN, P.: Computational electro-elasticity and magneto-elasticity for quasi-incompressible media immersed in free space. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 108.11 (2016), S. 1307–1342.

- [123] PELTERET, J.-P. & STEINMANN, P.: *Magneto-active polymers: fabrication, characterisation, modelling and simulation at the micro- and macro-scale*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019.
- [124] PETRA, C. G.; SCHENK, O. & ANITESCU, M.: Real-time stochastic optimization of complex energy systems on high-performance computers. *IEEE Computing in Science & Engineering* 16.5 (2014), S. 32–42.
- [125] PETRA, C. G.; SCHENK, O.; LUBIN, M. & GÄRTNER, K.: An augmented incomplete factorization approach for computing the Schur complement in stochastic optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing* 36.2 (2014), S. C139–C162.
- [126] POLUKHOV, E. & KEIP, M.-A.: Multiscale stability analysis of periodic magnetorheological elastomers. *Mechanics of Materials* (2020), S. 103699.
- [127] PONTE CASTAÑEDA, P. & GALIPEAU, E.: Homogenization-based constitutive models for magnetorheological elastomers at finite strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59.2 (2011), S. 194–215.
- [128] PREISACH, F.: Über die magnetische Nachwirkung. *Zeitschrift für Physik* 94.5-6 (1935), S. 277–302.
- [129] PRIGOZHIN, L.; SOKOLOVSKY, V.; BARRETT, J. W. & ZIRKA, S. E.: On the Energy-Based Variational Model for Vector Magnetic Hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics* 52.12 (2016), S. 1–11.
- [130] PSARRA, E.; BODELOT, L. & DANAS, K.: Two-field surface pattern control via marginally stable magnetorheological elastomers. *Soft Matter* 13.37 (2017), S. 6576–6584.
- [131] PULJIZ, M.; HUANG, S.; AUERNHAMMER, G. K. & MENZEL, A. M.: Forces on Rigid Inclusions in Elastic Media and Resulting Matrix-Mediated Interactions. *Physical Review Letters* 117.23 (2016), S. 238003.
- [132] PULJIZ, M.; HUANG, S.; KALINA, K. A.; NOWAK, J.; ODENBACH, S.; KÄSTNER, M.; AUERNHAMMER, G. K. & MENZEL, A. M.: Reversible magnetomechanical collapse: virtual touching and detachment of rigid inclusions in a soft elastic matrix. *Soft Matter* 14.33 (2018), S. 6809–6821.
- [133] PÖSSINGER, T.: Experimental characterization, modeling and simulation of magnetorheological elastomers. Diss. Ecole Polytechnique, 2015.
- [134] RAMBAUSEK, M. & KEIP, M.-A.: Analytical estimation of non-local deformation-mediated magneto-electric coupling in soft composites. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 474.2216 (2018), S. 20170803.
- [135] RAMBAUSEK, M.: Magneto-electro-elasticity of soft bodies across scales. Diss. Universität Stuttgart, 2020.
- [136] RAMBAUSEK, M.; GÖKÜZÜM, F. S.; NGUYEN, L. T. K. & KEIP, M.: A two-scale FE-FFT approach to nonlinear magneto-elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 117.11 (2019), S. 1117–1142.
- [137] ROMEIS, D.; METSCH, P.; KÄSTNER, M. & SAPHIANNIKOVA, M.: Theoretical models for magneto-sensitive elastomers: A comparison between continuum and dipole approaches. *Physical Review E* 95.4 (2017), S. 042501.

- 
- [138] ROMEIS, D.; TOSHCHEVIKOV, V. & SAPHIANNIKOVA, M.: Elongated micro-structures in magneto-sensitive elastomers: a dipolar mean field model. *Soft Matter* 12 (2016), S. 9364–9376.
- [139] RUDYKH, S. & BERTOLDI, K.: Stability of anisotropic magnetorheological elastomers in finite deformations: A micromechanical approach. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 61.4 (2013), S. 949–967.
- [140] SALAS, E. & BUSTAMANTE, R.: Numerical solution of some boundary value problems in nonlinear magneto-elasticity. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 26.2 (2015), S. 156–171.
- [141] SAVELIEV, D. V. et al.: Giant Extensional Strain of Magnetoactive Elastomeric Cylinders in Uniform Magnetic Fields. *Materials* 13.15 (2020), S. 3297.
- [142] SAXENA, P.; HOSSAIN, M. & STEINMANN, P.: A theory of finite deformation magneto-viscoelasticity. *International Journal of Solids and Structures* 50.24 (2013), S. 3886–3897.
- [143] SAXENA, P.; HOSSAIN, M. & STEINMANN, P.: Nonlinear magneto-viscoelasticity of transversally isotropic magneto-active polymers. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 470.2166 (2014), S. 20140082.
- [144] SAXENA, P.; PELTERET, J.-P. & STEINMANN, P.: Modelling of iron-filled magneto-active polymers with a dispersed chain-like microstructure. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 50 (2015), S. 132–151.
- [145] SCHEUNEMANN, L.; BALZANI, D.; BRANDS, D. & SCHRÖDER, J.: Design of 3D statistically similar Representative Volume Elements based on Minkowski functionals. *Mechanics of Materials* 90 (2015), S. 185–201.
- [146] SCHRÖDER, J. & HACKL, K., Hrsg.: *Plasticity and beyond: microstructures, crystal-plasticity and phase transitions*. Courses and lectures / International Centre for Mechanical Sciences 550. Wien: Springer, 2014.
- [147] SCHUBERT, G.: Manufacture, characterisation and modelling of magneto-rheological elastomers. Diss. University of Glasgow, 2014.
- [148] SCHÜMANN, M.; BORIN, D. Y.; HUANG, S.; AUERNHAMMER, G. K.; MÜLLER, R & ODENBACH, S.: A characterisation of the magnetically induced movement of NdFeB-particles in magnetorheological elastomers. *Smart Materials and Structures* 26.9 (2017), S. 095018.
- [149] SETTGAST, C.; ABENDROTH, M. & KUNA, M.: Constitutive modeling of plastic deformation behavior of open-cell foam structures using neural networks. *Mechanics of Materials* 131 (2019), S. 1–10.
- [150] SETTGAST, C.; HÜTTER, G.; KUNA, M. & ABENDROTH, M.: A hybrid approach to simulate the homogenized irreversible elastic-plastic deformations and damage of foams by neural networks. *International Journal of Plasticity* 126 (2020), S. 102624.
- [151] SIMO, J. C. & HUGHES, T. J. R.: *Computational inelasticity*. Corr. 2. print. Interdisciplinary applied mathematics Mechanics and materials 7. New York, NY: Springer, 2000.
- [152] SKALON, M.; GÖRTLER, M.; MEIER, B.; ARNEITZ, S.; URBAN, N.; MITSCHKE, S.; HUBER, C.; FRANKE, J. & SOMMITSCH, C.: Influence of Melt-Pool Stability in 3D Printing of NdFeB Magnets on Density and Magnetic Properties. *Materials* 13.1 (2019), S. 139.

- [153] SORIA-HERNÁNDEZ, C.; PALACIOS-PINEDA, L.; ELÍAS-ZÚÑIGA, A.; PERALES-MARTÍNEZ, I. & MARTÍNEZ-ROMERO, O.: Investigation of the Effect of Carbonyl Iron Micro-Particles on the Mechanical and Rheological Properties of Isotropic and Anisotropic MREs: Constitutive Magneto-Mechanical Material Model. *Polymers* 11.10 (2019), S. 1705.
- [154] SPIELER, C.; KÄSTNER, M.; GOLDMANN, J.; BRUMMUND, J. & ULBRICHT, V.: XFEM modeling and homogenization of magnetoactive composites. *Acta Mechanica* 224.11 (2013), S. 2453–2469.
- [155] STARK, S.; SEMENOV, A. S. & BALKE, H.: On the boundary conditions for the vector potential formulation in electrostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 102.11 (2015), S. 1704–1732.
- [156] STEPANOV, G. V.; BORIN, D. Y.; BAKHTIAROV, A. V. & STOROZHENKO, P. A.: Magnetic properties of hybrid elastomers with magnetically hard fillers: rotation of particles. *Smart Materials and Structures* 26.3 (2017), S. 035060.
- [157] STEPANOV, G. V.; BORIN, D. Y.; RAIKHER, Y. L.; MELENEV, P. V. & PEROV, N. S.: Motion of ferroparticles inside the polymeric matrix in magnetoactive elastomers. *Journal of Physics: Condensed Matter* 20.20 (2008), S. 204121.
- [158] SÁNCHEZ, P. A.; GUNDERMANN, T.; DOBROSERDOVA, A.; KANTOROVICH, S. S. & ODENBACH, S.: Importance of matrix inelastic deformations in the initial response of magnetic elastomers. *Soft Matter* 14.11 (2018), S. 2170–2183.
- [159] TERADA, K.; KATO, J.; HIRAYAMA, N.; INUGAI, T. & YAMAMOTO, K.: A method of two-scale analysis with micro-macro decoupling scheme: application to hyperelastic composite materials. *Computational Mechanics* 52.5 (2013), S. 1199–1219.
- [160] TIAN, T. F.; LI, W. H.; ALICI, G.; DU, H. & DENG, Y. M.: Microstructure and magnetorheology of graphite-based MR elastomers. *Rheologica Acta* 50.9-10 (2011), S. 825–836.
- [161] TIAN, T. F.; LI, W. H. & DENG, Y. M.: Sensing capabilities of graphite based MR elastomers. *Smart Materials and Structures* 20.2 (2011), S. 025022.
- [162] TORQUATO, S.: *Random heterogeneous materials: microstructure and macroscopic properties*. Interdisciplinary applied mathematics 16. New York, NY: Springer, 2002.
- [163] VAGANOV, M. V.; BORIN, D. Y.; ODENBACH, S. & RAIKHER, Y. L.: Modeling the magneto-mechanical behavior of a multigrain magnetic particle in an elastic environment. *Soft Matter* 15.24 (2019), S. 4947–4960.
- [164] VARGA, Z.; FILIPCSEI, G. & ZRÍNYI, M.: Magnetic field sensitive functional elastomers with tuneable elastic modulus. *Polymer* 47.1 (2006), S. 227–233.
- [165] VATANDOOST, H.; SEDAGHATI, R.; RAKHEJA, S. & HEMMATIAN, M.: Effect of pre-strain on compression mode properties of magnetorheological elastomers. *Polymer Testing* 93 (2021), S. 106888.
- [166] VOGEL, F.; BUSTAMANTE, R. & STEINMANN, P.: On some mixed variational principles in magneto-elastostatics. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 51 (2013), S. 157–169.

- 
- [167] VOLKOVA, T.; BÖHM, V.; KAUFHOLD, T.; POPP, J.; BECKER, F.; BORIN, D.; STEPANOV, G. & ZIMMERMANN, K.: Motion behaviour of magneto-sensitive elastomers controlled by an external magnetic field for sensor applications. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2016).
- [168] WANG, Y.; ZHANG, X.; OH, J. & CHUNG, K.: Fabrication and properties of magnetorheological elastomers based on CR/ENR self-crosslinking blends. *Smart Materials and Structures* 24.9 (2015), S. 095006.
- [169] WAPLER, M. C.; LEUPOLD, J.; DRAGONU, I.; ELVERFELD, D. von; ZAITSEV, M. & WALLRABE, U.: Magnetic properties of materials for MR engineering, micro-MR and beyond. *Journal of Magnetic Resonance* 242 (2014), S. 233–242.
- [170] WEEBER, R.; KREISSL, P. & HOLM, C.: Studying the field-controlled change of shape and elasticity of magnetic gels using particle-based simulations. *Archive of Applied Mechanics* (2018).
- [171] WOLLNER, M.: *Experimental characterization and constitutive modeling of the mechanical behavior of a silicone elastomer*. Belegarbeit. Dresden, 2020.
- [172] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [173] YANYO, L. C. & KELLEY, F. N.: Effect of Chain Length Distribution on the Tearing Energy of Silicone Elastomers. *Rubber Chemistry and Technology* 60.1 (1987), S. 78–88.
- [174] ZABIHYAN, R.; MERGHEIM, J.; JAVILI, A. & STEINMANN, P.: Aspects of computational homogenization in magneto-mechanics: Boundary conditions, RVE size and microstructure composition. *International Journal of Solids and Structures* 130-131 (2018), S. 105–121.
- [175] ZABIHYAN, R.; MERGHEIM, J.; PELTERET, J. P.; BRANDS, B. & STEINMANN, P.: FE2 simulations of magnetorheological elastomers: influence of microscopic boundary conditions, microstructures and free space on the macroscopic responses of MREs. *International Journal of Solids and Structures* 193-194 (2020), S. 338–356.

# A Tensorrechnung

## A.1 Notation

Die in dieser Arbeit verwendete symbolische Tensornotation ist im Folgenden kurz zusammengestellt. Dabei gelten entsprechend der in Kapitel 2 eingeführten Konvention und dem Raum von Tensoren  $n$ -ter Stufe gemäß Gleichung (2.1) die Symbole  $T \in \mathcal{L}_0$ ,  $\mathbf{T} \in \mathcal{L}_1$ ,  $\mathbf{T} \in \mathcal{L}_2$ ,  $\mathfrak{T} \in \mathcal{L}_3$  und  $\mathbb{T} \in \mathcal{L}_4$ .

Um die Definition der verwendeten Operationen wie Produkte und Normen eindeutig darzulegen, erfolgt für die wesentlichen Elemente eine Überführung in die Indexnotation. Dabei gilt die EINSTEINSche Summationskonvention, also die Summation über doppelt auftretende Indizes. Eingeklammerte Indizes sind dagegen von der Summation ausgeschlossen, bspw.

$$a_l a_{(l)} = a_l^2 \neq \sum_{l=1}^3 a_l a_l . \quad (\text{A.1})$$

### A.1.1 Algebra

Dyadisches Produkt, Kreuzprodukt und Skalarprodukte sind gemäß

$${}^{(m)}\mathbf{A} \otimes {}^{(n)}\mathbf{B} = {}^{(m+n)}\mathbf{C} \quad A_{k_1 k_2 \dots k_m} B_{l_1 l_2 \dots l_n} = C_{k_1 k_2 \dots k_m l_1 l_2 \dots l_n} , \quad (\text{A.2})$$

$${}^{(m)}\mathbf{A} \times {}^{(n)}\mathbf{B} = {}^{(m+n-1)}\mathbf{C} \quad e_{k_m l_1 j} A_{k_1 k_2 \dots k_m} B_{l_1 l_2 \dots l_n} = C_{k_1 k_2 \dots k_{m-1} j l_2 \dots l_n} , \quad (\text{A.3})$$

$${}^{(m)}\mathbf{A} \cdot {}^{(n)}\mathbf{B} = {}^{(m+n-2)}\mathbf{C} \quad A_{k_1 k_2 \dots k_{m-1} s_1} B_{s_1 l_2 \dots l_n} = C_{k_1 k_2 \dots k_{m-1} l_2 \dots l_n} \text{ und} \quad (\text{A.4})$$

$${}^{(m)}\mathbf{A} : {}^{(n)}\mathbf{B} = {}^{(m+n-4)}\mathbf{C} \quad A_{k_1 k_2 \dots k_{m-2} s_1 s_2} B_{s_2 s_1 l_3 \dots l_n} = C_{k_1 k_2 \dots k_{m-2} l_3 \dots l_n} \quad (\text{A.5})$$

gegeben. Ferner ist das Potenzieren eines Tensors 2. Stufe durch

$$\mathcal{L}_2 \ni \mathbf{A}^n := \underbrace{\mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{n\text{-mal}} \forall n \in \mathcal{N}_{\geq 2} \quad (\text{A.6})$$

definiert. Die EUKILDISCHE Norm sowie die FROBENIUS-Norm sind durch

$$|\mathbf{a}| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_l a_l} \text{ und } \|\mathbf{A}\| := \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}^T} = \sqrt{A_{kl} A_{kl}} \quad (\text{A.7})$$

gegeben.

### A.1.2 Analysis

Der NABLA-Operator kennzeichnet die vektorwertige partielle Ableitung nach den Raumkoordinaten und ist durch  $\mathcal{L}_1 \ni \nabla := \mathbf{e}_l \partial_{x_l}$  definiert. Somit ergeben sich mittels dieser Definition Gradient, Divergenz und Rotation von Tensoren 1. und 2. Stufe zu

$$\nabla \mathbf{v} = v_{k,l} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k \quad \nabla \mathbf{T} = T_{kl,m} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l , \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = v_{k,k} \quad \nabla \cdot \mathbf{T} = T_{kl,k} \mathbf{e}_l \text{ und} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = e_{klm} v_{m,l} \boldsymbol{e}_k \quad \nabla \times \mathbf{T} = e_{ijk} T_{kl,j} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l. \quad (\text{A.10})$$

Schließlich sind Ableitungen von Tensoren 1. und 2. Stufe ohne Beziehungen zwischen den Tensorkoordinaten durch

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{a}} = \mathbf{I} \quad \frac{\partial a_k}{\partial a_l} = \delta_{kl}, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbb{I} \quad \frac{\partial T_{kl}}{\partial T_{ij}} = \delta_{ki} \delta_{lj}, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^{-1}}{\partial \mathbf{T}} = -\mathbf{T}^{-1} \quad \frac{\partial T_{kl}^{-1}}{\partial T_{ij}} = -T_{ki}^{-1} T_{lj}^{-1} \text{ und} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \det(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} = \det(\mathbf{T}) \mathbf{T}^{-\text{T}} \quad \frac{\partial \det(T_{kl})}{\partial T_{ij}} = \det(T_{kl}) T_{ji}^{-1} \quad (\text{A.14})$$

gegeben. Für symmetrische Tensoren  $\mathbf{S} \in \mathcal{L}_2^{\text{sym}} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{L}_2 \mid \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\text{T}}\}$  gelten aufgrund der vorhandenen Beziehung  $S_{kl} = S_{lk}$  dagegen

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{S}} = \mathbb{I}^{\text{sym}} \quad \frac{\partial S_{kl}}{\partial S_{ij}} = \frac{1}{2} (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}) \text{ sowie} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}^{-1}}{\partial \mathbf{S}} = -\mathbb{S}^{-1} \quad \frac{\partial S_{kl}^{-1}}{\partial S_{ij}} = -\frac{1}{2} (S_{ki}^{-1} S_{lj}^{-1} + S_{kj}^{-1} S_{li}^{-1}). \quad (\text{A.16})$$

## A.2 Spektrale Zerlegung

Zur Bestimmung der Spannung  $\mathbf{T} \in \mathcal{L}_2$  und der Materialtangente  $\mathbb{C} \in \mathcal{L}_4$  des OGDEN-Modells sind die Ableitungen der Hauptstreckungen  $\lambda_\alpha \in \mathcal{R}_+$  und der Projektionstensoren  $\mathbf{M}^\alpha$  nach  $\mathbf{C}$  zu bestimmen. Diese Terme werden im Folgenden unter Ausnutzung der Projektoreigenschaften gemäß Gleichung (4.10), also

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \lambda_\alpha^2 \mathbf{M}^\alpha \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{M}^\beta := \mathbf{M}^\alpha \delta^{(\alpha)\beta} \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \mathbf{M}^\alpha := \mathbf{I} \quad (\text{A.17})$$

ermittelt, wobei sich aus den obigen Gleichungen zusätzlich die Relationen

$$\mathbf{M}^\alpha : \mathbf{I} = \nu_\alpha \quad \text{und} \quad d\mathbf{M}^\alpha : \mathbf{M}^\beta = 0, \quad (\text{A.18})$$

mit  $\nu_\alpha$  der algebraischen Vielfachheit, ermitteln lassen. Für die Änderung der Projektoren sind weiterhin aus Gleichung (A.17)<sub>2,3</sub> die Relationen

$$d\mathbf{M}^\alpha = \sum_{\gamma \neq \alpha} (d\mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{M}^\gamma - d\mathbf{M}^\gamma \cdot \mathbf{M}^\alpha) \quad \text{und} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{M}^\alpha \cdot d\mathbf{M}^\beta \cdot \mathbf{M}^\gamma = d\mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{M}^\gamma (\delta_{(\alpha)\beta} - \delta_{(\gamma)\beta}) \quad (\text{A.20})$$

bestimmbar. Dabei bezeichnet die Summe über  $\gamma \neq \alpha$  eine Summation für alle  $\gamma \in \{1, \dots, N_\lambda\} \setminus \alpha$ .

## A.2.1 Ableitung der Hauptstreckungen

Durch Bilden des totalen Differentials der Gleichung (A.17)<sub>1</sub> und anschließende zweifache Verjüngung mit  $\mathbf{M}^\beta$  ergibt sich unter Ausnutzung von Gleichung (A.18)

$$\begin{aligned} d\mathbf{C} &= \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} (2\lambda_\alpha d\lambda_\alpha \mathbf{M}^\alpha + \lambda_\alpha^2 d\mathbf{M}^\alpha) \quad | : \mathbf{M}^\beta \\ d\mathbf{C} : \mathbf{M}^\beta &= \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} (2\lambda_\alpha d\lambda_\alpha \underbrace{\mathbf{M}^\alpha : \mathbf{M}^\beta}_{=\text{tr } \mathbf{M}^\alpha \delta^{\alpha\beta}} + \lambda_\alpha^2 \underbrace{d\mathbf{M}^\alpha : \mathbf{M}^\beta}_{=0}) \\ d\mathbf{C} : \mathbf{M}^\beta &= 2\lambda_\beta d\lambda_{(\beta)} v_{(\beta)}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Nach Einsetzen von  $d\lambda_\beta = \partial_C \lambda_\beta : d\mathbf{C}$  in Gleichung (A.21) folgt aus einem Vergleich der linken und rechten Seiten der gesuchte Zusammenhang

$$\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2\lambda_\beta v_{(\beta)}} \mathbf{M}^{(\beta)}. \quad (\text{A.22})$$

Zur Formulierung von Materialgleichungen mittels des FLORY-Splits gemäß Gleichung (4.6) sind außerdem die Ableitungen  $\partial_{\lambda_\alpha} J$  und  $\partial_{\lambda_\beta} \lambda_\alpha^{\text{iso}}$  notwendig. Mit

$$J = \prod_{\alpha=1}^{N_\lambda} \lambda_\alpha^{v_\alpha} \quad (\text{A.23})$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \lambda_\beta} &= \prod_{\alpha=1}^{N_\lambda} [1 + (v_\alpha - 1)\delta_{\alpha\beta}] \lambda_\alpha^{v_\alpha - \delta_{\alpha\beta}} \\ &= \prod_{\alpha=1}^{N_\lambda} \underbrace{[1 + (v_\alpha - 1)\delta_{\alpha\beta}] \lambda_\alpha^{v_\alpha}}_{v_\beta} \underbrace{\lambda_\alpha^{-\delta_{\alpha\beta}}}_{\lambda_{(\beta)}^{-1}} \\ &= v_\beta \lambda_{(\beta)}^{-1} \prod_{\alpha=1}^{N_\lambda} \lambda_\alpha^{v_\alpha} = v_\beta \lambda_{(\beta)}^{-1} J. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Mit der Relation (A.24) und  $\lambda_\alpha^{\text{iso}} = J^{-1/3} \lambda_\alpha$  ergibt sich unter Anwendung der Produktregel

$$\frac{\partial \lambda_\alpha^{\text{iso}}}{\partial \lambda_\beta} = J^{-1/3} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} v_\beta \frac{\lambda_\alpha^{\text{iso}}}{\lambda_{(\beta)}^{\text{iso}}} \right). \quad (\text{A.25})$$

## A.2.2 Ableitungen der Projektionstensoren

Die Ableitung der Projektoren  $\mathbf{M}^\alpha$  nach  $\mathbf{C}$  lässt sich ebenfalls aus dem totalen Differential der Gleichung (A.17)<sub>1</sub> gewinnen. Davon ausgehend ergibt sich durch skalare Multiplikation mit den Projektoren von links und rechts sowie Ausnutzen von (A.20)

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^\alpha \cdot d\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^\gamma &= \sum_{\beta=1}^{N_\lambda} (2\lambda_\beta d\lambda_\beta \mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{M}^\beta \cdot \mathbf{M}^\gamma + \lambda_\beta^2 \mathbf{M}^\alpha \cdot d\mathbf{M}^\beta \cdot \mathbf{M}^\gamma) \\ \mathbf{M}^\alpha \cdot d\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^\gamma &= 2\lambda_\alpha d\lambda_{(\alpha)} \mathbf{M}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)\gamma} + (\lambda_\alpha^2 - \lambda_\gamma^2) d\mathbf{M}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{M}^{(\gamma)}.\end{aligned}\quad (\text{A.26})$$

Es lassen sich nun die zwei Fälle  $\alpha = \gamma$  sowie  $\alpha \neq \gamma$  diskutieren, wobei aus ersterem erneut die Beziehung (A.22) ableitbar ist. Für den zweiten Fall ergibt sich dagegen

$$d\mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{M}^\gamma = \frac{\mathbf{M}^\alpha \cdot d\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^\gamma}{\lambda_{(\alpha)}^2 - \lambda_{(\gamma)}^2} \quad \forall \alpha \neq \gamma. \quad (\text{A.27})$$

Einsetzen der oberen Gleichung in die Relation (A.19) führt auf

$$\begin{aligned}d\mathbf{M}^\alpha &= \sum_{\gamma \neq \alpha} (d\mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{M}^\gamma - d\mathbf{M}^\gamma \cdot \mathbf{M}^\alpha) \\ &= \sum_{\gamma \neq \alpha} \left( \frac{\mathbf{M}^\alpha \cdot d\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^\gamma}{\lambda_{(\alpha)}^2 - \lambda_{(\gamma)}^2} - \frac{\mathbf{M}^\gamma \cdot d\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^\alpha}{\lambda_{(\gamma)}^2 - \lambda_{(\alpha)}^2} \right) \\ &= \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{1}{\lambda_{(\alpha)}^2 - \lambda_{(\gamma)}^2} (\mathbf{M}^\alpha \cdot d\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^\gamma + \mathbf{M}^\gamma \cdot d\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^\alpha) \quad \forall N_\lambda \in \{2, 3\}.\end{aligned}\quad (\text{A.28})$$

Mit  $d\mathbf{C} = \partial_{\mathbf{C}} \mathbf{C} : d\mathbf{C} = \mathbb{I}^{\text{sym}} : d\mathbf{C}$  und  $d\mathbf{M}^\alpha = \partial_{\mathbf{C}} \mathbf{M}^\alpha : d\mathbf{C}$  ergibt sich durch Vergleichen der rechten und linken Seiten schließlich der Zusammenhang

$$\frac{\partial M_{KL}^\alpha}{\partial C_{PQ}} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{1}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\gamma^2} \left( M_{KP}^{(\alpha)} M_{QL}^\gamma + M_{KQ}^{(\alpha)} M_{PL}^\gamma + M_{KP}^\gamma M_{QL}^{(\alpha)} + M_{KQ}^\gamma M_{PL}^{(\alpha)} \right). \quad (\text{A.29})$$

Für  $N_\lambda = 3$  folgt mit  $\mathbf{M}^\alpha = \mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{N}^{(\alpha)}$  der Ausdruck

$$\frac{\partial \mathbf{M}^\alpha}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^3 \frac{1}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\gamma^2} \left( \mathbf{N}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{N}^\gamma + \mathbf{N}^\gamma \otimes \mathbf{N}^{(\alpha)} \right) \otimes \left( \mathbf{N}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{N}^\gamma + \mathbf{N}^\gamma \otimes \mathbf{N}^{(\alpha)} \right). \quad (\text{A.30})$$

### A.2.3 Bestimmung der Materialtangente

Mit der Kenntnis der zuvor hergeleiteten Relationen (A.22) und (A.30) lässt sich nun die Materialtangente eines hyperelastischen Materialmodells der Form  $\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  bestimmen. Mit der Spannung

$$\mathbf{T} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} T_\alpha \mathbf{M}^\alpha \quad (\text{A.31})$$

ergibt sich durch Anwenden der Produktregel die Materialtangente für  $N_\lambda = 3$  zu

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial T_\alpha}{\partial \lambda_\beta} \mathbf{M}^\alpha \otimes \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial \mathbf{C}} + \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} T_\alpha \frac{\partial \mathbf{M}^\alpha}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{1}{\lambda_\beta} \frac{\partial T_\alpha}{\partial \lambda_\beta} \mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{N}^\beta \otimes \mathbf{N}^\beta \\ &+ \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \frac{T_\beta - T_\alpha}{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2} \mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{N}^\beta \otimes (\mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{N}^\beta + \mathbf{N}^\beta \otimes \mathbf{N}^\alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Die in (A.33) auftretende Ableitung  $\partial_{\lambda_\beta} T_\alpha$  ist für das OGDEN-Modell mit der freien Energiedichte gemäß Gleichung (4.20) und  $N_\lambda = 3$  durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{(\beta)}} \frac{\partial T_\alpha}{\partial \lambda_\beta} &= -\frac{2}{\lambda_\alpha \lambda_\beta} T_\alpha \delta_{(\alpha)\beta} + \frac{1}{\lambda_\alpha^2 \lambda_\beta^2} \kappa J^2 \dots \\ &\dots + \frac{1}{\lambda_{(\alpha)}^2 \lambda_{(\beta)}^2} \sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p \left( \lambda_{\alpha}^{\text{iso}^{\alpha p}} \delta_{(\alpha)\beta} - \frac{1}{3} \lambda_{\alpha}^{\text{iso}^{\alpha p}} - \frac{1}{3} \lambda_{\beta}^{\text{iso}^{\alpha p}} + \frac{1}{9} \sum_{\gamma=1}^3 \lambda_{\gamma}^{\text{iso}^{\alpha p}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

gegeben. Für den Fall gleicher Eigenwerte, d. h.  $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$  mit  $\alpha \neq \beta$ , muss der zweite Summand in Gleichung (A.33) über eine Grenzwertbildung ermittelt werden. Dieser Fall tritt beispielsweise für den undeformierten Zustand, an dem  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  gilt, auf. Mit der Regel von L'HOSPITAL folgt nach HOLZAPFEL [61]

$$\lim_{\lambda_\beta \rightarrow \lambda_\alpha} \frac{T_\beta - T_\alpha}{\lambda_{(\beta)}^2 - \lambda_{(\alpha)}^2} = \lim_{\lambda_\beta \rightarrow \lambda_\alpha} \frac{\frac{\partial T_\beta}{\partial \lambda_{(\beta)}} - \frac{\partial T_\alpha}{\partial \lambda_\beta}}{\frac{\partial \lambda_{(\beta)}^2}{\partial \lambda_{(\beta)}} - \frac{\partial \lambda_{(\alpha)}^2}{\partial \lambda_\beta}} = \lim_{\lambda_\beta \rightarrow \lambda_\alpha} \frac{1}{2\lambda_{(\beta)}} \left( \frac{\partial T_\beta}{\partial \lambda_{(\beta)}} - \frac{\partial T_\alpha}{\partial \lambda_\beta} \right). \quad (\text{A.35})$$

Schließlich ergibt sich mit der Ableitung gemäß Gleichung (A.34) der Ausdruck

$$\lim_{\lambda_\beta \rightarrow \lambda_\alpha} \frac{T_\beta - T_\alpha}{\lambda_{(\beta)}^2 - \lambda_{(\alpha)}^2} = -\frac{1}{\lambda_\beta} T_{(\beta)} + \frac{1}{2\lambda_\beta^4} \sum_{p=1}^N \alpha_p \mu_p \lambda_{(\beta)}^{\text{iso}^{\alpha p}}. \quad (\text{A.36})$$

# B Transformation von Feldgleichungen

Zur Ermittlung der auf die Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$  bezogenen Feldgleichungen dienen die Pull-Back-Operationen (2.20) und (2.39). Um schließlich die den MAXWELL-Gleichungen (2.15a) und (2.15b) sowie die der Impulsbilanz (2.38b) entsprechenden LAGRANGESchen Formen der PDGL und zugehörigen Sprungbedingungen zu erhalten, sind die in Abschnitt 2.1.1 eingeführten kinematische Relationen auszunutzen. Die notwendigen Operationen werden im Folgenden kurz diskutiert. Dabei sind sämtliche Ausführungen zur besseren Übersicht in der Indexnotation gehalten.

## B.1 Partielle Differentialgleichungen

### Gaussches Gesetz

Mit der Pull-Back-Operation (2.20)<sub>1</sub> sowie der kinematische Relation (2.14a)<sub>1</sub> ergibt sich für das GAUSSsche Gesetz nach kurzer Umformung die auf  $\mathcal{B}_0$  bezogene PDGL:

$$0 = b_{l,l} = \underbrace{(J^{-1}F_{lL})_{,l}}_{=0} B_L + J^{-1}F_{lL}B_{L,K}F_{Kl}^{-1} \rightarrow B_{L,L} = 0 \quad \forall X \in \mathcal{B}_0 . \quad (\text{B.1})$$

Um partielle Ableitungen bezüglich der aktuellen Koordinaten  $x$  durch Ableitungen nach  $X$  auszudrücken, wird in Gleichung (B.1) die Kettenregel

$$\partial_{x_i} = F_{Kl}^{-1} \partial_{X_K} \quad (\text{B.2})$$

angewendet.

### Ampèresches Durchflutungsgesetz

Für das AMPÈRESche Durchflutungsgesetz folgt mit der Pull-Back-Operation (2.20)<sub>2</sub>, Gleichung (B.2) sowie der Kompatibilität von  $F^{-1}$  gemäß (2.8b) der Zusammenhang

$$\underbrace{e_{klm}F_{Mm,l}^{-1}H_M + e_{klm}F_{Mm}^{-1}F_{Ll}^{-1}H_{M,L}}_{=0} = 0 . \quad (\text{B.3})$$

Multiplikation mit  $JF_{Kk}^{-1}$  und Anwendung von Gleichung (2.14b) führt schließlich auf

$$\underbrace{J^{-1}e_{klm}F_{Kk}^{-1}F_{Mm}^{-1}F_{Ll}^{-1}H_{M,L}}_{e_{KLM}} = e_{KLM}H_{M,L} = 0 \quad \forall X \in \mathcal{B}_0 . \quad (\text{B.4})$$

### Impulsbilanz

Um die Impulsbilanz bzw. die Gleichgewichtsbeziehungen mit dem 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor auszudrücken, erfolgt eine Umformung analog zu (B.1). Mit der Definition gemäß Gleichung (2.39) ergibt sich somit

$$0 = \sigma_{kl,k}^{\text{tot}} = \underbrace{(J^{-1}F_{kK})_{,k}}_{=0} P_{KI}^{\text{tot}} + J^{-1}F_{kK}P_{KL,M}^{\text{tot}}F_{Mk}^{-1} \rightarrow P_{KI,K}^{\text{tot}} = 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0. \quad (\text{B.5})$$

### Magnetische Potentiale

Für die Definition des magnetischen Skalarpotentials in LAGRANGEScher Form folgt mit (2.20)<sub>2</sub>

$$h_l = -\varphi_{,l} \rightarrow F_{KI}^{-1}H_K = -\varphi_{,K}F_{KI}^{-1} \rightarrow H_K = -\varphi_{,K} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0. \quad (\text{B.6})$$

Da sich das magnetische Vektorpotential gemäß (2.20)<sub>4</sub> genauso wie die Feldstärke  $\mathbf{h}$  transformiert, lässt sich die Definition von  $\mathbf{a}$  gemäß Gleichung (2.18) analog zu (B.3) und (B.4) behandeln. Mit (2.20)<sub>1</sub> folgt

$$0 = b_k - e_{klm}a_{m,l} = J^{-1}F_{kQ}B_Q - e_{klm}F_{Mm}^{-1}F_{Li}^{-1}A_{M,L}. \quad (\text{B.7})$$

Multiplikation mit  $JF_{Kk}^{-1}$  führt schließlich auf

$$0 = B_K - \underbrace{e_{klm}JF_{Kk}^{-1}F_{Mm}^{-1}F_{Li}^{-1}}_{e_{KLM}} A_{M,L} \rightarrow B_K = e_{KLM}A_{M,L} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0. \quad (\text{B.8})$$

## B.2 Sprungbedingungen

### Gaussches Gesetz

Auch die LAGRANGESche Form der Sprungbedingungen (2.15a)<sub>2</sub> ist mittels der Pull-Back-Operation (2.20)<sub>1</sub> herzuleiten. Wird ausgenutzt, dass der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  auf  $\mathcal{S}$  unabhängig vom Sprung selbst ist, lässt sich dieser in den Operator hineinziehen. Mit der Transformation des Normalenvektors gemäß (2.12a)<sub>2</sub> ergibt sich nun

$$0 = n_l \llbracket b_l \rrbracket = \llbracket n_l b_l \rrbracket = \left\| \left[ \frac{F_{Ql}^{-1}N_Q}{|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}|} J^{-1}F_{IK}B_K \right] \right\|. \quad (\text{B.9})$$

Da  $\mathbf{N}$  sowie der Term  $J|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}|$  gemäß Gleichung (2.13)<sub>1</sub> frei von Sprüngen sind, folgt schließlich

$$0 = \llbracket B_K \rrbracket N_K J^{-1}|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}|^{-1} \rightarrow 0 = \llbracket B_K \rrbracket N_K \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{S}_0. \quad (\text{B.10})$$

### Ampèresches Durchflutungsgesetz

Mit der Pull-Back-Operation (2.20)<sub>2</sub> sowie der bereits in Gleichung (B.9) ausgenutzten Methodik folgt für die Sprungbedingung des AMPÈRESCHEN Durchflutungsgesetzes

$$0 = e_{klm}n_l \llbracket h_m \rrbracket = \llbracket e_{klm}n_l h_m \rrbracket = \left\llbracket e_{klm} \frac{F_Q^{-1} N_Q}{|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}|} F_{Rm}^{-1} H_R \right\rrbracket . \quad (\text{B.11})$$

Aus Gleichung (2.14b) lässt sich nun der Zusammenhang  $e_{klm} = J^{-1} e_{KLM} F_{kK} F_{lL} F_{mM}$  gewinnen, mit dem schließlich

$$0 = J^{-1} |\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}|^{-1} \llbracket e_{MLK} N_L F_{kK} H_M \rrbracket \quad (\text{B.12})$$

folgt. Da der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  gemäß (2.8a)<sub>2</sub> tangential stetig ist, kann der Ausdruck  $e_{MLK} N_L F_{kK}$  ebenfalls aus dem Sprung-Operator herausgezogen werden. Überschieben mit  $\mathbf{F}^{-1}$  und Ausnutzen der Eigenschaften des Permutationssymbols liefert schließlich die Gleichung

$$e_{KLM} N_L \llbracket H_M \rrbracket = 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{S}_0 . \quad (\text{B.13})$$

### Impulsbilanz

Um die zur Impulsbilanz zugehörige Sprungbedingung in Bezug auf  $\mathcal{S}_0$  zu erhalten sind die Pull-Back-Operationen (2.39) anzuwenden. Damit folgt

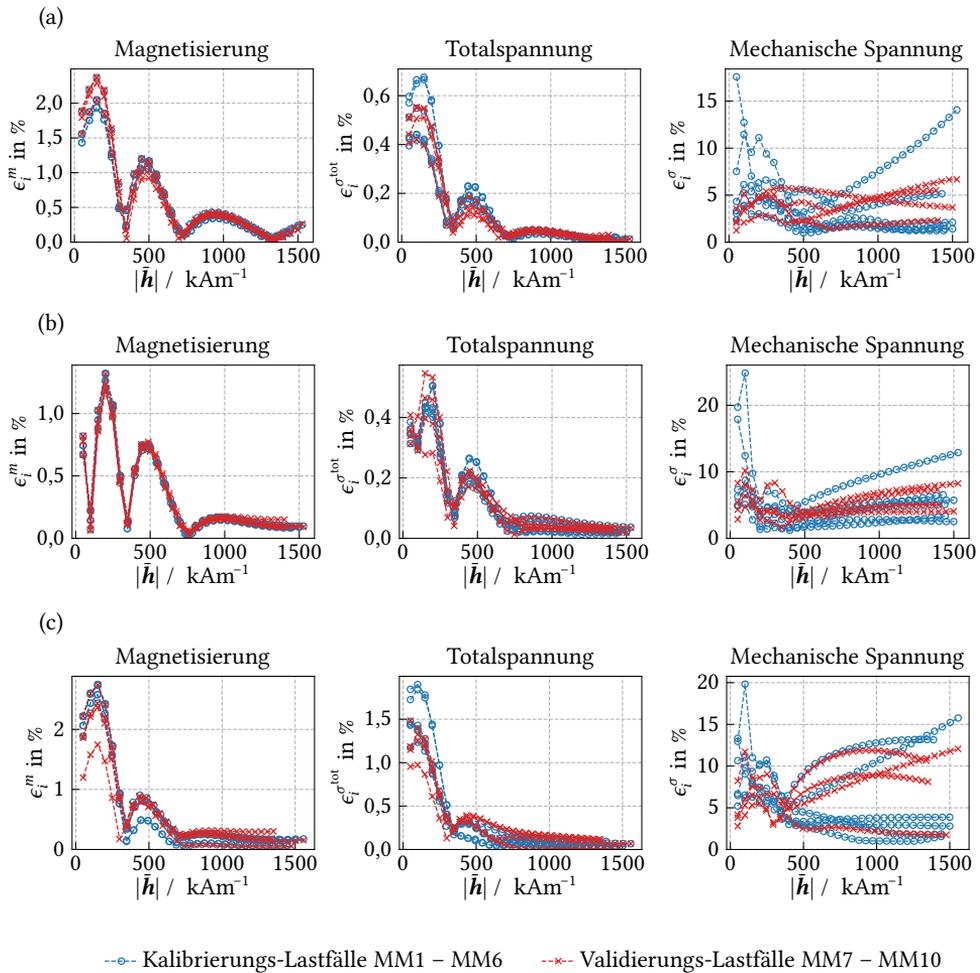
$$\begin{aligned} 0 &= \llbracket \sigma_{kl}^{\text{tot}} \rrbracket n_k + \hat{t}_l \\ &= \llbracket \sigma_{kl}^{\text{tot}} n_k \rrbracket + \hat{t}_l \\ &= \left\llbracket J^{-1} F_{kK} P_{Kl}^{\text{tot}} \frac{F_{Qk}^{-1} N_Q}{|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}|} \right\rrbracket + J^{-1} |\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}|^{-1} \hat{p}_l . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Erneut kann gemäß Gleichung (2.13)<sub>1</sub> der Term  $J^{-1} |\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}|^{-1}$  aus der Sprung-Operation herausgezogen werden. Da dies auch für den Normalenvektor  $\mathbf{N}$  gilt verbleibt

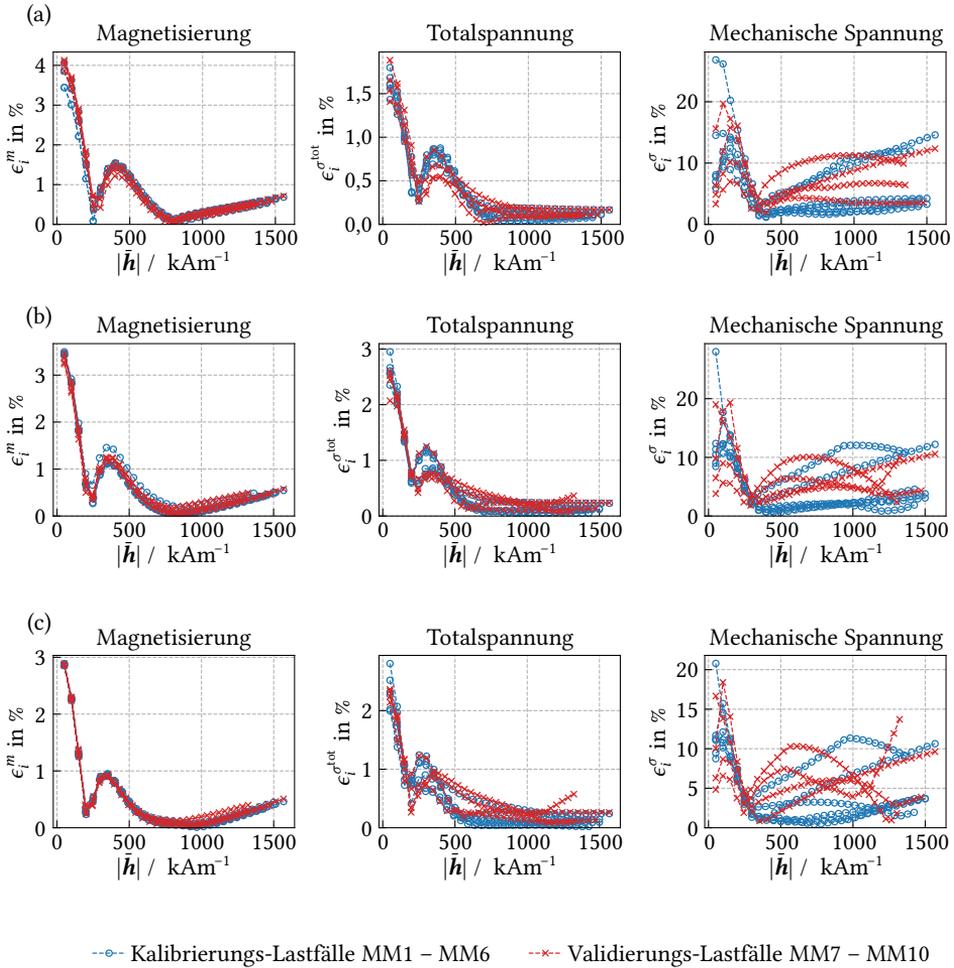
$$\llbracket P_{Kl}^{\text{tot}} \rrbracket N_K + \hat{p}_l = 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{S}_0 . \quad (\text{B.15})$$

# C Relative Fehler der kalibrierten Makromodelle

Die in Gleichung (6.23) eingeführten Fehlermaße sind für die Partikelvolumenanteile 10 %, 15 % und 20 % in Abb. C.1 sowie für 25 %, 35 % und 40 % in Abb. C.2 über der magnetischen Feldstärke  $|\vec{h}|$  aufgetragen.



**Abb. C.1:** Relative Fehlermaße  $\epsilon_i^m$ ,  $\epsilon_i^{\sigma^{\text{tot}}}$  und  $\epsilon_i^{\sigma}$  gemäß Gleichung (6.23) der kalibrierten Makromodelle für MRE: (a) – (c) Partikelvolumenanteile 10 %, 15 % und 20 %.



**Abb. C.2:** Relative Fehlermaße  $\epsilon_i^m$ ,  $\epsilon_i^{\sigma^{\text{tot}}}$  und  $\epsilon_i^{\sigma}$  gemäß Gleichung (6.23) der kalibrierten Makromodelle für MRE: (a) – (c) Partikelvolumenanteile 25 %, 35 % und 40 %.