

Zufallsmatrixtheorie für die Lindblad-Mastergleichung

Diplomarbeit
zur Erlangung des wissenschaftlichen Grades
Diplom-Physiker

vorgelegt von

Stefan Lange

geboren am 28.09.1985 in Neuruppin

Institut für Theoretische Physik
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dresden

2011

Eingereicht am 15.12.2011

1. Gutachter: Prof. Dr. Carsten Timm
2. Gutachter: Prof. Dr. Werner Timmermann

Kurzdarstellung

Wir wenden die Zufallsmatrixtheorie auf den Lindblad-Superoperator \mathcal{L} , d.h. den linearen Superoperator der Lindblad-Gleichung an und untersuchen die Verteilung und die Korrelationen der Eigenwerte von \mathcal{L} zur Charakterisierung der Dynamik komplexer offener Quantensysteme. Zufallsmatrixensembles für \mathcal{L} werden über Ensembles hermitescher und positiver Matrizen definiert, die alle freien Koeffizienten der Lindblad-Gleichung enthalten. Wir bestimmen Mittelwert und Breiten der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} in der komplexen Ebene und zeigen, wie diese Verteilung von den Verteilungen und Korrelationen der Eigenwerte der Koeffizientenmatrizen abhängt. In vielerlei Hinsicht ähneln die Ensembles für \mathcal{L} dem Ginibreschen orthogonalen Ensemble. Beispielsweise finden wir das gleiche Abstoßungsverhalten zwischen benachbarten Eigenwerten. Alle Ergebnisse werden mit denen einer früheren Zufallsmatrixanalyse von Rategleichungen verglichen.

Abstract

Random matrix theory is applied to the Lindblad superoperator \mathcal{L} , i.e., the linear superoperator of the Lindblad equation. We study the distribution and correlations of eigenvalues of \mathcal{L} to characterize the dynamics of complex open quantum systems. Random matrix ensembles for \mathcal{L} are given in terms of ensembles of hermitian and positive matrices, which contain all free coefficients of the Lindblad equation. We determine mean and widths of the distribution of the nonzero eigenvalues of \mathcal{L} in the complex plane and show how this distribution depends on the distributions and correlations of eigenvalues of the matrices of coefficients. In many respects the ensembles for \mathcal{L} resemble the Ginibre orthogonal ensemble. For instance, we find the same repulsion characteristics for neighboring eigenvalues. All results are compared to an earlier work on random matrix theory for rate equations.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Offene Quantensysteme und Lindblad-Gleichung	5
2.1	Quantenmastergleichungen	5
2.2	Markov-Prozesse und Halbgruppentheorie	7
2.2.1	Quantendynamische Halbgruppen	7
2.3	Lindblad-Gleichung	12
2.3.1	Symmetrie des Lindblad-Superoperators	13
2.3.2	Zusammenhang mit Ratengleichungen	14
3	Zufallsmatrixtheorie	15
3.1	Einführung	15
3.2	Ausgewählte Ensembles	16
3.2.1	Ginibre-Ensembles komplexer und reeller Matrizen	16
3.2.2	Unitäre Matrizen und Haar-Maß – das CUE	18
4	Zufallsmatrixtheorie und Lindblad-Gleichung – Grundlagen	21
4.1	Indextransformation	21
4.2	Zum Relaxationsteil des LSO	22
4.3	Explizite Form der Lindblad-Gleichung	24
4.4	Zufallsmatrixensembles für den LSO	27
4.4.1	Ensembles hermitescher Matrizen	28
4.4.2	Ensembles positiver Matrizen	31
4.4.3	Maßzerlegung für unitäre Ensembles	34
4.5	Universelle Eigenschaften des Spektrums des LSO	35
4.6	Zur Koeffizientenmatrix des Relaxationsteils des LSO	37
5	Zufallsmatrixtheorie und Lindblad-Gleichung – Ergebnisse	41
5.1	Notationskonventionen für Spektralstatistik	41
5.2	Grenzfall rein unitärer Dynamik	41

5.2.1	Eigenwertverteilung	42
5.2.2	Eigenwertkorrelationen	46
5.3	Grenzfall reiner Relaxation	47
5.3.1	Eigenwertverteilung	48
5.3.2	Eigenwertkorrelationen	59
5.4	Voller Lindblad-Superoperator	62
5.4.1	Eigenwertverteilung	63
5.4.2	Eigenwertkorrelationen	75
6	Zusammenfassung und Ausblick	79
A	Anhang	83
A.1	Explizite ONB der spurlosen Matrizen	83
A.2	Transformation von Lindblad-Operatoren	84
A.3	Explizite Form der Lindblad-Gleichung für $\mathcal{R}(c)$	84
A.4	Lindblad-Gleichung im Wechselwirkungsbild	86
A.5	Eigenschaften der Matrix S	87
A.6	Numerische Berechnung der Matrizen $\langle S \rangle$ und $\langle T \rangle$	89
A.7	Technische Grundlagen der numerischen Ergebnisse dieser Arbeit	93

Symbolverzeichnis

\otimes	Tensorprodukt von Hilberträumen, Operatoren oder Algebren	5
\mathcal{H}	Separabler Hilbertraum	5
$\langle \cdot \cdot \rangle$	Skalarprodukt auf \mathcal{H}	8
$\ \cdot \ $	Vom Skalarprodukt induzierte Norm auf \mathcal{H}	8
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	Menge der beschränkten Operatoren auf \mathcal{H}	8
$\ \cdot \ _\infty$	Operatornorm auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$	9
$\mathcal{T}(\mathcal{H})$	Spurklasse	9
$\ \cdot \ _1$	Spurnorm auf $\mathcal{T}(\mathcal{H})$	9
$L^1(\mathcal{H})$	Menge der hermiteschen Spurklasseoperatoren	9
$L^1_+(\mathcal{H})$	Menge der positiven Spurklasseoperatoren	9
Γ_t	Dynamische Abbildung über Zeitintervall t (Schrödingerbild)	8
Γ_t^*	Zu Γ_t duale Abbildung (Heisenbergbild)	9
$M(N)$	Menge der komplexen $N \times N$ -Matrizen	10
$M_u(N)$	Menge der unitären Matrizen aus $M(N)$	13
$M_h(N)$	Menge der hermiteschen Matrizen aus $M(N)$	27
$M_+(N)$	Menge der positiven Matrizen aus $M(N)$	13
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt auf $M(N)$	13
$\sigma(A)$	Spektrum, d.h. Menge der Eigenwerte von $A \in M(N)$	23
\mathcal{L}	Lindblad-Superoperator (LSO)	12
\mathcal{U}	Unitärer Teil des LSO	13
\mathcal{R}	Relaxationsteil des LSO	13
L_α, L_{mn}	Lindblad-Operator	13
D_{mn}	Dyadischer Lindblad-Operator	14
H	\mathcal{U} definierender Hamilton-Operator aus $M_h(N)$	13
c	Koeffizientenmatrix von \mathcal{R} aus $M_+(N^2 - 1)$	13
a	Koeffizientenmatrix von \mathcal{R} aus $M_+(N^2)$	24
$\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{L}}$	Ensemblemittel der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L}	41
$\tilde{\lambda}$	Um ihren Mittelwert zentrierte Zufallsvariable λ	41

1 Einleitung

Die Theorie offener Quantensysteme ist zentral für unser Verständnis physikalischer Gesetzmäßigkeiten. Zum einen bildet die Quantentheorie gemeinsam mit der Allgemeinen Relativitätstheorie das Fundament der gegenwärtigen theoretischen Physik, zum anderen steht letztlich jedes Quantensystem in Wechselwirkung mit seiner Umgebung und muss folglich als offen betrachtet werden. Die Effekte dieser Wechselwirkung sind vielfältig und spielen für viele Anwendungen der Quantentheorie eine Rolle [1].

Da eine mikroskopische Beschreibung der Freiheitsgrade der Umgebung i.A. nicht oder nur teilweise möglich ist, hat man seit Mitte des 20. Jahrhunderts versucht, effektive Beschreibungen der Dynamik offener Quantensysteme zu finden. Als vielfach nützlich hat sich der Zugang über eine Zeitentwicklungsgleichung für den Dichteoperator des offenen Systems erwiesen. In dieser sogenannten Quantenmastergleichung äußert sich die Kopplung von System und Umgebung in dissipativen Beiträgen. Zudem führt die Wechselwirkung zum Auftreten von Gedächtniseffekten. Vernachlässigt man diese, d.h. nimmt man an, dass die Zeitentwicklung des Zustands des offenen Quantensystems Markovsch ist, dann nimmt die Quantenmastergleichung eine relativ einfache Form an, die 1976 von Lindblad [2] für separable und von Gorini *et al.* [3] für endlichdimensionale System-Hilberträume bestimmt wurde und als Lindblad-Gleichung bekannt ist. Anwendungen findet man in vielen Bereichen der Physik [4–7]; in jüngerer Zeit wurden beispielsweise der elektronische Transport durch Quantenpunkte [8] und die Funktionsweise photosynthetischer Komplexe [9] mithilfe von Lindblad-Gleichungen untersucht.

Die in der Lindblad-Gleichung vorkommenden Koeffizienten sind durch die Wechselwirkung des Systems mit dessen Umgebung bestimmt. Für komplizierte Gesamtsysteme kann die Berechnung dieser Koeffizienten aus mikroskopischen Modellen selbst bei niedriger Dimension des System-Hilbertraums praktisch unmöglich sein [10]. Diese Ausgangslage erinnert an jene für Hamilton-Operatoren schwerer Atomkerne, die sich aufgrund ihrer Komplexität nicht explizit bestimmen und auch nicht durch für schwach wechselwirkende Systeme entwickelte Näherungsverfahren vereinfachen lassen. Um zumindest statistische Eigenschaften der gemessenen Anregungsspektren der Kerne wie die Verteilung der Abstände benachbarter Niveaus zu verstehen, kam Wigner 1955 auf die Idee, die Hamilton-Operatoren der

Kerne durch zufällige hermitesche, die Symmetrien des Systems respektierende Matrizen zu modellieren [11]. Die statistischen Eigenschaften der Eigenwerte dieser Matrizen sollten dann jene der gemessenen Spektren widerspiegeln und tatsächlich ergaben sich, insbesondere für die erwähnten Abstandsverteilungen, beachtliche Übereinstimmungen [12, 13]. In der mathematischen Statistik wurden Zufallsmatrizen bereits 1928 durch Wishart eingeführt [14], größere Aufmerksamkeit wurde ihnen allerdings erst durch die beschriebene Anwendung in der Kernphysik zuteil. Später hat die Zufallsmatrixtheorie Anwendung in vielen Bereichen gefunden, so beispielsweise in der Theorie des Quantenchaos [15–17], der Quantenchromodynamik [18, 19] oder beim Studium dynamischer Netzwerke [20, 21] und auch als eigenständige mathematische Disziplin ist sie ein aktuelles Forschungsfeld [22–24].

Wir wollen die Lindblad-Gleichung mithilfe der Zufallsmatrixtheorie untersuchen. Dazu sei Folgendes vorangestellt. Die Lindblad-Gleichung hat die abstrakte Form $\dot{\rho} = \mathcal{L} \rho$, wobei ρ den Dichteoperator des offenen Quantensystems und $\rho \mapsto \mathcal{L} \rho$ eine lineare Abbildung darstellt; \mathcal{L} ist der sogenannte Lindblad-Superoperator. Hat der Hilbertraum des Systems die Dimension N , dann lässt sich ρ als komplexe $N \times N$ -Matrix darstellen. Schreibt man die N^2 Elemente dieser Matrix als Vektor, betrachtet ρ also als Element von \mathbb{C}^{N^2} , so lässt sich \mathcal{L} als komplexe $N^2 \times N^2$ -Matrix darstellen. Die Eigenwerte dieser Matrix charakterisieren die Zeitentwicklung des Zustands des Systems, denn sie beschreiben die exponentielle Dämpfung und die Oszillationen verschiedener Anteile eines gegebenen Anfangszustands: Ist σ ein solcher Anteil und Eigenvektor von \mathcal{L} zum Eigenwert λ , so gilt $\dot{\sigma} = \mathcal{L} \sigma = \lambda \sigma$, d.h. $\sigma(t) = e^{\lambda t} \sigma(0)$. Fundamentale Gesetze der Quantentheorie schränken die mögliche Form von \mathcal{L} ein [2, 3], die verbleibenden freien Parameter sind allerdings, wie gesagt, i.A. nicht bekannt. Um für den Fall eines unbekanntem Lindblad-Superoperators zu wissen, wie die Zeitentwicklung von ρ typischerweise aussieht, wählen wir die freien Parameter zufällig, d.h. wir machen einen Zufallsmatrixansatz für \mathcal{L} und bestimmen statistische Eigenschaften der Eigenwerte von \mathcal{L} .

Die Idee dieses Vorgehens stammt aus [10], wo Systeme von Ratengleichungen zufallsmatrixtheoretisch untersucht wurden. Letztere beschreiben im quantentheoretischen Kontext die Zeitentwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten eines Satzes reiner Zustände des System-Hilbertraums und lassen sich unter bestimmten Bedingungen aus Lindblad-Gleichungen herleiten. Wir bemühen uns also um eine Erweiterung der Erkenntnisse aus [10] und werden unsere Ergebnisse auch stets mit den entsprechenden Ergebnissen für Ratengleichungen vergleichen.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert. Im zweiten Kapitel befassen wir uns detailliert mit der Lindblad-Gleichung. Wir besprechen mit Quantenmastergleichungen und quantendynamischen Halbgruppen den theoretischen Hintergrund der Gleichung und erläutern die

Markov-Eigenschaft der Lindbladschen Dynamik. Anschließend beleuchten wir die Gleichung selbst und ihre Beziehung zu Ratengleichungssystemen. Das dritte Kapitel dient zur Einführung in die Zufallsmatrixtheorie. Hier diskutieren wir wichtige Begriffe der Spektralstatistik und die Eigenschaften einiger Zufallsmatrixensembles. Im vierten Kapitel bereiten wir die Anwendung der Zufallsmatrixtheorie auf den Lindblad-Superoperator vor. Dazu bestimmen wir eine explizite Darstellung von \mathcal{L} als Tensor vierter Stufe, (\mathcal{L}_{mnpq}) , und formalisieren die Transformation dieses Tensors in eine Matrix $(\mathcal{L}_{\alpha\beta})$. Für $(\mathcal{L}_{\alpha\beta})$ definieren wir verschiedene Zufallsmatrixensembles und studieren die Spektralstatistik von deren Grundbausteinen – Zufallsmatrixensembles hermitescher und positiver Matrizen. Zudem zeigen wir, welche generellen Eigenschaften das Spektrum von \mathcal{L} hat. Im fünften Kapitel schließlich studieren wir die Spektralstatistik der zuvor definierten Zufallsmatrixensembles für den Lindblad-Superoperator. Das sechste Kapitel dient zur Zusammenfassung unserer Ergebnisse und zur Diskussion sich aufdrängender, unbeantworteter Fragen.

2 Offene Quantensysteme und Lindblad-Gleichung

In diesem Kapitel führen wir zunächst die Begriffe des offenen Quantensystems und der eng damit verknüpften Quantenmastergleichungen ein, um uns anschließend den quantendynamischen Halbgruppen zuzuwenden. Letztere bilden die Grundlage der Lindblad-Gleichung, die wir am Ende des Kapitels einführen und diskutieren wollen.

2.1 Quantenmastergleichungen

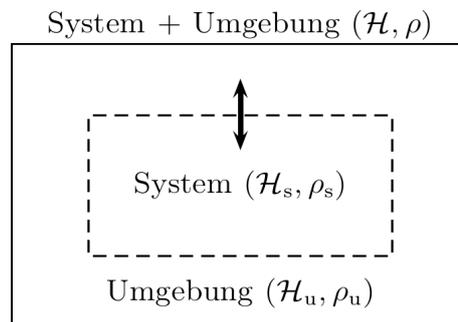


Abb. 2.1: Schematische Darstellung eines offenen Quantensystems.

Dieser Abschnitt folgt im Wesentlichen den Ausführungen von Breuer und Petruccione [1]. Beginnen wollen wir mit dem Begriff des *offenen Quantensystems*. Als solches bezeichnet man ein physikalisches System, das quantentheoretisch beschrieben wird und das offen ist, d.h. das mit einer Umgebung in Wechselwirkung steht. Die Bezeichnung „offen“ ist dabei so weit zu verstehen, wie dies in der Thermodynamik üblich ist, d.h. es ist jegliche Art von Wechselwirkung bzw. Austausch mit der Umgebung zugelassen. Letztere wird üblicherweise ebenfalls als Quantensystem beschrieben und bildet gemeinsam mit dem offenen Quantensystem ein abgeschlossenes Quantensystem (siehe Abbildung 2.1). Der (separable) Hilbertraum \mathcal{H} des Gesamtsystems ist als Tensorprodukt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_u$ von System-Hilbertraum \mathcal{H}_s und Umgebungs-Hilbertraum \mathcal{H}_u gegeben. Eine mikroskopische Beschreibung der Dynamik des offenen Systems startet beim Hamilton-Operator H

des Gesamtsystems

$$H = H_s \otimes I_u + I_s \otimes H_u + H_{ww}, \quad (2.1)$$

wobei H_s und H_u die freien Hamilton-Operatoren von System und Umgebung bezeichnen und H_{ww} deren Wechselwirkung beschreibt. Während die Dynamik des (abgeschlossenen) Gesamtsystems unitär ist, d.h. über eine Schrödinger-Gleichung oder allgemeiner eine von-Neumann-Gleichung

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] \quad (2.2)$$

für den Dichteoperator ρ des Gesamtsystems gegeben ist,¹ kann man für den *reduzierten Dichteoperator*

$$\rho_s = \text{Tr}_u \rho \quad (2.3)$$

nicht von einer solchen Zeitentwicklung ausgehen,² siehe dazu die Diskussion zu Beginn des nächsten Abschnitts. Hier und im Folgenden bezeichnet Tr_u die partielle Spur über die Freiheitsgrade der Umgebung. Sie bildet Dichteoperatoren auf \mathcal{H} , d.h. Zustände des Gesamtsystems, auf Dichteoperatoren auf \mathcal{H}_s , d.h. Zustände des offenen Systems ab. Mit der Spurklasse von \mathcal{H} (für eine Definition siehe Abschnitt 2.2.1) als Definitionsbereich ist sie als lineare Abbildung eindeutig durch die Eigenschaft

$$\text{Tr}[(A \otimes I_u)\rho] = \text{Tr}[A \text{Tr}_u \rho] \quad (2.4)$$

für beschränkte Operatoren A auf \mathcal{H}_s bestimmt. (Auf der rechten Seite der Gleichung wird nur über \mathcal{H}_s gespurt.) Gleichung (2.4) zeigt die Relevanz von ρ_s , denn jede Observable A des Systems hat als Operator auf dem Gesamt-Hilbertraum die Gestalt $A \otimes I_u$ und $\text{Tr}[(A \otimes I_u)\rho]$ ist der Erwartungswert der Observablen für ein Gesamtsystem im Zustand ρ , d.h. die Kenntnis von ρ_s erlaubt die Berechnung der Erwartungswerte aller Observablen des Systems. Somit ist die Zeitentwicklung des reduzierten Dichteoperators – die *reduzierte Dynamik* – von zentralem Interesse für die Theorie offener Quantensysteme. Man erhält sie beispielsweise, indem man auf beiden Seiten der von-Neumann-Gleichung partiell über die Umgebung spurt:

$$\dot{\rho}_s = -i \text{Tr}_u [H, \rho]. \quad (2.5)$$

In praxi kann man es jedoch nicht bei dieser Beziehung belassen, denn auf der rechten Seite steht der Gesamtzustand, d.h. zur Bestimmung der reduzierten Dynamik auf diese Art muss das Gesamtsystem zeitentwickelt werden, was typischerweise unmöglich und auch gar

¹Wir setzen stets $\hbar := 1$.

²Man betrachtet von vornherein Dichteoperatoren, d.h. gemischte Zustände, da ρ_s selbst bei einem reinen Gesamtzustand i.A. gemischt ist.

nicht von Interesse ist. Folglich haben sich viele Wissenschaftler mit dem Problem befasst, obige exakte Gleichung geschickt umzuformulieren oder durch verschiedene Näherungen zu vereinfachen – insbesondere mit dem Ziel, eine dynamische Gleichung zu finden, in die nur ρ_s eingeht [25–27]. Solche Gleichungen heißen *Quantenmastergleichungen* und die Lindblad-Gleichung ist ein Beispiel dafür [2,3]. Im folgenden Abschnitt diskutieren wir ihre Grundlagen.

2.2 Markov-Prozesse und Halbgruppentheorie

Eine wesentliche Eigenschaft der reduzierten Dynamik ist, dass sie i.A. nicht Markovsch ist [1]. Das bedeutet insbesondere, dass die Änderung des Systemzustands zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht allein durch den Systemzustand zu diesem Zeitpunkt gegeben ist. Stattdessen führt die Wechselwirkung des Systems mit der Umgebung i.A. zu einer reduzierten Zeitentwicklung mit „Gedächtnis“, d.h. jede Zustandsänderung ist abhängig von der gesamten Vergangenheit des Zustands. Man kann sich das wie folgt vorstellen. Ändert sich der Systemzustand, so hat diese Änderung Auswirkungen auf die Umgebung, d.h. die Umgebung ändert sich aufgrund der Änderung des Systems. Diese Änderung der Umgebung hat nun wiederum (bei einer echten *Wechselwirkung*) zu allen späteren Zeitpunkten Auswirkungen auf das System. Effektiv entsteht also eine Feedbackschleife.

Man kann diese Gedächtniseffekte genau studieren. Mithilfe einer Projektionsoperator-technik lässt sich eine exakte Quantenmastergleichung gewinnen, die lokal in der Zeit ist – die sogenannte time-convolutionless master equation [28]. Sie lässt sich nach der Stärke der Kopplung zwischen System und Umgebung entwickeln. In jeder Ordnung der Kopplungsstärke ist die Dynamik durch einen lokalen, aber zeitabhängigen Generator gegeben. Diese Zeitabhängigkeit ist der Ursprung der nicht-Markovschen Dynamik [1].

Ist die Umgebung allerdings sehr vergesslich, d.h. sind dessen Autokorrelationszeiten klein im Vergleich mit den typischen Zeitskalen des Systems, kann näherungsweise auf die Beachtung der Gedächtniseffekte verzichtet und die reduzierte Dynamik als Markovsch angenommen werden. Dann spricht man von Quanten-Markov-Prozessen, deren theoretische Grundlage die quantendynamischen Halbgruppen bilden [29–31], mit denen wir uns nun befassen wollen.

2.2.1 Quantendynamische Halbgruppen

Um die Lindblad-Gleichung herzuleiten, benötigen wir das Konzept der quantendynamischen Halbgruppen und dazu das der dynamischen Abbildung. Letztere ist aus der Theorie

dynamischer Systeme bekannt. Wir wollen ab sofort von einer homogenen, d.h. zu allen Zeiten gleichen Zeitentwicklung des reduzierten Dichteoperators ausgehen, können als Anfangszeit also o.B.d.A. $t = 0$ wählen. Es sei $\rho_s(t)$ der Systemzustand zum Zeitpunkt t . Dann ist die Familie dynamischer Abbildungen Γ_t , $t \geq 0$ über

$$\rho_s(0) \mapsto \rho_s(t) =: \Gamma_t[\rho_s(0)] \quad (2.6)$$

definiert. Sie lässt sich über die Zeitentwicklung des Gesamtsystems explizit gewinnen: Da sich letzteres gemäß einer von-Neumann-Gleichung zeitentwickelt, gibt es eine Familie unitärer Abbildungen U_t , $t \in \mathbb{R}$, sodass

$$\rho(t) = U_t \rho(0) U_t^\dagger \quad (2.7)$$

gilt. Diese Familie hat (im angenommenen zeithomogenen Fall) eine Gruppenstruktur, d.h. es gilt $U_0 = I$, $U_{-t} = U_t^{-1}$ und $U_{s+t} = U_s U_t$ für $s, t \in \mathbb{R}$. Nehmen wir an, dass $\rho(0)$ unkorreliert, also als Produktzustand $\rho(0) = \rho_s(0) \otimes \rho_u$ vorliegt. Dann folgt aus (2.7) die Beziehung

$$\rho_s(t) = \text{Tr}_u \left[U_t(\rho_s(0) \otimes \rho_u) U_t^\dagger \right], \quad (2.8)$$

woraus sich für ein festes ρ_u die Familie dynamischer Abbildungen Γ_t ergibt. Offenbar sind diese linear und bilden Dichteoperatoren auf Dichteoperatoren ab.

Anders als die Familie der U_t trägt die der Γ_t keine natürliche Gruppenstruktur. Die Annahme einer solchen bzw. genauer der Halbgruppeneigenschaft

$$\Gamma_{s+t} = \Gamma_s \Gamma_t, \quad s, t \geq 0 \quad (2.9)$$

definiert die *Markov-Näherung* und macht die Ausprägung eines Gedächtnisses unmöglich [1]. Die Annahme einer Halbgruppe statt einer Gruppe entspricht dem Wunsch, irreversible Prozesse zu beschreiben. Die Halbgruppeneigenschaft ist offenbar eine stärkere Eigenschaft als zeitliche Homogenität, denn aus (2.9) folgt, dass die Zeitentwicklung ab einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ der ab $t = 0$ gleicht. Fordert man nun noch eine gewisse Stetigkeit der Dynamik, so lässt sich diese mit der Axiomatik quantendynamischer Halbgruppen nach Ingarden und Kossakowski [32] beschreiben, in die wir nun einführen wollen.

Dazu benötigen wir einige Notationsfestlegungen. Wir verzichten ab jetzt auf die Subskripte, da wir uns nur noch mit dem (offenen) System beschäftigen werden. Es ist also \mathcal{H} der separable Hilbertraum des Systems mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\| \cdot \|$, ρ der Dichteoperator des Systems und mit Tr ist eine Spurbildung über \mathcal{H} gemeint. Es sei $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die Menge der beschränkten Operatoren auf \mathcal{H} mit der Operatornorm

$\|A\|_\infty = \inf\{c \geq 0: \forall \varphi \in \mathcal{H}: \|A\varphi\| \leq c \|\varphi\|\}$ und $\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}): \|\rho\|_1 < \infty\}$ die Spurklasse, wobei $\|A\|_1 = \text{Tr} \sqrt{A^\dagger A}$ die Spurnorm³ und $\sqrt{\cdot}$ die (eindeutige) Wurzel eines positiven Operators bezeichnet. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt positiv, kurz $A \geq 0$, wenn für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ die Ungleichung $\langle \varphi | A | \varphi \rangle \geq 0$ gilt.⁴ Weiter sei $L^1(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}): \rho = \rho^\dagger\}$ als Vektorraum über \mathbb{R} definiert⁵ und $L_+^1(\mathcal{H}) = \{\rho \in L^1(\mathcal{H}): \rho \geq 0\}$ sei die Menge der positiven Spurklasseoperatoren auf \mathcal{H} . Den Zuständen entsprechen dann die Elemente von $L_+^1(\mathcal{H})$ mit Spur Eins. Nun können wir eine Vorstufe der quantendynamischen Halbgruppen einführen, auf denen die Lindbladgleichung basiert.

Definition 2.1: Eine Familie $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ linearer Abbildungen auf $L^1(\mathcal{H})$ heißt *quantendynamische Halbgruppe*, wenn gilt:

$$(i) \quad \forall t \geq 0: \Gamma_t(L_+^1(\mathcal{H})) \subseteq L_+^1(\mathcal{H}),$$

$$(ii) \quad \forall \rho \in L_+^1(\mathcal{H}), t \geq 0: \|\Gamma_t \rho\|_1 = \|\rho\|_1,$$

$$(iii) \quad \forall t, s \geq 0: \Gamma_t \Gamma_s = \Gamma_{t+s},$$

$$(iv) \quad \forall \rho \in L^1(\mathcal{H}): \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}): \lim_{t \rightarrow 0^+} \text{Tr}[A(\Gamma_t \rho)] = \text{Tr}[A\rho].$$

Die Definition stammt aus [32]. Sie ist, was den Definitionsbereich der Γ_t betrifft, minimal für eine lineare Axiomatik, die alle Zustände umfasst. Die einzelnen Punkte legen die verschiedenen Eigenschaften der Markovschen reduzierten Dynamik fest, die wir zuvor angesprochen hatten: (i) und (ii) sorgen dafür, dass ein Dichteoperator im Laufe der Zeit ein Dichteoperator bleibt, (iii) ist die Markov-Eigenschaft und (iv) sichert eine stetige Zeitentwicklung von Erwartungswerten (sogenannte schwache Stetigkeit). Es reicht, die schwache Stetigkeit bei $t = 0$ zu fordern, denn durch (iii) setzt sie sich zu allen Zeiten fort.

Man kann nun zeigen, dass die Abbildungen der quantendynamischen Halbgruppe stetig auf $(L^1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ sind [32, Theorem 1] und diese Eigenschaft bleibt bei einer linearen Fortsetzung von $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ auf $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ genauso wie alle Eigenschaften aus Definition 2.1 erhalten.⁶ Diese Fortsetzung ist wichtig, um die quantendynamischen Halbgruppen weiter zu charakterisieren (siehe nächste Definition), denn damit erhält man den Zugriff auf die duale Halbgruppe $(\Gamma_t^*)_{t \geq 0}$, die die Dynamik im Heisenbergbild, d.h. die Zeitentwicklung von beschränkten Operatoren auf \mathcal{H} beschreibt. Der Zusammenhang der beiden Halbgruppen ist über die Dualität von $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gegeben: Jedes (bezüglich der Spurnorm)

³ $(\mathcal{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ ist ein Banachraum.

⁴Dies ist auch definierend für die später auftretenden positiven Matrizen.

⁵Das ist der kleinste Vektorraum, der die Zustände enthält.

⁶Jeder Operator $C \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ lässt sich als $C = A + iB$ mit $A, B \in L^1(\mathcal{H})$ darstellen und es gilt $\|A\|_1 \leq \|C\|_1$ und $\|B\|_1 \leq \|C\|_1$.

stetige lineare Funktional auf $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ lässt sich als $\text{Tr}[A \cdot]$ mit einem $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ schreiben; umgekehrt ist $\text{Tr}[A \cdot]$ für jedes $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ [33]. Dies suggeriert eine Identifikation von $\mathcal{T}(\mathcal{H})'$ (dem topologischen Dualraum von $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, d.h. dem Raum der stetigen linearen Funktionalen auf $\mathcal{T}(\mathcal{H})$) mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und man kann zeigen, dass diese Identifikation isometrisch ist, d.h. dass die Funktionalnorm von $\text{Tr}[A \cdot]$ der Operatornorm von A gleicht. Wir identifizieren also ab sofort $\mathcal{T}(\mathcal{H})'$ mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Nun ist Γ_t , wenn fortgesetzt, eine stetige Abbildung auf $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, d.h. wir können die zu ihr duale Abbildung Γ_t^* auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ betrachten. Es gilt der Zusammenhang

$$\text{Tr}[(\Gamma_t^* A)\rho] = \text{Tr}[A(\Gamma_t \rho)], \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}), t \geq 0 \quad (2.10)$$

und wir erkennen, dass Γ_t^* die Heisenbergdynamik des Systems beschreibt: Auf der linken Seite wird durch Γ_t^* der Operator zeitentwickelt und der Systemzustand bleibt konstant (Heisenbergbild); rechts wird der Zustand durch Γ_t zeitentwickelt und der Operator bleibt konstant (Schrödingerbild).

Bleibt man bei der Annahme, dass der Anfangszustand des Gesamtsystems ein Produktzustand ist, dann kann man zeigen, dass die Abbildungen Γ_t^* eine weitere Eigenschaft haben: Sie sind dann nicht nur positiv, sondern *vollständig positiv*. Zur Erklärung dieses Begriffes führen wir mit $M(N)$ die Menge der komplexen $N \times N$ -Matrizen ein. Γ_t^* heißt vollständig positiv, wenn die Abbildung

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Gamma_t^* A_{11} & \cdots & \Gamma_t^* A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_t^* A_{N1} & \cdots & \Gamma_t^* A_{NN} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (2.11)$$

auf $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes M(N)$ (das ist das Algebren-Tensorprodukt der C^* -Algebren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $M(N)$) für alle $N = 1, 2, \dots$ positiv ist, d.h. positive Elemente auf positive Elemente abbildet. Für eine Diskussion des Begriffes siehe [3] und dort angegebene Referenzen. Als erstes gefunden wurde diese Eigenschaft der reduzierten Heisenbergdynamik von Kraus über das Konzept der *operations* [29]; für einen schönen Überblick siehe [1]. Damit können wir nun die Halbgruppen einführen, die die Grundlage der Lindblad-Gleichung bilden:

Definition 2.2: Sei $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ eine Halbgruppe gemäß Definition 2.1, fortgesetzt auf $\mathcal{T}(\mathcal{H})$. $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ heißt *vollständig positive quantendynamische Halbgruppe*, wenn Γ_t^* für alle $t \geq 0$ vollständig positiv ist.

Bevor wir mit der Lindblad-Gleichung fortfahren, wollen wir wichtige Eigenschaften dieser Halbgruppen festhalten und einige Probleme der Axiomatik benennen.

Satz 2.3: Sei $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ eine Halbgruppe gemäß Definition 2.2. Dann gilt für alle $t \geq 0$

$$(i) \quad \Gamma_t^* I = I \text{ und } \Gamma_t^* A^\dagger = (\Gamma_t^* A)^\dagger,$$

$$(ii) \quad \|\Gamma_t\|_\infty = 1. \text{ (Gemeint ist die Operatornorm bezüglich der Spurnorm auf } \mathcal{T}(\mathcal{H}).)$$

Beweis: Wir benötigen (i) zum Beweis von (ii), der aus [3, Fußnote 4] stammt.

- (i) Es sei $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ beliebig und $\sigma := |\varphi\rangle\langle\varphi|$. Da σ positiv ist, ist nach Definition 2.1(ii) auch $\Gamma_t\sigma$ positiv. Weiterhin gilt für $\rho \in L_+^1(\mathcal{H})$ die Identität $\|\rho\|_1 = \text{Tr } \rho$, d.h. wir haben

$$\langle\varphi|\Gamma_t^* I|\varphi\rangle = \text{Tr}[(\Gamma_t^* I)\sigma] \stackrel{(2.10)}{=} \text{Tr}[\Gamma_t\sigma] \stackrel{\text{Def. 2.1(ii)}}{=} \text{Tr } \sigma = \langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\varphi|I|\varphi\rangle \quad (2.12)$$

und

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\Gamma_t^* A^\dagger|\varphi\rangle &= \text{Tr}[(\Gamma_t^* A^\dagger)\sigma] \stackrel{(2.10)}{=} \text{Tr}[A^\dagger(\Gamma_t\sigma)] = \text{Tr}[(\Gamma_t\sigma)^\dagger A]^* \stackrel{\text{Def. 2.1(i)}}{=} \text{Tr}[(\Gamma_t\sigma)A]^* \\ &= \text{Tr}[A(\Gamma_t\sigma)]^* \stackrel{(2.10)}{=} \text{Tr}[(\Gamma_t^* A)\sigma]^* = \text{Tr}[\sigma(\Gamma_t^* A)^\dagger] \\ &= \langle\varphi|(\Gamma_t^* A)^\dagger|\varphi\rangle, \end{aligned} \quad (2.13)$$

was zum Beweis der Aussagen reicht, da beschränkte Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum betrachtet werden.

- (ii) Da Γ_t^* eine per Definition positive und laut (i) unitale *-Abbildung ist, gilt nach [34, Theorem 3.3] $\|\Gamma_t^*\|_\infty = 1$. Weil Γ_t^* dual zu Γ_t ist, gilt $\|\Gamma_t^*\|_\infty = \|\Gamma_t\|_\infty$ und damit folgt die Behauptung. □

Probleme der Axiomatik aus Definition 2.2

- Die reduzierte Dynamik wird durch die Markov-Näherung, d.h. die Halbgruppeneigenschaft der dynamischen Abbildung vereinfacht. Für eine präzise Diskussion der sie rechtfertigenden physikalischen Bedingungen siehe z.B. [1].
- Die Eigenschaft der vollständigen Positivität der reduzierten Heisenbergdynamik muss im Falle eines korrelierten Anfangszustands i.A. fallen gelassen werden [35]. In diesem Fall ist das Halbgruppenkonzept aber schon an sich fragwürdig, da in dessen Rahmen Korrelationen zwischen System und Umgebung grundsätzlich nicht berücksichtigt werden können.

- Die Spurerhaltung ist eine Näherung, wenn der volle System-Hilbertraum z.B. zur numerischen Behandlung beschnitten wird, da dann ein möglicher Wahrscheinlichkeitsfluss zwischen den berücksichtigten und den vernachlässigten reinen Zuständen außer Acht bleibt [36].

2.3 Lindblad-Gleichung

Nachdem wir mit den vollständig positiven quantendynamischen Halbgruppen die integrale Form jeder zeitlich homogenen, schwach stetigen und Markovschen reduzierten Dynamik für einen unkorrelierte Anfangszustand eingeführt haben, kommen wir nun zu deren differenzieller Form. Dazu muss man wissen, dass jede besagter Halbgruppen einen Generator \mathcal{L} besitzt [3], d.h. einen linearen Operator $\mathcal{L}: \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$ mit dichtem Definitionsbereich $D(\mathcal{L})$, für den gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\mathcal{L}\rho - t^{-1}(\Gamma_t \rho - \rho)\|_1 = 0, \quad \rho \in D(\mathcal{L}) \quad (2.14)$$

oder in Kurzform

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho. \quad (2.15)$$

Bei der Verwendung letzterer Form darf nicht vergessen werden, dass nur die durch sie gegebene Vorwärtszeitentwicklung physikalisch ist. Für $\dim \mathcal{H} = N \in \mathbb{N}$ haben wir die Identifikation $\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = M(N)$ und es gilt der Zusammenhang

$$\Gamma_t = e^{\mathcal{L}t} \quad (2.16)$$

mit der Matrixexponentialfunktion, wenn \mathcal{L} als Element von $M(N^2)$ aufgefasst wird (siehe auch Kapitel 4).

Die explizite Form von \mathcal{L} im endlichdimensionalen Fall wurde von Gorini *et al.* [3] bestimmt:

Theorem 2.4: *Ein linearer Operator $\mathcal{L}: M(N) \rightarrow M(N)$ ist der Generator einer vollständig positiven quantendynamischen Halbgruppe, falls er als*

$$\mathcal{L} = -i[H, \cdot] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^2-1} c_{\alpha\beta} ([L_\alpha, \cdot L_\beta^\dagger] + [L_\alpha \cdot, L_\beta^\dagger]) \quad (2.17)$$

mit $H = H^\dagger$, $\text{Tr } H = 0$, $\text{Tr } L_\alpha = 0$, $\text{Tr } L_\alpha^\dagger L_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, N^2 - 1$) und $c := (c_{\alpha\beta}) \in M_+(N^2 - 1)$ geschrieben werden kann. Für ein gegebenes \mathcal{L} ist H durch $\text{Tr } H = 0$ und die Matrix c durch die Wahl der L_α eindeutig bestimmt.

Hier und im Folgenden bezeichnet $M_+(N)$ die Menge aller positiven Elemente von $M(N)$, d.h. jener Matrizen P , für die $v^\dagger P v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{C}^N$ gilt. Die Gleichung (2.15) mit \mathcal{L} aus Theorem 2.4 ist die *Lindblad-Gleichung* für N -Niveau-Systeme. Benannt ist sie nach dem schwedischen Physiker Göran Lindblad, der etwa zeitgleich mit Gorini *et al.* eine allgemeinere Version des Theorems 2.4 bewiesen hat [2].

Wir bemerken, dass die Lindblad-Gleichung für $c = 0$ in die von-Neumann-Gleichung übergeht. Darum definieren wir mit $\mathcal{U} := -i[H, \cdot]$ den unitären Teil des *Lindblad-Superoperators*⁷ (LSO) \mathcal{L} und mit $\mathcal{R} := \mathcal{L} - \mathcal{U}$ dessen Relaxationsteil. Die in \mathcal{R} auftauchenden spurlosen Operatoren L_α nennt man *Lindblad-Operatoren*. Man beachte, dass H i.A. verschieden vom freien System-Hamilton-Operator H_s ist: Die Wechselwirkung mit der Umgebung kann zu einer Änderung der Eigenzustände oder einer Verschiebung der Energieniveaus führen; ein prominentes Beispiel ist die Lamb-Verschiebung für Atome in einem thermischen Strahlungsfeld [1, 6].

2.3.1 Symmetrie des Lindblad-Superoperators

Der LSO aus Theorem 2.4 unterliegt einer besonderen Forminvarianz [1]: Beachtet man, dass $M(N) \ni A, B \mapsto \text{Tr } A^\dagger B =: \langle A, B \rangle$ ein Skalarprodukt auf $M(N)$ definiert⁸ und dass die Menge der spurlosen Matrizen aus $M(N)$ einen Untervektorraum von $M(N)$ der Kodimension 1 bildet (als Kern eines von Null verschiedenen linearen Funktionals), dann ist zu erkennen, dass die Lindblad-Operatoren eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Untervektorraums darstellen. Folglich kann man sich fragen, wie sich der LSO unter einer (unitären) Transformation zu einer anderen ONB verhält. Es bezeichne $M_u(N)$ die Menge der unitären Matrizen aus $M(N)$. Sei $U \in M_u(N^2 - 1)$ und sei über

$$L'_\alpha := \sum_{\beta=1}^{N^2-1} L_\beta U_{\beta\alpha} \Leftrightarrow L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N^2-1} L'_\beta U_{\beta\alpha}^\dagger = \sum_{\beta=1}^{N^2-1} U_{\alpha\beta}^* L'_\beta \quad (2.18)$$

eine Basistransformation definiert. Dann folgt

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{N^2-1} c_{\alpha\beta} ([L_\alpha, \cdot L_\beta^\dagger] + [L_\alpha \cdot, L_\beta^\dagger]) = \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu=1}^{N^2-1} U_{\mu\alpha}^\dagger c_{\alpha\beta} U_{\beta\nu} ([L'_\mu, \cdot (L'_\nu)^\dagger] + [L'_\mu \cdot, (L'_\nu)^\dagger]). \quad (2.19)$$

⁷Man nennt ihn so, da seine Argumente und Bilder bereits Operatoren sind.

⁸Dies ist das sogenannte Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt. Es ist gemäß der Identifikation $M(N) \cong \mathbb{C}^{N^2}$ das Standardskalarprodukt in $M(N)$, denn $\text{Tr } A^\dagger B = \sum_{i,j=1}^N A_{ij}^* B_{ij}$. Zur Unterscheidung vom Skalarprodukt in \mathcal{H} schreiben wir es mit einem Komma zwischen den Argumenten.

Somit ist der Relaxationsteil des LSO forminvariant unter simultaner unitärer Transformation der Lindblad-Operatoren L_α und der Koeffizientenmatrix c . Da letztere positiv ist, kann sie diagonalisiert werden, d.h. es existiert stets ein Satz von Lindblad-Operatoren L_α , mit dem

$$\mathcal{L} = -i[H, \cdot] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \lambda_\alpha ([L_\alpha, \cdot L_\alpha^\dagger] + [L_\alpha \cdot, L_\alpha^\dagger]), \quad (2.20)$$

mit nichtnegativen Koeffizienten λ_α gilt. Dies ist die „Standardform“ des Lindblad-Superoperators.

2.3.2 Zusammenhang mit Ratengleichungen

In vielen konkreten Lindblad-Gleichungen wie z.B. der quantenoptischen Mastergleichung im Falle eines System-Hamilton-Operators, für den weder die Energien noch die Energiedifferenzen entartet sind, hat der LSO die folgende Form [1, 37]: Sind $(|n\rangle)_{n=1,\dots,N}$ die Eigenzustände von H , so ist c diagonal bezüglich der Lindblad-Operatoren $D_{mn} := |m\rangle\langle n|$ (nur solche mit $m \neq n$ tauchen auf), d.h. es ist

$$\mathcal{L} = -i[H, \cdot] + \frac{1}{2} \sum_{m \neq n} \gamma_{mn} ([D_{mn}, \cdot D_{nm}] + [D_{mn} \cdot, D_{nm}]). \quad (2.21)$$

Dieses \mathcal{L} führt nun auf ein geschlossenes Zeitentwicklungsgleichungssystem für die Besetzungswahrscheinlichkeiten $p_n := \langle n | \rho | n \rangle$ der Eigenzustände von H . Die Gleichungen dieses Systems sind im quantenphysikalischen Kontext als Pauli-Mastergleichungen bzw. allgemein als Ratengleichungen bekannt und lauten

$$\dot{p}_n = \sum_m (\gamma_{nm} p_m - \gamma_{mn} p_n), \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.22)$$

Wir sehen, dass γ_{mn} die Übergangsrate vom Zustand $|n\rangle$ zum Zustand $|m\rangle$ darstellt.

Pauli-Mastergleichungen für die Zeitentwicklung von Niveaubesetzungswahrscheinlichkeiten können auch aus allgemeineren Lindblad-Gleichungen hergeleitet werden; allerdings ist dann der Zusammenhang zwischen den Raten in ersteren und den Koeffizienten in letzteren weniger direkt [1]. In jedem Fall jedoch sind sie proportional zueinander. Abschließend halten wir fest, dass Ratengleichungen als Spezialfälle von Lindblad-Gleichungen angesehen werden können; somit versucht sich diese Arbeit an einer Erweiterung der Erkenntnisse aus [10].

3 Zufallsmatrixtheorie

Da diese Arbeit methodisch auf der Zufallsmatrixtheorie beruht, wollen wir uns nun etwas mit dieser befassen. Zunächst besprechen wir den Begriff der Zufallsmatrix und erläutern die wesentlichen Fragen der Theorie. Anschließend stellen wir einige bekannte Zufallsmatrixensembles vor, auf die wir uns im Weiteren berufen werden.

3.1 Einführung

Als Zufallsmatrix bezeichnet man eine matrixwertige Zufallsvariable. Durch die Festlegung einer Menge von Matrizen und eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf dieser Menge wird ein Zufallsmatrixensemble definiert. Üblicherweise, wie auch in dieser Arbeit, werden quadratische Zufallsmatrizen im Hinblick auf ihre Spektren untersucht, d.h. man fragt nach den statistischen Eigenschaften der Eigenwerte der Matrizen eines Ensembles. Die volle Information liefert die mehrdimensionale Verteilung aller Eigenwerte. Sie beschreibt, für ein Ensemble auf $M(N)$, die Wahrscheinlichkeit, mit der die jeweils N Eigenwerte (gezählt mit ihren algebraischen Vielfachheiten) der Matrizen des Ensembles N vorgegebene Werte annehmen und enthält insbesondere sämtliche Korrelationen der Eigenwerte. Meist gefragt sind jedoch die folgenden beiden eindimensionalen Verteilungen:

1. Die *Eigenwertverteilung*, in die alle Eigenwerte derselben Matrix mit gleicher Wichtigkeit eingehen. Sie beschreibt, wo die Eigenwerte der Matrizen eines Ensembles typischerweise liegen.
2. Die *Abstandsverteilung*, in die alle Abstände benachbarter Eigenwerte derselben Matrix mit gleicher Wichtigkeit eingehen, wobei die genaue Definition vom Ensemble abhängt: Sind die Spektren rein reell, so meint man die euklidischen Abstände aufeinander folgender Eigenwerte ($N - 1$ Stück bei N Eigenwerten); bei unitären Matrizen meint man die Bogenlängen zwischen benachbarten Eigenwerten auf dem Einheitskreis (N Stück bei N Eigenwerten); bei Spektren, die statistisch zweidimensionale Teile der komplexen Ebene füllen, ist der euklidische Abstand zum jeweils nächsten Nachbarn gemeint (N Stück bei N Eigenwerten). Die Abstandsverteilung liefert

einen Einblick in die Korrelationen der Eigenwerte der Matrizen eines Ensembles.

Je nach Ensemble und Anwendungshintergrund ergeben sich darüberhinaus weitere zu untersuchende Größen. Interessant bei allen ist das Verhalten im Grenzfall unendlich großer Matrizen. Dieses kann für verschiedene Ensembles übereinstimmen. Vermutlich steht dahinter eine Art zentraler Grenzwertsatz/Gesetz der großen Zahl [13].

3.2 Ausgewählte Ensembles

Wir wollen uns nun mit einigen Zufallsmatrixensembles befassen, die für die weitere Arbeit von Bedeutung sind.

3.2.1 Ginibre-Ensembles komplexer und reeller Matrizen

GinUE

Das unitäre Ensemble nach Ginibre (GinUE) [38] ist das Standardensemble für allgemeine Matrizen aus $M(N)$. Die Real- und Imaginärteile aller Matrixelemente werden dabei unabhängig und identisch normalverteilt mit Mittelwert Null und Standardabweichung σ angesetzt. Es hat eine wichtige Eigenschaft, die das folgende Lemma aus [39] benennt.

Lemma 3.1: *Das Maß des GinUE ist invariant unter Links- und Rechtsmultiplikation beliebiger unitärer Matrizen, d.h.*

$$\forall A \in M(N), U, V \in M_u(N): d\mu_{\text{GinUE}}(UA) = d\mu_{\text{GinUE}}(AV) = d\mu_{\text{GinUE}}(A). \quad (3.1)$$

Die Dichtefunktion der Eigenwertverteilung hat im Limes $N \rightarrow \infty$ eine einfache Form [38]: Sie ist konstant innerhalb ihres Trägers – eines Kreises in der komplexen Ebene um Null mit Radius $R_{\text{GinUE}} = \sqrt{2\sigma^2 N}$. Abbildung 3.1 (a) zeigt eine numerische Simulation für $N = 20$. Dort erkennt man einen stetigen Abfall der Dichte für Radien um R_{GinUE} . Tatsächlich ist der Anteil der Eigenwerte mit Betrag größer R_{GinUE} für endliche $N \gg 1$ nach [38] als $(2\pi N)^{-\frac{1}{2}}$ gegeben. Später werden wir noch die Verteilung der Singulärwerte von A , d.h. der (nichtnegativen) Eigenwerte von $\sqrt{A^\dagger A}$ benötigen. Asymptotisch ist sie durch ein Viertelkreisgesetz gegeben [40], d.h. ihre Dichtefunktion für $N \rightarrow \infty$ lautet

$$p_{\text{viertel}}(x) = \frac{4}{\pi r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}, \quad 0 \leq x \leq r \quad (3.2)$$

$$\text{mit } r = 2R_{\text{GinUE}} = \sqrt{8\sigma^2 N} \quad (3.3)$$

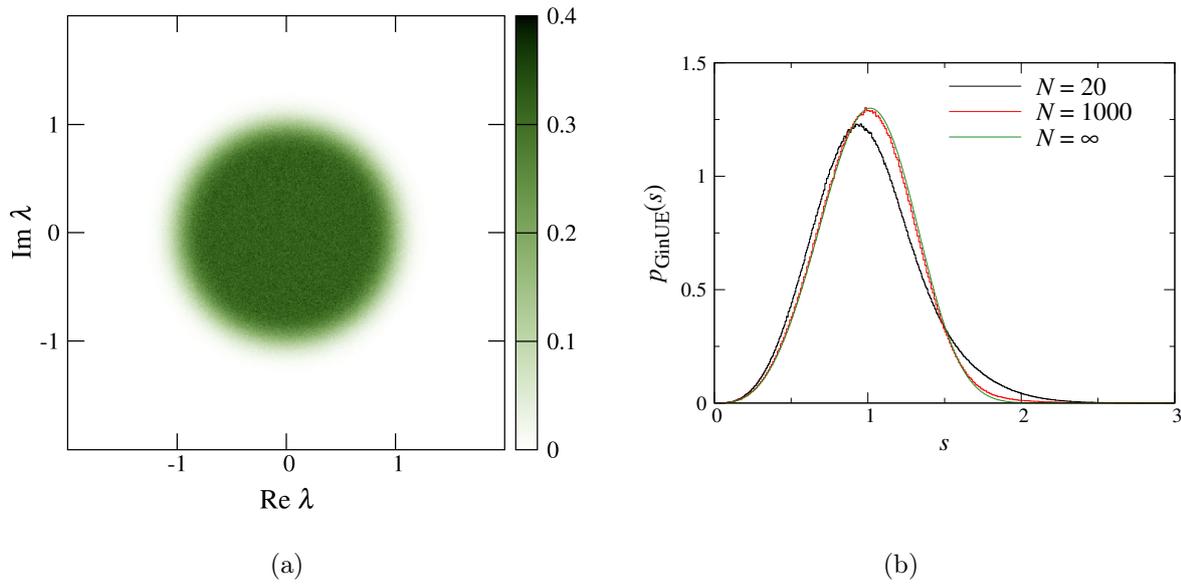


Abb. 3.1: GinUE: Wahrscheinlichkeitsdichten der (a) Eigenwertverteilung für $N = 20$ und $\sigma^{-2} = 2N$, (b) Abstandsverteilung für verschiedene N . Die Abstände wurden dabei auf den Mittelwert 1 skaliert, um einen Vergleich mit $N = \infty$ gemäß (3.4) zu ermöglichen. Die numerischen Ergebnisse für endliche N resultieren aus je 10^7 Eigenwerten.

Auch die Abstandsverteilung der Eigenwerte des GinUE ist bekannt. Skaliert man ihre asymptotische Dichtefunktion auf einen mittleren Abstand von 1, so lautet selbige [16, 19]

$$p_{\text{GinUE}}(s) = c p(cs) \quad \text{mit} \quad p(s) = 2s \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=1}^{N-1} e_n(s^2) e^{-s^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{s^{2n}}{n! e_n(s^2)} \right), \quad (3.4)$$

wobei $c = \int_0^\infty s p(s) ds \cong 1,1429$ und $e_n(x) = \sum_{i=0}^n x^i / i!$ definiert wurden. Für kleine s zeigt p_{GinUE} ein kubisches Verhalten. Die Konvergenz in (3.4) erfolgt glücklicherweise schnell, sodass ein Vergleich mit numerischen Ergebnissen möglich ist; siehe dazu Abbildung 3.1(b).

GinOE

Das orthogonale Ensemble nach Ginibre (GinOE) [38] ist das reelle Analogon des GinUE, d.h. in ihm setzt man die Matrixelemente als reelle, unabhängig und identisch normalverteilt Zufallszahlen mit Mittelwert Null und Standardabweichung σ an. Es wird uns als eingehend untersuchte Referenz dienen. Seine Spektralstatistik bei endlichen N unterscheidet sich wesentlich von der des GinUE: Da das charakteristische Polynom jeder Matrix rein reelle Koeffizienten hat, sind alle Eigenwerte reell oder tauchen als komplex konjugierte Paare auf. Das hat Auswirkungen auf die Eigenwertverteilung in der Nähe und

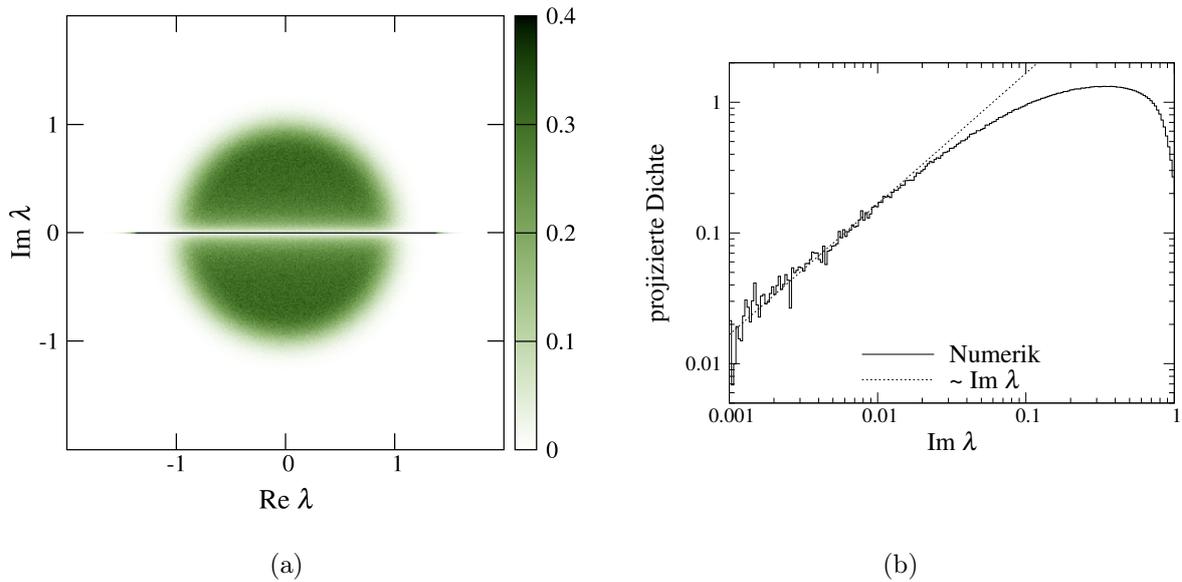


Abb. 3.2: GinOE: Wahrscheinlichkeitsdichten der (a) Eigenwertverteilung und (b) Verteilung der Imaginärteile der Eigenwerte mit positivem Imaginärteil für $N = 20$ und $\sigma^{-2} = N$, numerisch ermittelt aus 10^7 Eigenwerten. In (a) wurde die Farbskala beschnitten, da die reellen Eigenwerte einen Dirac-Beitrag in imaginärer Richtung liefern.

auf der reellen Achse, wie Abbildung 3.2(a) zeigt: Für $\text{Im } \lambda \rightarrow 0$ geht die Wahrscheinlichkeitsdichte gegen Null; auf der reellen Achse wiederum liegt ein makroskopischer Anteil der Eigenwerte. Die Verteilung der Imaginärteile der Eigenwerte in Abbildung 3.2(b) zeigt ein lineares Verhalten für kleine $|\text{Im } \lambda|$ [41]. Reelle und nicht reelle Eigenwerte *stoßen einander* also *linear ab*, wie wir ab jetzt schreiben werden. Über den Anteil der reellen Eigenwerte am Spektrum weiß man, dass er für große N im Mittel als $(N\pi/2)^{-\frac{1}{2}}$ gegeben ist [42]; es ist sogar die genaue Verteilung für beliebige N bekannt [23]. Die reellen Eigenwerte liefern also einen Dirac-Beitrag zur Verteilung in der komplexen Ebene, der in Abbildung 3.2(a) durch die grobe Rasterung mit Bins ausgeschmiert erscheint. Für $N \rightarrow \infty$ allerdings vereinfacht sich die Dichtefunktion der Eigenwertverteilung wie für das GinUE zu einem Kreisgesetz [43, 44] – mit einem Radius von $R_{\text{GinOE}} = \sqrt{\sigma^2 N}$. Auch die Abstandsverteilungen sind bekannt: Die reellen Eigenwerte stoßen einander linear, die komplexen einander kubisch ab [41].

3.2.2 Unitäre Matrizen und Haar-Maß – das CUE

Das CUE (circular unitary ensemble) ist ein Ensemble auf $M_u(N)$, dessen Wahrscheinlichkeitsmaß μ_{CUE} invariant unter Links- und Rechtsmultiplikation beliebiger unitärer Matrizen ist, d.h. wir haben

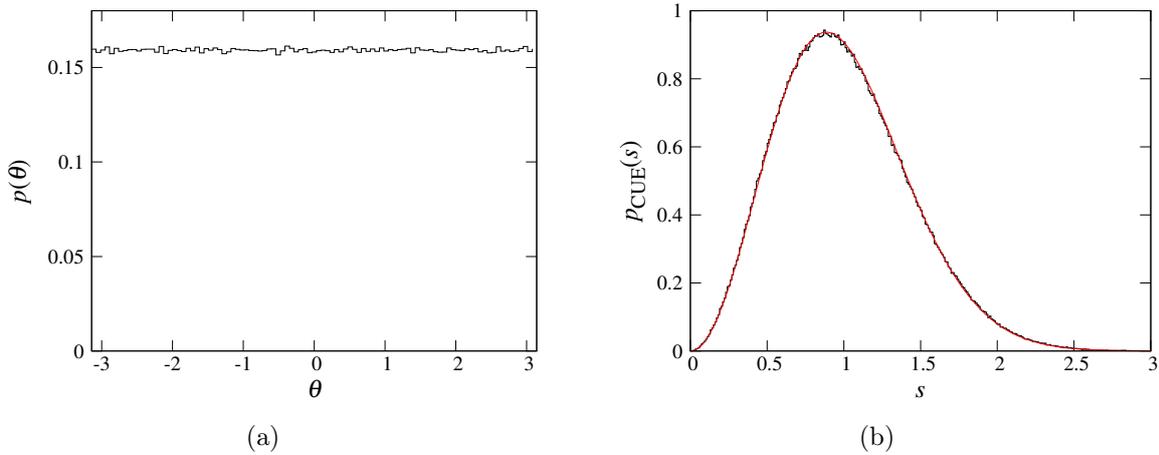


Abb. 3.3: CUE: Wahrscheinlichkeitsdichten der (a) Eigenwertphasenverteilung und (b) Phasenabstandsverteilung für $N = 20$, numerisch ermittelt aus 10^6 Eigenwerten. Die Abstände wurden dabei für einen Vergleich mit dem Wigner-Gesetz (3.6) (glatte Linie) auf den Mittelwert 1 skaliert.

Definition 3.2: Für das Maß des CUE gilt

$$\forall U, V, W \in M_u(N): d\mu_{\text{CUE}}(VU) = d\mu_{\text{CUE}}(UW) = d\mu_{\text{CUE}}(U). \quad (3.5)$$

Um die besondere Bedeutung von μ_{CUE} und den Fakt zu erkennen, dass μ_{CUE} durch (3.5) bereits eindeutig definiert ist, ist etwas Gruppentheorie von Nöten [39]: $M_u(N)$ ist isomorph zu einer kompakten Lie-Gruppe, deren Gruppenstruktur von der Matrixmultiplikation herrührt. Auf jeder kompakten Lie-Gruppe wiederum existiert ein bis auf eine Konstante eindeutiges links- und rechtsinvariantes Maß – das sogenannte Haar-Maß. Soll dieses Maß ein Wahrscheinlichkeitsmaß sein, legt das die Konstante fest. Wir sehen also: μ_{CUE} ist das (normierte) Haar-Maß auf $M_u(N)$. Es ist ein natürliches Maß, denn aufgrund seiner Invarianzeigenschaft trägt jeder Bereich von $M_u(N)$ das gleiche Gewicht.

Eine explizite Definition des CUE über lokale Koordinaten (N^2 Euler-Winkel) ist zwar möglich [45], aber aufwendig. Wir werden im Folgenden, wann immer eine numerische Generierung von Matrizen des CUE nötig ist, den Algorithmus aus [39] verwenden, der auf dem GinUE und einer QR-Zerlegung basiert. Abbildung 3.3 zeigt die wesentlichen spektralstatistischen Eigenschaften des CUE: Die Eigenwerte sind für alle N (aufgrund der Uniformität des Haar-Maßes) uniform auf dem Einheitskreis verteilt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der auf den Mittelwert 1 skalierten Abstände s der Phasen θ der Eigenwerte

kann für $N \rightarrow \infty$ gut durch das Wigner-Gesetz

$$p_{\text{Wigner,CUE}}(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-4s^2/\pi} \quad (3.6)$$

beschrieben werden. Für einen Vergleich von dieser mit der exakten asymptotischen Verteilung verweisen wir auf [17].

4 Zufallsmatrixtheorie und Lindblad-Gleichung – Grundlagen

Wir kommen nun zum eigentlichen Inhalt dieser Arbeit: Die Anwendung der Theorie der Zufallsmatrizen zur Untersuchung der durch die Lindblad-Gleichung generierten Dynamik. Dieses Kapitel behandelt die Grundlagen dieser Anwendung. Wir werden die Lindblad-Gleichung für die Komponenten der Dichtematrix schreiben und die Bedeutung der Eigenwerte des LSO klarstellen. Zur Vorbereitung führen wir eine Indextransformation ein und schreiben den Relaxationsteil des LSO in eine praktischere Form um. Dann definieren wir verschiedener LSO-Ensembles und befassen uns mit deren Grundbausteinen - Ensembles hermitescher und reeller Matrizen. Anschließend zeigen wir allgemeine Eigenschaften des Spektrums von \mathcal{L} und im letzten Abschnitt beweisen wir ein Lemma, das im nächsten Kapitel wiederholt zum Einsatz kommen wird.

4.1 Indextransformation

Im Folgenden werden Tensoren vierter Stufe (\mathcal{A}_{mnpq}) mit $\mathcal{A}_{mnpq} \in \mathbb{C}$ auftreten, deren vier Indizes jeweils von 1 bis N laufen. Es wird sich als sinnvoll erweisen, die ersten und die letzten beiden Indizes in der gleichen Art zu jeweils einem Index zusammenzufassen, $(m, n) \xrightarrow{\Phi} \alpha$, $(p, q) \xrightarrow{\Phi} \beta$, der dann je von 1 bis N^2 läuft. So entsteht eine Matrix $(\mathcal{A}_{\alpha\beta})$, deren Eigenwerte von Interesse sein werden.

Da die Indextransformation auf verschiedene Arten erfolgen kann, wollen wir uns davon überzeugen, dass die Eigenwerte der entstehenden Matrix unabhängig von der gewählten Transformation Φ sind, solange man das vordere und das hintere Indexpaar *gleich* transformiert. Dazu erinnern wir uns daran, dass ähnliche Matrizen das gleiche Spektrum besitzen und beobachten: Seien $A, A' \in M(N^2)$ zwei durch verschiedene Indextransformationen Φ, Φ' aus (\mathcal{A}_{mnpq}) entstandene Matrizen. Dann ist A ähnlich zu A' , denn einer Änderung der Reihenfolge beim Abzählen der Indizes entspricht eine Permutation von Elementen einer Basis in \mathbb{C}^{N^2} (also ein Basiswechsel), wenn man die Matrizen als lineare Abbildungen in \mathbb{C}^{N^2} bezüglich bestimmter Basen betrachtet.

Eine rechnerisch günstige Abzählweise ist das zeilenweise Abzählen (lexikalische Ordnung), wenn man jeweils bei 0 zu zählen beginnt; diese Indextransformation werden wir ab jetzt stets verwenden:

$$\begin{aligned}\Phi: (m, n) &\mapsto mN + n, \\ \Phi^{-1}: \alpha &\mapsto (\alpha \operatorname{div} N, \alpha \bmod N),\end{aligned}\tag{4.1}$$

wobei $\alpha \operatorname{div} N$ den zur Null hin gerundeten Quotienten α/N und $\alpha \bmod N$ den Rest der Division α/N bezeichnet.

Um die Unterscheidung der Komponenten von \mathcal{A} als Tensor zweiter bzw. vierter Stufe leichter zu machen, halten wir folgende schon implizit eingeführte Konvention fest:

1. \mathcal{A} als Tensor zweiter Stufe habe Komponenten $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ – griechische Indizes.
2. \mathcal{A} als Tensor vierter Stufe habe Komponenten \mathcal{A}_{mnpq} – lateinische Indizes.
3. Sollte es einmal günstig sein, eine gemischte Schreibweise zu verwenden, möge ein Komma zur Trennung dienen: $\mathcal{A}_{\alpha,pq}$ oder $\mathcal{A}_{mn,\beta}$.

4.2 Zum Relaxationsteil des LSO

In Kapitel 2 haben wir die Lindblad-Gleichung in ihrer allgemeinen Form kennen gelernt; insbesondere wurde der Relaxationsteil des LSO als $\mathcal{R} = \mathcal{L} + i[H, \cdot]$ mit \mathcal{L} gemäß (2.17) definiert. Um ihn explizit auszuwerten, benötigt man eine explizite ONB im Raum der spurlosen $N \times N$ -Matrizen bezüglich des Hilbert-Schmidt-Skalarprodukts $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr} A^\dagger B$. Sei $(|n\rangle)_{n=1,\dots,N}$ eine ONB des System-Hilbertraums. Dann ist (für eine Herleitung siehe Anhang A.1) eine ONB der spurlosen Matrizen aus $M(N)$ durch die Lindblad-Operatoren $(L_{mn})_{m,n=1,\dots,N, \neg(m=n=N)}$ mit

$$L_{mn} = \begin{cases} |m\rangle \langle n| & \text{für } m \neq n, \\ \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}(|1\rangle \langle 1| + \dots + |n\rangle \langle n| - n|n+1\rangle \langle n+1|) & \text{für } m = n \end{cases}\tag{4.2}$$

gegeben. Diese haben die schöne Eigenschaft $L_{mn}^\dagger = L_{nm}$.

Setzt man sie in (2.17) ein und versucht eine komponentenweise Auswertung der Lindblad-Gleichung, wie sie der folgende Abschnitt beschreibt, erhält man ein recht längliches Ergebnis (siehe Anhang A.3), das für die kommenden analytischen Überlegungen ungeeignet ist. Als wesentlich praktischer erweist sich der folgende Zugang: Wir ergänzen zum einen

die ONB (4.2) mit $L_{NN} := \frac{1}{\sqrt{N}}I$ zu einer ONB von $M(N)$ und zum anderen die Matrix $c \in M_+(N^2 - 1)$ zu

$$b := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & c & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_+(N^2). \quad (4.3)$$

Die Spektren der Matrizen b und c hängen über $\sigma(b) = \sigma(c) \cup \{0\}$ zusammen. Nun lässt sich \mathcal{R} schreiben als

$$\mathcal{R} = \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^2} \frac{b_{\alpha\beta}}{2} ([L_\alpha, \cdot L_\beta^\dagger] + [L_\alpha \cdot, L_\beta^\dagger]) = \sum_{m, n, p, q=1}^N \frac{b_{mnpq}}{2} ([L_{mn}, \cdot L_{pq}^\dagger] + [L_{mn} \cdot, L_{pq}^\dagger]), \quad (4.4)$$

wobei wir die im vorangegangenen Abschnitt definierte Indextransformation verwendet haben. Man beachte, dass die Summe nun von 1 bis N^2 bzw. N geht.⁹ In Abschnitt 2.3.1 haben wir gezeigt, dass \mathcal{R} (in seiner ursprünglichen Form mit $N^2 - 1$ Lindblad-Operatoren) forminvariant unter unitären Transformationen der Lindblad-Operatoren ist. Das gleiche gilt auch für \mathcal{R} gemäß (4.4) und unitäre Transformationen der $(L_{nm})_{n, m=1, \dots, N}$. Wir können also auf die einfache, dyadische Basis $(D_{mn})_{m, n=1, \dots, N}$, d.h.

$$D_{mn} := |m\rangle \langle n| \quad (4.6)$$

wechseln – bei simultaner Transformation von b : Es möge gelten

$$D_{mn} = \sum_{p, q=1}^N L_{pq} U_{pqmn} \Leftrightarrow L_{mn} = \sum_{p, q=1}^N D_{pq} U_{pqmn}^\dagger = \sum_{p, q=1}^N U_{mnpq}^* D_{pq}. \quad (4.7)$$

⁹Eine allgemeine Anmerkung hierzu: Wenn man den Lindblad-Operatoren-Satz um $\frac{1}{\sqrt{N}}I$ und c analog zu (4.3) hermitesch, d.h. um $c_{\alpha N^2}$ und $c_{N^2 \beta} = c_{\beta N^2}^*$ erweitert, erzeugt das in der Lindblad-Gleichung die zusätzlichen Terme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} c_{\alpha N^2} (-\rho I L_\alpha - I L_\alpha \rho + 2L_\alpha \rho I) + \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\beta=1}^{N^2-1} c_{N^2 \beta} (-\rho L_\beta^\dagger I - L_\beta^\dagger I \rho + 2I \rho L_\beta^\dagger) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} c_{\alpha N^2} (L_\alpha \rho - \rho L_\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\beta=1}^{N^2-1} c_{N^2 \beta} (\rho L_\beta^\dagger - L_\beta^\dagger \rho) \\ &= -i \left[\frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} i (c_{\alpha N^2} L_\alpha - c_{\alpha N^2}^* L_\alpha^\dagger), \rho \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Da die Operatoren $i(c_{\alpha N^2} L_\alpha - c_{\alpha N^2}^* L_\alpha^\dagger)$ hermitesch sind, können diese Terme sämtlich in \mathcal{U} absorbiert werden.

In Anhang A.2 zeigen wir, dass sich

$$U_{mnpq} = (1 - \delta_{mn})\delta_{mp}\delta_{nq} + \delta_{mn}\delta_{pq}O_{mp} \quad (4.8)$$

mit

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N(N-1)}} & \cdots & & \frac{1}{\sqrt{N(N-1)}} & -\frac{N-1}{\sqrt{N(N-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \cdots & & \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{1}{\sqrt{N}} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

ergibt. Man beachte den Zusammenhang der ersten $N - 1$ Zeilen von O mit den Lindbladoperatoren L_{nm} nach (4.2). Nutzen wir die Indextransformation aus (4.1), so erhalten wir die Matrix (leer heißt Null und I_N ist die Einheitsmatrix aus $M(N)$)

$$(U_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & \cdots & O_{1N} \\ & I_N & & \\ O_{21} & O_{22} & \cdots & O_{2N} \\ & & I_N & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & I_N \\ O_{N1} & O_{N2} & \cdots & O_{NN} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Nun können wir $L_\alpha = \sum_\beta D_\beta U_{\beta\alpha}^\dagger$ in (4.4) einsetzen und erhalten

$$\mathcal{R} = \sum_{\mu,\nu=1}^{N^2} \frac{a_{\mu\nu}}{2} ([D_{\mu\cdot}, D_\nu^\dagger] + [D_{\mu\cdot}, D_\nu^\dagger]) \quad (4.11)$$

$$\text{mit } a := U^\dagger b U. \quad (4.12)$$

Die Matrix a hat eine besondere Eigenschaft, die wir in Abschnitt 4.6 zeigen werden. Zunächst wollen wir jedoch mit der expliziten Auswertung der Lindblad-Gleichung fortfahren.

4.3 Explizite Form der Lindblad-Gleichung

Die abstrakte Form der Lindblad-Gleichung

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho \quad (4.13)$$

kann (da \mathcal{L} linear ist) über eine Darstellung des Dichteoperators als Dichtematrix bezüglich einer festen ONB $(|n\rangle)_{n=1,\dots,N}$ des Systemhilbertraums gemäß

$$\rho = \sum_{m,n=1}^N |m\rangle \rho_{mn} \langle n| \quad (4.14)$$

zu einem System von Differentialgleichungen in den Komponenten der Dichtematrix, d.h.

$$\frac{d}{dt} \rho_{mn} = \sum_{p,q=1}^N \mathcal{L}_{mnpq} \rho_{pq} \quad (4.15)$$

mit Konstanten \mathcal{L}_{mnpq} ausgeschrieben werden. Um das explizit zu sehen, erinnern wir uns daran, dass in der Quantentheorie Zeitableitungen von Operatoren wie in (4.13) schwach definiert sind, d.h. es gilt

$$\langle m | \dot{\rho} | n \rangle = \frac{d}{dt} \langle m | \rho | n \rangle = \frac{d}{dt} \rho_{mn}. \quad (4.16)$$

Dies nutzend leiten wir einmal (4.15) aus (4.13) her – für \mathcal{R} in der Form (4.11) mit $D_{mn} = |m\rangle \langle n|$. Wir nutzen dabei die Darstellung (4.14) und eine analoge für H . Es ist

$$\frac{d}{dt} \rho_{mn} = \langle m | \mathcal{L} \rho | n \rangle = \langle m | \mathcal{U} \rho | n \rangle + \langle m | \mathcal{R} \rho | n \rangle \quad (4.17)$$

und wir berechnen

$$\begin{aligned} \langle m | \mathcal{U} \rho | n \rangle &= -i \langle m | [H, \rho] | n \rangle \\ &= -i \sum_{s=1}^N (H_{ms} \rho_{sn} - \rho_{ms} H_{sn}) = -i \sum_{p,q=1}^N (H_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mp} H_{qn}) \rho_{pq}, \quad (4.18) \\ \langle m | \mathcal{R} \rho | n \rangle &= \sum_{k,l,r,s=1}^N \frac{a_{klrs}}{2} (2 \langle m | D_{kl} \rho D_{sr} | n \rangle - \langle m | \rho D_{sr} D_{kl} | n \rangle - \langle m | D_{sr} D_{kl} \rho | n \rangle) \\ &= \sum_{k,l,r,s=1}^N \frac{a_{klrs}}{2} (2 \delta_{mk} \rho_{ls} \delta_{rn} - \rho_{ms} \delta_{rk} \delta_{ln} - \delta_{ms} \delta_{rk} \rho_{ln}) \\ &= \sum_{l,s=1}^N a_{mlns} \rho_{ls} - \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N a_{knks} \rho_{ms} - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N a_{klkm} \rho_{ln} \\ &= \sum_{p,q=1}^N \left(a_{mpnq} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (a_{snsq} \delta_{mp} + a_{spsm} \delta_{nq}) \right) \rho_{pq}. \quad (4.19) \end{aligned}$$

Wir erhalten also $\mathcal{L}_{mnpq} = \mathcal{U}_{mnpq} + \mathcal{R}_{mnpq}$ mit

$$\mathcal{U}_{mnpq} = -i (H_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mp} H_{qn}), \quad (4.20)$$

$$\mathcal{R}_{mnpq} = a_{mpnq} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (a_{snsq} \delta_{mp} + a_{spsm} \delta_{nq}). \quad (4.21)$$

Man beachte die Reihenfolge der Indizes in (4.21). Dieses Resultat für \mathcal{R}_{mnpq} werden wir im Folgenden für analytische Überlegungen verwenden. Führt man die gleiche Rechnung für \mathcal{R} in seiner ursprünglichen Form nach Theorem 2.4 mit L_{mn} gemäß (4.2) durch, erhält man ein weitaus umfangreicheres Ergebnis, das in Anhang A.3 aufgeführt ist und in numerischen Rechnungen verwendet wird, da die unitäre Transformation von c zu a für große N numerisch sehr aufwendig wird.

Nutzen wir schließlich die in Abschnitt 4.1 eingeführte Indextransformation für \mathcal{L} und ρ , so kann (4.15) in

$$\frac{d}{dt} \rho_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N^2} \mathcal{L}_{\alpha\beta} \rho_\beta \quad (4.22)$$

verwandelt werden und wir halten fest: Die Lindblad-Gleichung stellt für die Komponenten der Dichtematrix ein System gewöhnlicher, homogener, linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer quadratischen Matrix aus konstanten Koeffizienten $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ dar. Die Lösungstheorie solcher Systeme besagt [46]:

Satz 4.1: *Sei $A \in M(n)$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A mit den algebraischen Vielfachheiten n_1, \dots, n_k . Dann hat die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ die Form*

$$x(t) = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} P_i(t). \quad (4.23)$$

Hierbei ist jedes P_i ein Vektor, bestehend aus Polynomen in t vom Grad $\leq n_i - 1$.

Wir sehen also, dass den Eigenwerten von \mathcal{L} eine besondere Rolle für das (Langzeit-) Verhalten von Lösungen zukommt.¹⁰ Ihre Imaginärteile führen zu Oszillationen, ihre Realteile zu einer exponentiellen Verstärkung (wenn positiv) bzw. Dämpfung (wenn negativ) der zugehörigen Anfangszustandsanteile; die zum Eigenwert Null gehörigen Eigenvektoren sind stationäre Lösungen des Systems.

¹⁰Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass nur die durch (4.22) gegebene Zeitentwicklung in die Zukunft physikalisch ist. Die Vorwärtszeitentwicklung eines Anfangszustands fällt aber natürlich mit der mathematischen Gesamtlösung des entsprechenden Anfangswertproblems zusammen, womit der zitierte Satz auch im Falle der Lindblad-Gleichung seine Aussagekraft behält.

4.4 Zufallsmatrixensembles für den LSO

Wir kennen jetzt den Weg von der abstrakten Form des Lindblad-Superoperators aus Theorem 2.4 zur Koeffizientenmatrix $(\mathcal{L}_{\alpha\beta})$ des Lindblad-Gleichungssystems (4.22) für die Komponenten der Dichtematrix des offenen Quantensystems. Wir haben außerdem die Bedeutung der Eigenwerte von \mathcal{L} bzw. $(\mathcal{L}_{\alpha\beta})$ für die Lindbladsche Dynamik herausgearbeitet. Für eine zufallsmatrixtheoretische Analyse dieser Dynamik müssen nun Ensembles zufälliger \mathcal{L} definiert werden.

Da die Lindblad-Dynamik in dieser Arbeit unseres Wissens nach zum ersten Mal zufallsmatrixtheoretisch untersucht wird, wollen wir die Zufallsmatrixensembles für \mathcal{L} möglichst allgemein ansetzen; sie sollten also alle nach Theorem 2.4 erlaubten \mathcal{L} umfassen. Der LSO ist durch die Angabe einer hermiteschen Matrix H , einer positive Matrix c und eines Satzes von Lindblad-Operatoren eindeutig definiert. (Man könnte vermuten, dass sich H durch eine Transformation ins Wechselwirkungsbild formal aus der Lindblad-Gleichung entfernen lässt. In Anhang A.4 zeigen wir jedoch, dass dem nicht so ist.) Ein Zufallsmatrixensemble für \mathcal{L} lässt sich also definieren, indem man einen bestimmten Satz (L_α) von Lindblad-Operatoren festlegt und H und c zufällig wählt. Die Ensembles für H bzw. c sollten dabei auf ganz $M_h(N) = \{H \in M(N) : H = H^\dagger\}$ bzw. $M_+(N^2 - 1)$ definiert sein, damit alle nach Theorem 2.4 zulässigen \mathcal{L} abgedeckt sind. Bei diesem Ansatz stellt sich die Frage, inwiefern das Ensemble vom gewählten Lindblad-Operatoren-Satz abhängt. Wünschenswert wäre ein von dieser Wahl unabhängiges Ensemble. Ein solches ist gegeben, wenn wir als Ensemble für c eines wählen, das invariant unter unitären Transformationen $c \rightarrow U^\dagger c U$ ist, denn eine solche Transformation kompensiert einen Wechsel des Satzes (L_α) , wie wir in Abschnitt 2.3.1 gezeigt haben. Schließlich ließen sich die Ensembles für H und c korrelieren; wir wollen sie hier jedoch der Einfachheit halber als unabhängig ansetzen. Damit sind wir bei folgender Definition.

Definition 4.2: *Die von uns studierten Zufallsmatrixensembles für den Lindblad-Superoperator aus Theorem 2.4 sind definiert durch den Satz (4.2) von Lindblad-Operatoren und unabhängige Zufallsmatrixensembles für H und c . Mögliche Ensembles für H müssen ganz $M_h(N)$ und jene für c ganz $M_+(N^2 - 1)$ abdecken. Letztere müssen zudem invariant unter unitären Ähnlichkeitstransformationen sein.*

Es gilt nun, Ensembles zufälliger hermitescher und positiver Matrizen mit den genannten Eigenschaften zu finden. Weiterhin sind diese Ensembles spektralstatistisch zu untersuchen, da Relationen zwischen den Spektren von H und c auf der einen und \mathcal{L} auf der anderen Seite zu erwarten sind. Diesen Aufgaben gehen wir in den folgenden beiden Unterabschnitten nach. Im dritten Unterabschnitt zeigen wir eine wichtige Gemeinsamkeit der Ensembles.

Allgemein ist die Frage nach einer sinnvollen Skalierung der Matrizen H und c mit der Systemgröße zu beantworten. Die Eigenwerte der hermiteschen Matrix in der Lindblad-Gleichung sind die Energieniveaus des offenen Quantensystems. Sieht man das von uns betrachtete N -Niveau-System als Teil eines unendlichdimensionalen Hilbertraums an, erscheint es sinnvoll, eine (zumindest asymptotisch) konstante Niveaudichte anzunehmen, d.h. einen von N unabhängigen mittleren Niveauabstand von, sagen wir, Eins. Die Eigenwerte der positiven Matrix in der Lindblad-Gleichung dagegen stellen nach den Überlegungen in Abschnitt 2.3.2 Übergangsraten zwischen einzelnen Niveaus dar. Eine Veränderung von deren Mittelwert mit einer Veränderung der Systemgröße erscheint unnatürlich; folglich werden wir unsere Ensembles positiver Matrizen so wählen, dass deren Eigenwerte im Mittel unabhängig von N sind. Beide Eigenschaften lassen sich durch eine entsprechende Skalierung der Matrizen der Ensembles erreichen.

4.4.1 Ensembles hermitescher Matrizen

Wir benötigen Ensembles, die ganz $M_h(N)$ abdecken. Von den bekannten Ensembles nach Wigner [13] kommt daher das GUE (Gaussian unitary ensemble) in Betracht. Darüberhinaus werden wir ein unitär invariantes Ensemble mit unabhängig und identisch normalverteilten Eigenwerten betrachten; wir nennen es UNHUE (uncorrelated normal Hermitian unitary ensemble). Wir tun dies, um über den Vergleich mit dem GUE den Einfluss von Korrelationen der Eigenwerte von H auf das Spektrum von \mathcal{L} zu untersuchen. Die Normalverteilung wählen wir vor allem aus zwei Gründen: Zum einen sollte sich die Verteilung über ganz \mathbb{R} erstrecken, damit das Ensemble $M_h(N)$ abdeckt; zum anderen sollte sie eine endliche Varianz besitzen, um den vorgegebenen mittleren Niveauabstand gewährleisten zu können. Der Mittelwert ist eigentlich egal, da H über einen Kommutator in \mathcal{L} eingeht. Da die Normalverteilung für diese Vorgaben die größtmögliche Entropie besitzt, d.h. maximal unvoreingenommen ist, fällt unsere Wahl auf sie. Schließlich werden wir ein drittes Ensemble betrachten, das nicht ganz $M_h(N)$ abdeckt: Wie im UNHUE sollen die Eigenwerte als unabhängig und identisch verteilt angesetzt werden – hier jedoch mit der asymptotischen Verteilung der Eigenwerte des GUE, sprich nach einem Halbkreisgesetz (siehe den folgenden Unterabschnitt). Wir nennen es USHUE (uncorrelated semicircular Hermitian unitary ensemble). Die Untersuchung dieser drei Ensembles ermöglicht es, den Einfluss der Verteilung und der Korrelationen der Eigenwerte von H auf die Spektralstatistik von \mathcal{L} getrennt zu untersuchen: Das GUE und das USHUE haben asymptotisch die gleiche Eigenwertverteilung aber verschiedene Eigenwertkorrelationen, die Eigenwerte von USHUE und UNHUE dagegen sind gleich (un)korreliert und verschieden verteilt.

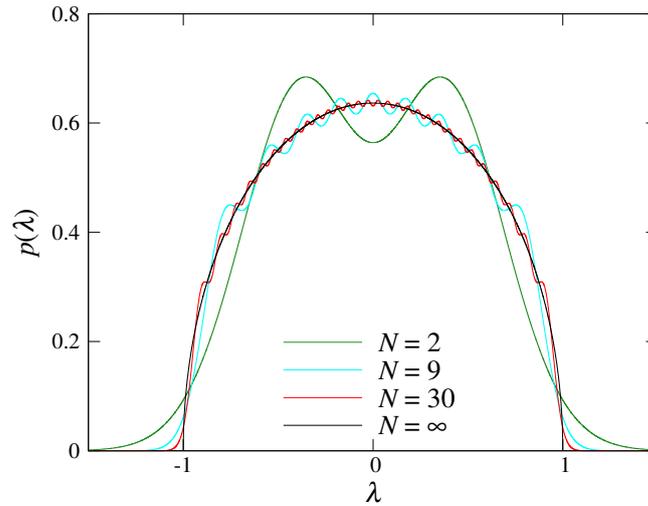


Abb. 4.1: Eigenwertverteilung des GUE für verschiedene endliche N und $\sigma^{-2} = 8N$ nach [13] im Vergleich mit $N = \infty$, d.h. dem Halbkreisgesetz (4.24) für $r = 1$.

Für jedes Ensemble stellt sich die Frage, durch welche Skalierung sich ein von N unabhängiger mittlerer Niveauabstand realisieren lässt. Dazu sei Folgendes vorangestellt. Der mittlere Niveauabstand ergibt sich aus der Summe der Differenzen aufeinanderfolgender Energien, geteilt durch die Anzahl dieser Differenzen, also $N - 1$. Diese Summe gleicht der Differenz von größter und kleinster Energie. Somit muss lediglich die mittlere Spannweite der Eigenwerte von H kontrolliert werden.

GUE

Das GUE ist das Standardensemble komplexer hermitescher Matrizen. Es wird zur Modellierung von Quantensystemen verwendet, deren Hamilton-Operatoren keiner Symmetrie unterliegen. Die reellen Diagonalelemente und die Real- und Imaginärteile der Elemente der strengen oberen Dreiecksmatrix sind für das GUE als unabhängig und identisch normalverteilt mit Mittelwert Null und Standardabweichung σ definiert. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Eigenwertverteilung ist für $N \rightarrow \infty$ durch ein Halbkreisgesetz gegeben [13]:

$$p_{\text{halb}}(x) = \frac{2}{\pi r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}, \quad -r \leq x \leq r \quad (4.24)$$

$$\text{mit } r = \sqrt{8\sigma^2 N}. \quad (4.25)$$

Für endliche N dagegen weicht die Verteilung von diesem Gesetz ab; sie kann über hermitesche Polynome explizit angegeben werden [13]. Abbildung 4.1 zeigt einen Vergleich der tatsächlichen Verteilung für verschiedene, endliche N mit dem Halbkreisgesetz. Bemer-

kenswert ist, dass die Dichtefunktionen kein scharfes Ende besitzen. Für hinreichend große N erkennt man die Kurven als Oszillationen um das Halbkreisgesetz mit N Maxima. Diese Dichteoszillationen sind auf die quadratische Abstoßung benachbarter Eigenwerte zurückzuführen; die Abstandsverteilung der Eigenwerte der Matrizen des GUE stimmt asymptotisch mit der des CUE überein [13]. Das asymptotische Halbkreisgesetz (4.24) macht eine Kontrolle der Spannweite der Eigenwerte einfach. Wir müssen lediglich den Radius des Halbkreises auf $r = N/2$ setzen, um asymptotisch eine mittlere Niveaudichte von Eins zu erreichen. Folglich definieren wir die Standardabweichung im von uns verwendeten GUE als $\sigma_{\text{GUE}} = \sqrt{N/32}$.

UNHUE

Wie eingangs beschrieben, ist dieses Ensemble wie folgt definiert: Die N Eigenwerte werden unabhängig und identisch normalverteilt gezogen und bilden die Diagonale einer Diagonalmatrix Λ ; für die unitären Transformationen sorgen Matrizen V aus dem CUE; die Matrizen des UNHUE sind dann als $V^\dagger \Lambda V$ gegeben. Da die Eigenwerte statistisch unabhängig sind, gilt für deren Abstandsverteilung ein Exponentialgesetz [13]. Eine solche Abstandsverteilung wird bei den Energieniveaus quantenmechanischer Systeme beobachtet, deren klassische Pendant integrabel sind [17]. Schwieriger als für das GUE ist es, die Spannweite der Eigenwerte zu kontrollieren. Da die Eigenwertverteilung für alle N eine Gaußverteilung ist, besitzt sie asymptotisch keinen kompakten Träger. Die Frage nach der mittleren Differenz von größter und kleinster von N unabhängig gleich normalverteilten Zufallszahlen ist eine aus dem Gebiet der Extremwertstatistik. Glücklicherweise ist sie so alt, wie dieses Gebiet selbst. Tippett hat den gefragten Erwartungswert für $N = 2, \dots, 1000$ und die Standardnormalverteilung bereits im Jahre 1925 berechnet und tabelliert [47, Tabelle X]. Wir werden auf seine Tabelle zurückgreifen. Seien die von Tippett berechneten Werte als r_N bezeichnet, so setzen wir $\sigma_{\text{UNHUE}} = (N - 1)/r_N$ als Standardabweichung der Normalverteilung für die Eigenwerte des UNHUE an. Zu beachten ist, dass r_N streng monoton mit N wächst.

USHUE

Analog zum UNHUE setzen sich die Matrizen des USHUE als $V^\dagger \Lambda V$ mit einer Matrix V aus dem CUE und einer Diagonalmatrix Λ zusammen. Die Diagonalelemente letzterer werden unabhängig und identisch nach dem Halbkreisgesetz (4.24) gezogen – mit dem Radius $r_{\text{USHUE}} = N/2$, um eine Vergleichbarkeit mit dem GUE gewährleisten zu können. Für spätere numerische Aufgaben stellt sich die Frage, wie sich n unabhängige Zufallszahlen

dieser Verteilung ziehen lassen. Versucht man, eine Abbildung zu finden, die uniform verteilte Zufallszahlen in Halbkreisumfangszahlen verwandelt, muss man feststellen, dass sich zwar die entsprechende Umkehrabbildung angeben lässt, die Abbildung selbst aber nicht durch elementare Funktionen darstellbar ist. Wir möchten darum hier einen Algorithmus vorstellen, der sich am Box-Muller-Verfahren zur Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen orientiert [48, §7.2]:

- Wähle x_1, x_2 unabhängig uniform auf $[0, 1)$.
- Bilde

$$\begin{aligned} y_1 &= a\sqrt{x_1} \cos 2\pi x_2, \\ y_2 &= b\sqrt{x_1} \sin 2\pi x_2. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Die so erzeugten Punkte $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sind innerhalb einer Ellipse mit den Halbachsen a, b uniform verteilt, denn

$$p_y(y_1, y_2) = \frac{p_x(x_1, x_2)}{\left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right|} = \left| \begin{array}{cc} \frac{a}{2\sqrt{x_1}} \cos 2\pi x_2 & -2\pi a\sqrt{x_1} \sin 2\pi x_2 \\ \frac{b}{2\sqrt{x_1}} \sin 2\pi x_2 & 2\pi b\sqrt{x_1} \cos 2\pi x_2 \end{array} \right|^{-1} = \frac{1}{\pi ab}. \tag{4.27}$$

Folglich sind y_1 und y_2 (korreliert) nach einer Halbkreisdichte mit Radien a und b verteilt.

Mithilfe der Transformation (4.26) kann man also aus $2n$ unabhängig uniform verteilten Zufallszahlen (aufgrund der Korrelation von y_1 und y_2 lediglich) n unabhängige Halbkreisumfangszahlen generieren.

4.4.2 Ensembles positiver Matrizen

Wir benötigen Ensembles, die ganz $M_+(N)$ abdecken und deren Maß μ invariant unter unitären Transformationen ist, d.h. es soll $d\mu(U^\dagger P U) = d\mu(P)$ für alle $P \in M_+(N)$, $U \in M_u(N)$ gelten. Unsere Ensembles werden wir auf Grundlage des folgenden Satzes definieren (für einen Beweis siehe [49]).

Satz 4.3: *Sei $P \in M(N)$. Dann sind äquivalent*

- (i) $P \in M_+(N)$,
- (ii) $\exists A \in M(N): P = A^\dagger A$,
- (iii) $P \in M_h(N)$ und $\sigma(P) \subset [0, \infty)$.

Die zweite Charakterisierung wird zur Definition eines Ensembles mit korrelierten Eigenwerten führen. Über die dritte können wir analog zum Vorgehen bei den hermiteschen Matrizen ein Ensemble mit unkorrelierten Eigenwerten definieren und schließlich werden wir wieder ein Ensemble einführen, dass zwischen den beiden angesiedelt ist – mit dem gleichen Ziel wie im hermiteschen Fall. Alle Ensembles werden so skaliert, dass ihre Eigenwertmittel zumindest asymptotisch übereinstimmen und unabhängig von N sind.

WPUE

Mithilfe von Satz 4.3(ii) lässt sich ein Ensemble mit den gewünschten Eigenschaften über das GinUE einführen: Man ziehe $A \in M(N)$ nach den Regeln des GinUE und bilde $P := A^\dagger A$. Jedes solche P ist positiv und nach Aussage des Satzes deckt das so definierte Ensemble ganz $M_+(N)$ ab. Da weiterhin

$$U^\dagger P U = U^\dagger A^\dagger A U = (AU)^\dagger (AU), \quad U \in M_u(N) \quad (4.28)$$

gilt und das GinUE nach Lemma 3.1 invariant unter Rechtsmultiplikationen beliebiger unitärer Matrizen ist, hat das Ensemble die geforderte Invarianzeigenschaft. Tatsächlich ist es im Prinzip so alt wie die Zufallsmatrixtheorie; Wishart hat sich in seiner 1928 veröffentlichten Arbeit mit dessen reeller Variante befasst [14]. Aus diesem Grund nennen wir es WPUE (Wishart positive unitary ensemble). In Abschnitt 3.2.1 haben wir erwähnt, dass die Singulärwerte von Matrizen des GinUE asymptotisch nach einem Viertelkreisgesetz verteilt sind. Die Eigenwerte von $A^\dagger A$ sind die Quadrate der Singulärwerte von A . Zieht man die Real- und Imaginärteile von A mit Standardabweichung σ , so erhält man für die Eigenwertverteilung des WPUE und $N \rightarrow \infty$ nach Gleichung (3.2) also

$$p_{\text{WPUE}}(\lambda) = \frac{2}{\pi r} \sqrt{\frac{r}{\lambda} - 1}, \quad 0 \leq \lambda \leq r \quad (4.29)$$

$$\text{mit } r = 8\sigma^2 N. \quad (4.30)$$

Abbildung 4.2(a) zeigt einen Vergleich mit einer empirischen Verteilung bei $N = 10$. Wie für das GUE sind Oszillationen um das asymptotische Verhalten und ein fehlendes scharfes Ende zu beobachten. Wir können also wieder Korrelationen zwischen den Eigenwerten vermuten und finden diese Vermutung in Abbildung 4.2(b) bestätigt. Dort ist die Abstandsverteilung des *entfalteten* Spektrums zu sehen. Was hat es mit diesem Begriff auf sich? Eine Entfaltung des Spektrums macht die Abstandsverteilung in verschiedenen Bereichen des Spektrums vergleichbar: Da der mittlere Abstand benachbarter Eigenwerte indirekt proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte der Eigenwertverteilung ist, variiert er

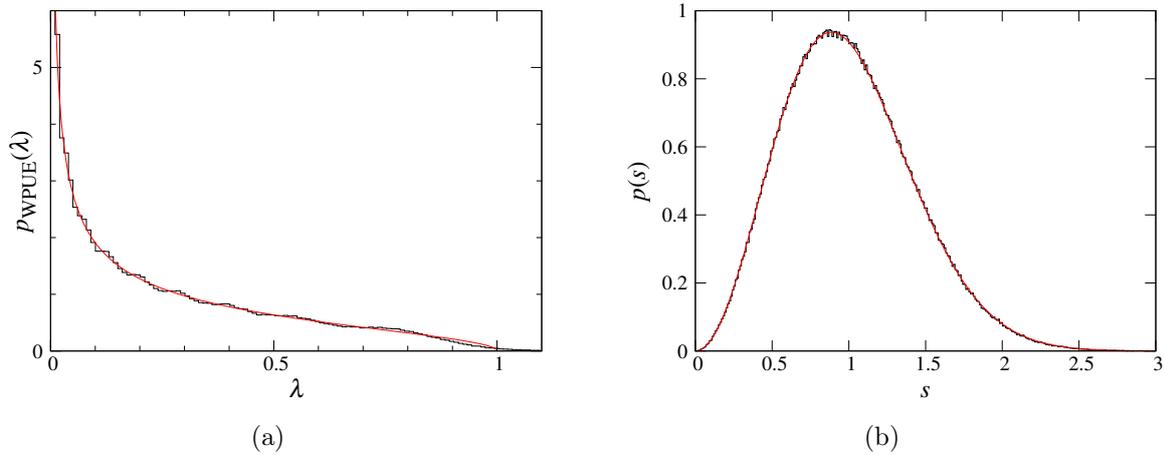


Abb. 4.2: WPUE: Wahrscheinlichkeitsdichten der (a) Eigenwertverteilung und (b) Abstandsverteilung für $N = 10$ und $\sigma^{-2} = 8N$, numerisch ermittelt aus 10^6 Eigenwerten (Histogramme), im Vergleich mit (a) der Asymptotik (4.29) und (b) dem Wigner-Gesetz (3.6). Die Abstände resultieren dabei aus entfalteten Eigenwerten und wurden auf den Mittelwert 1 skaliert; die Entfaltung wurde mithilfe von (4.29) mit $r = 1$ als Approximation der Dichtefunktion durchgeführt.

über das Spektrum, wenn die Dichte nicht konstant ist (kurz: Wo mehr Eigenwerte vorkommen, ist deren Abstand im Mittel kleiner). Man kann diese Ungleichheit beheben, indem man das Spektrum lokal so verzerrt (bei hoher Dichte strecken, bei niedriger stauchen), dass die Dichte des transformierten Spektrums auf ihrem Träger konstant ist. Eine solche Prozedur nennt man Entfaltung. Sie ist sinnvoll, wenn die Abstandsverteilung auf dem gesamten Spektrum vom gleichen Typ ist und sich lediglich im mittleren Abstand, d.h. der Skalierung unterscheidet. Sei die Dichtefunktion der Eigenwertverteilung mit p bezeichnet; dann zeigt man leicht, dass die Transformation $x \mapsto \int_{-\infty}^x p(y)dy$ das Spektrum entfaltet. Im konkreten Fall der Spektren der Matrizen des WPUE ist die Entfaltung notwendig, da die Eigenwertverteilung nach (4.29) sehr unterschiedliche Dichten aufweist; wir haben sie hier über (4.29) als Approximation der Dichtefunktion durchgeführt. Abbildung 4.2(b) zeigt eine gute Übereinstimmung der Dichtefunktion der Abstandsverteilung der entfaltenen Spektren mit dem Wigner-Gesetz (3.6). Benachbarte Eigenwerte stoßen einander also quadratisch ab. Wir werden in der Folge bei der Skalierung aus Abbildung 4.2 bleiben: Wir setzen $\sigma^{-2} = 8N$, was einem asymptotischen Eigenwertmittel von $1/4$ entspricht.

UEPUE

Über Satz 4.3(iii) können wir ein Ensemble positiver Matrizen mit unkorrelierten Eigenwerten definieren. Wie im hermiteschen Fall setzen wir die Matrizen des Ensembles als $V^\dagger \Lambda V$

mit einer Matrix V aus dem CUE und einer Diagonalmatrix Λ an. Die Diagonalelemente letzterer seien unabhängig und identisch verteilt. Es stellt sich die Frage, welche Verteilung angemessen ist. Sie sollte sich über ganz $[0, \infty)$ erstrecken, damit das Ensemble $M_+(N)$ abdeckt und sie sollte einen definierten Mittelwert besitzen. Für diese Anforderungen besitzt die Exponentialverteilung die größtmögliche Entropie, ist also am wenigsten voreingenommen und darum die Verteilung der Wahl. Das Ensemble nennen wir UEPUE (uncorrelated exponential positive unitary ensemble). Es ist per Konstruktion unitär invariant, denn

$$U^\dagger(V^\dagger\Lambda V)U = (VU)^\dagger\Lambda(VU), \quad U \in M_u(N) \quad (4.31)$$

und das CUE ist nach Definition 3.2 invariant unter Rechtsmultiplikationen beliebiger unitärer Matrizen. Als Mittelwert der Exponentialverteilung wählen wir $1/4$.

USQPUE

Das USQPUE (uncorrelated squared quartercircular positive unitary ensemble) ist wie das UEPUE definiert; der einzige Unterschied liegt in der Verteilung der Eigenwerte. Diese ist für das USQPUE über die Wahrscheinlichkeitsdichte (4.29) mit $r = 1$ definiert. Numerisch lassen sich Zufallszahlen mit dieser Verteilung erzeugen, indem man entsprechende Halbkreiszufallszahlen nach dem in Abschnitt 4.4.1 vorgestellten Algorithmus zieht und quadriert.

4.4.3 Maßzerlegung für unitäre Ensembles

Eine wichtige Eigenschaft aller eingeführten Ensembles beschreibt das folgende Lemma.

Lemma 4.4: *Sei ein Ensemble von Matrizen $M \in M(N)$ gegeben, das folgende Eigenschaften besitzt:*

(i) *Es ist invariant unter unitären Ähnlichkeitstransformationen.*

(ii) *Jede Matrix M ist einer Diagonalmatrix Λ unitär ähnlich: $\exists V \in M_u(N)$:*

$$M = V^\dagger\Lambda V. \quad (4.32)$$

(iii) *Die Eigenwerte der Matrizen sind fast sicher nicht entartet und lassen sich ordnen.*

Dann lässt sich das Ensemble-Maß μ im Sinne von (4.32) als Produktmaß $\mu = \mu_\Lambda \times \mu_V$ darstellen, wobei μ_Λ ein Maß auf den N geordneten Eigenwerten und μ_V das normierte Haar-Maß auf $M_u(N)$ ist.

Beweis: Man findet ihn bis auf 3. in [13].

1. Wählt man als vollständigen Satz von Matrix-Parametern einen Teil der (nicht notwendigerweise statistisch unabhängigen) Matrixelemente von M , so kann die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(M)$ in diesen Variablen wegen (i) als Funktion einer endlichen Anzahl von Spuren von Potenzen von M geschrieben werden [13, Lemma 2.6.1].
2. Transformiert man von diesem Variablensatz vermöge (ii) und (iii) zu einem Satz, bestehend aus den Eigenwerten λ_i und den Parametern p_j einer unitären Transformation, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte in (λ_i, p_j) zu einem Produkt einer Funktion der λ_i und einer der p_j , weil die Funktionaldeterminante der Variablentransformation in ein Produkt dieser Art zerfällt und sich f nach 1. als Funktion der λ_i schreiben lässt [13, Formel (3.3.5)].
3. Über die p_j ist ein Ensemble auf den $M_u(N)$ definiert. Dessen Maß muss das normierte Haar-Maß sein, denn wäre es nicht unitär invariant, wäre auch das Ensemble der Matrizen M nicht unitär invariant – im Widerspruch zu (i).

□

Interessant ist diese Aussage natürlich nur für das GUE (für einen Beweis der unitären Invarianz siehe [13]) und das WPUE. Wir werden sie an späterer Stelle ausnutzen.

4.5 Universelle Eigenschaften des Spektrums des LSO

Bevor wir uns der Spektralstatistik der just definierten \mathcal{L} -Ensembles zuwenden, wollen wir fragen, welche Eigenschaften das Spektrum jedes Lindblad-Superoperators unabhängig vom Ensemble, d.h. per definitionem hat. Antworten gibt der folgende Satz.

Satz 4.5: *Sei \mathcal{L} der in Theorem 2.4 definierte Operator auf $M(N)$. Dann gilt für dessen Spektrum:*

$$(i) \quad \lambda \in \sigma(\mathcal{L}) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma(\mathcal{L}),$$

$$(ii) \quad 0 \in \sigma(\mathcal{L}),$$

$$(iii) \quad \lambda \in \sigma(\mathcal{L}) \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \text{ oder kurz } \operatorname{Re}(\sigma(\mathcal{L})) \leq 0.$$

Beweis: (i) Bekanntermaßen [3] ist \mathcal{L} aufgrund der Hermitizität von H und c involutiv:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}A)^\dagger &= i[H, A]^\dagger + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^2-1} c_{\alpha\beta}^* ([L_\alpha, AL_\beta^\dagger]^\dagger + [L_\alpha A, L_\beta^\dagger]^\dagger) \\ &= -i[H, A^\dagger] + \frac{1}{2} \sum_{\beta, \alpha=1}^{N^2-1} c_{\beta\alpha} ([L_\beta, A^\dagger L_\alpha^\dagger] + [L_\beta A^\dagger, L_\alpha^\dagger]) = \mathcal{L}(A^\dagger) \end{aligned} \quad (4.33)$$

gilt für alle A aus $M(N)$. Ist nun $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$, d.h. $\exists B \in M(N): \mathcal{L}B = \lambda B$, so folgt daraus $\lambda^* B^\dagger = (\mathcal{L}B)^\dagger = \mathcal{L}(B^\dagger)$, sprich $\lambda^* \in \sigma(\mathcal{L})$.

(ii) Wir zeigen, dass die Einheitsmatrix Eigenvektor von \mathcal{L}^T zum Eigenwert Null ist; Null ist dann auch Eigenwert von \mathcal{L} . Dazu benutzen wir die Tensordarstellung \mathcal{L}_{mnpq} mit (4.20) und (4.21):

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^T I)_{pq} &= \sum_{m,n=1}^N \delta_{mn} \mathcal{L}_{mnpq} \\ &= -i \sum_{m,n=1}^N \delta_{mn} (H_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mp} H_{qn}) \\ &\quad + \sum_{m,n=1}^N \delta_{mn} a_{mpnq} - \frac{1}{2} \sum_{m,n,s=1}^N \delta_{mn} (a_{snsq} \delta_{mp} + a_{spsm} \delta_{nq}) \\ &= -i \sum_{m=1}^N (H_{mp} \delta_{mq} - \delta_{mp} H_{qm}) + \sum_{m=1}^N a_{mpmq} - \frac{1}{2} \sum_{m,s=1}^N (a_{smsq} \delta_{mp} + a_{spsm} \delta_{mq}) \\ &= -i (H_{qp} - H_{qp}) + \sum_{m=1}^N a_{mpmq} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (a_{spsq} + a_{spsq}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

(iii) Laut Satz 2.3(ii) ist die Operatornorm von $e^{\mathcal{L}t}$ für alle nichtnegativen t gleich Eins, insbesondere ist also $\|e^{\mathcal{L}}\|_\infty = 1$. Nehmen wir einmal an $\exists \lambda \in \sigma(\mathcal{L}): \operatorname{Re} \lambda > 0$. Für dieses λ würde gelten $|e^\lambda| = e^{\operatorname{Re} \lambda} > 1$. Das hieße aber $\exists \mu \in \sigma(e^{\mathcal{L}}): |\mu| > 1$ und folglich $\|e^{\mathcal{L}}\|_\infty > 1$. (Die Idee dieses Beweises stammt aus [50].) □

Zu den Aussagen möchten wir einiges bemerken. Nach (i) ist das Spektrum von \mathcal{L} mengenmäßig symmetrisch bezüglich der reellen Achse. In gleicher Weise kann man zeigen, dass die geometrischen Vielfachheiten zueinander konjugierter Eigenwerte gleich sind. Unklar ist, ob \mathcal{L} stets diagonalisierbar ist (numerisch zeigt sich, dass \mathcal{L} i.A. nicht normal

ist). Wäre das der Fall, so würden auch die algebraischen Vielfachheiten zueinander konjugierter Eigenwerte übereinstimmen. Physikalisch wäre es plausibel, ein in jeglicher Hinsicht symmetrisches Spektrum zu finden. Später werden wir sehen, dass diese Frage für unsere Ensembles nicht von Bedeutung ist, da diese Entartungen mit Maß Null produzieren. Bezüglich (ii) stellt sich die Frage, ob der Eigenwert Null physikalisch ist, d.h. ob es einen *Zustand* ρ_0 gibt, für den gilt $\dot{\rho}_0 = \mathcal{L}\rho_0 = 0$, d.h. wir fragen nach der Existenz eines *stationären Zustands*. Die Antwort ist positiv; sie lässt sich über die der Lindblad-Gleichung zugrunde liegenden Halbgruppen und das Markov-Kakutani-Fixpunkttheorem finden [51, Beweis von Theorem 13]. Letzteres lautet:

Theorem 4.6: *Sei K eine kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Hausdorff-Raums E und $(T_i)_{i \in I}$ eine kommutierende Familie stetiger affiner Endomorphismen auf K . Dann besitzt diese Familie einen gemeinsamen Fixpunkt.*

Es lässt sich anwenden, denn $M(N)$ besitzt als Hilbertraum die Eigenschaften von E , die Elemente von $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ kommutieren und die Menge der Zustände $\{\rho \in M(N) : \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1\}$ ist eine kompakte und konvexe Teilmenge von $M(N)$, die von allen Γ_t affin und stetig in sich abgebildet wird. Das Theorem sagt nun die Existenz eines Zustands ρ_0 voraus, für den $\Gamma_t \rho_0 = \rho_0$ für alle $t \geq 0$ gilt, d.h. $\dot{\rho}_0 = \mathcal{L}\rho_0 = 0$. Die Aussage (iii) charakterisiert den relaxierenden Charakter der Lindbladschen Dynamik. Wir halten fest, dass, anders als für die Ratengleichung [10], i.A. nicht $\text{Re}(\sigma(\mathcal{L}) \setminus \{0\}) < 0$ gilt. Damit dieser Fall eintritt, muss die Kopplung an die Umgebung hinreichend stark sein. Er ist verbunden mit der Existenz eines *eindeutigen* stationären Zustands [50].

4.6 Zur Koeffizientenmatrix des Relaxationsteils des LSO

Zur Vorbereitung einiger Rechnungen im nächsten Kapitel betrachten wir den Zusammenhang der Matrizen a und c einmal genauer und zeigen eine wichtige Eigenschaft von a . Laut (4.3) und (4.12) haben wir

$$a = U^\dagger \begin{pmatrix} & & 0 \\ & c & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} U \quad (4.35)$$

mit U gemäß (4.10). Da c positiv ist, gilt

$$c = V^\dagger \Lambda_c V \quad \text{mit} \quad \Lambda_c = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N^2-1}) \quad \text{und} \quad V \in M_u(N^2 - 1). \quad (4.36)$$

Wenn wir nun V über

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & V & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

zur unitären Matrix \tilde{V} erweitern, gilt insgesamt

$$a = W^\dagger \Lambda_a W \quad \text{mit} \quad \Lambda_a = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N^2-1}, 0) \quad \text{und} \quad W = \tilde{V} U \quad (4.38)$$

oder in Komponenten

$$a_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} W_{\alpha\mu}^* \lambda_\alpha W_{\alpha\nu}. \quad (4.39)$$

Damit können wir die folgende schöne Aussage beweisen.

Lemma 4.7: *Sei $a \in M_+(N^2)$ die in (4.12) definierte Matrix. Dann gilt*

$$\forall p, q = 1, \dots, N: \sum_{m=1}^N a_{pqmm} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^N a_{mmpq} = 0. \quad (4.40)$$

Beweis: Wegen der Hermitizität von a folgt die zweite Gleichung aus der ersten, die wir zeigen werden. Zunächst nutzen wir (4.39):

$$\sum_{m=1}^N a_{pqmm} = \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} W_{\alpha,pq}^* \lambda_\alpha \sum_{m=1}^N W_{\alpha,mm}. \quad (4.41)$$

Laut (4.8) gilt

$$U_{ijmm} = (1 - \delta_{ij})\delta_{im}\delta_{jm} + \delta_{ij}\delta_{mm}O_{im} = \delta_{ij}O_{im} \quad (4.42)$$

mit O nach (4.9), d.h.

$$\sum_{m=1}^N W_{\alpha,mm} = \sum_{i=1}^N \tilde{V}_{\alpha,ii} \sum_{m=1}^N O_{im}. \quad (4.43)$$

Beachten wir weiter, dass

$$\sum_{m=1}^N O_{im} = \sqrt{N}\delta_{iN} \quad (4.44)$$

gilt, erhalten wir

$$\sum_{m=1}^N W_{\alpha,mm} = \sqrt{N} \tilde{V}_{\alpha,NN}. \quad (4.45)$$

Nun verschwindet $\tilde{V}_{\alpha,NN}$ nach (4.37) aber für die ersten $N^2 - 1$ Werte von α und damit folgt die Aussage. \square

Entscheidend für den Beweis ist Gleichung (4.44), d.h. die Nullsummen in den ersten $N - 1$ Zeilen von O . Diese resultieren aus der Spurfreiheit der Lindblad-Operatoren in der ursprünglichen Lindblad-Gleichung nach Theorem 2.4, welche ihrerseits darauf zurückzuführen ist, dass die von der Lindblad-Gleichung generierte Dynamik Hermitizität und Spur erhält [3, Lemma 2.3].

5 Zufallsmatrixtheorie und Lindblad-Gleichung – Ergebnisse

In diesem Kapitel wollen wir die zuvor eingeführten LSO-Ensembles spektralstatistisch untersuchen. Da wir den unitären und den Relaxationsteil des LSO in unseren Ensembles als statistisch unabhängig annehmen, bietet es sich an, diese beiden Superoperatoren zunächst isoliert zu betrachten. Anschließend werden wir das volle Problem, d.h. die vollen LSO-Ensembles untersuchen. In jedem Fall fragen wir nach den Eigenwert- und Abstandsverteilungen der LSO-Spektren.

5.1 Notationskonventionen für Spektralstatistik

Im Folgenden werden die Eigenwertstatistiken von Zufallsmatrixensembles für H , c und \mathcal{L} miteinander in Verbindung gebracht. Um die Eigenwerte verschiedener Herkunft unterscheiden zu können, werden wir in einem Subskript auf letztere hinweisen; z.B. ist mit $\langle \lambda \rangle_H$ der Ensemble-Mittelwert der Eigenwerte der Matrix H gemeint, d.h. $\langle \lambda \rangle_H = \langle \text{Tr } H \rangle / N$ für $H \in M(N)$. In all unseren Ensembles mit $\mathcal{R} \neq 0$ besitzt \mathcal{L} fast sicher genau einen Eigenwert Null. Da lediglich die Verteilung der anderen Eigenwerte interessant ist, schließen wir diesen aus und machen das durch einen Strich deutlich: $\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{L}}$ bezeichnet den Ensemble-Mittelwert der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} . Weiterhin bezeichnen wir mit einer Tilde um ihren Mittelwert zentrierte Zufallsvariablen, d.h. $\langle \tilde{\lambda}^n \rangle'_{\mathcal{L}}$ steht für $\langle (\lambda - \langle \lambda \rangle'_{\mathcal{L}})^n \rangle'_{\mathcal{L}}$.

5.2 Grenzfall rein unitärer Dynamik

Wir wollen in diesem Abschnitt den Fall $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ studieren. Er lässt sich physikalisch wie folgt motivieren. Setzt man den Wechselwirkungs-Hamilton-Operator in (2.1) auf Null, so entwickeln sich Produktzustände des Gesamtsystems nach der von-Neumann-Gleichung (2.2) gemäß

$$\frac{d}{dt}(\rho_s \otimes \rho_u) = -i[H_s \otimes I_u + I_s \otimes H_u, \rho_s \otimes \rho_u] = -i([H_s, \rho_s] \otimes \rho_u + \rho_s \otimes [H_u, \rho_u]), \quad (5.1)$$

d.h.

$$\frac{d}{dt} \rho_s = \text{Tr}_u \frac{d}{dt} (\rho_s \otimes \rho_u) = -i[H_s, \rho_s]. \quad (5.2)$$

In diesem Grenzfall ist die reduzierte Dynamik also unitär. Im Rahmen der traditionellen mikroskopischen Herleitung der Lindblad-Gleichung über Born-Markov- und rotating-wave-Näherung kann man ihn auch im Limes schwacher Kopplung erhalten [1]: Führt man durch die Ersetzung $H_{\text{ww}} \rightarrow k H_{\text{ww}}$ in (2.1) den Kopplungsparameter k ein, so ergeben sich alle bezogen auf (5.2) zusätzlichen Terme in der Lindblad-Gleichung als zu k^2 proportional und verschwinden folglich für $k \rightarrow 0$.

In Abschnitt 4.3 haben wir den Superoperator $\mathcal{U} = -i[H, \cdot]$ bereits komponentenweise ausgewertet und

$$(\mathcal{U} \rho)_{mn} = \sum_{p,q=1}^N \mathcal{U}_{mnpq} \rho_{pq} \quad \text{mit} \quad \mathcal{U}_{mnpq} = -i(H_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mp} H_{qn}) \quad (5.3)$$

gefunden. Besonders einfach wird dieser Ausdruck, falls als Bezugssystem die Eigenzustände $|n\rangle$ von H verwendet werden. In dieser Basis gilt

$$H_{mn} = E_m \delta_{mn} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{U} \rho)_{mn} = -i(E_m - E_n) \rho_{mn} \quad (5.4)$$

und man kann direkt alle Eigenwerte von \mathcal{U} ablesen: Es sind die N^2 Differenzen aller N Eigenwerte von H , multipliziert mit der imaginären Einheit. Im Grenzfall verschwindender Kopplung liegen also alle Eigenwerte des LSO symmetrisch zu Null auf der imaginären Achse. Dies charakterisiert die Unitarität der Zeitentwicklung. Erwartungsgemäß ergeben sich die N Eigenzustände von H als stationär.

5.2.1 Eigenwertverteilung

Wir betrachten nun zufällige H , d.h. Zufallsmatrixensembles für \mathcal{U} . Hat H fast sicher N verschiedene Eigenwerte (für H aus den in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Ensembles ist dies der Fall), so sind fast sicher N Eigenwerte von \mathcal{U} gleich Null, d.h. ist der Anteil der reellen Eigenwerte am Spektrum von \mathcal{U} ist gleich $1/N$.

Der Mittelwert der Eigenwertverteilung von \mathcal{U} verschwindet wegen der Symmetrie des Spektrums. Formal ergibt er sich aus der Summe aller Eigenwerte, also der Spur von \mathcal{U} , geteilt durch deren Anzahl. Wir berechnen erwartungsgemäß

$$\text{Tr} \mathcal{U} = \sum_{m,n=1}^N \mathcal{U}_{mnmn} = -i \sum_{m,n=1}^N (H_{mm} - H_{nn}) = 0. \quad (5.5)$$

Interessanter ist die Breite der Eigenwertverteilung auf der imaginären Achse. Sie ergibt sich aus der Summe der Quadrate der Imaginärteile der Eigenwerte, geteilt durch N^2 und gemittelt über das H -Ensemble. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(i\mathcal{U})^2 &= - \sum_{m,n,p,q=1}^N \mathcal{U}_{mnpq} \mathcal{U}_{pqmn} = \sum_{m,n,p,q=1}^N (H_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mp} H_{qn})(H_{pm} \delta_{qn} - \delta_{pm} H_{nq}) \\ &= 2(N \mathrm{Tr} H^2 - (\mathrm{Tr} H)^2),\end{aligned}\quad (5.6)$$

d.h. wir können mit den Eigenwerten λ_n von H

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Tr}(i\mathcal{U})^2}{2N^2} &= \frac{\mathrm{Tr} H^2}{N} - \left(\frac{\mathrm{Tr} H}{N}\right)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_n^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_n\right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\lambda_n - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \lambda_m\right)^2\end{aligned}\quad (5.7)$$

schreiben. Der letzte Ausdruck ist die Varianz der N Eigenwerte von H ; auf dieses Zwischenergebnis werden wir später noch zu sprechen kommen. Im Ensemblemittel ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\langle (i\tilde{\lambda})^2 \rangle_{\mathcal{U}}}{2} &= \frac{\langle \mathrm{Tr}(i\mathcal{U})^2 \rangle}{2N^2} = \frac{\langle \mathrm{Tr} H^2 \rangle}{N} - \frac{\langle (\mathrm{Tr} H)^2 \rangle}{N^2} \\ &= \left(\frac{\langle \mathrm{Tr} H^2 \rangle}{N} - \frac{\langle \mathrm{Tr} H \rangle^2}{N^2}\right) - \left(\frac{\langle (\mathrm{Tr} H)^2 \rangle}{N^2} - \frac{\langle \mathrm{Tr} H \rangle^2}{N^2}\right) \\ &= \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H - \frac{\langle (\widetilde{\mathrm{Tr} H})^2 \rangle}{N^2}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Um den zweiten Term zu verstehen, schreiben wir ihn einmal mithilfe der Eigenwerte λ_n von H : Es ist $\langle \mathrm{Tr} H \rangle = N \langle \lambda \rangle_H$, d.h. $\mathrm{Tr} H - \langle \mathrm{Tr} H \rangle = \sum_n (\lambda_n - \langle \lambda \rangle_H)$ und somit haben wir

$$\frac{\langle (\mathrm{Tr} H - \langle \mathrm{Tr} H \rangle)^2 \rangle}{N^2} = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=1}^N \langle (\lambda_m - \langle \lambda \rangle_H) (\lambda_n - \langle \lambda \rangle_H) \rangle_H. \quad (5.9)$$

Die Korrelationen der Eigenwerte von H gehen also in die Breite der Eigenwertverteilung von \mathcal{U} ein. Liegt keine Korrelation vor, so vereinfacht sich (5.9) zu

$$\frac{\langle (\mathrm{Tr} H - \langle \mathrm{Tr} H \rangle)^2 \rangle}{N^2} = \frac{\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H}{N}. \quad (5.10)$$

Sind die Eigenwerte dagegen im Mittel antikorreliert, wie im Fall sich abstoßender Eigenwerte des GUE, so verringert dies den Wert aus (5.10), da dann die nichtdiagonalen Summanden in (5.9) im Mittel negativ (statt Null) sind. Man kann dieses Verhalten auch

direkt am ursprünglichen Ausdruck erkennen: Stoßen sich die Eigenwerte von H ab, so ist $\text{Tr } H$ „steifer“ als ohne die Abstoßung (da die Eigenwerte durch ihre Abstoßung eher bestrbt sind, die Verteilung gleichmäßig auszufüllen – analog zu einer Menge von Teilchen, deren Aufenthaltsdichte in einem ihnen gegebenen Raum im Fall einer abstoßenden Wechselwirkung im Zeitmittel homogener als im Fall ohne Wechselwirkung ist) und das führt zu einer kleineren Varianz der Zufallsvariable $\text{Tr } H$. Um unkorrelierten und korrelierten Anteil besser zu trennen, können wir

$$\frac{\langle (i\tilde{\lambda})^2 \rangle_{\mathcal{U}}}{2} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H - \frac{1}{N^2} \sum_{m \neq n} \langle \tilde{\lambda}_m \tilde{\lambda}_n \rangle_H \quad (5.11)$$

schreiben. Für im Mittel antikorrelierte Eigenwerte von H haben wir

$$0 \leq \frac{\langle (\text{Tr } \tilde{H})^2 \rangle}{N^2} \stackrel{(5.9)}{\leq} \frac{\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H}{N} \stackrel{(5.9)}{\Rightarrow} \left| \frac{1}{N^2} \sum_{m \neq n} \langle \tilde{\lambda}_m \tilde{\lambda}_n \rangle_H \right| \leq \frac{\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H}{N}. \quad (5.12)$$

Antikorrelationseinflüsse skalieren also bestenfalls mit $1/N$. Asymptotisch sind sie vernachlässigbar und man erhält als Breite der Verteilung der Imaginärteile der Eigenwerte von \mathcal{U} das $\sqrt{2}$ -fache der Breite der Eigenwertverteilung von H . Für endliche N sorgen einander abstoßende Eigenwerte von H für eine Erhöhung der Breite der Eigenwertverteilung von \mathcal{U} . Das ist plausibel, da eine Abstoßung die Beträge von Differenzen benachbarter Eigenwert erhöht. Eine Skalierung mit $1/N$ ist plausibel, da der Effekt nur bei benachbarten Eigenwerten ins Gewicht fallen dürfte.

Wir vergleichen nun die Eigenwertverteilungen von \mathcal{U} für die in Abschnitt 4.4.1 definierten H -Ensembles. Die Dichtefunktion der Imaginärteile setzt sich aus einem Dirac-Beitrag für den Eigenwert Null und einem kontinuierlichen Beitrag für alle anderen Eigenwerte zusammen, d.h. sie hat die Form

$$p_{\mathcal{U}}(\text{Im } \lambda) = \frac{1}{N} \delta(\text{Im } \lambda) + \left(1 - \frac{1}{N}\right) p_{\mathcal{U}}^{\lambda \neq 0}(\text{Im } \lambda). \quad (5.13)$$

Wir interessieren uns für die (symmetrische) Funktion $p_{\mathcal{U}}^{\lambda \neq 0}$. Für die H -Ensembles mit unkorreliertem Spektrum lässt sie sich aus der Dichtefunktion p_H der Eigenwerte von H berechnen. Es gilt

$$p_{\mathcal{U}}^{\lambda \neq 0}(y) = \iint p_H(x_1) p_H(x_2) \delta(x_1 - x_2 - y) dx_1 dx_2 = \int p_H(x+y) p_H(x) dx. \quad (5.14)$$

Ist p_H wie im UNHUE eine Gauß-Funktion, so ergibt sich für $p_{\mathcal{U}}^{\lambda \neq 0}$ ebenfalls eine Gauß-

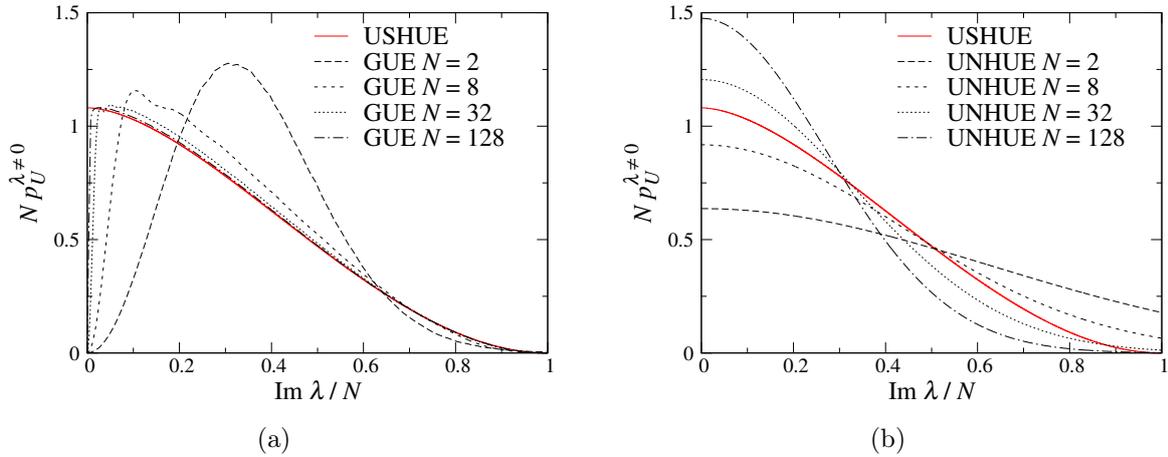


Abb. 5.1: Wahrscheinlichkeitsdichten der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{U} für verschiedenen H -Ensembles und verschiedene N . Verglichen werden (a) GUE und USHUE sowie (b) UNHUE und USHUE. Für das USHUE ergibt sich bei der gegebenen Skalierung ein von N unabhängiges Verhalten. Die Kurven für das GUE resultieren aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen, sodass $n_r N^2 \geq 10^7$. Jene zum UNHUE sind Gaußkurven mit verschiedenen Breiten (siehe Text).

Funktion – nach Vergleich von (5.11) und (5.13) mit verdoppelter Varianz. Für eine Halbkreisverteilung wie im USHUE erhält man für einen Halbkreisradius von Eins

$$p_{\mathcal{U}}^{\lambda \neq 0}(y) = \frac{4}{\pi^2} \int_{-(1-y/2)}^{1-y/2} \sqrt{\left[x^2 - \left(1 + \frac{y}{2}\right)^2\right] \left[x^2 - \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2\right]} dx, \quad 0 \leq y \leq 2 \quad (5.15)$$

und symmetrisch für $y < 0$. Für andere Radien muss die Funktion entsprechend skaliert werden. Das Integral lässt sich numerisch leicht lösen. Im Falle des GUE machen wir Monte-Carlo-Simulationen, d.h. wie generieren eine Anzahl n_r von Realisierungen von Matrizen des GUE für verschiedene N , berechnen deren Eigenwerte und davon die Differenzen. Zum Vergleich der Verteilungen zu unterschiedlichen N werden die Differenzen durch N geteilt. Schließlich erzeugen wir Histogramme mit 100 Bins.

Abbildung 5.1(a) zeigt den Vergleich von GUE und USHUE für verschiedene N . Die Verteilung für das USHUE ist bei besagter Reskalierung der Eigenwerte von N unabhängig. Für H aus dem GUE erkennen wir für $N = 2$ das Wigner-Gesetz (3.6). Das verwundert nicht, da die Verteilung der positiven Eigenwertdifferenzen von H für $N = 2$ identisch mit der Abstandsverteilung der Eigenwerte von H ist und diese für das GUE und $N = 2$ exakt durch das Wigner-Gesetz (3.6) gegeben ist [17]. Für $N \rightarrow \infty$ schmiegt sich die Verteilung erwartungsgemäß der des USHUE an; lediglich das quadratische Verhalten für kleine Diffe-

renzbeträge bleibt aufgrund der Abstoßungscharakteristik der GUE-Eigenwerte bestehen. Wir sehen hier also konkret, wie sich die Korrelationen der Eigenwerte des GUE auf die Eigenwertverteilung von \mathcal{U} auswirken: Im Wesentlichen bestimmen sie das Verhalten nahe Null. Was hier an statistischem Gewicht gegenüber dem unkorrelierten Fall fehlt, ist zu absolut größeren Werten hin verschoben und dies sorgt für die zuvor berechnete Erhöhung der Verteilungsbreite. In Abbildung 5.1(b) sehen wir den Vergleich von UNHUE und USHUE. Auffällig ist der unterschiedliche Funktionstyp (für das USHUE hat die Funktion einen kompakten Träger, für das UNHUE nicht) und die N -Abhängigkeit der Breite der Verteilung für das UNHUE. Der Grund dieser Abhängigkeit ist die gewählte Skalierung des Ensembles, d.h. letztlich die mit N wachsende mittlere Spannweite von N unabhängig und identisch normalverteilten Zufallszahlen; siehe die Definition des Ensembles in Abschnitt 4.4.1.

Insgesamt lässt sich vermuten: Im Limes $N \rightarrow \infty$ beeinflussen die Korrelationen der Eigenwerte von H das Verhalten der Eigenwertverteilung von \mathcal{U} nahe Null; das sonstige Verhalten wird durch die Eigenwertverteilung von H bestimmt.

5.2.2 Eigenwertkorrelationen

Bereits beobachtet haben wir eine quadratische Abstoßung der reellen von den nicht reellen Eigenwerten für das GUE und keine Abstoßung für die unkorrelierten H -Ensembles. Fragen können wir außerdem nach der Abstandsverteilung der Eigenwerte von \mathcal{U} mit positivem Imaginärteil. Hier gehen Korrelationen der Eigenwerte von H höherer Ordnung ein, denn die Abstände von Eigenwerten von \mathcal{U} sind Differenzen von Differenzen von Eigenwerten von H , was bis zu vier verschiedene Eigenwerte von H einschließt.

Abbildung 5.2(a)–(c) zeigt Abstandsverteilungen der positiven Eigenwerte von \mathcal{U} für die drei H -Ensembles und verschiedene N aus Monte-Carlo-Simulationen. Für H aus dem GUE und dem USHUE zeigt sich ein asymptotisch übereinstimmendes Verhalten; für kleine N dagegen sind deutliche Unterschiede zu erkennen. Diese lassen sich leicht für den Fall $N = 3$ verstehen; siehe Abbildung 5.2(d): Hier hat H drei Eigenwerte λ_n , woraus drei positive Differenzen und zwei Abstände zwischen benachbarten positiven Differenzen resultieren. Einer dieser Abstände gleicht dem kleineren der beiden Abstände benachbarter Eigenwerte von H . Die Abstandsverteilung der Eigenwerte von H trägt bei $N = 3$ also grob gesprochen zur Hälfte der Abstandsverteilung der Eigenwerte von \mathcal{U} bei und dies sorgt für die sichtbaren Unterschiede zwischen GUE und USHUE. Mit wachsendem N nimmt das Gewicht dieses Beitrags ab; es werden zunehmend entfernt benachbarte Eigenwerte von H miteinander in Beziehung gesetzt, was zu im Mittel abnehmender statistischer Abhängig-

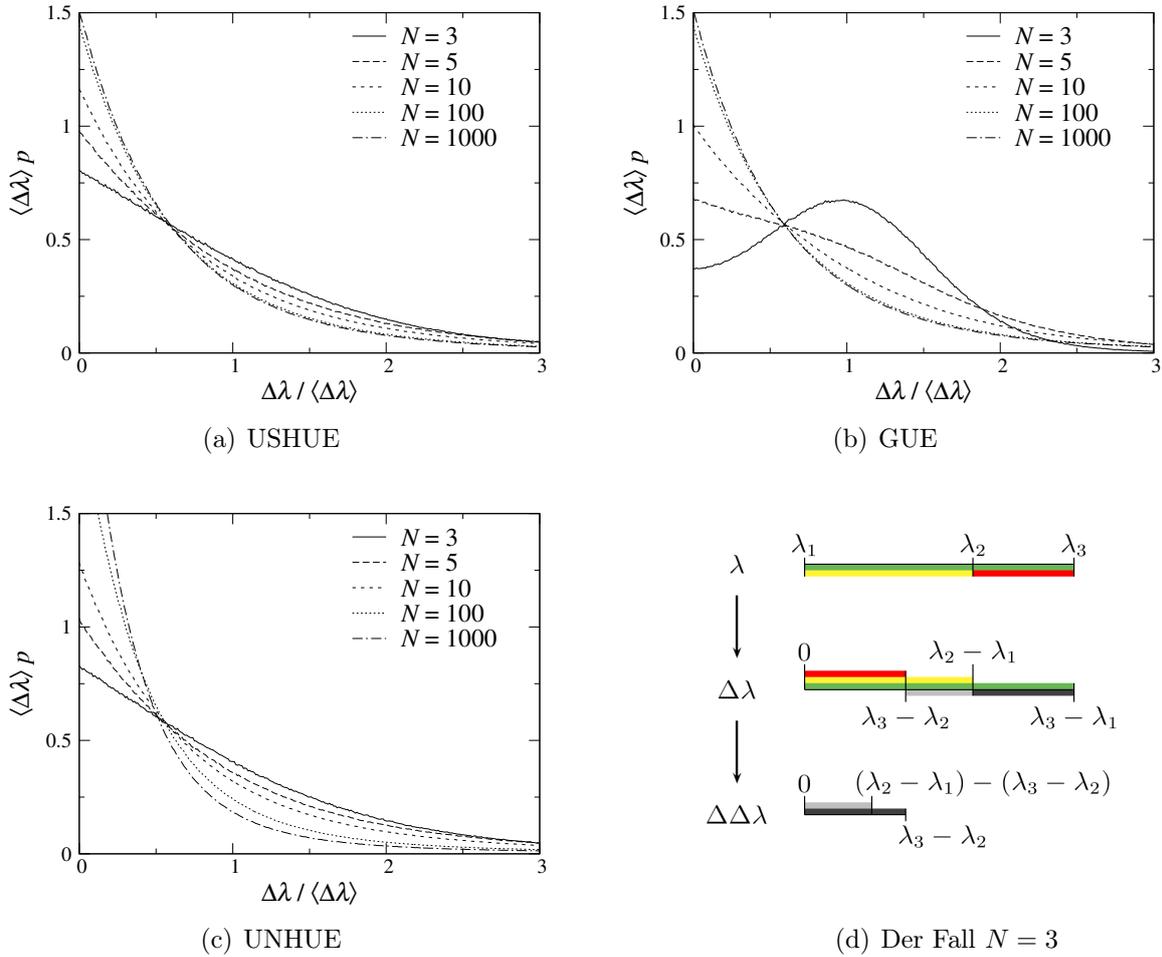


Abb. 5.2: Wahrscheinlichkeitsdichten der Abstandsverteilung der positiven Eigenwerte von \mathcal{U} für verschiedene H -Ensembles (a)–(c) und verschiedene N . Alle Kurven resultieren aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen, sodass $n_r N^2 \geq 10^7$. Den Fall $N = 3$ veranschaulicht (d). Im Unterschied zu (a)–(c) bezeichnet hier λ Eigenwerte von H , $\Delta \lambda$ Imaginärteile von Eigenwerten von \mathcal{U} und $\Delta \Delta \lambda$ Abstände von benachbarten Eigenwerten von \mathcal{U} .

keit führt. Für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich eine Signatur wie von unkorrelierten Eigenwerten. Für H aus dem UNHUE zeigen die Eigenwerte von \mathcal{U} qualitativ das gleiche Abstandsverhalten wie für H aus dem USHUE, was verständlich ist, da die Eigenwerte beider H -Ensembles statistisch unabhängig sind.

5.3 Grenzfall reiner Relaxation

Wir wollen uns nun dem Fall $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ zuwenden. Anders als im vorangegangenen Abschnitt ist dieser nicht physikalisch motiviert. Man könnte vermuten, ihn als Grenzfall

starker Kopplung zu erhalten, in dem der Einfluss des freien System-Hamilton-Operators vernachlässigbar ist; allerdings vergäße man dann, dass auch die Wechselwirkung mit der Umgebung einen Beitrag zur unitären Dynamik leistet, der nicht vernachlässigt werden kann. Die Motivation rührt eher von der in Abschnitt 2.3.2 vorgestellten Korrespondenz zur Ratengleichung, denn für diese spielt der unitäre Teil der Lindblad-Dynamik keine Rolle [1]. Wir können also erwarten, dass unsere Ensembles für \mathcal{R} ähnliche Eigenschaften wie das in [10] studierte EGRE (exponential general rate-matrix ensemble) besitzen.

Aus Abschnitt 4.3 kennen wir die Komponenten von \mathcal{R} als

$$\mathcal{R}_{mnpq} = a_{mpnq} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (a_{snsq} \delta_{mp} + a_{spsm} \delta_{nq}). \quad (5.16)$$

Sie ergeben sich aus $\mathcal{R} = \mathcal{L} + i[H, \cdot]$ und \mathcal{L} nach Theorem 2.4 für den in (4.2) definierten Satz von Lindblad-Operatoren und den in (4.35) beschriebenen Zusammenhang zwischen $a \in M_+(N^2)$ und $c \in M_+(N^2 - 1)$. Unsere Zufallsmatrixensembles für \mathcal{R} sind nun durch (5.16) und die in Abschnitt 4.4.2 eingeführten Ensembles für c definiert. Somit genügen wir der in Abschnitt 4.4 aufgestellten Forderung nach einem festen Satz von Lindblad-Operatoren plus unitär invarianten Zufallsmatrixensembles für c .

Aus Abschnitt 4.5 wissen wir, dass Null stets Eigenwert von \mathcal{R} ist. Numerische Versuche zeigen, dass \mathcal{R} für die just definierten Ensembles fast sicher N^2 verschiedene Eigenwerte besitzt, d.h. es ist fast sicher genau ein Eigenwert von \mathcal{R} gleich Null. Wir interessieren uns für die Statistik der $N^2 - 1$ übrigen Eigenwerte.

5.3.1 Eigenwertverteilung

Wir beginnen mit der Berechnung des Mittelwerts der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{R} . Da der Eigenwert Null nichts zur Spur von \mathcal{R} beiträgt, ergibt sich der Mittelwert zu

$$\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{R}} = \frac{\langle \text{Tr } \mathcal{R} \rangle}{N^2 - 1}; \quad (5.17)$$

der Strich signalisiert den Ausschluss des Eigenwertes Null. Mit (5.16) berechnen wir

$$\begin{aligned} \text{Tr } \mathcal{R} &= \sum_{m,n=1}^N \mathcal{R}_{mnmn} = \sum_{m,n=1}^N a_{mnmn} - \frac{1}{2} \sum_{m,n,s=1}^N (a_{snsn} + a_{smsm}) \\ &= \sum_{m,n=1}^N a_{mnmn} - N \text{Tr } a \stackrel{\text{Lemma 4.7}}{=} -N \text{Tr } a \end{aligned} \quad (5.18)$$

und mit $\text{Tr } a = \text{Tr } c$ ergibt sich

$$\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{R}} = -N \langle \lambda \rangle_c. \quad (5.19)$$

Wir werden dieses Ergebnis in Abschnitt 5.4 physikalisch interpretieren. Es ist unabhängig vom Ensemble der positiven Matrix c ; ja es gilt sogar ohne Mittelung über das Ensemble, d.h. für jede einzelne Matrix c , wie Gleichung (5.18) zeigt. Bemerkenswert ist die formale Übereinstimmung mit dem entsprechenden Ausdruck für das EGRE, den man erhält, indem man $\langle \lambda \rangle_c$ in (5.19) durch die mittlere Rate ersetzt.

Fragen wir nun nach der Breite der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{R} . Wir werden sehen, dass sich die Eigenwerte über die komplexen Ebene verteilen. Am besten wäre es also, wir hätten die Varianzen der Verteilungen von $\text{Re } \lambda$ und $\text{Im } \lambda$ für $\lambda \neq 0$. Leichter ist jedoch die Berechnung von $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}} = \langle (\lambda - \langle \lambda \rangle'_{\mathcal{R}})^2 \rangle'_{\mathcal{R}}$, denn es gilt

$$\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}} = \langle \lambda^2 \rangle'_{\mathcal{R}} - \langle \lambda \rangle'_{\mathcal{R}}{}^2 = \frac{\langle \text{Tr } \mathcal{R}^2 \rangle}{N^2 - 1} - \left(\frac{\langle \text{Tr } \mathcal{R} \rangle}{N^2 - 1} \right)^2 = \frac{1}{N^2 - 1} \left(\langle \text{Tr } \mathcal{R}^2 \rangle - \frac{\langle \text{Tr } \mathcal{R} \rangle^2}{N^2 - 1} \right). \quad (5.20)$$

Zwischen dieser Größe und den Varianzen von $\text{Re } \lambda$ und $\text{Im } \lambda$ besteht der Zusammenhang

$$\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}} = \langle (\text{Re } \tilde{\lambda} + i \text{Im } \tilde{\lambda})^2 \rangle'_{\mathcal{R}} = \langle (\text{Re } \tilde{\lambda})^2 \rangle'_{\mathcal{R}} + 2i \langle \text{Re } \tilde{\lambda} \text{Im } \tilde{\lambda} \rangle'_{\mathcal{R}} - \langle (\text{Im } \tilde{\lambda})^2 \rangle'_{\mathcal{R}} \quad (5.21)$$

und da der zweite Term aufgrund der Symmetrie des Spektrums verschwindet, haben wir

$$\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}} = \langle (\text{Re } \tilde{\lambda})^2 \rangle'_{\mathcal{R}} - \langle (\text{Im } \tilde{\lambda})^2 \rangle'_{\mathcal{R}}. \quad (5.22)$$

Dies behalten wir im Hinterkopf und machen uns an die Auswertung von (5.20). Es gilt, $\langle \text{Tr } \mathcal{R}^2 \rangle$ zu berechnen. Nach (4.21) gilt

$$\begin{aligned} \text{Tr } \mathcal{R}^2 &= \sum_{m,n,p,q=1}^N \mathcal{R}_{mnpq} \mathcal{R}_{pqmn} \\ &= \sum_{m,n,p,q=1}^N \left(a_{mpnq} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (a_{snsq} \delta_{mp} + a_{spsm} \delta_{nq}) \right) \\ &\quad \times \left(a_{pmqn} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N (a_{rqrn} \delta_{pm} + a_{rmrp} \delta_{qn}) \right) \\ &= \sum_{m,n,p,q=1}^N a_{mpnq} a_{pmqn} - \sum_{m,n,p,q,r=1}^N a_{mpnq} (a_{rqrn} \delta_{pm} + a_{rmrp} \delta_{qn}) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{m,n,p,q,r,s=1}^N (a_{snsq} \delta_{mp} + a_{spsm} \delta_{nq}) (a_{rqrn} \delta_{pm} + a_{rmrp} \delta_{qn}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m,n,p,q=1}^N a_{mpnq} a_{pmqn} - \underbrace{\sum_{m,n,q,r=1}^N a_{mmnq} a_{rqrn}}_{=0 \text{ (Lemma 4.7)}} - \underbrace{\sum_{m,n,p,r=1}^N a_{mpnn} a_{rmrp}}_{=0 \text{ (Lemma 4.7)}} \\
&+ \frac{N}{2} \sum_{n,q,r,s=1}^N a_{snsq} a_{rqrn} + \frac{1}{2} \sum_{m,n,r,s=1}^N a_{snsn} a_{rmrm} \\
&= \underbrace{\sum_{m,n,p,q=1}^N a_{mpnq} a_{pmqn}}_{=: (*)} + \frac{N}{2} \underbrace{\sum_{n,q,r,s=1}^N a_{snsq} a_{rqrn}}_{=: (**)} + \frac{1}{2} (\text{Tr } a)^2. \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Da wir unitär invariante Ensembles für c betrachten, können wir erwarten, dass sich dieser Ausdruck, wenn gemittelt, zu einer Form vereinfachen lässt, die nur die Eigenwerte von c enthält. Der letzte Term ist wegen $\text{Tr } a = \text{Tr } c$ bereits ohne Mittelung in einer solchen Form; für (*) und (**) müssen wir noch etwas arbeiten. Setzen wir die Form von a aus (4.39) in die in (5.23) definierten Größen ein, so erhalten wir

$$(*) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N^2-1} \lambda_\alpha \lambda_\beta \underbrace{\sum_{m,n,p,q=1}^N W_{\alpha,mp}^* W_{\alpha,nq} W_{\beta,pm}^* W_{\beta,qn}}_{=: S_{\alpha\beta}}, \tag{5.24}$$

$$(**) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N^2-1} \lambda_\alpha \lambda_\beta \underbrace{\sum_{m,n,p,q=1}^N W_{\alpha,mn}^* W_{\alpha,mq} W_{\beta,pq}^* W_{\beta,pn}}_{=: T_{\alpha\beta}}, \tag{5.25}$$

d.h. Bilinearformen in den Eigenwerten von c mit Koeffizientenmatrizen $S, T \in M(N^2 - 1)$, die über U und V gegeben sind. Man überzeugt sich leicht davon, dass beide Matrizen reell und symmetrisch sind. Nun erinnern wir uns an die eigentliche Aufgabe: Es gilt $\langle \text{Tr } \mathcal{R}^2 \rangle$ zu berechnen. Dies ist ein Mittelwert über unsere c -Ensembles, die sämtlich die Voraussetzungen von Lemma 4.4 erfüllen. Somit können wir die Gesamtmittelung in zwei Teile zerlegen: Wir können zunächst über die mit einem Haar-Maß verteilten Matrizen $V \in M_u(N^2 - 1)$ und anschließend über die Eigenwerte mitteln. Auf diese Weise lässt sich das Gemeinsame aller Ensembles (die unitäre Invarianz) vom sie Unterscheidenden (der Spektralstatistik) trennen. In Anhang A.5 zeigen wir, dass man in obigem Ausdruck für $S_{\alpha\beta} W$ durch \tilde{V} ersetzen kann. Das bedeutet, dass zum einen $\langle S_{\alpha\beta} \rangle$ für $\alpha \neq \beta$ unabhängig von α und β und zum anderen $\langle S_{\alpha\alpha} \rangle$ unabhängig von α ist, denn ein Indexwechsel ist gleichbedeutend mit einem Zeilenwechsel in V und da das Maß von V invariant unter Multiplikationen mit Permutationsmatrizen ist, sind alle Zeilen von V statistisch gleichwertig. Weiterhin

wird dort gezeigt, dass die Zeilensummen von S gleich Eins sind. Für ein analytisches Ergebnis für $\langle S \rangle$ fehlt also lediglich das Ensemblemittel eines Diagonal- oder eines Nichtdiagonalelements von S . Die Bestimmung dieser Mittel ist uns jedoch nicht gelungen. Sie ist kompliziert, da die Matrixelemente von V nichttrivial korreliert sind (Zeilen und Spalten von V bilden Orthonormalsysteme). Für T sind nicht einmal die just für S beschriebenen Vereinfachungen möglich, da sich die Summationsindizes m, n, p, q in (5.25) nicht paarweise auf je zwei der vier Faktoren verteilen. Wir kommen also nicht umhin, eine numerische Berechnung zu versuchen; in Anhang A.6 werden die Resultate diskutiert. Es zeigt sich, dass auch $\langle T \rangle$ jeweils auf und neben der Diagonalen konstant ist. Im Rahmen der statistischen Unsicherheit finden wir eine Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse mit dem Ansatz

$$\langle S \rangle = \frac{1}{N^2} X, \quad \langle T \rangle = \frac{N^2 - 1}{N^3} X \quad \text{mit} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + I. \quad (5.26)$$

Man beachte, dass $\langle S \rangle$ die analytisch vorhergesagten Eigenschaften besitzt. Nehmen wir (5.26) als Hypothese, so können wir mit der Berechnung von $\langle \text{Tr } \mathcal{R}^2 \rangle$ fortfahren. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr } \mathcal{R}^2 \rangle &= \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^2-1} \lambda_\alpha X_{\alpha\beta} \lambda_\beta \right\rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{N^2 - 1}{N^2} \left\langle \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^2-1} \lambda_\alpha X_{\alpha\beta} \lambda_\beta \right\rangle + \langle (\text{Tr } c)^2 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{N^2} (\langle (\text{Tr } c)^2 \rangle + \langle \text{Tr}(c^2) \rangle) + \frac{1}{2} \left(\frac{2N^2 - 1}{N^2} \langle (\text{Tr } c)^2 \rangle + \frac{N^2 - 1}{N^2} \langle \text{Tr}(c^2) \rangle \right) \\ &= \frac{\langle (\text{Tr } c)^2 \rangle + \langle \text{Tr}(c^2) \rangle}{2N^2} + \langle (\text{Tr } c)^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Tr}(c^2) \rangle \end{aligned} \quad (5.27)$$

und mit

$$\frac{\langle \text{Tr } \mathcal{R} \rangle^2}{N^2 - 1} = \frac{N^2}{N^2 - 1} \langle \text{Tr } c \rangle^2 = \left(1 + \frac{1}{N^2 - 1} \right) \langle \text{Tr } c \rangle^2 \quad (5.28)$$

zunächst

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \text{Tr}(c^2) \rangle}{N^2 - 1} - \left(\frac{\langle \text{Tr } c \rangle}{N^2 - 1} \right)^2 \right) + \frac{\langle (\text{Tr } c)^2 \rangle - \langle \text{Tr } c \rangle^2}{N^2 - 1} \\ &\quad + \frac{\langle (\text{Tr } c)^2 \rangle - \frac{N^2}{N^2 - 1} \langle \text{Tr } c \rangle^2}{2N^2(N^2 - 1)} + \frac{\langle \text{Tr}(c^2) \rangle}{2N^2(N^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Sortiert man die Terme um, ergibt sich schließlich

$$\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}} = \frac{\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_c}{2} \left(1 + \frac{1}{N^2} \right) + \frac{\langle (\widetilde{\text{Tr } c})^2 \rangle}{N^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2N^2} \right). \quad (5.30)$$

Wir sehen also, dass $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}}$ unabhängig vom c -Ensemble für alle N positiv ist. Wegen (5.22) heißt das, dass die Eigenwertverteilung von \mathcal{R} in reeller Richtung stets breiter als in imaginärer Richtung ist. Der zweite Term in (5.30) zeigt, dass die Korrelationen der Eigenwerte von c in die Eigenwertverteilung von \mathcal{R} eingehen (man vergleiche mit Formel (5.8) und der sich anschließenden Diskussion). Ein Unterschied zum Fall $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ liegt in der Skalierung der Korrelationseinflüsse. Wie in Abschnitt 5.2 können wir unkorrelierten und korrelierten Anteil trennen und erhalten

$$\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}} = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{N^2} \right) \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_c + \left(1 + \frac{1}{2N^2} \right) \frac{1}{N^2 - 1} \sum_{\alpha \neq \beta} \langle \tilde{\lambda}_\alpha \tilde{\lambda}_\beta \rangle_c. \quad (5.31)$$

Für im Mittel antikorrelierte Eigenwerte wie für das WPUE zeigt man wie in Abschnitt 5.2

$$\left| \frac{1}{N^2 - 1} \sum_{\alpha \neq \beta} \langle \tilde{\lambda}_\alpha \tilde{\lambda}_\beta \rangle_c \right| \leq \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_c. \quad (5.32)$$

Anders als aus der entsprechenden Abschätzung (5.12) im Falle $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ können wir hieraus nicht schließen, dass die Korrelationseinflüsse asymptotisch vernachlässigbar sind; stattdessen sind sie möglicherweise für alle N von Bedeutung. Weiterhin bemerken wir, dass $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}}$ für unsere c -Ensembles asymptotisch konstant sein dürfte, da für $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_c$ entsprechendes gilt. Hier liegt ein Unterschied zum EGRE, denn für dieses skaliert $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'$ nicht nur mit der Varianz der Verteilung der Raten, sondern auch mit der Systemgröße N . Es fragt sich, inwiefern die berechnete Varianz vom Ensemble für c abhängt, insbesondere was das Skalenverhalten mit N betrifft. In der Berechnung ausgenutzt haben wir die unitäre Invarianz unserer Ensembles für die Mittelung der Matrizen S und T . In Anhang A.5 sehen wir allerdings, dass nicht nur die Matrixelemente von $\langle S \rangle$, sondern auch jene von S mit $1/N^2$ skalieren. Würde analogerweise das für $\langle T \rangle$ ermittelte Skalenverhalten auch für T gelten (Abbildung A.1(b) spricht dafür), dann wäre die ermittelte N -Unabhängigkeit für jede einzelne Matrix c gültig (als statistischer Zusammenhang zwischen den $N^2 - 1$ Eigenwerten von c und den $N^2 - 1$ von Null verschiedenen Eigenwerten von \mathcal{R}).

Wir präsentieren nun numerische Ergebnisse für die Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{R} für die drei in Abschnitt 4.4.2 definierten Ensembles positiver Matrizen und verschiedene N . Abbildung 5.3 zeigt als generisches Beispiel die Verteilung für c aus dem WPUE und $N = 3$. Wir haben die Eigenwerte um ihren Mittelwert zentriert und anschließend die Achsen mit $\langle \lambda \rangle_c$ skaliert, da der zuvor berechnete Ausdruck für $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}}$ ein solches Skalenverhalten vermuten lässt.

Nach Satz 4.5 sind die Eigenwerte von \mathcal{R} entweder reell oder bilden komplex konjugierte Paare. Wir erkennen nun, dass tatsächlich beide Arten von Eigenwerten vorkommen. Wie

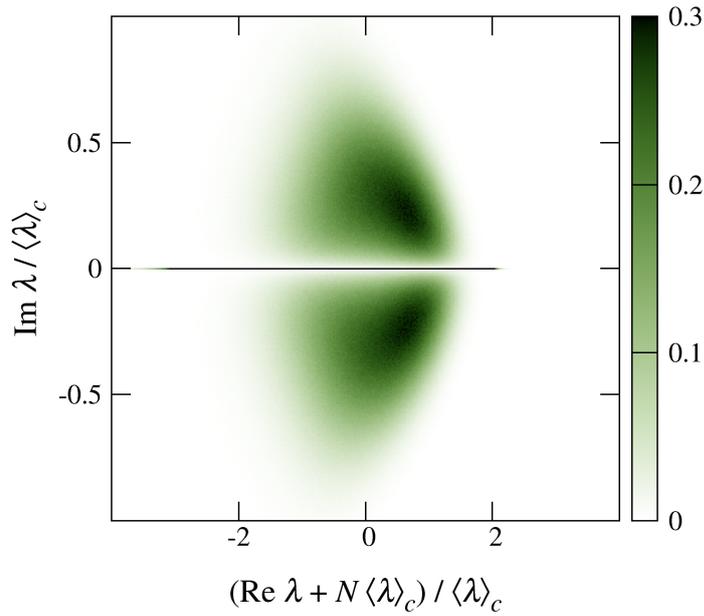


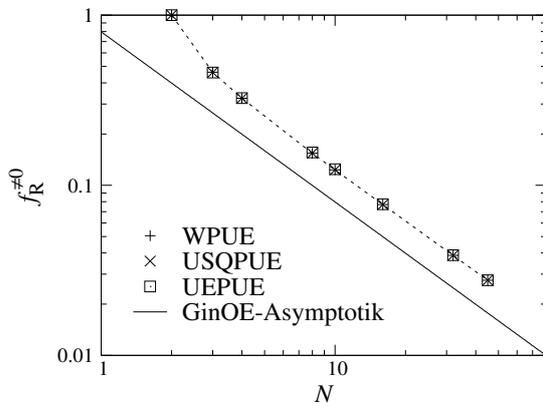
Abb. 5.3: Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{R} für c aus dem WPUE und $N = 3$, numerisch ermittelt aus 10^8 Eigenwerten. Die Farbskala wurde beschnitten, da die reellen Eigenwerte einen Dirac-Beitrag in imaginärer Richtung liefern.

zu erwarten war, ist die Verteilung symmetrisch zur reellen Achse und ihre Breite in reeller Richtung übertrifft jene in imaginärer Richtung.

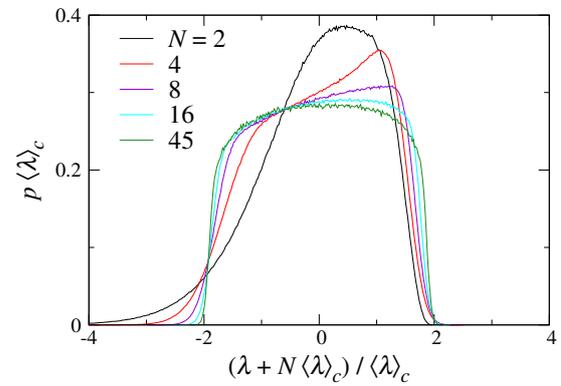
In der Nähe der reellen Achse erkennen wir ein Verhalten, wie es auch das in Abschnitt 3.2.1 vorgestellte GinOE zeigt, d.h. einen makroskopischen Anteil reeller Eigenwerte und eine für $|\text{Im } \lambda| \rightarrow 0$ gegen Null gehende Dichte der komplexen Eigenwerte. Das verwundert auf den ersten Blick, da die Matrizen des GinOE reell sind, \mathcal{R}_{mnpq} dagegen i.A. komplex ist. Ein Zufallsmatrixensemble für \mathcal{R} sollten demnach eher Merkmale des GinUE zeigen. Allerdings treten die komplexen Eigenwerte von \mathcal{R} ja in konjugierten Paaren auf und im Weiteren wird sich zeigen, dass in unseren Ensembles für \mathcal{R} Entartungen mit Maß Null vorkommen. Folglich hat das charakteristische Polynom von \mathcal{R} in unseren Ensembles fast sicher nur reelle Koeffizienten. (Wüsste man, dass die algebraischen Vielfachheiten zueinander konjugierter Eigenwerte von \mathcal{R} bzw. \mathcal{L} generell übereinstimmen, dann wäre gesichert, dass die entsprechenden charakteristischen Polynome nur reelle Koeffizienten haben. Deshalb ist diese in Abschnitt 4.5 aufgeworfene Frage interessant.) Es ist also plausibel, dass sich die Eigenwerte – als Nullstellen des charakteristischen Polynoms – so verhalten, als gehörten sie zu einer reellen Matrix. Wir werden demnach ab jetzt reelle und komplexe Eigenwerte getrennt untersuchen und unsere Ensembles nicht nur mit dem EGRE, sondern auch mit dem GinOE vergleichen.

Abschließend wollen wir auf die erstaunliche Ähnlichkeit der reskalierten Dichte in Abbildung 5.3 mit einer entsprechenden Dichte des EGRE hinweisen [10, Abbildung 4]. Letztere besitzt nicht nur alle zuvor aufgeführten Merkmale, sondern zeigt darüberhinaus eine analoge Schiefe der Verteilung in reeller Richtung und grob das gleiche Verhältnis der Verteilungsbreiten in reeller und imaginärer Richtung.

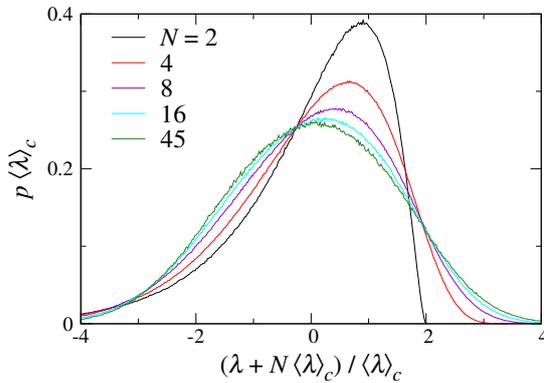
Wir wollen nun nach dem Anteil der reellen Eigenwerte an $\sigma(\mathcal{R}) \setminus \{0\}$ bzw. genauer nach dessen mit $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}$ bezeichneten Ensemblemittel fragen. Abbildung 5.4(a) stellt die Abhängigkeit von N für die drei c -Ensembles dar. Für alle zeigt sich das gleiche Verhalten; die Punkte liegen allerdings nur fast aufeinander, wie eine genauere Betrachtung ergibt.



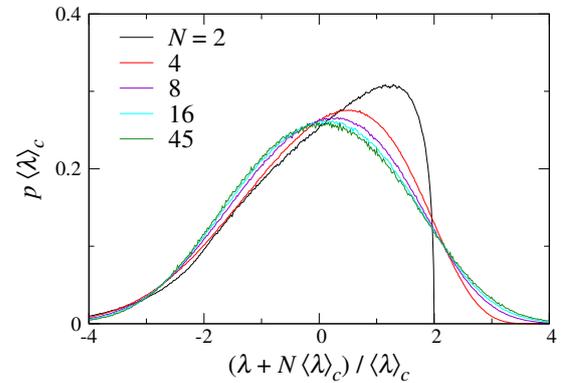
(a)



(b) WPUE



(c) UEPUE



(d) USQPUE

Abb. 5.4: (a) Mittlerer Anteil der reellen Eigenwerte an $\sigma(\mathcal{R}) \setminus \{0\}$ für verschiedene Ensembles positiver Matrizen in Abhängigkeit von N ; die glatte Linie zeigt zum Vergleich das entsprechende asymptotische Verhalten des GinOE, d.h. $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} = \sqrt{2/\pi N^2}$. (b)–(c) Wahrscheinlichkeitsdichten der Verteilung der reellen, von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{R} für verschiedene N und verschiedene Ensembles positiver Matrizen. Alle Kurven resultieren aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^8$.

Tab. 5.1: Exponent α des asymptotischen Potenzgesetzes $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} \sim N^{-\alpha}$ für unsere Ensembles für \mathcal{R} , ermittelt durch eine lineare Interpolation der Punkte $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}(32)$ und $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}(45)$ für $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}(N)$ in doppelt-logarithmischer Darstellung aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^8$. Die angegebenen Fehler (eine Standardabweichung) resultieren aus den statistischen Fehlern der beiden Punkte.

c -Ensemble	WPUE	USQPUE	UEPUE
Exponent α	0,9875(18)	0,9893(19)	0,9948(19)

Für $N = 2$ ist $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} = 1$, d.h. alle Eigenwerte von \mathcal{R} sind reell; für große N scheint sich ein Potenzgesetz abzuzeichnen. Für $N^2 \gg 1$ ist das Gewicht des Eigenwerts Null am Spektrum von \mathcal{R} vernachlässigbar und wir können $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}$ mit dem mittlere Anteil der reellen Eigenwerte am Spektrum von Matrizen des GinOE der linearen Matrixdimension N^2 vergleichen (da $(\mathcal{R}_{\alpha\beta})$ aus $M(N^2)$ ist). Asymptotisch skaliert dieser mit $1/N$; in Abbildung 5.4(a) ist die entsprechende Gerade zu sehen. Auf den erste Blick scheint auch $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}$ asymptotisch mit $1/N$ zu skalieren; eine genauere Untersuchung lässt allerdings Zweifel aufkommen: Nimmt man die Punkte für $N = 32$ und $N = 45$ als Grundlage einer linearen Interpolation in doppelt-logarithmischer Auftragung, so erhält man für $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} \sim N^{-\alpha}$ einen Exponenten $\alpha < 1$, wie Tabelle 5.1 zeigt. Das Verhalten von $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}$ im in Abbildung 5.4(a) abgedeckten Parameterbereich lässt außerdem vermuten, dass die Funktion $\log f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}(\log N)$ konvex ist; d.h. ihre Steigung sollte sich für größer werdendes N erhöhen. Demnach wären die in Tabelle 5.1 genannten Werte als obere Schranken von α zu verstehen. Auch das EGRE zeigt ein anomales Skalenverhalten von $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}$ mit $\alpha \approx 0,460$ [10]. Insofern überrascht ein Abweichen von $\alpha = 1$ nicht. Da die Ratenmatrix aus $M(N)$ und $(\mathcal{R}_{\alpha\beta})$ aus $M(N^2)$ ist, könnte man vermuten, dass die Exponenten der beiden Ensembles durch einen Faktor 2 verknüpft sind. Die in Tabelle 5.1 angeführten oberen Schranken für α in unseren Ensembles (wenn es denn welche sind) sprechen nicht dagegen. Für eine Überprüfung wäre $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}$ bei größeren N zu untersuchen. Offen bleibt auch die Frage, ob der Exponent unabhängig vom gewählten Ensemble für c ist. Für das EGRE wurde für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Raten (inklusive solcher, die negative Raten zulassen) der gleiche Exponent gefunden [10].

Betrachten wir nun die Verteilung der reellen, von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{R} . Die Abbildungen 5.4(b)–(d) zeigen die numerisch ermittelten Dichtefunktionen für unsere drei c -Ensembles und verschiedene N . Die Ergebnisse suggerieren, dass die asymptotischen Verteilungen in allen drei Fällen symmetrisch bezüglich ihres Mittelwertes sind und eine von N unabhängige Breite besitzen. Für c aus dem USQPUE scheint sich die gleiche asymptotische Verteilung zu ergeben wie für c aus dem UEPUE. Grund dafür ist vermutlich eine Art zentraler Grenzwertsatz: Die Eigenwertverteilungen dieser beiden c -

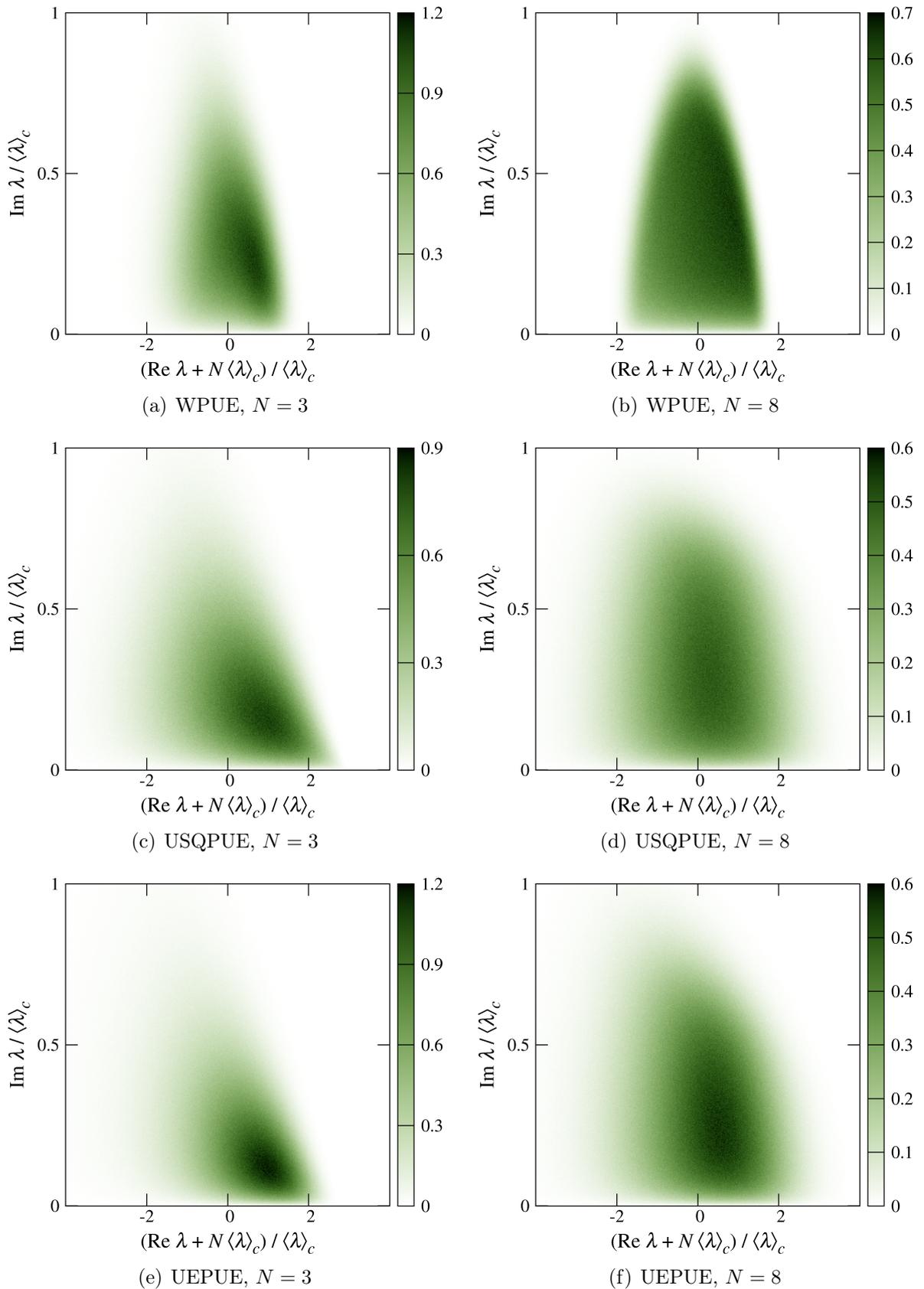


Abb. 5.5: Wahrscheinlichkeitsdichten der Verteilung der Eigenwerte von \mathcal{R} mit positivem Imaginärteil für verschiedene Ensembles positiver Matrizen und verschiedene N , numerisch ermittelt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^8$.

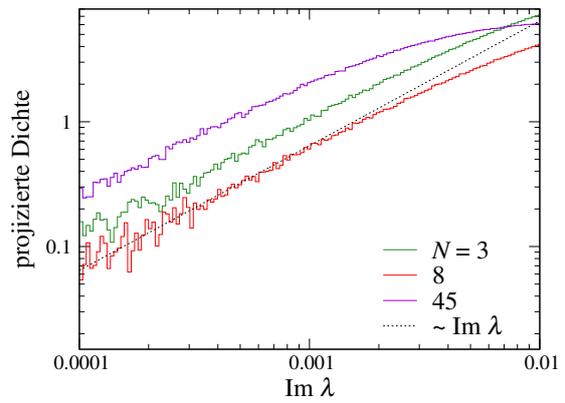
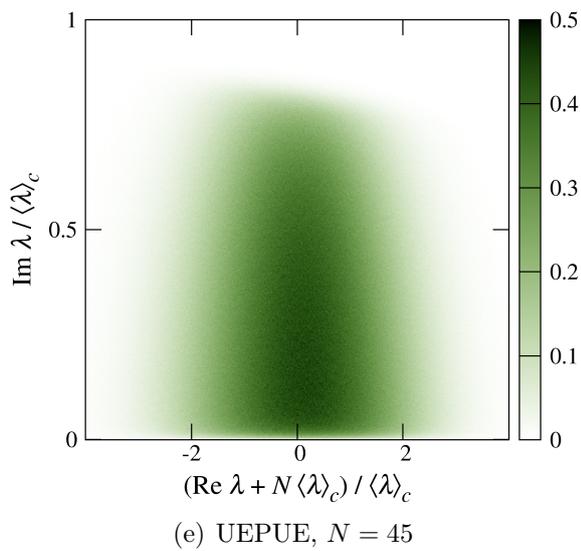
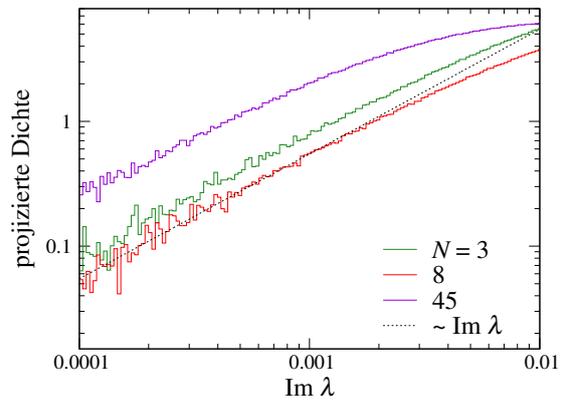
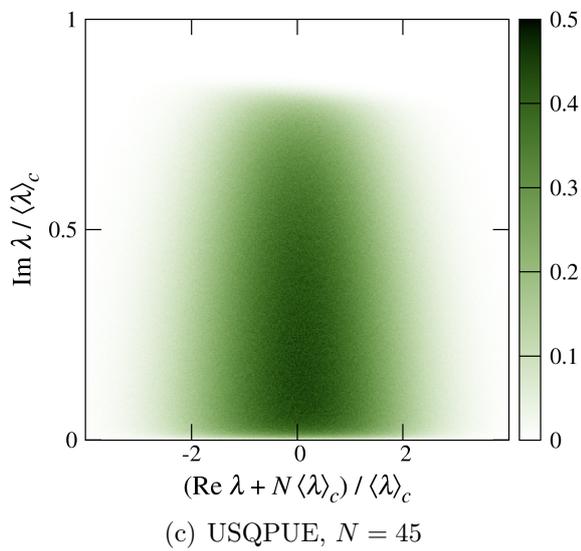
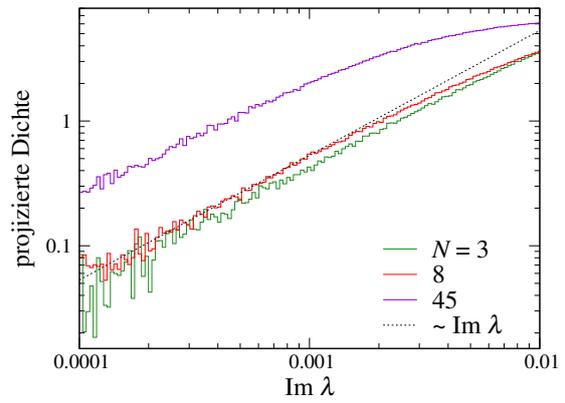
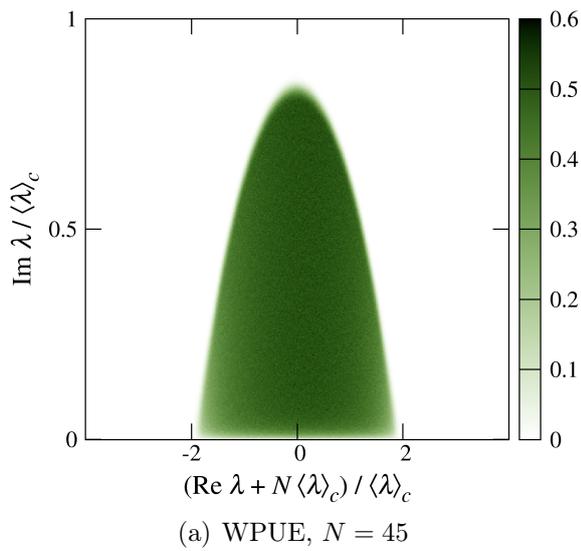


Abb. 5.6: (a), (c), (e): Fortsetzung von Abbildung 5.5. (b), (d), (f): Projektionen der Daten aus den links stehenden Abbildungen auf die imaginäre Achse.

Ensembles besitzen den gleichen Mittelwert und die gleiche Varianz und dieser Umstand führt für $N \rightarrow \infty$ zu einem verschwindenden Unterschied der resultierenden Ensembles für \mathcal{R} . In [10] wurde eine entsprechende Aussage für die Eigenwertverteilung des EGRE bewiesen. Für c aus dem WPUE scheint sich eine andere Asymptotik zu ergeben. Die Entwicklung der Schwänze der Verteilung mit N erinnert an jene für die Eigenwertverteilung des GUE in Abbildung 4.1. Die asymptotische Dichtefunktion könnte also wie im Falle des GUE einen kompakten Träger haben und an den Rändern des Trägers nicht analytisch sein; eine Konstanz auf dem Träger, analog zum GinOE [23, 42], zeichnet sich jedoch nicht ab. Abschließend sei gesagt, dass sich die asymptotischen Verteilungen für alle drei Ensembles von der entsprechenden asymptotischen Verteilung des EGRE unterscheidet, denn die Dichtefunktion letzterer entwickelt asymptotisch Knicke, ohne dass die Entwicklung eines kompakten Trägers auszumachen ist [10].

Wenden wir uns nun den komplexen Eigenwerten zu. Da die in Abbildung 5.3 erkennbare Symmetrie der Verteilung bezüglich der reellen Achse für alle c -Ensembles und alle N gilt, beschränken wir uns auf die Darstellung der Verteilung der Eigenwerte mit positivem Imaginärteil. In den Abbildungen 5.5 und 5.6(a), (c), (e) sehen wir numerische Ergebnisse für die drei c -Ensembles und jeweils $N = 3, 8, 45$. Wie schon bei den Verteilungen der reellen Eigenwerte erkennen wir für zunehmendes N eine Abnahme der Schiefe in reeller Richtung. Ebenfalls beobachten wir, dass sich die Verteilungen der Ensembles mit c aus dem USQPUE und dem UEPUE mit steigendem N ähnlicher werden, während sich für c aus dem WPUE eine andere asymptotische Verteilung zu ergeben scheint.

Da $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}$ für $N \rightarrow \infty$ verschwindet, ergibt sich $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}}$ in (5.30) asymptotisch allein aus der Verteilung der komplexen Eigenwerte von \mathcal{R} . Die numerischen Ergebnisse unterstreichen, dass $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}}$ nicht mit N skaliert; sie zeigen darüber hinaus, dass die Breiten der Verteilung in reeller und imaginärer Richtung dies nicht tun.

Für die c -Ensembles mit unkorrelierten Eigenwerten suggerieren die Histogramme für $N \rightarrow \infty$ die Entwicklung eines scharfen Randes der Dichtefunktion parallel zur reellen Achse und ein analytisches Verhalten in reeller Richtung ohne Ausprägung eines kompakten Trägers. Für c aus dem WPUE scheint die asymptotische Dichtefunktion dagegen einen kompakten Träger zu besitzen, der die Form eines Zuckerhuts hat, wenn man sich auf die Eigenwerte mit positivem Imaginärteil beschränkt; insbesondere scheint der Rand des Trägers die reelle Achse nicht senkrecht zu schneiden, d.h. er ist keine Halbellipse, was dem Verhalten des GinOE nahe käme (siehe Abschnitt 3.2.1). Für das EGRE beobachtet man eine ähnliche Entwicklung; allerdings hat der vermeintliche Träger dort einen glockenförmigen Rand [10]. Unter Beachtung der Ergebnisse für die reellen Eigenwerte halten wir fest, dass WPUE und USQPUE zu verschiedenen asymptotischen Eigenwertverteilungen

für \mathcal{R} führen. Da die Eigenwertverteilungen von c aus dem WPUE und dem USQPUE für $N \rightarrow \infty$ identisch sind, liegt die Ursache dafür allein bei den verschiedenen Eigenwertkorrelationen der Ensembles für c . Dass letztere Einfluss haben, war nach der Berechnung von $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}}$ in (5.30) zu erwarten; wie weitreichend diese Einflüsse sein können, sehen wir jedoch erst hier.

In den Abbildungen 5.6(b), (d), (f) wird der Verlauf der Verteilungen nahe der reellen Achse genauer untersucht. Für das EGRE [10] ist, genau wie für das GinOE [41], eine lineare Abstoßung von der reellen Achse bekannt. Um zu überprüfen, ob auch unsere Ensembles für \mathcal{R} diese Eigenschaft haben, ist hier die Projektion der Eigenwertverteilung auf die imaginäre Achse dargestellt und tatsächlich beobachten wir ein lineares Verhalten für kleine $|\text{Im } \lambda|$. Wir sehen, dass der Anstieg für kleine N stark vom Ensemble abhängt, asymptotisch jedoch für alle Ensembles gleich zu sein scheint.

5.3.2 Eigenwertkorrelationen

Wir wollen nun die Korrelationen der Eigenwerte von \mathcal{R} aus unseren Ensembles untersuchen. Wir betrachten die reellen und komplexen Eigenwerte wieder getrennt. Bereits untersucht haben wir die Korrelationen zwischen diesen beiden Sorten von Eigenwerte; sie stoßen einander linear ab.

Beginnen wir mit der Abstandsverteilung der reellen, von Null verschiedenen Eigenwerte. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir festgestellt, dass die Verteilung dieser Eigenwerte eine asymptotisch von N unabhängige Breite besitzt. Weiterhin haben wir für den mittleren Anteil der reellen Eigenwerte an $\sigma(\mathcal{R}) \setminus \{0\}$ für große N ein Potenzgesetz $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} \sim N^{-\alpha}$ gefunden, d.h. \mathcal{R} hat asymptotisch im Mittel $N^2 f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} \sim N^{2-\alpha}$ reelle, von Null verschiedene Eigenwerte. Dementsprechend skaliert deren mittlerer Abstand $\langle \Delta \lambda \rangle$ mit $N^{\alpha-2}$, d.h. etwa mit $1/N$, da α nahe Eins ist. Die Abbildungen 5.7(a), (c), (e) zeigen numerisch ermittelte Verteilungen der mit $N/\langle \lambda \rangle_c$ skalierten Abstände für die drei c -Ensembles und verschiedenen N . Wir sehen die erwartet schwache Abhängigkeit des Mittelwerts von N . Während sich die Verteilungen für kleine N noch je nach c -Ensemble unterscheiden, scheint das asymptotische Verhalten vom Ensemble unabhängig zu sein. Für kleine $\Delta \lambda$ ist die Dichtefunktion proportional zu $\Delta \lambda$. Wir beobachten also ein lineares Abstoßungsverhalten, wie es auch das EGRE [10] und das GinOE [41] zeigt.

Als nächstes untersuchen wir die Korrelationen der komplexen Eigenwerte, wobei wir uns wieder auf die Eigenwerte mit positivem Imaginärteil beschränken können. Korrelationen zwischen Eigenwerten der oberen und unteren komplexen Halbebenen werden von der Abstoßung von der reellen Achse und dem Auftreten komplex konjugierter Paare domi-

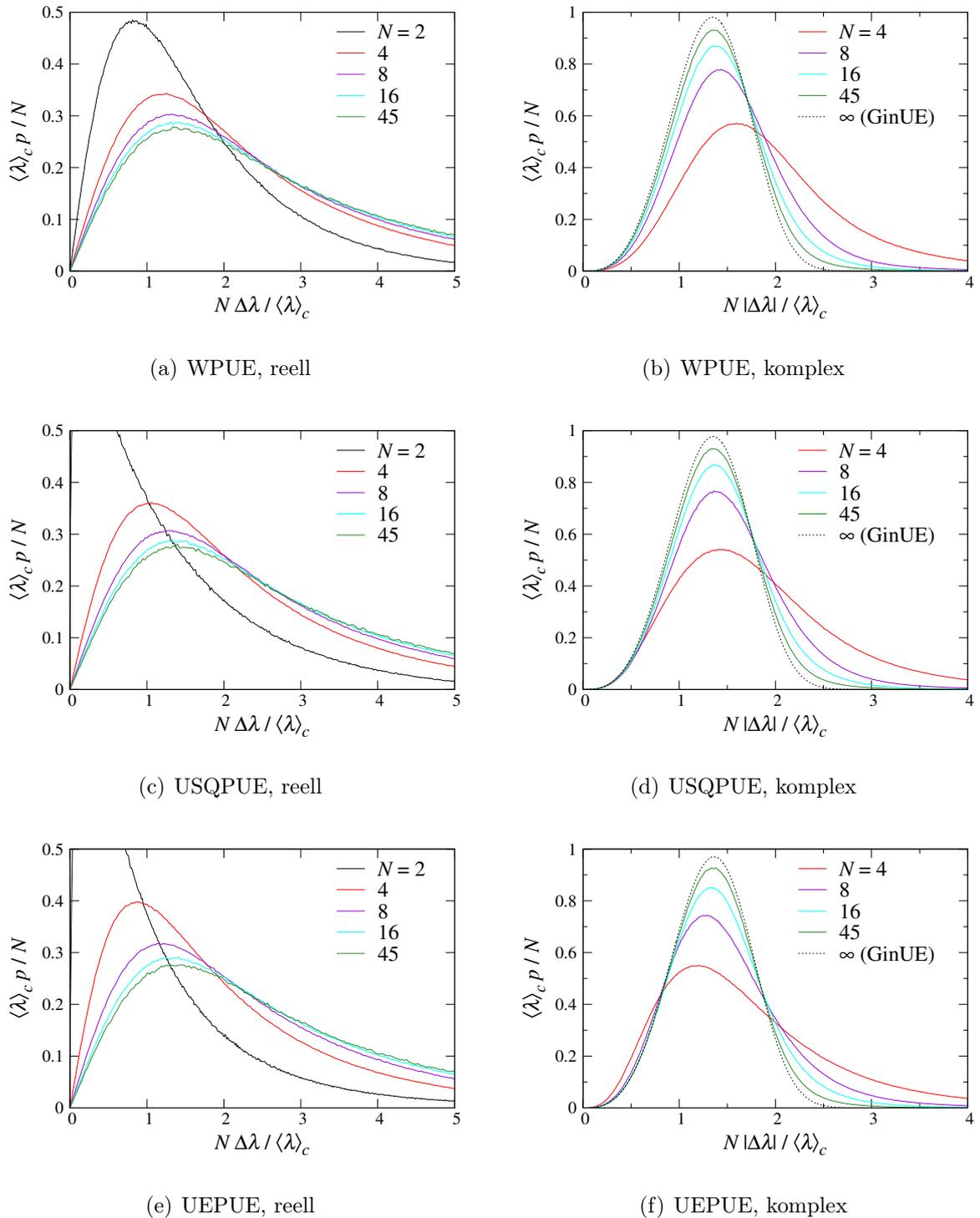


Abb. 5.7: Korrelationen der Eigenwerte von \mathcal{R} für verschiedene Ensembles positiver Matrizen und verschiedene N , numerisch ermittelt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^8$: Zu sehen sind Dichtefunktionen von Verteilungen der (links) Abstände benachbarter reeller, von Null verschiedener Eigenwerte und (rechts) Nächste-Nachbar-Abstände von Eigenwerten mit positivem Imaginärteil. Die gestrichelte Linie in den rechten Plots ist das asymptotische Verhalten des GinUE in passender Skalierung.

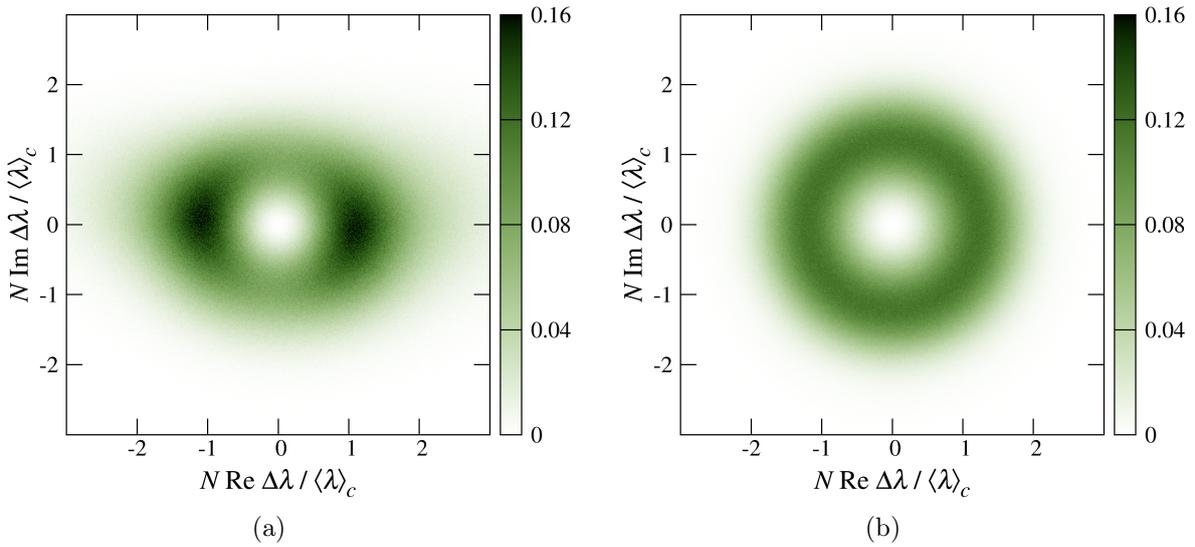


Abb. 5.8: Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung komplexer Differenzen $\Delta\lambda$ benachbarter Eigenwerte mit positivem Imaginärteil von \mathcal{R} für c aus dem WPUE für (a) $N = 4$, (b) $N = 45$, numerisch ermittelt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^8$.

niert und hier nicht weiter betrachtet. In Abbildung 5.8 ist die Verteilung der Differenzen benachbarter Eigenwerte für c aus dem WPUE und (a) $N = 4$, (b) $N = 45$ abgebildet. Zur Erzeugung der Histogramme aus Monte-Carlo-Simulationen haben wir für jeden Eigenwert λ mit positivem Imaginärteil denjenigen Eigenwert λ' mit positivem Imaginärteil derselben Matrix bestimmt, der $|\lambda' - \lambda|$ minimiert und die entsprechenden Differenzen $\Delta\lambda := \lambda' - \lambda$ gesammelt. Wir beobachten, dass die Verteilung für große N rotationssymmetrisch wird und kleine Differenzen unterdrückt sind. Dieses Verhalten beobachtet man auch beim EGRE [10, Abbildung 11]. Die Verteilungen für die anderen c -Ensembles zeigen keine qualitativen und kaum quantitative Unterschiede zu denen für c aus dem WPUE, weshalb wir sie hier nicht abbilden. Da $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}$ für $N \rightarrow \infty$ gegen Null geht, die Anzahl der komplexen Eigenwerte asymptotisch also mit N^2 skaliert, und $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{R}}$ asymptotisch unabhängig von N ist, können wir $\langle |\Delta\lambda| \rangle \sim 1/N$ für große N erwarten, was in den Abbildungen 5.8 und 5.7(b), (d), (f) bestätigt wird. In letzteren haben wir die Verteilungen von $|\Delta\lambda|$ dargestellt, um einerseits zu belegen, dass sich asymptotisch für alle c -Ensembles das gleiche Verhalten ergibt und andererseits zu erfahren, wie sich die Verteilung von $|\Delta\lambda|$ bei kleinen Differenzen verhält. Die Kurven erinnern an die entsprechenden des GinUE (siehe Abbildung 3.1(b)). Deshalb haben wir die asymptotische Dichtefunktion des GinUE eingetragen – so skaliert, dass sie durch den (grob) gemeinsamen Schnittpunkt der Kurven für $N = 8, 16, 45$ geht – und dem Augenschein nach könnten die asymptotischen Abstandsverteilungen tatsächlich übereinstimmen. Klar erkennbar ist das kubische Verhalten für kleine $|\Delta\lambda|$. Wir finden also

auch für die komplexen Eigenwerte ein Abstoßungsverhalten, dass mit dem des EGRE [10] und dem des GinOE [41] übereinstimmt.

Abschließend wollen wir zwei Dinge festhalten. Erstens zeigen die Abstandsverteilungen, dass \mathcal{R} tatsächlich, wie eingangs behauptet, fast sicher N^2 verschiedene Eigenwerte hat, denn wir haben bei der numerischen Ermittlung der Abstandsverteilungen alle N^2 Zahlen eingeschlossen, die von der benutzten Eigenwertroutine (siehe Anhang A.7) geliefert wurden, d.h. alle Eigenwerte mit ihren algebraischen Vielfachheiten; somit wären Entartungen als Null-Abstände aufgefallen. Zweitens sehen wir, dass die Korrelationen der Eigenwerte von \mathcal{R} im Wesentlichen unabhängig vom gewählten Ensemble für c sind und mit denen des EGRE und des GinOE übereinstimmen, während die Eigenwertverteilungen vom Ensemble für c abhängen und sich von denen des EGRE und des GinOE unterscheiden. Als vermutlichen Ursprung für die Übereinstimmungen im Korrelationsverhalten haben wir bereits ausgemacht, dass das charakteristische Polynom von $(\mathcal{R}_{\alpha\beta})$ aus unseren Ensembles fast sicher nur reelle Koeffizienten hat. Man kann sich die Eigenwerte von \mathcal{R} also als von reellen Matrizen herrührend denken. Für Ensembles reeller Matrizen beobachtet man nun typischerweise die Abstoßungsverhalten des GinOE, denn die Wahrscheinlichkeitsdichte der mehrdimensionalen Verteilung aller Eigenwerte $p(\lambda_1, \dots, \lambda_{N^2})$ enthält dann den Faktor $\prod_{\alpha < \beta} |\lambda_\alpha - \lambda_\beta|$ und die Eigenwertkorrelationen sind im Wesentlichen durch „lokale“ Eigenschaften von p gegeben [10, 13, 17]. Im Gegensatz dazu wird die Eigenwertverteilung durch das globale Verhalten von p bestimmt, d.h. sie hängt vom konkreten Maß des Ensembles ab [10, 13].

5.4 Voller Lindblad-Superoperator

Wir untersuchen nun Zufallsmatrixensembles für den vollen Lindblad-Superoperator. Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass sich, was Eigenwert- und Abstandsverteilungen betrifft, für c aus dem USQPUE asymptotisch das gleiche \mathcal{R} -Ensemble ergibt wie für c aus dem UEPUE. Die gleiche Beobachtung haben wir im vorletzten Abschnitt bei den \mathcal{U} -Ensembles für H aus dem GUE und dem USHUE gemacht. Es sollte also sowohl für c als auch für H genügen, nur zwei statt drei Ensembles zu untersuchen. Aus den Ensembles für c streichen wir das USQPUE, da es, im Gegensatz zum UEPUE, nicht alle möglichen positiven Matrizen erfasst und das UEPUE die natürlichere Eigenwertverteilung besitzt. Aus den H -Ensembles streichen wir das USHUE – auch wegen dessen künstlicher Eigenwertverteilung und dem Umstand, dass es nicht ganz $M_h(N)$ abdeckt. Aus den verbliebenen jeweils zwei Ensembles ergeben sich durch Kombination vier \mathcal{L} -Ensembles, die wir im Folgenden betrachten wollen. Die Matrizen dieser Ensembles haben, wie die der \mathcal{R} -Ensembles,

fast sicher N^2 verschiedene Eigenwerte und davon einen Eigenwert Null, d.h. wir fragen wieder nach den statistischen Eigenschaften der $N^2 - 1$ übrigen Eigenwerte.

5.4.1 Eigenwertverteilung

Als erstes untersuchen wir die Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte der Matrizen unserer LSO-Ensembles. Der Mittelwert der Verteilung ist durch

$$\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{L}} = \frac{\langle \text{Tr } \mathcal{L} \rangle}{N^2 - 1} \quad (5.33)$$

gegeben. Es ist $\text{Tr } \mathcal{L} = \text{Tr } \mathcal{U} + \text{Tr } \mathcal{R}$ und wegen $\text{Tr } \mathcal{U} = 0$ (Formel (5.5)) ergibt sich mit (5.19)

$$\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{L}} = -N \langle \lambda \rangle_c. \quad (5.34)$$

Wir erkennen, dass es nur für $c \neq 0$, d.h. $\mathcal{R} \neq 0$ zu Relaxationsprozessen kommt; der unitäre Teil der Dynamik spielt für solch inkohärente Entwicklungen keine Rolle. Zur Skalierung der mittleren Relaxationsrate mit $\langle \lambda \rangle_c$ und der Systemgröße N bemerken wir:

- Nach den Überlegungen zu Beginn des Abschnitts 5.2 ist $\langle \lambda \rangle_c$ ein Maß für die Stärke der Kopplung des Systems an die Umgebung. Eine Skalierung von $\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{L}}$ mit $\langle \lambda \rangle_c$ bedeutet also schlicht, dass die Relaxation bei stärkerer Kopplung schneller abläuft.
- In Abschnitt 2.3.2 haben wir dargelegt, dass sich die Eigenwerte von c als Übergangsraten zwischen paarweise orthogonalen reinen Zuständen des Systems interpretieren lassen; von letzteren gibt es N Stück; die mittlere Übergangsrate sei mit $\langle R \rangle$ bezeichnet. Bei N Zuständen ergibt sich an jedem Zustand im Mittel eine Gesamtwahrscheinlichkeitsdurchflussrate von $(N - 1) \langle R \rangle \approx N \langle R \rangle$, da jeder Zustand, als Knoten in einem Flussnetz betrachtet, $N - 1$ Zuflüsse und $N - 1$ Abflüsse hat. Diese mittlere Durchflussrate bestimmt die mittlere Geschwindigkeit der Relaxation, d.h. die mittlere Relaxationsrate. So lässt sich nicht nur (5.34) verstehen, sondern auch, dass sich für das entsprechende Ratengleichungsproblem Analoges ergibt [10].

Wenden wir uns nun der Berechnung von $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{L}}$ als Maß der (quadrierten) Breite der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} zu. Es gilt

$$\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{L}} = \langle \lambda^2 \rangle'_{\mathcal{L}} - \langle \lambda \rangle_{\mathcal{L}}'^2 = \frac{\langle \text{Tr } \mathcal{L}^2 \rangle}{N^2 - 1} - \left(\frac{\langle \text{Tr } \mathcal{L} \rangle}{N^2 - 1} \right)^2; \quad (5.35)$$

wir müssen also $\langle \text{Tr } \mathcal{L}^2 \rangle$ berechnen. Wir haben $\mathcal{L}^2 = \mathcal{U}^2 + \mathcal{U} \mathcal{R} + \mathcal{R} \mathcal{U} + \mathcal{R}^2$, d.h. $\text{Tr } \mathcal{L}^2 = \text{Tr } \mathcal{U}^2 + 2 \text{Tr } \mathcal{U} \mathcal{R} + \text{Tr } \mathcal{R}^2$ und wegen

$$\begin{aligned}
\text{Tr } \mathcal{U} \mathcal{R} &= \sum_{m,n,p,q=1}^N \mathcal{U}_{mnpq} \mathcal{R}_{pqmn} \\
&= -i \sum_{m,n,p,q=1}^N (H_{mp} \delta_{qn} - \delta_{mp} H_{qn}) \left(a_{pmqn} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (a_{sqsn} \delta_{pm} + a_{smsp} \delta_{qn}) \right) \\
&= -i \sum_{m,n,p,q=1}^N (H_{mp} \delta_{qn} - \delta_{mp} H_{qn}) a_{pmqn} \\
&= -i \left[\sum_{m,p=1}^N H_{mp} \left(\sum_{n=1}^N a_{pmnn} \right) - \sum_{n,q=1}^N H_{qn} \left(\sum_{m=1}^N a_{mmqn} \right) \right] \stackrel{\text{Lemma 4.7}}{=} 0 \quad (5.36)
\end{aligned}$$

folgt mit (5.5)

$$\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{L}} = \frac{\langle \text{Tr } \mathcal{U}^2 \rangle}{N^2 - 1} + \frac{\langle \text{Tr } \mathcal{R}^2 \rangle}{N^2 - 1} - \left(\frac{\langle \text{Tr } \mathcal{R} \rangle}{N^2 - 1} \right)^2. \quad (5.37)$$

Nach (5.8) und (5.30) für unitär invariante c -Ensembles ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{L}} &= -2 \left(\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H - \frac{\langle (\widetilde{\text{Tr } H})^2 \rangle}{N^2} \right) \left(1 + \frac{1}{N^2 - 1} \right) \\
&\quad + \frac{\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_c}{2} \left(1 + \frac{1}{N^2} \right) + \frac{\langle (\widetilde{\text{Tr } c})^2 \rangle}{N^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2N^2} \right). \quad (5.38)
\end{aligned}$$

Wir erhalten also im Wesentlichen eine Summe von Termen, die wir in den Abschnitten 5.2 und 5.3 diskutiert haben.

Wir zeigen nun Resultate für die Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von $\mathcal{L} = \mathcal{U} + \mathcal{R}$ aus Monte-Carlo-Simulationen. Schauen wir uns zunächst ein typisches Beispiel an. Wir wählen $N = 8$, für \mathcal{U} H aus dem GUE mit der in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Skalierung (d.h. mit einem asymptotischen mittleren Niveauabstand von Eins) und für \mathcal{R} c aus dem WPUE. Die Skalierung von c wählen wir so, dass \mathcal{U} und \mathcal{R} etwa gleich viel zur Breite der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} beitragen. Nach (5.38) sollte dies der Fall sein, wenn wir

$$2 \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H = \frac{\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_c}{2} \quad (5.39)$$

wählen. Asymptotisch gilt $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H = N^2/16$ und $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_c = \langle \lambda \rangle_c^2$ für die genannten Ensembles für H und c , d.h. wir können (5.39) grob erfüllen, indem wir $\langle \lambda \rangle_c = N/2$ wählen.

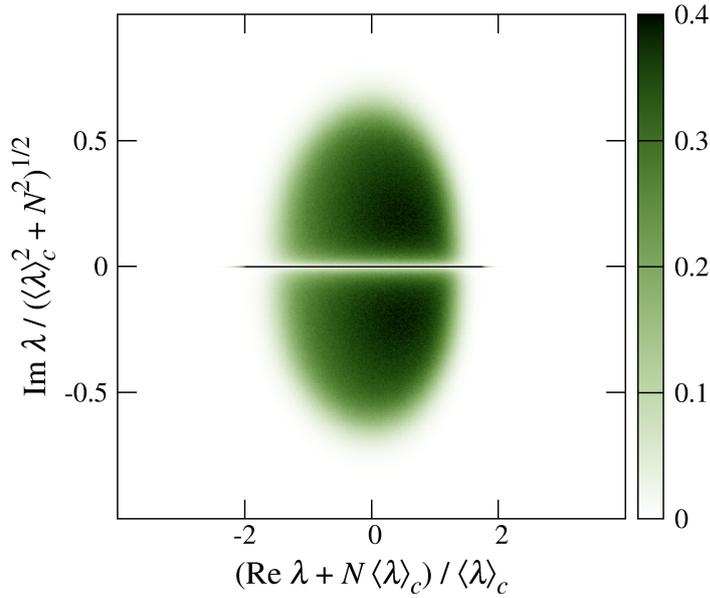


Abb. 5.9: Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} für $N = 8$, c aus dem WPUE mit $\langle \lambda \rangle_c = N/2$ und H aus dem GUE mit der in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Skalierung. Das Histogramm wurde numerisch aus 10^8 Eigenwerten bestimmt. Die Farbskala wurde beschnitten, da die reellen Eigenwerte einen Dirac-Beitrag in imaginärer Richtung liefern.

Das Ergebnis zeigt Abbildung 5.9. Wir erkennen viele Ähnlichkeiten zur Verteilung in Abbildung 5.3: Die Symmetrie zur reellen Achse, die Schiefe in reeller Richtung, einen makroskopischen Anteil reeller Eigenwerte (s.u.) und eine Abstoßung der komplexen Eigenwerte von der reellen Achse. Ein Unterschied liegt in der gewählten Skalierung der Achsen, der folgende Überlegung zugrunde liegt. Im Grenzfall $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ haben wir für unsere H -Ensembles eine in reeller Richtung verschwindende und in imaginärer Richtung mit N skalierende Breite gefunden, für $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ skalierten beiden Breiten mit $\langle \lambda \rangle_c$ und schließlich suggeriert (5.38), dass sich die entsprechenden Varianzen für $\mathcal{L} = \mathcal{U} + \mathcal{R}$ in beiden Richtungen addieren.

Wie bei den \mathcal{U} - und \mathcal{R} -Ensembles können wir nun fragen, wie die Spektralstatistik eines \mathcal{L} -Ensembles vom konkreten Maß des Ensembles und von der Systemgröße abhängt. Da sich die \mathcal{L} -Ensembles als Summe von Matrizen aus zwei (hier unabhängigen) Matrixensembles ergibt, stellt sich darüberhinaus die Frage, wie sich eine Änderung der relativen Skalierung dieser beiden Ensembles auf das resultierende \mathcal{L} -Ensemble auswirkt. (Eine globale Skalierung ist uninteressant, da sie lediglich das Spektrum von \mathcal{L} streckt.) Zur Beantwortung untersuchen wir das soeben eingeführte \mathcal{L} -Ensemble für verschiedene $\langle \lambda \rangle_c$. Es ist zu vermuten, dass sich für $\langle \lambda \rangle_c \rightarrow 0$ der Grenzfall $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ und für $\langle \lambda \rangle_c \rightarrow \infty$ der Fall $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ ergibt. Außerdem ist nach der Diskussion rund um (5.39) davon auszugehen, dass sich der

Übergang zwischen den Extremen etwa bei $\langle \lambda \rangle_c = N/2$ abspielt.

Abbildung 5.10 zeigt die Verteilungen der Eigenwerte von \mathcal{L} mit positivem Imaginärteil für verschiedene $\langle \lambda \rangle_c$. Wir sehen, dass sich für große $\langle \lambda \rangle_c/N$ tatsächlich die entsprechende Verteilung von \mathcal{R} (siehe Abbildung 5.5(b)) ergibt. Für kleine $\langle \lambda \rangle_c/N$ dagegen nimmt die Verteilung neue Formen an. Um einen Vergleich mit $\langle \lambda \rangle_c = 0$, d.h. $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ zu ermöglichen, betrachten wir die Verteilung der Imaginärteile der Eigenwerte von \mathcal{L} in Abbildung 5.11(a). Wir beobachten für kleine $\langle \lambda \rangle_c/N$, wie schon in Abbildung 5.10(a), die Entwick-

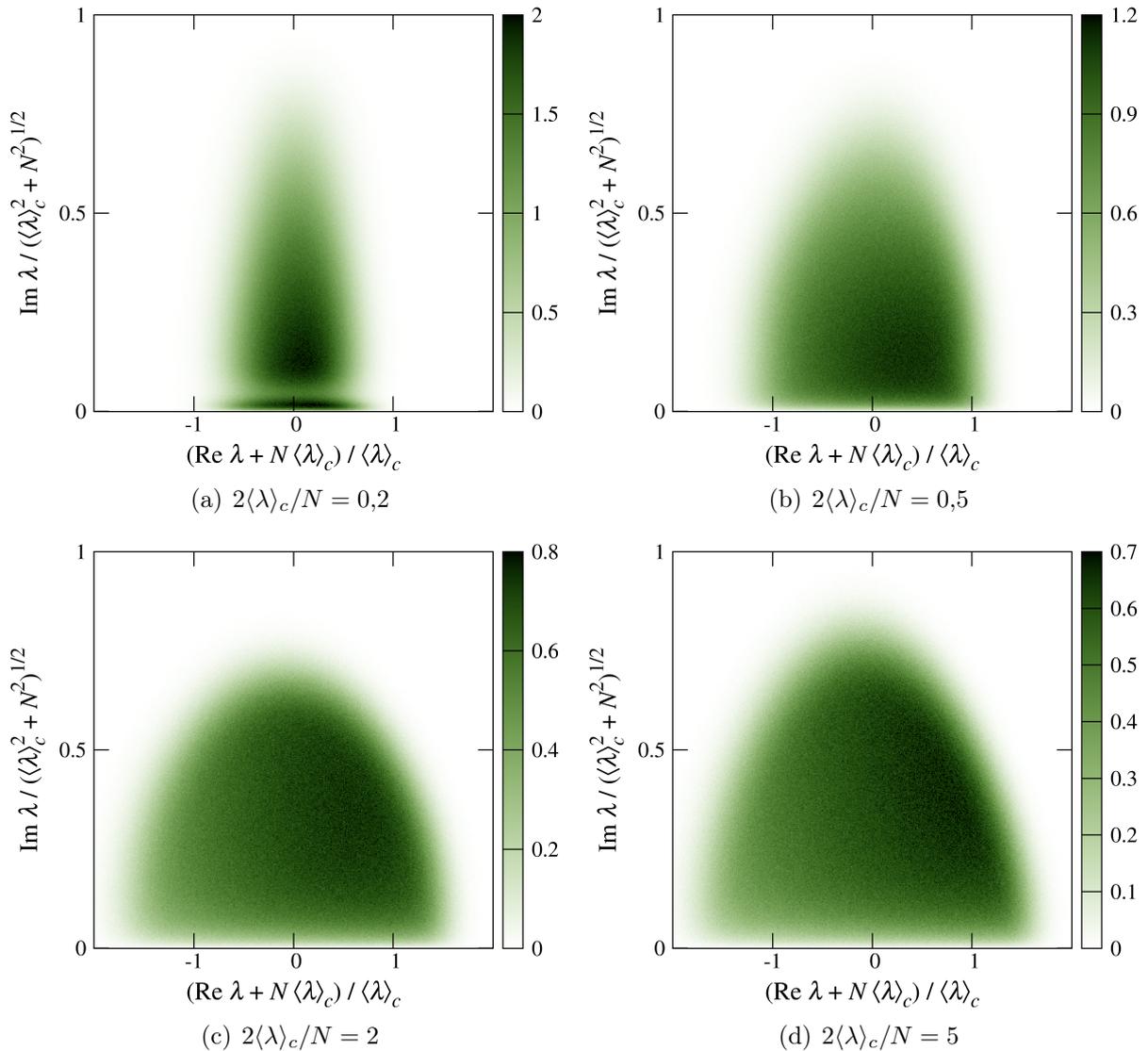


Abb. 5.10: Wahrscheinlichkeitsdichten der Verteilung der Eigenwerte von \mathcal{L} mit positivem Imaginärteil für $N = 8$, H aus dem GUE mit der in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Skalierung, c aus dem WPUE und verschiedenen Werten für $\langle \lambda \rangle_c$, numerisch ermittelt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^8$.

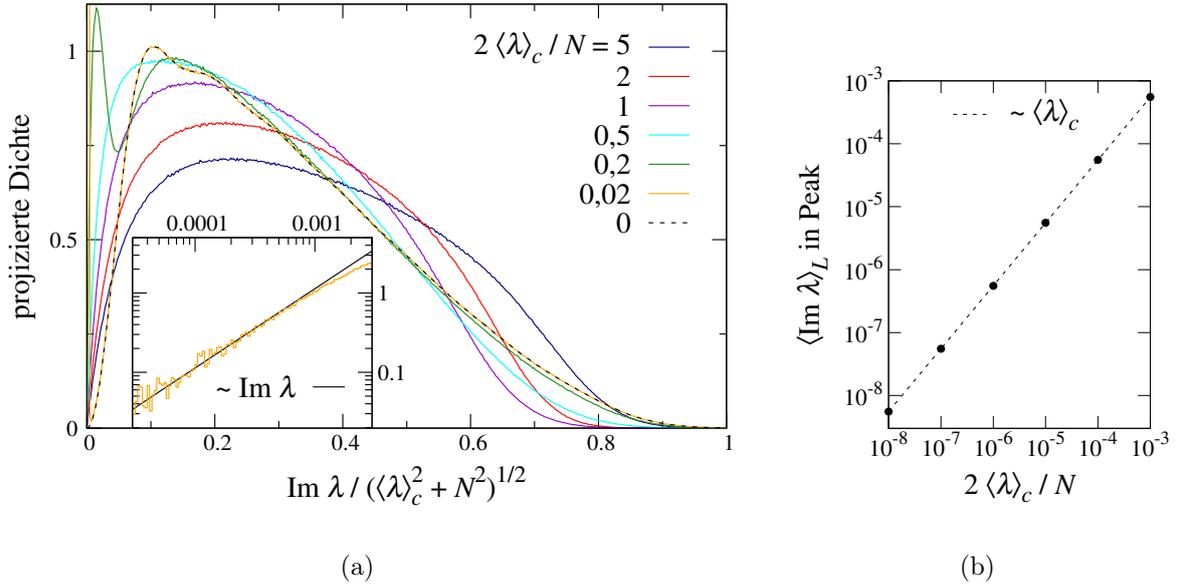


Abb. 5.11: (a) Wahrscheinlichkeitsdichten der Verteilung der Imaginärteile der Eigenwerte von \mathcal{L} und (b) Mittelwert der Imaginärteile der Eigenwerte im Bereich des Peaks, der in (a) für $2\langle\lambda\rangle_c/N \leq 0,2$ nahe $\text{Im } \lambda = 0$ zu sehen ist – jeweils für $N = 8$, H aus dem GUE mit der in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Skalierung, c aus dem WPUE und verschiedene Werte für $\langle\lambda\rangle_c$, numerisch ermittelt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^8$. $\langle\lambda\rangle_c = 0$ entspricht dem Extremfall $\mathcal{L} = \mathcal{U}$. Die Vergrößerung der Kurve für $2\langle\lambda\rangle_c/N = 0,02$ in (a) zeigt ein lineares Verhalten für kleine $|\text{Im } \lambda|$.

lung von zwei Dichtemaxima im Bereich $\text{Im } \lambda > 0$. Aus der Kurve für $2\langle\lambda\rangle_c/N = 0,02$ und Abbildung 5.11(b) lässt sich das Verhalten für $\langle\lambda\rangle_c \rightarrow 0$ ablesen: Bis auf einen Bereich der Größenordnung $\langle\lambda\rangle_c$ um Null fällt die Dichtefunktion mit derjenigen für $\langle\lambda\rangle_c = 0$ zusammen; in diesem Bereich gibt es (für $\text{Im } \lambda > 0$) einen Peak, dessen Zentrum gemäß Abbildung 5.11(b) wie $\langle\lambda\rangle_c$ gegen Null geht. Verstehen lässt sich das Auftreten des Peaks für kleine $\langle\lambda\rangle_c$ vermutlich als Effekt der Störung von \mathcal{U} durch \mathcal{R} , denn auch \mathcal{R} skaliert mit $\langle\lambda\rangle_c$. In Abbildung 5.11(a) sehen wir, dass die Dichte für $\text{Im } \lambda \rightarrow 0$ linear gegen Null geht – für jedes $\langle\lambda\rangle_c > 0$ und im Gegensatz zum Fall $\langle\lambda\rangle_c = 0$ (siehe Abschnitt 5.2).

Wenden wir uns nun den reellen Eigenwerten zu. Als Erstes fragen wir nach der Entwicklung des mit $f_{\mathbb{R}}$ bezeichneten mittleren Anteils der reellen Eigenwerte an $\sigma(\mathcal{L})$ mit $\langle\lambda\rangle_c$. Für einen Vergleich mit dem Fall $\langle\lambda\rangle_c = 0$ ist es günstig, den Eigenwert Null mit einzubeziehen, denn in diesem Fall gilt $f_{\mathbb{R}} = 1/N$. Im Grenzfall $\langle\lambda\rangle_c \rightarrow \infty$, d.h. $\mathcal{L} = \mathcal{R}$, kennen wir $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}$ und haben den Zusammenhang

$$f_{\mathbb{R}} = \frac{1}{N^2} + \left(1 - \frac{1}{N^2}\right) f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}. \quad (5.40)$$

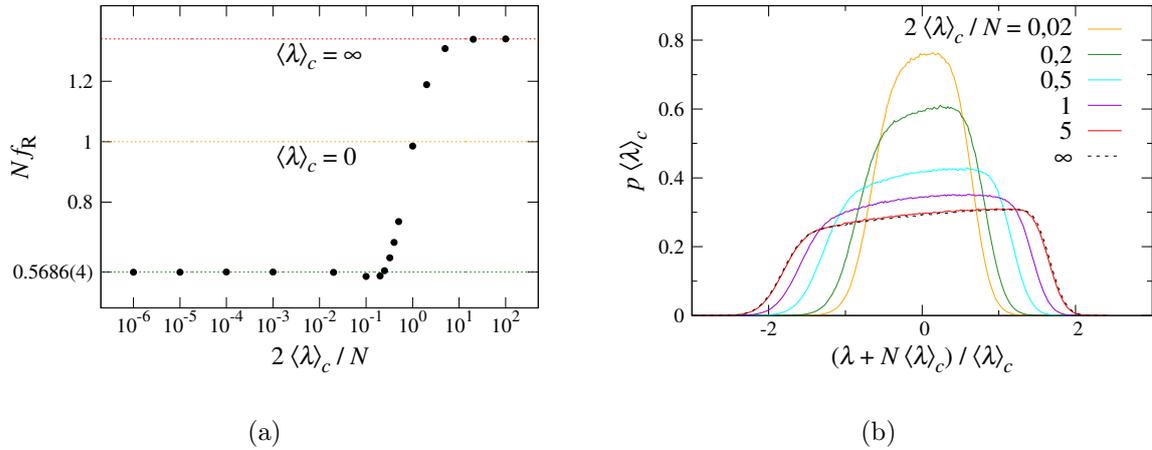


Abb. 5.12: (a) Mittlerer Anteil der reellen Eigenwerte an $\sigma(\mathcal{L})$ und (b) Wahrscheinlichkeitsdichten der Verteilung der reellen, von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} – jeweils für $N = 8$, H aus dem GUE mit der in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Skalierung und c aus dem WPUE, in Abhängigkeit von $\langle \lambda \rangle_c$ und numerisch ermittelt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^7$. $\langle \lambda \rangle_c = 0$ bzw. $\langle \lambda \rangle_c = \infty$ entsprechen den Extremfällen $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{L} = \mathcal{R}$. Die Höhe der grünen Linie in (a) wurde aus den Werten von $f_{\mathbb{R}}$ für $2\langle \lambda \rangle_c / N \leq 10^{-3}$ bestimmt.

Wie Abbildung 5.12(a) zeigt, ist $f_{\mathbb{R}}$ im Grenzfall $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ am größten; für endliche $\langle \lambda \rangle_c$ ist $f_{\mathbb{R}}$ kleiner. Wir vermuten dahinter folgenden Mechanismus: Der unitäre Teil von \mathcal{L} verursacht kohärente Änderungen des Systemzustands, die sich in rein imaginären Eigenwerten von \mathcal{U} manifestieren. Addiert man $\mathcal{U} \neq 0$ zu \mathcal{R} , so werden die Prozesse, die \mathcal{R} ermöglicht (kohärente und dissipative), durch zusätzliche kohärente Prozesse überlagert, was sich für die Eigenwertverteilung von \mathcal{L} darin äußert, dass es weniger reine Relaxationsprozesse als für $\mathcal{U} = 0$ gibt, d.h. $f_{\mathbb{R}}$ sinkt. Abbildung 5.12(a) zeigt weiterhin, dass $f_{\mathbb{R}}$ für $2\langle \lambda \rangle_c / N \lesssim 1$ kleiner als $1/N$ ist. Die entsprechend erhöhte Häufigkeit nichtreeller Eigenwerte für kleine $\langle \lambda \rangle_c$ manifestiert sich in der Fläche unter dem Peak, den wir in Abbildung 5.11(a) für $2\langle \lambda \rangle_c / N = 0,02$ beobachtet haben. Für $\langle \lambda \rangle_c \rightarrow 0$ konvergiert $f_{\mathbb{R}}$ gegen einen konstanten Wert kleiner $1/N$. Daraus lässt sich schließen, dass die Fläche unter besagtem Peak für $\langle \lambda \rangle_c \rightarrow 0$ gegen einen konstanten, von Null verschiedenen Wert geht.

Wie verändert sich die Verteilung der reellen Eigenwerte mit $\langle \lambda \rangle_c$? In Abbildung 5.12(b) sehen wir für $\langle \lambda \rangle_c \rightarrow \infty$ eine stetige Entwicklung zur Verteilung des Extremfalls $\mathcal{L} = \mathcal{R}$. Für kleiner werdende $\langle \lambda \rangle_c$ zeigt sich eine stärker als mit $\langle \lambda \rangle_c$ abnehmende Verteilungsbreite. Auch bei den komplexen Eigenwerten haben wir diese Entwicklung für die Breite in reeller Richtung ausmachen können (siehe Abbildung 5.10). Die eingangs formulierte Vermutung zu den Verteilungsbreiten ist also nur grob richtig; die Breite der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} in reeller Richtung, d.h. die Breite der Verteilung der

Relaxationsraten, ist nach den bisherigen Ergebnissen durch die Breite der Verteilung der Eigenwerte von c lediglich nach oben beschränkt. Im Weiteren werden wir untersuchen, ob diese Eigenschaft unter Änderungen des Ensembles und der Systemgröße Bestand hat.

Abschließend diskutieren wir nochmals den Übergang zu den Grenzfällen $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ und $\mathcal{L} = \mathcal{R}$. Für $\langle \lambda \rangle_c \rightarrow \infty$ beobachten wir eine gleichmäßige Konvergenz der Dichtefunktion der Eigenwertverteilung von \mathcal{L} zu der von \mathcal{R} . Für $\langle \lambda \rangle_c \rightarrow 0$ dagegen zeigt $f_{\mathbb{R}}$ ein unstetiges Verhalten (siehe Abbildung 5.12(a)). Ist der Übergang von \mathcal{L} zu \mathcal{U} also unstetig? Mit dem passenden Konvergenzbegriff vermutlich nicht: Wir haben gesehen, dass die Eigenwerte von \mathcal{L} für $\langle \lambda \rangle_c \rightarrow 0$ zur imaginären Achse wandern und dass die Breite ihrer Verteilung in reeller Richtung gegen Null geht. Die Dichtefunktion der Verteilung der Imaginärteile der Eigenwerte ist bis auf einen Bereich der Größenordnung $\langle \lambda \rangle_c$ um $\lambda = 0$ bereits für $2\langle \lambda \rangle_c/N = 0,02$ mit dem Auge nicht mehr von jener für $\langle \lambda \rangle_c = 0$ zu unterscheiden, wie Abbildung 5.12(a) zeigt; dass die Größe des Ausnahmebereichs mit $\langle \lambda \rangle_c$ skaliert, zeigt Abbildung 5.12(b). Folglich können wir vermuten: Das Maß $\mu_{\mathcal{L}}$ der Eigenwertverteilung von \mathcal{L} konvergiert für $\langle \lambda \rangle_c \rightarrow 0$ *schwach* gegen das Maß $\mu_{\mathcal{U}}$ der Eigenwertverteilung von \mathcal{U} , d.h. für jede beschränkte und stetige Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int f(\lambda) d\mu_{\mathcal{L}}(\lambda) \rightarrow \int f(\lambda) d\mu_{\mathcal{U}}(\lambda) \quad \text{für } \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{U} \quad \text{via } \langle \lambda \rangle_c \rightarrow 0. \quad (5.41)$$

Wir wollen nun verschiedene Ensembles für \mathcal{L} bei verschiedenen N betrachten. Zu Beginn von Abschnitt 4.4 haben wir physikalisch argumentiert, dass eine Skalierung $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H^{1/2} \sim N$ und $\langle \lambda \rangle_c \sim N^0$ sinnvoll wäre. Aus Sicht der Zufallsmatrixtheorie ist diese Skalierung jedoch ungünstig, da für $N \rightarrow \infty$ der unitäre Teil von \mathcal{L} überwiegen würde, d.h. wir würden qualitativ im soeben bei festem N untersuchten Limes $\langle \lambda \rangle_c^2 / \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H \rightarrow 0$ landen. Besser ist ein asymptotisch konstantes Verhältnis $\langle \lambda \rangle_c^2 / \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H$, das einen bei allen N gleichgewichtigen Beitrag von \mathcal{U} und \mathcal{R} zu \mathcal{L} sichert. Nach den gemachten Erfahrungen wählen wir die in Abschnitt 4.4.1 beschriebene Skalierung des GUE nebst $\langle \lambda \rangle_c = N/2$ für die c -Ensembles, was $\langle \lambda \rangle_c^2 / \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H \rightarrow 4$ für $N \rightarrow \infty$ entspricht. Im Sinne der Vergleichbarkeit der \mathcal{L} -Ensembles wäre es angebracht, $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H$ in beiden H -Ensembles gleich zu wählen. Für das GUE gilt asymptotisch $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H = r^2/4$ (r ist der Radius der Halbkreisverteilung (4.24)) mit $r = N/2$ in unserer Skalierung, d.h. wir wählen die Standardabweichung der Eigenwertverteilung des UNHUE als $\sigma = N/4$.

Wir beginnen mit der Untersuchung der Verteilung der Eigenwerte mit positivem Imaginärteil. Die Abbildungen 5.13 und 5.14 zeigen diese für die vier \mathcal{L} -Ensembles und jeweils $N = 3, 8, 32$. Wir erkennen eine mit wachsendem N abnehmende Schiefe der Verteilung in

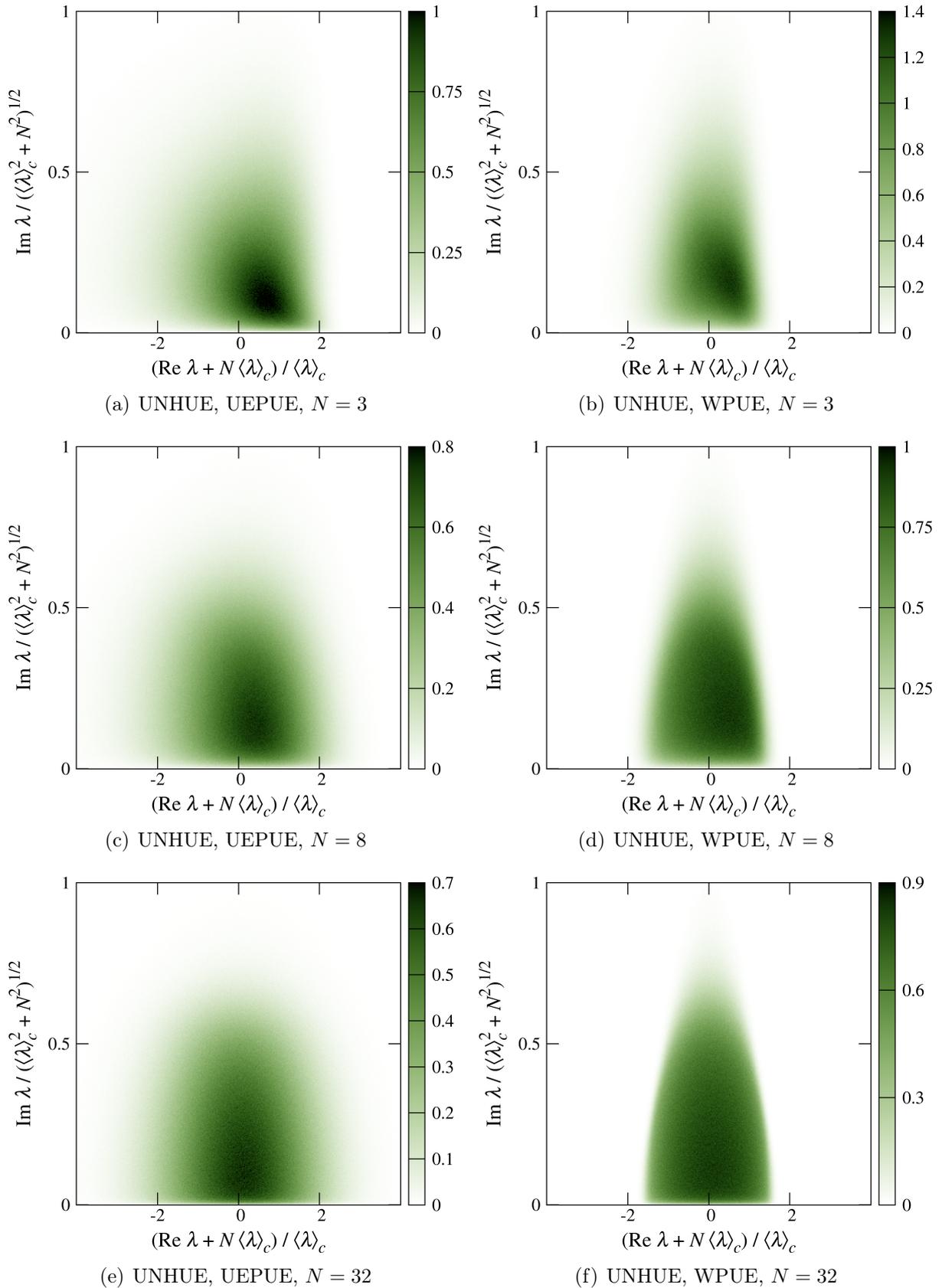


Abb. 5.13: Wahrscheinlichkeitsdichten der Verteilung der Eigenwerte von \mathcal{L} mit positivem Imaginärteil für verschiedene N , H aus dem UNHUE und verschiedene c -Ensembles mit $\langle \lambda \rangle_c = N/2$ und asymptotisch $\langle \lambda \rangle_c^2 / \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H = 4$, numerisch ermittelt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 = 10^8$.

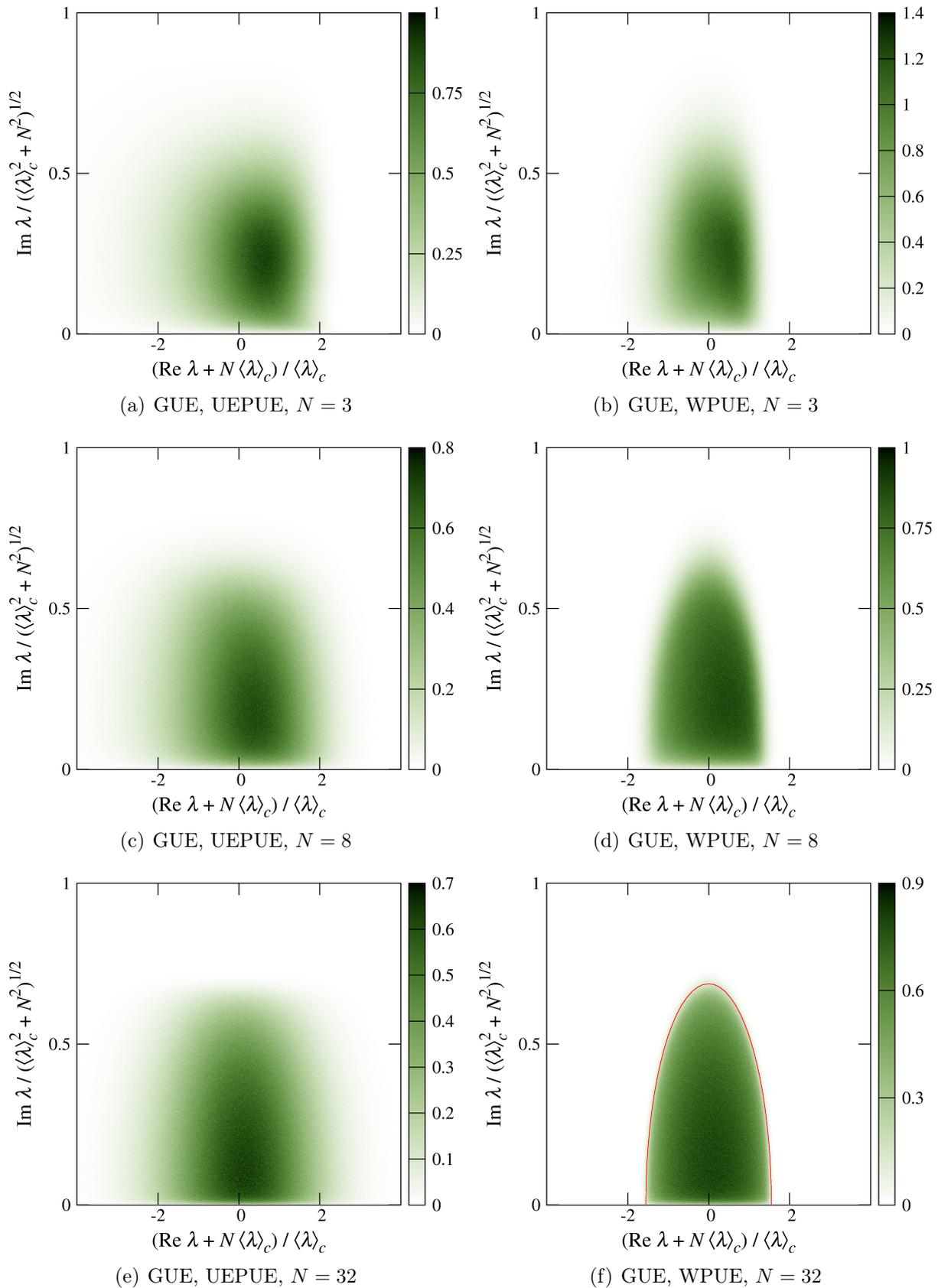


Abb. 5.14: Analogon zu Abbildung 5.13 für H aus dem GUE. In (f) haben wir, um die Form des Randes der Verteilung zu bestimmen, eine Ellipse mit passenden Halbachsen eingezeichnet.

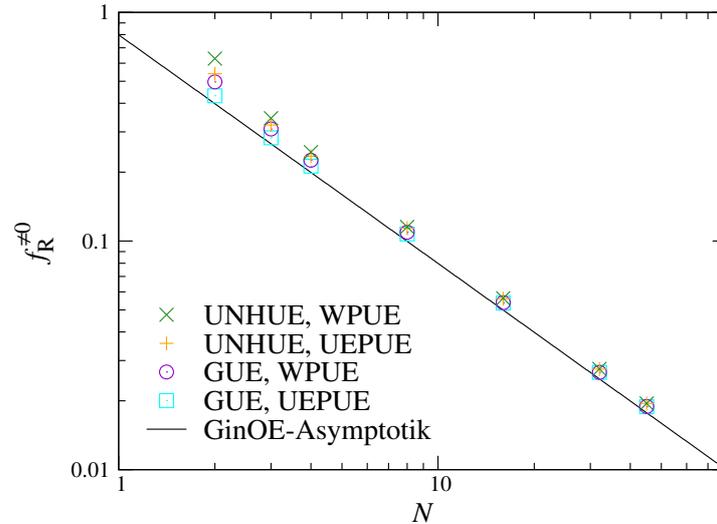


Abb. 5.15: Mittlerer Anteil der reellen Eigenwerte an $\sigma(\mathcal{L}) \setminus \{0\}$ für verschiedene Ensembles des Lindblad-Superoperators in Abhängigkeit von N , bestimmt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^7$; die glatte Linie zeigt zum Vergleich das entsprechende asymptotische Verhalten des GinOE, d.h. $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} = \sqrt{2/\pi} N^{-1/2}$.

reeller Richtung und Verteilungsbreiten, die für alle N und alle vier Ensemble mit $\langle \lambda \rangle_c$ in reeller und $\sqrt{\langle \lambda \rangle_c^2 + N^2}$ in imaginärer Richtung skalieren. Außerdem ist die zum Fall $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ analoge Abstufung von der reellen Achse zu beobachten. Interessant ist das asymptotische Verhalten, dass sich bei $N = 32$ andeutet: Für H aus dem GUE beobachtet man die Ausprägung eines scharfen Randes der Dichtefunktion in imaginärer Richtung, für H aus dem UNHUE dagegen nicht; für c aus dem WPUE sind scharfe Ränder in reeller Richtung zu erkennen, für c aus dem UEPUE wiederum nicht. Letztere Beobachtung hatten wir bereits im Extremfall $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ gemacht und sie auf die verschiedenen Eigenwertkorrelationen der c -Ensembles zurückgeführt. Wir können nun vermuten, dass auch die bei \mathcal{L} beobachtete Abhängigkeit vom H -Ensemble diesen Ursprung hat, denn die Eigenwerte der Matrizen des GUE sind korreliert und die der Matrizen des UNHUE nicht, während die Eigenwertverteilungen beider Ensembles für $N \rightarrow \infty$ in Mittelwert und Varianz übereinstimmen. Für H aus dem GUE und c aus dem WPUE scheint die asymptotische Dichtefunktion einen kompakten Träger zu besitzen. Um die Form des Randes des Trägers zu bestimmen, haben wir in Abbildung 5.14(f) eine Ellipse mit Mittelpunkt $\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{L}}$ und passenden Halbachsen über das Histogramm zu $N = 32$ gelegt. (Da die Verteilungsbreite in reeller Richtung nur von c , in imaginärer Richtung aber von H und c abhängt, lassen sich beliebige Breitenverhältnisse realisieren, d.h. eine Kreisform ist i.A. nicht zu erwarten.) Das Ergebnis spricht dafür, dass der hypothetische asymptotische kompakte Träger die Form einer Ellipse hat – im Unterschied zur Kreisform des GinOE (siehe Abschnitt 3.2.1), dem gespiegelten Zucker-

Tab. 5.2: Exponent α des asymptotischen Potenzgesetzes $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} \sim N^{-\alpha}$ für unsere Ensembles für \mathcal{L} , ermittelt durch eine lineare Interpolation der Punkte $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}(32)$ und $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}(45)$ für $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}(N)$ in doppelt-logarithmischer Darstellung aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 2 \times 10^7$. Die angegebenen Fehler (eine Standardabweichung) resultieren aus den statistischen Fehlern der beiden Punkte.

H	UNHUE		GUE	
c	WPUE	UEPUE	WPUE	UEPUE
Exponent α	1,017(5)	1,016(6)	1,010(5)	1,012(5)

hut für \mathcal{R} mit c aus dem WPUE (siehe Abschnitt 5.3) und der gespiegelten Glocke des EGRE [10]. Wir beobachten weiterhin, dass die asymptotische Eigenwertverteilung größtenteils vom c -Ensemble bestimmt wird; das H -Ensemble scheint lediglich die Form des Randes parallel zur reellen Achse zu beeinflussen. Anders gesagt, bestimmt das c -Ensemble einen zweidimensionalen Teil der Verteilung (\mathbb{C} als \mathbb{R}^2 betrachtet), das H -Ensemble einen eindimensionalen Teil. Das ist plausibel, da c rund N^4 , H dagegen nur N^2 Komponenten zu \mathcal{L} beisteuert und die Komponenten beider Matrizen in den hier untersuchten \mathcal{L} -Ensembles mit N skalieren.

Kommen wir nun zu den reellen, von Null verschiedenen Eigenwerten von \mathcal{L} . Abbildung 5.15 zeigt $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}$, d.h. deren mittleren Anteil an $\sigma(\mathcal{L}) \setminus \{0\}$, in Abhängigkeit von N . Im Unterschied zum Extremfall $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ ist $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} < 1$ bereits bei $N = 2$. Für große N beobachten wir ein Potenzgesetz mit negativem Exponenten, $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} \sim N^{-\alpha}$. Durch eine lineare Interpolation der Punkte bei $N = 32$ und $N = 45$ für $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0}(N)$ in doppelt-logarithmischer Darstellung können wir den Exponenten α schätzen; die Ergebnisse zeigt Tabelle 5.2. Analog zum Fall $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ ist aufgrund des Funktionsverlaufs davon auszugehen, dass die ermittelten Werte lediglich obere Schranken für das tatsächliche α darstellen. Dies und die statistischen Fehler der Ergebnisse beachtend vermuten wir $\alpha = 1$ wie beim GinOE.

Abbildung 5.16 zeigt die Verteilung der reellen, von Null verschiedenen Eigenwerten von \mathcal{L} . Die Dichtefunktionen werden mit steigendem N zunehmend symmetrisch und scheinen in zunehmendem Maße durch das c -Ensemble bestimmt zu werden; beide Eigenschaften zeigte auch die Verteilung der komplexen Eigenwerte von \mathcal{L} . Die Dichten für große N sind jenen des Extremfalls $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ sehr ähnlich; auch die Skalierung der Breite mit $\langle \lambda \rangle_c$ ist gleich.

Zum Abschluss der Untersuchung der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} wollen wir nochmals auf den Mittelwert und die Breiten der Verteilung eingehen, da sie physikalisch die größte Relevanz haben. Die mittlere Relaxationsrate ist nach (5.34) als $N \langle \lambda \rangle_c$ gegeben; die Breite der Verteilung der Relaxationsraten (also die Breite der Verteilung der Realteile der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L}) skaliert den numerischen

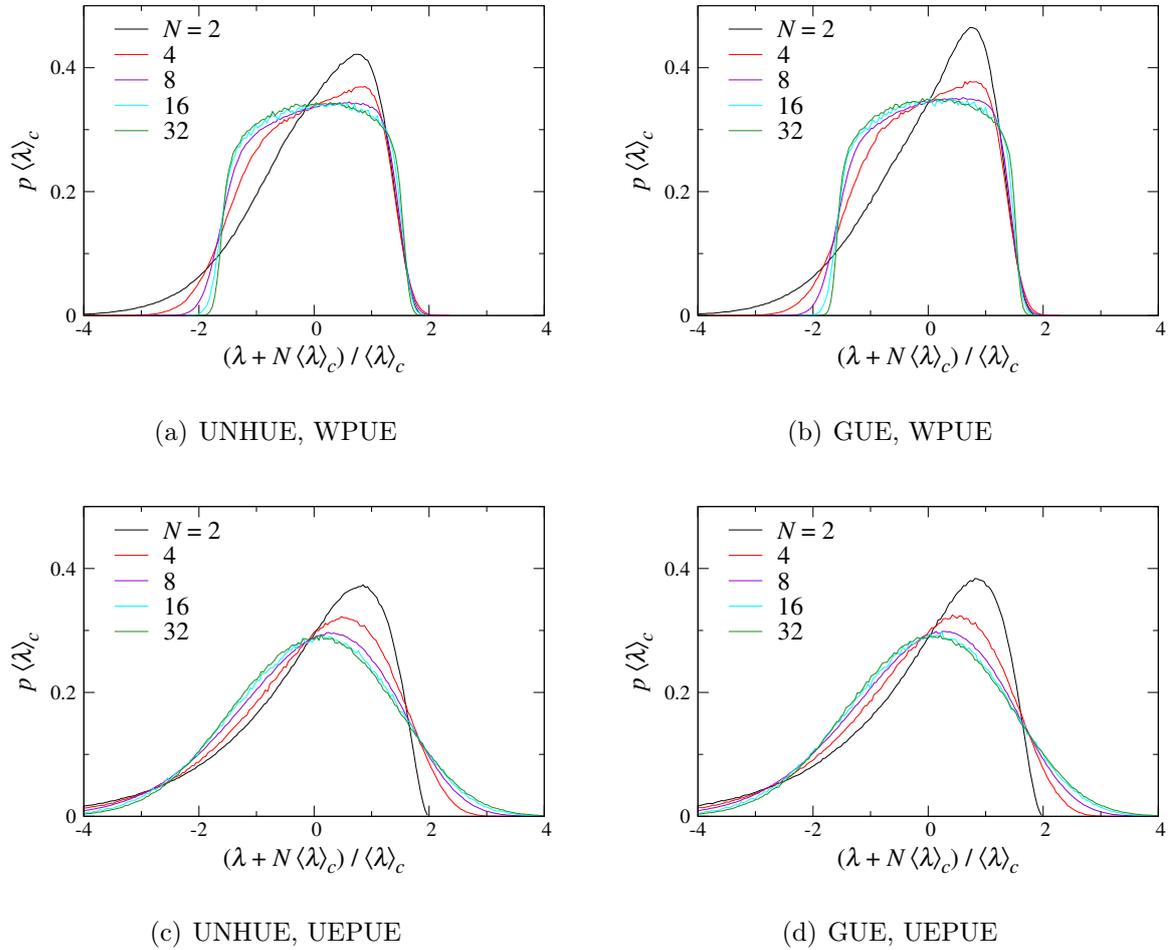


Abb. 5.16: Wahrscheinlichkeitsdichten der Verteilung der reellen, von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} für verschiedene N und verschiedene Ensembles hermitescher und positiver Matrizen H und c mit einer Skalierung, die asymptotisch $\langle \lambda \rangle_c^2 / \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H = 4$ garantiert, numerisch ermittelt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^7$.

Ergebnissen zufolge mit etwa $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_c^{1/2}$. Nun sind die Eigenwerte von c nichtnegativ und für eine Verteilung nichtnegativer Zahlen (wie die Exponentialverteilung) gilt typischerweise $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_c^{1/2} = \langle \lambda \rangle_c$, d.h. das Verhältnis Mittelwert zu Breite der Verteilung der Relaxationsraten skaliert typischerweise mit der Systemgröße (und nicht mit deren Wurzel wie für das EGRE [10]). Für große N entwickeln sich also, analog zum EGRE, praktisch alle möglichen Startzustände mit der gleichen Geschwindigkeit ins Gleichgewicht. Die Verteilung der Frequenzen der auftretenden Oszillationen ist durch die Verteilung der Imaginärteile der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} gegeben. Deren Varianz ist den numerischen Ergebnissen zufolge gleich der Summe der Varianzen der Eigenwertverteilungen von H und von c – modulo Faktoren der Größenordnung Eins. Die Oszillationen resultieren also sowohl

aus kohärenten Prozesse im System (Einfluss von H) als auch aus der Wechselwirkung des Systems mit der Umgebung (Einfluss von c). Der Weg der Berechnung von $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{L}}$ deutet darauf hin, dass ein Zusammenhang der Art

$$\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{L}} \cong -2\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H + \frac{\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_c}{2} \quad (5.42)$$

qualitativ auch für jeden einzelnen Lindblad-Superoperator gilt – als statistischer Zusammenhang zwischen den $N^2 - 1$ von Null verschiedenen Eigenwerten von \mathcal{L} auf der einen und den N bzw. $N^2 - 1$ Eigenwerten von H bzw. c auf der anderen Seite. Für den Zusammenhang $\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{L}} = -N\langle \lambda \rangle_c$ ist dies wegen $\text{Tr } \mathcal{L} = -N \text{Tr } c$ sicher. Es gibt also Anzeichen dafür, dass die zufallsmatrixtheoretischen Ergebnisse für Mittelwert und Breiten der Eigenwertverteilung von \mathcal{L} qualitativ auch für einzelne, konkrete Systeme mit Lindbladscher Dynamik gültig sind.

5.4.2 Eigenwertkorrelationen

Wir fragen nun wieder nach den Korrelationen zwischen den Eigenwerten von \mathcal{L} . Beginnen wollen wir mit jenen zwischen reellen und komplexen Eigenwerten, genauer mit dem Abstößungsverhalten der komplexen Eigenwerte von der reellen Achse. In den Abbildungen 5.13 und 5.14 erkennen wir eine Abstoßung bei verschiedenen Ensembles, verschiedenen N und einem festen Verhältnis $\langle \lambda \rangle_c^2 / \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H$. Abbildung 5.11(a) zeigt für $N = 8$, H aus dem GUE, c aus dem WPUE und verschiedene Verhältnisse $\langle \lambda \rangle_c^2 / \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H$, dass die Abstoßung linear ist. Nach den Erfahrungen mit \mathcal{R} vermuten wir, dass sich dieses Verhalten auch für andere Ensembles und andere N zeigt. (Dort haben sich die Korrelationen als robust unter solchen Änderungen erwiesen.) Der Grund für die von Ensembles reeller Zufallsmatrizen bekannte lineare Abstoßung ist wohl wie bei \mathcal{R} , dass \mathcal{L} fast sicher N^2 verschiedene Eigenwerte besitzt, die symmetrisch zur reellen Achse verteilt sind, d.h., dass das charakteristische Polynom von \mathcal{L} fast sicher nur reelle Koeffizienten besitzt.

Wir können also auch für die Korrelationen der reellen und komplexen Eigenwerte untereinander zum Fall $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ Analoges erwarten und beschränken uns auf die Betrachtung der zuletzt bei verschiedenen N untersuchten \mathcal{L} -Ensembles. Abbildung 5.17 zeigt die Abstandsverteilungen der reellen, von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} . Wir haben die Abstände mit $N / \langle \lambda \rangle_c$ skaliert, da die Breiten der entsprechenden Eigenwertverteilungen mit $\langle \lambda \rangle_c$ skalieren (siehe Abbildung 5.16) und $f_{\mathbb{R}}^{\neq 0} \sim N^{-\alpha}$ mit $\alpha \cong 1$ gilt (siehe Abbildung 5.15); der mittlere skalierte Abstand ist somit nur schwach von N abhängig. Die Unterschiede der Verteilungen für die verschiedenen Ensembles verringern sich mit wachsendem

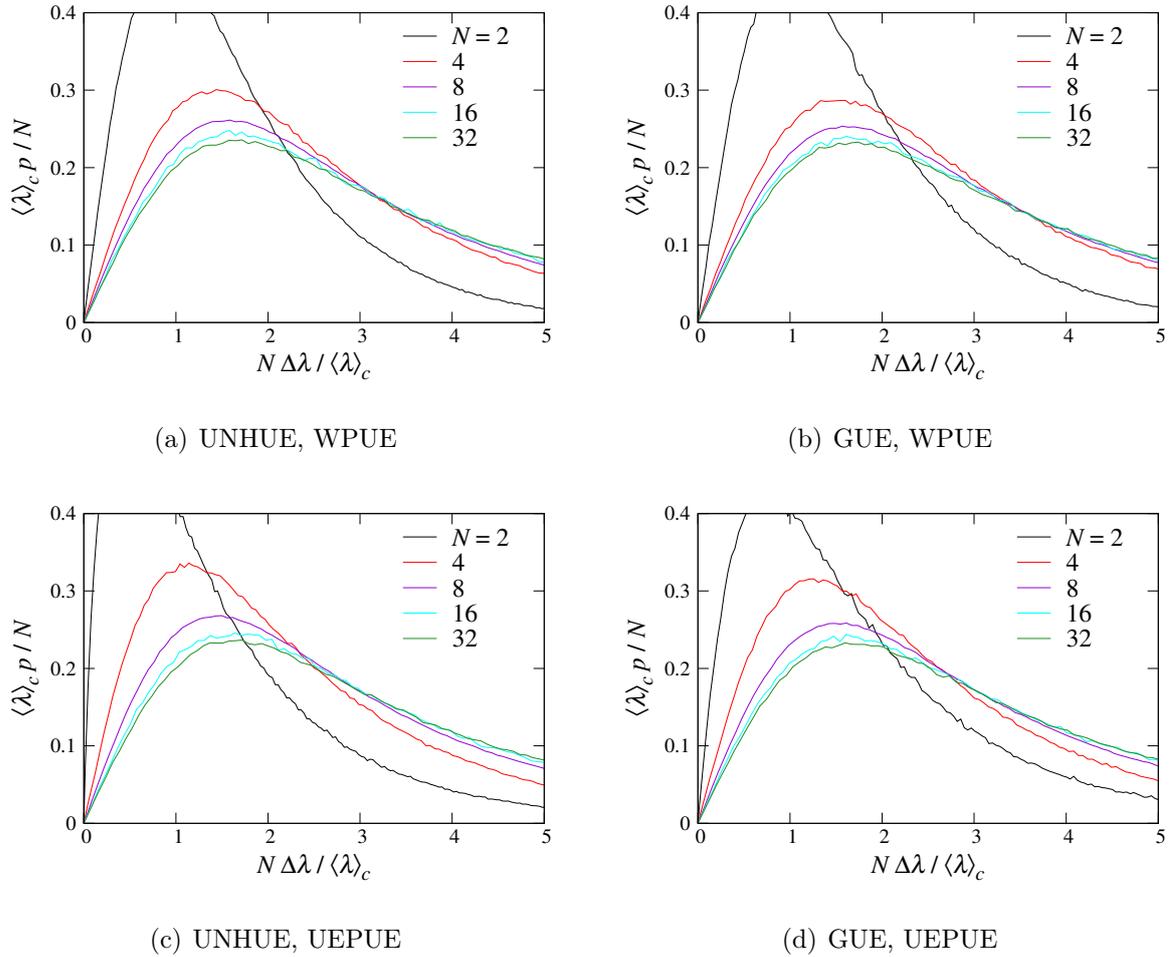


Abb. 5.17: Wahrscheinlichkeitsdichten der Verteilung der Abstände benachbarter reeller, von Null verschiedener Eigenwerte von \mathcal{L} für verschiedene N und verschiedene Ensembles hermitescher und positiver Matrizen H und c mit einer Skalierung, die asymptotisch $\langle \lambda \rangle_c^2 / \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle_H = 4$ garantiert, numerisch ermittelt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^7$.

N ; das asymptotische Verhalten scheint vom Ensemble unabhängig zu sein. Für kleine $\Delta \lambda$ beobachten wir das erwartete lineares Abstößungsverhalten.

Bei den komplexen Eigenwerten beschränken wir uns wieder auf jene mit positivem Imaginärteil und fragen nach der Verteilung der Differenzen $\Delta \lambda$ benachbarter Eigenwerte. Abbildung 5.18 zeigt exemplarisch die Dichtefunktion der Verteilung in der komplexen Ebene für H aus dem UNHUE, c aus dem UEPUE und (a) $N = 3$, (b) $N = 32$. Wie bei \mathcal{R} geht die Dichte für $\Delta \lambda \rightarrow 0$ gegen Null und wird die Verteilung für große N isotrop. In den Abbildungen 5.18(c)–(f) zeigen wir die Verteilungen von $|\Delta \lambda|$, d.h. den Nächste-Nachbar-Abständen, für die vier \mathcal{L} -Ensembles bei verschiedenen N – mit dem erwarteten kubischen Verhalten für kleine Abstände. Wie bei den reellen Eigenwerten verringern sich

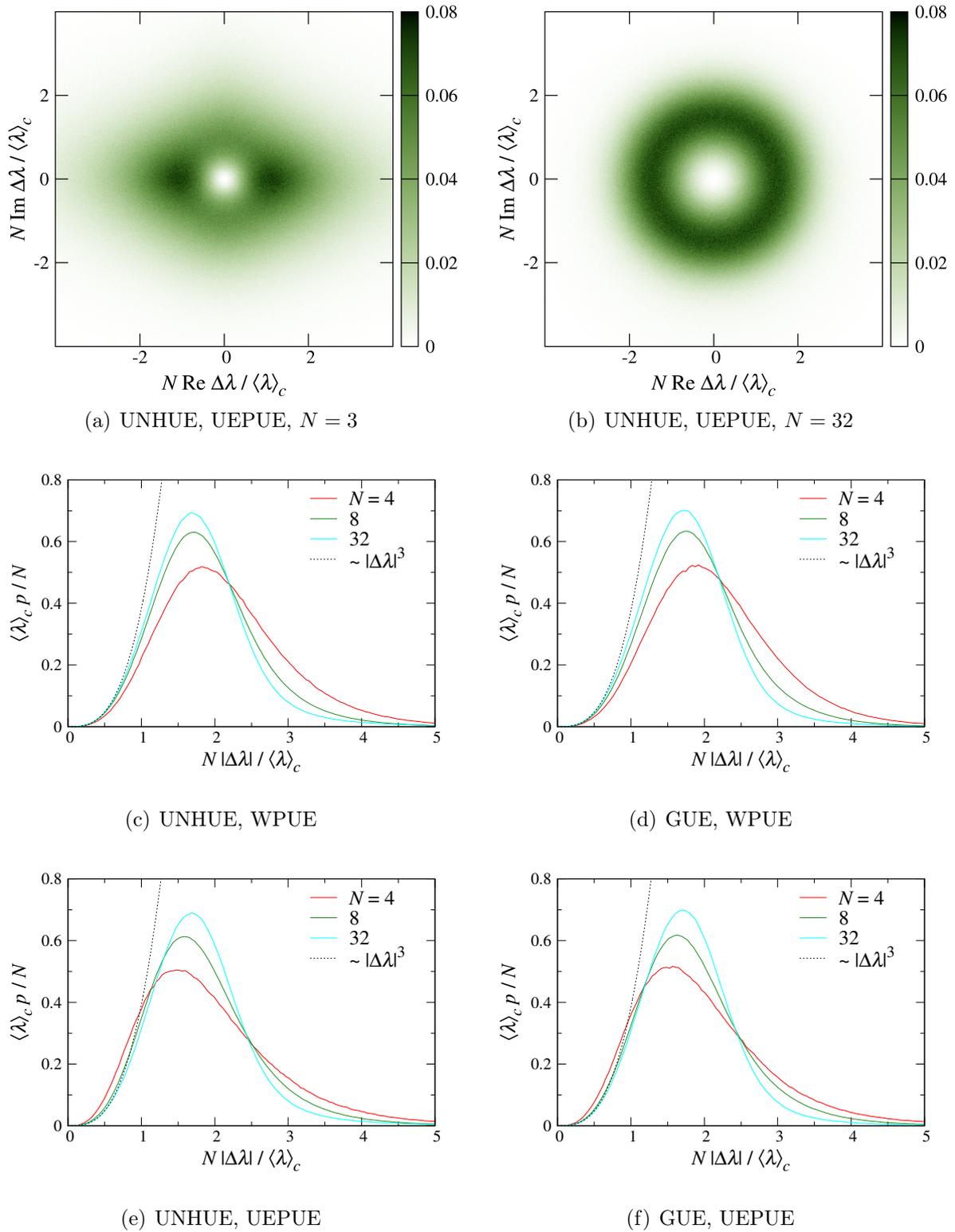


Abb. 5.18: Verteilung komplexer Differenzen $\Delta\lambda$ benachbarter Eigenwerte mit positivem Imaginärteil von \mathcal{L} für verschiedene N und verschiedene Ensembles hermitescher und positiver Matrizen H und c mit einer Skalierung, die asymptotisch $\langle \lambda \rangle_c^2 / \langle \lambda^2 \rangle_H = 4$ garantiert, numerisch ermittelt aus Monte-Carlo-Simulationen von n_r Matrizen mit $n_r N^2 \geq 10^7$: Wahrscheinlichkeitsdichte von (a), (b) $\Delta\lambda$ und (c)–(f) $|\Delta\lambda|$.

die Unterschiede der Verteilungen für die verschiedenen Ensembles mit wachsendem N .

Wir beobachten für \mathcal{L} also insgesamt die gleichen Abstoßungscharakteristiken wie für \mathcal{R} , d.h. jene des GinOE. Die Hintergründe dazu haben wir am Ende von Abschnitt 5.3 diskutiert.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Zufallsmatrixtheorie auf den Lindblad-Superoperator \mathcal{L} , d.h. den linearen Superoperator der Lindblad-Gleichung $\dot{\rho} = \mathcal{L} \rho$ angewandt, die ihrerseits die Markovsche Zeitentwicklung des Zustands ρ eines offenen Quantensystems beschreibt [2,3]. Die Eigenwerte von \mathcal{L} charakterisieren die Zeitentwicklung, denn sie beschreiben die exponentielle Dämpfung und die Oszillationen verschiedener Anteile eines gegebenen Anfangszustands. Wir haben statistische Eigenschaften der Eigenwerte für mehrere Zufallsmatrixensembles für \mathcal{L} untersucht. Eine ähnliche Studie zu Ratengleichungen [10] diente dabei als Vorbild und Referenz.

Wählt man einen festen Satz der sogenannten Lindblad-Operatoren, so lassen sich alle freien Koeffizienten von \mathcal{L} in Form zweier Matrizen $H \in M_h(N)$ und $c \in M_+(N^2 - 1)$ fassen, wobei N die Dimension des System-Hilbertraums ist. H ist der Hamilton-Operator des offenen Systems und $c \neq 0$ ermöglicht Relaxationsprozesse; die nichtnegativen Eigenwerte von c entsprechen Übergangsraten zwischen reinen Zuständen des Systems. Die natürliche explizite Darstellung des Lindblad-Superoperators ist die als Tensor vierter Stufe, (\mathcal{L}_{mnpq}) , wobei alle Indizes von 1 bis N laufen. Für \mathcal{L} als Funktion von H und c erhält man sehr unhandliche Ausdrücke für \mathcal{L}_{mnpq} , die sich entsprechend schlecht für weitere analytische Arbeit eignen. Wir haben eine Transformation von c auf eine Matrix $a \in M_+(N^2)$ gefunden (Formel (4.35)), die eine wesentlich kompaktere Darstellung von \mathcal{L}_{mnpq} als Funktion der Matrixelemente von H und a ermöglicht; zudem haben wir a eine nützliche Summationseigenschaft nachgewiesen (Lemma 4.7).

Zufallsmatrixensembles für \mathcal{L} lassen sich durch Ensembles hermitescher Matrizen H und positiver Matrizen c definieren. Die von uns betrachteten Ensembles decken ganz $M_h(N)$ und $M_+(N^2 - 1)$ ab; somit ist sichergestellt, dass die Ensembles für \mathcal{L} alle theoretisch erlaubten Lindblad-Superoperatoren enthalten. Wir haben uns für c auf Ensembles beschränkt, deren Maß invariant unter unitären Transformationen $c \rightarrow U^\dagger c U$ ist. Damit ist sichergestellt, dass die resultierenden Zufallsmatrixensembles für \mathcal{L} unabhängig vom gewählten Satz von Lindblad-Operatoren sind. Sowohl für H als auch für c wurden Ensembles mit unkorrelierten und mit korrelierten Eigenwerten sowie mit verschiedenen Eigenwertverteilungen angesetzt. Für die numerische Eigenwertberechnung ist eine Abbildung von (\mathcal{L}_{mnpq})

auf $(\mathcal{L}_{\alpha\beta}) \in M(N^2)$ erforderlich; eine entsprechende Indextransformation haben wir in Abschnitt 4.1 eingeführt; für $(\mathcal{L}_{\alpha\beta})$ ist dann auch der Begriff des Zufallsmatrixensembles gerechtfertigt.

Das Spektrum von \mathcal{L} ist stets symmetrisch bezüglich der reellen Achse, enthält den zu (möglicherweise mehreren) stationären Zuständen gehörenden Eigenwert Null und liegt in der abgeschlossenen linken Halbebene, d.h. alle Abweichungen von einem stationären Zustand oszillieren oder werden exponentiell gedämpft. Für unsere Zufallsmatrixensembles von \mathcal{L} haben wir gezeigt, dass die von Null verschiedenen Eigenwerte um den Mittelwert $-N\langle\lambda\rangle_c$ verteilt sind, wobei $\langle\lambda\rangle_c$ den Ensemble-Mittelwert der Eigenwerte von c bezeichnet. Numerische Untersuchungen haben ergeben, dass die Varianz dieser Verteilung in imaginärer Richtung mit einer Summe der Varianzen der Eigenwertverteilungen von H und c und ihre Breite in reeller Richtung mit der Breite der Eigenwertverteilung von c skaliert. Da letztere Breite typischerweise in der Größenordnung von $\langle\lambda\rangle_c$ liegt, heißt das, dass für große N praktisch alle Abweichungen von einem stationären Zustand auf der gleichen Zeitskala $1/N\langle\lambda\rangle_c$ zerfallen. Die mit N^0 skalierenden Eigenwertverteilungsbreiten unserer Ensembles unterscheiden sich von den zu $N^{1/2}$ proportionalen Breiten des EGRE [10]; eine dieses Verhalten untermauernde, größtenteils analytische Berechnung des Erwartungswertes $\langle\tilde{\lambda}^2\rangle_c = \langle(\lambda - \langle\lambda\rangle_c)^2\rangle_c$ des Quadrats der von Null verschiedenen, zu ihrem Mittelwert verschobenen Eigenwerte von \mathcal{L} liegt vor.

Da der Lindblad-Superoperator die Form $\mathcal{L} = -i[H, \cdot] + \mathcal{R}$ mit dem durch die Matrix c gegebenen Relaxationsteil \mathcal{R} hat, sind wir der Frage nachgegangen, wie sich die relative Skalierung der Matrizen H und c auf die Spektralstatistik von \mathcal{L} auswirkt. Gefunden haben wir eine gleichmäßig stetige Entwicklung der Dichtefunktion der Eigenwertverteilung von \mathcal{L} mit der relativen Skalierung zwischen den Extremfällen $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ und $\mathcal{L} = -i[H, \cdot]$. Der Übergang zu den Extremfällen selbst ist unterschiedlich: Während die Dichtefunktion der Eigenwertverteilung von \mathcal{L} für $c \gg H$ gleichmäßig gegen jene von \mathcal{R} konvergiert, zeigt sich für $c \ll H$ nur eine schwache Konvergenz des Maßes der Eigenwertverteilung von \mathcal{L} gegen jenes von $-i[H, \cdot]$.

Für eine fixe relative Skalierung von H und c , die so gewählt wurde, dass beide Matrizen etwa gleich viel zur Eigenwertverteilungsbreite von \mathcal{L} in imaginärer Richtung beitragen, haben wir die Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung als Funktion von N numerisch untersucht. Hierbei ergaben sich interessante Abhängigkeiten des Verhaltens für $N \rightarrow \infty$ von den Korrelationen der Eigenwerte von H bzw. c : Wählt man H aus dem GUE und c aus dem WPUE (in beiden Ensembles stoßen sich benachbarte Eigenwerte quadratisch ab), so scheint die Dichtefunktionen asymptotisch einen kompakten Träger zu entwickeln. Der Rand des vermuteten Trägers hat die Form einer Ellipse, ist also eng verwandt mit

dem entsprechenden Kreis des GinOE [43, 44] und unterscheidet sich von der Glocke des EGRE [10]. Sind die Eigenwerte nur einer Matrix korreliert, entwickelt die Dichtefunktionen teilweise scharfe Ränder: Für H aus dem GUE und c mit unkorrelierten Eigenwerten nur parallel zur reellen Achse, für H mit unkorrelierten Eigenwerten und c aus dem WPUE nur parallel zur imaginären Achse. Sind die Eigenwerte beider Matrizen statistisch unabhängig, so entwickeln sich keinerlei scharfe Ränder. Verschiedene Eigenwertverteilungen für H bzw. c scheinen dagegen keinen Einfluss auf die asymptotische Eigenwertverteilung von \mathcal{L} zu haben, solange sie in Mittelwert und Varianz übereinstimmen. Eine entsprechende Eigenschaft des EGRE ist bekannt [10]; die gefundenen Korrelationseffekte sind dagegen neu, denn in den in [10] untersuchten Zufallsmatrixensembles wurden die den Eigenwerten von c entsprechenden Übergangsraten grundsätzlich als unkorreliert angesetzt. Der mittlere Anteil der reellen, von Null verschiedenen Eigenwerte am Spektrum von \mathcal{L} ist für große N proportional zu $N^{-\alpha}$. Wir können nicht sicher sagen, ob α natürlich ist (für das EGRE ist α anomal [10]). Die numerischen Ergebnisse deuten allerdings in Richtung $\alpha = 1$ wie für das GinOE [42].

Die Korrelationen der Eigenwerte unserer Ensembles für \mathcal{L} folgen den vom GinOE bekannten Gesetzen [41]: Benachbarte reelle Eigenwerte stoßen einander linear ab, die Dichtefunktion der Verteilung der Abstände benachbarter komplexer Eigenwerte ist kubisch für kleine Argumente und die komplexen Eigenwerte werden von der reellen Achse linear abgestoßen. Das GinOE-Verhalten erstaunt, da \mathcal{L}_{mnpq} i.A. komplex ist. Wir vermuten den Grund darin, dass das charakteristische Polynom von $(\mathcal{L}_{\alpha\beta})$ aus unseren Ensembles fast sicher nur reelle Koeffizienten besitzt. Diese Eigenschaft leiten wir aus der Symmetrie des Spektrums von \mathcal{L} zur reellen Achse und daraus ab, dass \mathcal{L} aus unseren Ensembles fast sicher N^2 verschiedene Eigenwerte besitzt.

Alles in Allem sind die Ergebnisse dieser Arbeit aus zwei Blickrichtungen zu betrachten. Aus Sicht der Zufallsmatrixtheorie liefern sie Einblicke in die Eigenschaften von bis dato unbekanntem Ensembles komplexer Matrizen. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie in vielerlei Hinsicht Ensembles reeller Matrizen ähneln und dass sie sich aus Ensembles zweier kleinerer Matrizen ergeben. Die Beziehungen zwischen den Spektralstatistiken dieser Eingangsensembles auf der einen und dem Ausgangsensemble auf der anderen Seite haben sich als reichhaltig erwiesen. Ungeklärt geblieben ist neben dem Wert des erwähnten Exponenten α , ob das charakteristische Polynom von $(\mathcal{L}_{\alpha\beta})$ *generell* nur reelle Koeffizienten besitzt; wir wissen nicht, ob die asymptotische Dichtefunktion der Eigenwertverteilung von \mathcal{L} im beschriebenen Fall tatsächlich einen kompakten Träger besitzt und ob die ermittelte elliptische Form des vermuteten Trägers vom Verhältnis der Skalierungen von H und c abhängt. Zur Beantwortung dieser Fragen wäre weitere analytische Arbeit nötig. Weiter-

hin wäre es interessant, zu untersuchen, wie sich eine Korrelation der Ensembles für H und c auswirkt. Physikalisch motivierend dafür können Systeme im Wärmebad sein, denn in diesen hängt die Übergangsrates zwischen zwei Zuständen von der Energiedifferenz der Zustände ab. Unsere Berechnungen von $\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{L}}$ und $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{L}}$ deuten allerdings auf keine großen Auswirkungen auf die Ensembles von \mathcal{L} hin, denn beide Größen bleiben bei einer Korrelation von H und c unverändert. Schließlich ließe sich untersuchen, wie sich $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{L}}$ und damit die Breiten der Verteilung der von Null verschiedenen Eigenwerte von \mathcal{L} ändern, wenn man für c Zufallsmatrixensembles ansetzt, deren Maß nicht invariant unter unitären Ähnlichkeitstransformationen ist, bzw. noch schärfer, was sich für $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{L}}$ für *jedes einzelne* \mathcal{L} ergibt.

Damit sind wir bei der Frage, welche physikalischen Erkenntnisse man aus den zufallsmatrixtheoretischen Ergebnissen für Ensembles von Lindblad-Superoperatoren ziehen kann; dies ist die zweite Blickrichtung auf die Resultate. Lassen sich die gefundenen Beziehungen zwischen den Eigenwertverteilungen von H und c einerseits und \mathcal{L} andererseits auf den Fall eines konkreten Lindblad-Superoperators übertragen – als statistischer Zusammenhang zwischen den N^2 Eigenwerten von \mathcal{L} und den N , $N^2 - 1$ Eigenwerten von H , c ? Für die Relation $\langle \lambda \rangle'_{\mathcal{L}} = -N \langle \lambda \rangle_c$ können wir die Frage bejahen; ansonsten ist die Antwort unklar, auch wenn wir Hinweise darauf gefunden haben, dass die Abwesenheit einer expliziten N -Abhängigkeit von $\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle'_{\mathcal{L}}$ universell ist. Die daraus folgenden, mit steigendem N immer ähnlicheren Relaxationsraten aller Abweichungen vom stationären Zustand sollten in Experimenten zu beobachten sein. N ließe sich z.B. über die Zahl der Teilchen in einem Vielteilchensystem oder die Tiefe eines Potentialtopfes kontrollieren. In diesem Sinne wäre ein experimenteller und theoretischer Vergleich unserer zufallsmatrixtheoretischen Ergebnisse mit den Eigenschaften realer Systeme wünschenswert.

A Anhang

A.1 Explizite ONB der spurlosen Matrizen

Wir suchen eine ONB des Raums der spurlosen Matrizen aus $M(N)$ bzgl. des Hilbert-Schmidt-Skalarprodukts. Eine Basis des Raums erhält man für eine ONB $(|n\rangle)_{n=1,\dots,N}$ von \mathcal{H} über

$$\begin{aligned} m \neq n: \quad \tilde{L}_{mn} &= |m\rangle \langle n|, \\ m = n \neq N: \quad \tilde{L}_{nn} &= |n\rangle \langle n| - |n+1\rangle \langle n+1| \quad (\text{spurfreie Diagonalmatrizen}). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Leider ist das noch keine ONB (Problem liegt bei $m = n$). Um eine solche zu erhalten, müssen wir auf die \tilde{L}_{nn} noch ein Orthonormierungsverfahren anwenden. Zur Vereinfachung der Notation rechnen wir im \mathbb{C}^N und definieren die Vektoren

$$v_n := e_n - e_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1, \tag{A.2}$$

wobei die e_i die Standardbasisvektoren in \mathbb{C}^N seien. Zur Orthonormierung nehmen wir das Gram-Schmidt-Verfahren und erhalten die orthonormierten Vektoren $(u_n)_{n=1,\dots,N-1}$ als

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) && \text{aus } w_1 = v_1, \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3) && \text{aus } w_2 = v_2 - \langle v_2|u_1\rangle u_1 \\ &&& = e_2 - e_3 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2), \\ u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{12}}(e_1 + e_2 + e_3 - 3e_4) && \text{aus } w_3 = v_3 - \underbrace{\langle v_3|u_1\rangle}_{=0} u_1 - \langle v_3|u_2\rangle u_2 \\ &&& = e_3 - e_4 + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 - 2e_3), \\ &\vdots && \\ u_n &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}(e_1 + \dots + e_n - ne_{n+1}). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Als eine mögliche Orthonormalbasis des Raums der spurlosen Matrizen aus $M(N)$ ergibt sich also $(L_{nm})_{n,m=1,\dots,N, \neg(n=m=N)}$ mit

$$L_{mn} = \begin{cases} |m\rangle \langle n| & \text{für } m \neq n, \\ \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}(|1\rangle \langle 1| + \dots + |n\rangle \langle n| - n|n+1\rangle \langle n+1|) & \text{für } m = n. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Transformation von Lindblad-Operatoren

Als Grundlage benötigen wir die orthogonale Transformation der Basis $(u_n)_{n=1,\dots,N}$ mit $u_{n < N}$ nach (A.3), $u_N := (e_1 + \dots + e_N)/\sqrt{N}$ auf die Standard-ONB $(e_n)_{n=1,\dots,N}$. Einfach anzugeben ist die Inverse und wir sehen

$$u_m = \sum_{n=1}^N O_{mn} e_n \quad \Leftrightarrow \quad e_m = \sum_{n=1}^N u_n O_{nm} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{mit } O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N(N-1)}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{N(N-1)}} & -\frac{N-1}{\sqrt{N(N-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{1}{\sqrt{N}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Dieses Ergebnis lässt sich für die Transformation der L_{mn} nach (A.4) inklusive $L_{NN} = \frac{1}{\sqrt{N}}I$ auf die $D_{mn} = |m\rangle \langle n|$ nutzen. Es sei

$$D_{mn} = \sum_{p,q=1}^N L_{pq} U_{pqmn} \quad \Leftrightarrow \quad L_{mn} = \sum_{p,q=1}^N D_{pq} U_{pqmn}^\dagger = \sum_{p,q=1}^N U_{mnpq}^* D_{pq}. \quad (\text{A.7})$$

Für $m \neq n$ gilt $D_{mn} = L_{mn}$. Für $m = n$ muss es eine Mischung der Diagonalelemente durch O geben:

$$U_{mnpq} = (1 - \delta_{mn})\delta_{mp}\delta_{nq} + \delta_{mn}\delta_{pq}O_{mp}. \quad (\text{A.8})$$

A.3 Explizite Form der Lindblad-Gleichung für $\mathcal{R}(c)$

Nach Theorem 2.4 gilt für den Relaxationsteil \mathcal{R} des LSO

$$\mathcal{R}\rho = \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ \neg(i=j=N \vee k=l=N)}}^N \frac{c_{ijkl}}{2} (2L_{ij}\rho L_{lk} - \rho L_{lk}L_{ij} - L_{lk}L_{ij}\rho) \quad (\text{A.9})$$

mit den Lindblad-Operatoren L_{mn} gemäß (A.4). Mit $\rho = \sum_{p,q} |p\rangle \rho_{pq} \langle q|$ ergibt sich

$$(\mathcal{R}\rho)_{mn} = \sum_{p,q=1}^N \left[\underbrace{\sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ \dots \\ \dots}}^N \frac{c_{ijkl}}{2} \langle m | (2L_{ij} |p\rangle \langle q| L_{lk} - |p\rangle \langle q| L_{lk} L_{ij} - L_{lk} L_{ij} |p\rangle \langle q|) | n \rangle}_{=\mathcal{R}_{mnpq}} \right] \rho_{pq}. \quad (\text{A.10})$$

Wir teilen auf

$$\mathcal{R}_{mnpq} = \underbrace{\sum_{i \neq j, k \neq l} \dots}_{=: \mathcal{A}_{mnpq}} + \underbrace{\sum_{i \neq j, k=l \neq N} \dots}_{=: \mathcal{B}_{mnpq}} + \underbrace{\sum_{i=j \neq N, k \neq l} \dots}_{=: \mathcal{C}_{mnpq}} + \underbrace{\sum_{i=j \neq N, k=l \neq N} \dots}_{=: \mathcal{D}_{mnpq}} \quad (\text{A.11})$$

und können nun die einzelnen Anteile wie in Abschnitt 4.3 berechnen, indem wir die auftretenden Skalarprodukte durch Kronecker-Symbole ersetzen und die Summen soweit wie möglich auswerten. Da das trivial ist, erlauben wir uns, lediglich das Ergebnis anzugeben:

$$\mathcal{A}_{mnpq} = (1 - \delta_{mp})(1 - \delta_{nq}) c_{mpnq} - \delta_{mp} \frac{1}{2} \sum_{i \neq n, \neq q} c_{iniqu} - \delta_{nq} \frac{1}{2} \sum_{i \neq m, \neq p} c_{ipim}, \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{mnpq} &= \delta_{nq}(1 - \delta_{mp}) \left(-\sqrt{\frac{n-1}{n}} c_{mp(n-1)(n-1)} + \sum_{n \leq k < N} \frac{c_{mpkk}}{\sqrt{k(k+1)}} \right) \\ &\quad - \delta_{mp}(1 - \delta_{nq}) \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{q-1}{q}} c_{qn(q-1)(q-1)} + \sum_{q \leq k < N} \frac{c_{qnkk}}{\sqrt{k(k+1)}} \right) \\ &\quad - \delta_{nq}(1 - \delta_{mp}) \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{m-1}{m}} c_{mp(m-1)(m-1)} + \sum_{m \leq k < N} \frac{c_{mpkk}}{\sqrt{k(k+1)}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{mnpq} &= \delta_{mp}(1 - \delta_{nq}) \left(-\sqrt{\frac{m-1}{m}} c_{(m-1)(m-1)nq} + \sum_{m \leq i < N} \frac{c_{iinq}}{\sqrt{i(i+1)}} \right) \\ &\quad - \delta_{mp}(1 - \delta_{nq}) \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{n-1}{n}} c_{(n-1)(n-1)nq} + \sum_{n \leq i < N} \frac{c_{iinq}}{\sqrt{i(i+1)}} \right) \\ &\quad - \delta_{nq}(1 - \delta_{mp}) \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{p-1}{p}} c_{(p-1)(p-1)pm} + \sum_{p \leq i < N} \frac{c_{iipm}}{\sqrt{i(i+1)}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mnpq} &= \delta_{mp} \delta_{nq} \left\{ \sqrt{\frac{(m-1)(n-1)}{mn}} c_{(m-1)(m-1)(n-1)(n-1)} + \sum_{\substack{m \leq i < N \\ n \leq k < N}} \frac{c_{iikk}}{\sqrt{i(i+1)k(k+1)}} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \sum_{m \leq i < N} \frac{c_{ii(n-1)(n-1)}}{\sqrt{i(i+1)}} - \sqrt{\frac{m-1}{m}} \sum_{n \leq k < N} \frac{c_{(m-1)(m-1)kk}}{\sqrt{k(k+1)}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left(\frac{m-1}{m} c_{(m-1)(m-1)(m-1)(m-1)} + \sum_{m \leq i, k < N} \frac{c_{iikk}}{\sqrt{i(i+1)k(k+1)}} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{m-1}{m}} \sum_{m \leq k < N} \frac{c_{(m-1)(m-1)kk}}{\sqrt{k(k+1)}} - \sqrt{\frac{m-1}{m}} \sum_{m \leq i < N} \frac{c_{ii(m-1)(m-1)}}{\sqrt{i(i+1)}} \right) \\
& - \frac{1}{2} \left(\dots \right)_{m \rightarrow n} \Bigg\}, \tag{A.15}
\end{aligned}$$

wobei für die Gültigkeit der Formeln die Indexzählung bei 1 beginnen muss. Außerdem entfallen alle Terme, denen ein $\sqrt{\text{Index} - 1}$ voran geht, falls der Index minimal ist.

A.4 Lindblad-Gleichung im Wechselwirkungsbild

Die Lindblad-Gleichung mit dem Generator \mathcal{L} aus Theorem 2.4 beschreibt die reduzierte Dynamik $\rho(t)$ im Schrödingerbild. Sie hängt mit derjenigen im Wechselwirkungsbild $\rho^w(t)$ über

$$\rho^w(t) = e^{iHt} \rho(t) e^{-iHt} \tag{A.16}$$

zusammen, wobei H der Hamilton-Operator des unitären Teils von \mathcal{L} ist. Es gilt also

$$\dot{\rho}^w(t) = i[H, \rho^w(t)] + e^{iHt} \dot{\rho}(t) e^{-iHt}. \tag{A.17}$$

Setzen wir für $\dot{\rho}(t)$ die Lindblad-Gleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}^w(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^2-1} c_{\alpha\beta} e^{iHt} ([L_\alpha, \rho(t) L_\beta^\dagger] + [L_\alpha \rho(t), L_\beta^\dagger]) e^{-iHt} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^2-1} c_{\alpha\beta} ([L_\alpha^w(t), \rho^w(t) (L_\beta^\dagger)^w(t)] + [L_\alpha^w(t) \rho^w(t), (L_\beta^\dagger)^w(t)]), \tag{A.18}
\end{aligned}$$

wobei für die Transformation aller Operatoren ins Wechselwirkungsbild Gleichung (A.16) definierend ist. Der unitäre Teil der Lindblad-Gleichung ist also verschwunden; dafür sind nun die Lindblad-Operatoren zeitabhängig. Um letztere Zeitabhängigkeit etwas expliziter zu sehen, können wir wie in Abschnitt 4.2 beschrieben die Matrix c erweitern und auf dyadische Lindblad-Operatoren $D_{mn} = |m\rangle \langle n|$ mit Eigenzuständen $|n\rangle$ von H wechseln (c wird dabei nach (4.12) zu a). Dann folgt wegen

$$D_{mn}^w(t) = e^{iHt} |m\rangle \langle n| e^{-iHt} = e^{iE_m t} |m\rangle \langle n| e^{-iE_n t} = e^{i(E_m - E_n)t} D_{mn} \tag{A.19}$$

mit der Energie E_n im Zustand $|n\rangle$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\dot{\rho}^w(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m,n,p,q=1}^N a_{mnpq} ([D_{mn}^w(t), \rho^w(t) (D_{pq}^\dagger)^w(t)] + [D_{mn}^w(t) \rho^w(t), (D_{pq}^\dagger)^w(t)]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n,p,q=1}^N \underbrace{a_{mnpq} e^{i(E_m - E_n - E_p + E_q)t}}_{=: a_{mnpq}^w(t)} ([D_{mn}, \rho^w(t) D_{pq}] + [D_{mn} \rho^w(t), D_{pq}]).\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

Wir erhalten also für die Zeitentwicklung des reduzierten Zustands im Wechselwirkungsbild eine der Schrödingerdynamik formal ähnliche Gleichung ohne unitären Teil, dafür aber mit einer zeitabhängigen Koeffizientenmatrix $a^w(t)$. Letztere ist für alle Zeiten positiv, wie man leicht zeigt. Insgesamt sehen wir, dass sich der Einfluss von H auf die Dynamik durch eine Transformation ins Wechselwirkungsbild nicht eliminieren lässt.

A.5 Eigenschaften der Matrix S

Nach (5.24) gilt für die Matrixelemente von $S \in M(N^2 - 1)$

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{m,n,p,q=1}^N W_{\alpha,mp}^* W_{\alpha,nq} W_{\beta,pm}^* W_{\beta,qn}. \quad (\text{A.21})$$

Dabei ist nach (4.38) und (A.8)

$$\begin{aligned}W_{\alpha,pq} &= \sum_{m,n=1}^N \tilde{V}_{\alpha,mn} U_{mnpq} = \sum_{m,n=1}^N \tilde{V}_{\alpha,mn} [(1 - \delta_{mn})\delta_{mp}\delta_{nq} + \delta_{mn}\delta_{pq} O_{mp}] \\ &= \underbrace{\sum_{m \neq n} \tilde{V}_{\alpha,mn} \delta_{mp}\delta_{nq}}_{=(1-\delta_{pq})\tilde{V}_{\alpha,pq}} + \delta_{pq} \sum_{m=1}^N \tilde{V}_{\alpha,mm} O_{mp}.\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

Diese Darstellung können wir ausnutzen, indem wir zerlegen

$$\begin{aligned}S_{\alpha\beta} &= \sum_{m,n=1}^N W_{\alpha,mm}^* W_{\alpha,nn} W_{\beta,mm}^* W_{\beta,nn} \\ &\quad + \sum_{m=1}^N \sum_{n \neq q} W_{\alpha,mm}^* W_{\alpha,nq} W_{\beta,mm}^* W_{\beta,qn} + \text{c.c.} \\ &\quad + \sum_{m \neq p, n \neq q} W_{\alpha,mp}^* W_{\alpha,nq} W_{\beta,pm}^* W_{\beta,qn}\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

und einsetzen

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta} &= \sum_{m,n,i,j,k,l=1}^N \tilde{V}_{\alpha,ii}^* O_{im} \tilde{V}_{\alpha,jj} O_{jn} \tilde{V}_{\beta,kk}^* O_{km} \tilde{V}_{\beta,ll} O_{ln} \\
&+ \sum_{m,i,j=1}^N \sum_{n \neq q} \tilde{V}_{\alpha,ii}^* O_{im} \tilde{V}_{\alpha,nq} \tilde{V}_{\beta,jj}^* O_{jm} \tilde{V}_{\beta,qn} + \text{c.c.} \\
&+ \sum_{m \neq p, n \neq q} \tilde{V}_{\alpha,mp}^* \tilde{V}_{\alpha,nq} \tilde{V}_{\beta,pm}^* \tilde{V}_{\beta,qn}. \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Da O orthogonal ist, können in der ersten Zeile über m und n und in der zweiten über m summieren. Nach Ausnutzung der entstehenden Kronecker-Symbole ergibt sich

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta} &= \sum_{i,j=1}^N \tilde{V}_{\alpha,ii}^* \tilde{V}_{\alpha,jj} \tilde{V}_{\beta,ii}^* \tilde{V}_{\beta,jj} \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{n \neq q} \tilde{V}_{\alpha,ii}^* \tilde{V}_{\alpha,nq} \tilde{V}_{\beta,ii}^* \tilde{V}_{\beta,qn} + \text{c.c.} \\
&+ \sum_{m \neq p, n \neq q} \tilde{V}_{\alpha,mp}^* \tilde{V}_{\alpha,nq} \tilde{V}_{\beta,pm}^* \tilde{V}_{\beta,qn} \\
&= \sum_{m,n,p,q=1}^N \tilde{V}_{\alpha,mp}^* \tilde{V}_{\alpha,nq} \tilde{V}_{\beta,pm}^* \tilde{V}_{\beta,qn}. \tag{A.25}
\end{aligned}$$

Das ist der ursprüngliche Ausdruck, nur mit \tilde{V} statt W . Nach der Definition von \tilde{V} in (4.37) können wir auch schreiben

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{\substack{m,n,p,q=1 \\ \neg(m=p=N \vee n=q=N)}}^N V_{\alpha,mp}^* V_{\alpha,nq} V_{\beta,pm}^* V_{\beta,qn} \tag{A.26}$$

und daraus folgt mit der Unitarität von V

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N^2-1} S_{\alpha\beta} &= \sum_{\substack{m,n,p,q=1 \\ \neg(m=p=N \vee n=q=N)}}^N \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} V_{\alpha,mp}^* V_{\alpha,nq} V_{\beta,pm}^* V_{\beta,qn} \\
&= \sum_{\substack{m,n,p,q=1 \\ \neg(m=p=N \vee n=q=N)}}^N \delta_{mn} \delta_{pq} V_{\beta,pm}^* V_{\beta,qn} = \sum_{\substack{m,p=1 \\ \neg(m=p=N)}}^N V_{\beta,pm}^* V_{\beta,pm} \\
&= 1. \tag{A.27}
\end{aligned}$$

Tab. A.1: Numerische Ergebnisse für $\langle S \rangle$ und $\langle T \rangle$ bei $N = 8$ und $n_M = 10^4$. Die Größen σ_{mel}^2 , k und m ergeben sich durch bereichsweise Mittelungen und σ aus den ersten beiden über (A.30).

Matrizelement von X	m	σ	σ_{mel}	k
(S) auf Diagonale	2,001	$2,4 \cdot 10^{-3}$	1,9	$3,5 \cdot 10^{-4}$
(S) neben Diagonale	0,99998	$3,5 \cdot 10^{-5}$	1,0	$-5,0 \cdot 10^{-4}$
(T) auf Diagonale	2,0000	$2,2 \cdot 10^{-4}$	0,17	$2,5 \cdot 10^{-4}$
(T) neben Diagonale	0,999999	$4,2 \cdot 10^{-6}$	0,12	$-5,0 \cdot 10^{-4}$

A.6 Numerische Berechnung der Matrizen $\langle S \rangle$ und $\langle T \rangle$

Zur Bestimmung der Breite der Eigenwertverteilung des Lindblad-Superoperators in Abschnitt 5.3 sind die Matrizen S und T über die Matrizen V aus dem CUE zu mitteln (siehe Formeln (5.24), (5.25) und (4.38)). Die Ergebnisse seien mit $\langle S \rangle$ und $\langle T \rangle$ bezeichnet und lassen sich numerisch bestimmen. Schauen wir uns zunächst einmal die Resultate für $N = 8$ an. Die Abbildungen A.1(a), (b) zeigen einzelne skalierte S, T , d.h. solche aus einer Ziehung von V . Die Elemente von S variieren stark; bei denen von T kann man bereits ein unterschiedliches Verhalten auf bzw. neben der Diagonalen erkennen. Die Abbildungen A.1(c), (d) stellen Mittelungen über viele Ziehungen dar. Für $\langle S \rangle$ zeigt sich die erwartete Konstanz auf und neben der Diagonalen; auch für $\langle T \rangle$ erkennen wir diese Struktur. Als statistisch zu prüfenden Ansatz für $\langle S \rangle$ und $\langle T \rangle$ wählen wir

$$\langle S \rangle = \frac{1}{N^2} X, \quad \langle T \rangle = \frac{N^2 - 1}{N^3} X \quad \text{mit} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + I. \quad (\text{A.28})$$

Man beachte die Übereinstimmung des Ansatzes für $\langle S \rangle$ mit (A.27).

Zur quantitativen Rechtfertigung von (A.28) für $N = 8$ sei auf Tabelle A.1 verwiesen. Die dort angegebenen Mittelwerte und ihre statistischen Fehler ergeben sich wie folgt: Untersucht man die Verteilungen der Matrizelemente von S und T , dann stellt man fest, dass sie für beide Zufallsmatrixensembles jeweils auf der Diagonalen und abseits der Diagonalen (im Folgenden als zwei „Bereiche“ unterschieden) invariant sind. Exemplarisch dafür zeigen die Abbildungen A.1(e), (f) die numerisch ermittelten Standardabweichungen der einzelnen Matrizelemente von S, T . In Abbildung A.2 sind die vier Verteilungen zu sehen.

Wir können also zur Schätzung der Mittelwerte m der Matrizelemente von X über die gesamten Diagonalen bzw. die gesamten strengen oberen Dreiecksmatrizen mitteln. (Da S und T symmetrisch sind, liefert die strenge untere Dreiecksmatrix keine weitere

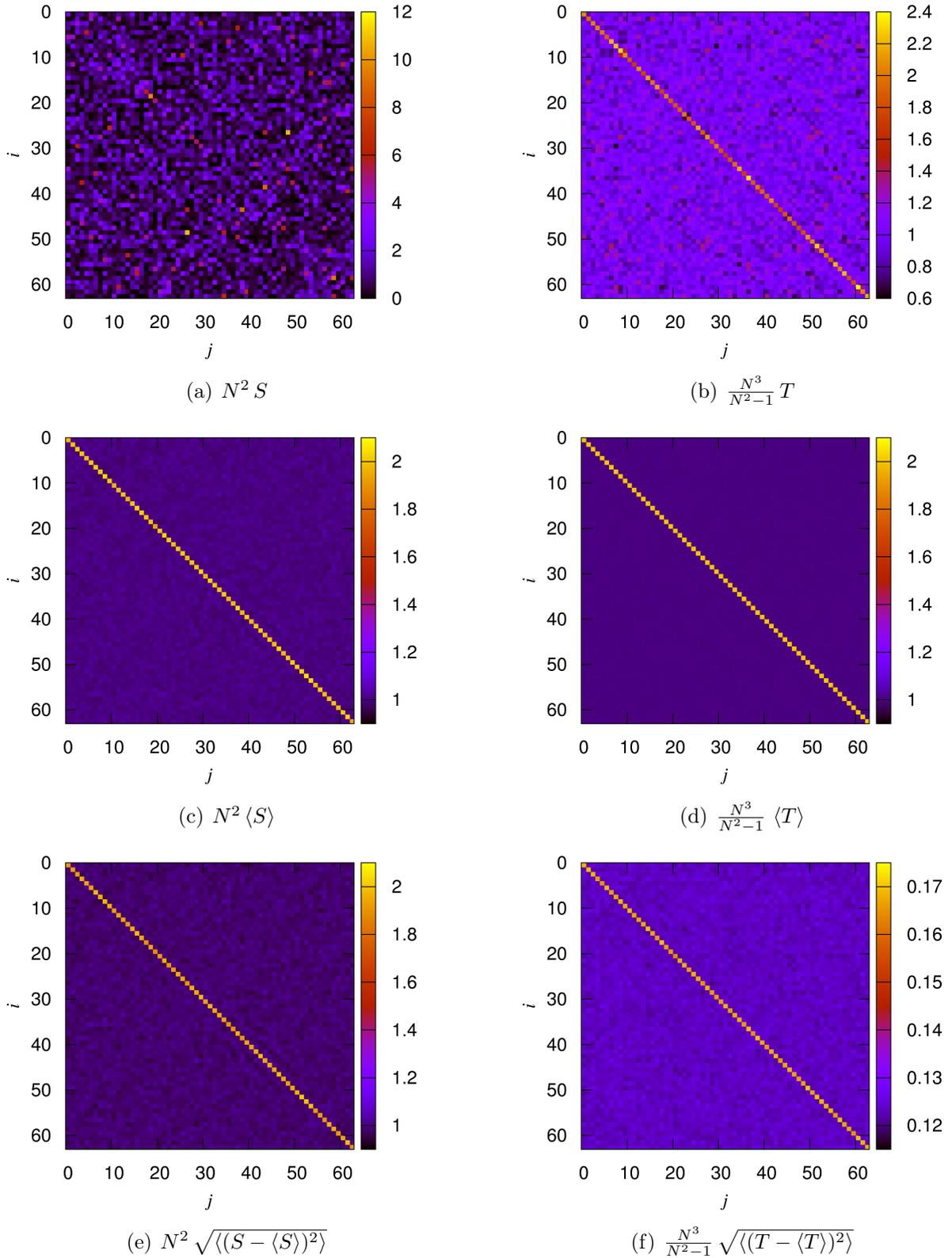


Abb. A.1: Die Matrizen S und T für $N = 8$: Einzelziehungen (a), (b) sowie Mittelwerte (c), (d) und Standardabweichungen (e), (f) der Matrixelemente über 10^4 Ziehungen.

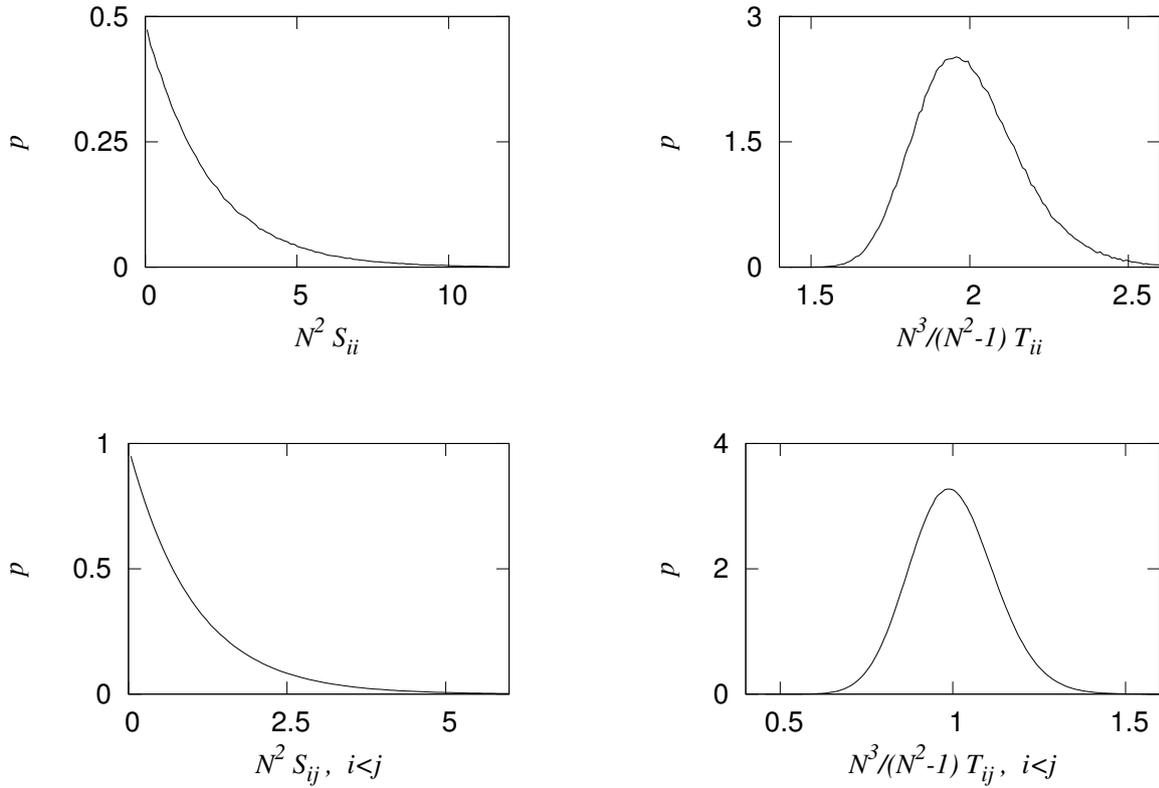


Abb. A.2: Die Matrizen S und T für $N = 8$: Wahrscheinlichkeitsdichten p der Verteilungen der (skalierten) Matrixelemente auf und neben den Diagonalen – statistisch bestimmt aus 10^4 Ziehungen und allen Matrixelementen der jeweiligen Bereiche (daher das stärkere Rauschen bei den Verteilungen der Diagonalelemente).

Information.) Bei n_M Matrizen haben wir somit Stichprobengrößen von $n_M(N^2 - 1)$ bzw. $n_M(N^2 - 2)(N^2 - 1)/2$.

Für eine Schätzung der Fehler der Mittelwertschätzungen müssen mögliche Korrelationen der Matrixelemente von S und T beachtet werden. Sei $k_{S,ijrs}$ (und analog für T) der Korrelationskoeffizient von S_{ij} und S_{rs} nach Pearson¹¹ und k der je Ensemble bereichsweise gemittelte Koeffizient. Sei weiterhin σ_{mel} die Standardabweichung der Verteilung eines einzelnen Matrixelements (nach den Abbildungen A.1(e), (f) gehen wir je Ensemble von bereichsweiser Invarianz aus). Dann ist, wenn die verschiedenen Ziehungen von S und T unabhängig vorgenommen werden, die mittlere quadratische Abweichung σ^2 der Mittel-

¹¹Seien x, y zwei reelle Zufallsvariable mit Mittelwerten m_x, m_y sowie Standardabweichungen σ_x, σ_y . Dann ist ihr Korrelationskoeffizient k nach Pearson definiert über

$$k := \frac{\langle (x - m_x)(y - m_y) \rangle}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (\text{A.29})$$

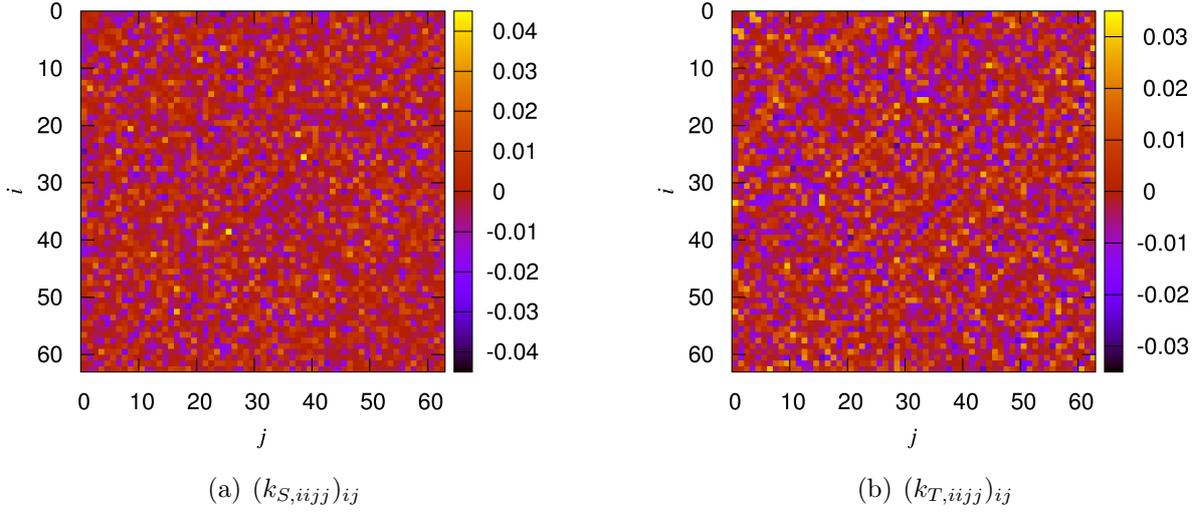


Abb. A.3: Die Matrizen S und T für $N = 8$: Korrelationskoeffizientenmatrizen (Diagonale auf Null gesetzt) der Diagonalelemente von S und T ; beide aus 10^4 Ziehungen.

wertschätzung vom wahren Wert als

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_{\text{mel}}^2}{n_M} \left(\frac{1}{n_k} + \frac{n_k - 1}{n_k} k \right) \quad \text{mit} \quad n_k = \begin{cases} N^2 - 1 & \text{auf Diagonale} \\ (N^2 - 2)(N^2 - 1)/2 & \text{neben Diagonale} \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

gegeben.¹²

Abbildung A.3(a), (b) zeigt die numerisch ermittelten Korrelationskoeffizienten für die Diagonalelemente von S , T . Sie variieren um Null. Auch wenn womöglich tatsächlich keine Korrelation vorliegt, gehen wir von den numerischen Mittelwerten aus; diese sind in Tabelle A.1 aufgeführt. Neben den Diagonalen zeigt sich ein interessanteres Verhalten: Elemente aus der gleichen Zeile oder Spalte scheinen im Mittel antikorreliert sein, was zumindest für S logisch erscheint, da $\sum_{\alpha} S_{\alpha\beta} = 1$ gilt; zwischen alle anderen Paaren von Elementen scheint im Mittel keine Korrelation vorzuliegen; vergleiche Tabelle A.2. Der für die Mittelwertfehlerschätzung entscheidende mittlere Koeffizient ist wieder in Tabelle A.1 zu finden.

¹²Bei unabhängiger Ziehung der Matrizen können nur Elemente gleicher Matrizen korreliert sein. Somit ergibt sich (A.30) aus der folgenden allgemeinen Aussage: Seien x_i , $i = 1, \dots, n$ reelle Zufallsvariable mit $\langle x_i \rangle = m$ und $\langle (x_i - m)^2 \rangle = \sigma^2$ für alle i . Ferner gelte $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \langle (x_i - m)(x_j - m) \rangle = k \sigma^2$. Dann ist die mittlere quadratische Abweichung der Mittelwertschätzung gegeben als

$$\left\langle \left(m - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right\rangle = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} k \right). \quad (\text{A.31})$$

Tab. A.2: Numerische Ergebnisse für S und T bei $N = 8$ und $n_M = 10^4$: Statistik der Korrelationskoeffizienten neben den Diagonalen. Es bezeichnen m den Mittelwert und σ die Standardabweichung.

Art des Korrelationskoeffizienten	m	σ
(S) Zeile oder Spalte gleich	-0,015	0,01
(S) Zeile und Spalte verschieden	0,0005	0,01
(T) Zeile oder Spalte gleich	-0,016	0,01
(T) Zeile und Spalte verschieden	0,0005	0,01

Tab. A.3: Numerische Ergebnisse für S und T bei verschiedenen N : Die Mittelwerte m der Matrixelemente ergeben sich durch bereichsweise Mittelungen; der Fehler von m ist als σ gemäß (A.30) angesetzt. Stichprobengrößen: $n_M = 5 \times 10^6, 2 \times 10^5, 10^4, 2 \times 10^3$ für $N = 2, 4, 8, 16$.

Matrixelement von X	m			
	$N = 2$	$N = 4$	$N = 8$	$N = 16$
(S) auf Diagonale	1,9991(4)	1,9991(11)	2,0013(24)	1,998(3)
(S) neben Diagonale	1,00045(21)	1,00007(8)	0,99998(4)	1,000007(11)
(T) auf Diagonale	2,00029(13)	2,00003(9)	2,00003(22)	1,99996(12)
(T) neben Diagonale	0,99986(7)	0,999998(13)	0,999999(4)	1,0000001(5)

Um (A.28) vertrauen zu können, müssen wir die soeben beschriebenen Schritte bei anderen N wiederholen. Wir tun dies bei $N = 2, 4, 16$. Für $N = 32$ ist der Rechenaufwand bereits zu groß, da für jede Ziehung N^8 Operationen durchgeführt werden müssen. Die Ergebnisse sind in Tabelle A.3 aufgeführt. Insgesamt finden wir (A.28) im Rahmen der statistischen Unsicherheit bestätigt.

A.7 Technische Grundlagen der numerischen Ergebnisse dieser Arbeit

Sämtliche Programme wurden in Python geschrieben. Als Pseudozufallszahlengenerator wurde der *Mersenne Twister* [52] mit seed über die Systemzeit genutzt. Zur Eigenwertberechnung diente ein Interface zur LAPACK-Routine ZGEEV, die ihr übergebene allgemeine komplexe Matrizen zunächst ausbalanciert, sie dann mit unitären Ähnlichkeitstransformationen zu einer *oberen Hessenbergmatrix* reduziert, um schließlich deren Eigenwerte mithilfe des *QR-Algorithmus* zu berechnen [53].

Literaturverzeichnis

- [1] H.-P. Breuer und F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [2] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
- [3] V. Gorini, A. Kossakowski und E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **17**, 821 (1976).
- [4] K. Blum, *Density Matrix Theory and Applications*, 2. Auflage (Plenum Press, New York, 1996).
- [5] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc und G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions*, 2. Auflage (Wiley, New York, 1992).
- [6] H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Band m18 von *Lecture Notes in Physics* (Springer, Berlin, 1993).
- [7] U. Weiss, *Quantum dissipative systems*, 3. Auflage, Band 13 von *Series in Modern Condensed Matter Physics* (World Scientific, Singapore, 2008).
- [8] C. Timm, *Phys. Rev. B* **77**, 195416 (2008).
- [9] B. Palmieri, D. Abramavicius und S. Mukamel, *J. Chem. Phys.* **130**, 204512 (2009).
- [10] C. Timm, *Phys. Rev. E* **80**, 021140 (2009).
- [11] E. P. Wigner, *Ann. Math.* **62**, 548 (1967).
- [12] E. P. Wigner, *SIAM Review* **9**, 1 (1967).
- [13] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3. Auflage (Elsevier, Amsterdam, 2004).
- [14] J. Wishart, *Biometrika* **20A**, 32 (1928).
- [15] O. Bohigas, M. J. Giannoni und C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
- [16] R. Grobe, F. Haake und H.-J. Sommers, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1899 (1988).

- [17] F. Haake, *Quantum signatures of chaos*, 3. Auflage (Springer, Berlin Heidelberg, 2010).
- [18] M. A. Halasz und J. J. M. Verbaarschot, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3920 (1995).
- [19] H. Markum, R. Pullirsch und T. Wettig, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 484 (1999).
- [20] M. Timme, F. Wolf und T. Geisel, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 258701 (2002).
- [21] K. Rajan und L. F. Abbott, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 188104 (2006).
- [22] Y. V. Fyodorov und H.-J. Sommers, *J. Phys. A* **36**, 3303 (2003).
- [23] E. Kanziiper und G. Akemann, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 230201 (2005).
- [24] Z. Burda, R. A. Janik und B. Waclaw, *Phys. Rev. E* **81**, 041132 (2010).
- [25] A. G. Redfield, *IBM J. Res. Dev.* **1**, 19 (1957).
- [26] S. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **20**, 948 (1958).
- [27] R. Zwanzig, *J. Chem. Phys.* **33**, 1338 (1960).
- [28] M. Tokuyama und H. Mori, *Prog. Theor. Phys.* **54**, 918 (1975).
- [29] K. Kraus, *Ann. Phys.* **64**, 311 (1971).
- [30] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems* (Academic Press, London, 1976).
- [31] R. Alicki und K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, Band 286 von *Lecture Notes in Physics* (Springer, Berlin Heidelberg, 1987).
- [32] R. S. Ingarden und A. Kossakowski, *Ann. Phys.* **89**, 451 (1975).
- [33] H. Fischer und H. Kaul, *Mathematik für Physiker 2. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, 2. Auflage (Teubner, Stuttgart, 2004).
- [34] E. Størmer, *Positive linear maps of C*-algebras*, editiert von A. Hartkämper und H. Neumann, Band 29 von *Lecture Notes in Physics* (Springer, Berlin Heidelberg, 1974).
- [35] P. Pechukas, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1060 (1994).

- [36] M. Seliger, C. O. Reinhold, T. Minami und J. Burgdörfer, *Phys. Rev. A* **71**, 062901 (2005).
- [37] H. Nakazato, Y. Hida, K. Yuasa, B. Militello, A. Napoli und A. Messina, *Phys. Rev. A* **74**, 062113 (2006).
- [38] J. Ginibre, *J. Math. Phys.* **6**, 440 (1965).
- [39] F. Mezzadri, *Notices of the AMS* **54**, 592 (2007).
- [40] A. M. Tulino und S. W. Verdú, *Random matrix theory and wireless communications* (Now Publishers, Boston Delft, 2004).
- [41] H.-J. Sommers und W. Wieczorek, *J. Phys. A* **41**, 405003 (2008).
- [42] A. Edelman, E. Kostlan und M. Shub, *J. Am. Math. Soc.* **7**, 247 (1994).
- [43] V. L. Girko, *Theory Probab. Appl.* **29**, 694 (1984).
- [44] Z. D. Bai, *Ann. Prob.* **25**, 494 (1997).
- [45] K. Życzkowski und M. Kuś, *J. Phys. A* **27**, 4235 (1994).
- [46] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7. Auflage (Springer, Berlin Heidelberg, 2000).
- [47] L. H. C. Tippett, *Biometrika* **17**, 364 (1925).
- [48] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling und B. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2. Auflage (Cambridge University Press, Cambridge New York Melbourne, 1992).
- [49] D. Werner, *Funktionalanalysis*, 6. Auflage (Springer, Berlin Heidelberg, 2007).
- [50] H. Spohn, *Rev. Mod. Phys.* **10**, 189 (1976).
- [51] E. B. Davies, *Commun. Math. Phys.* **19**, 83 (1970).
- [52] M. Matsumoto und T. Nishimura, *ACM Trans. Model. Comput. Simul.* **8**, 3 (1998).
- [53] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. J. Dongarra, J. J. D. Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney und D. Sorensen, *LAPACK Users' Guide*, 3. Auflage (SIAM, Philadelphia, 1999).

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Stefan Lange

Dresden, am 15.12.2011

Danksagung

Ich möchte zuallererst Prof. Dr. Carsten Timm danken – für die Ausgabe dieses interessanten, zwei spannende Themengebiete umfassenden Diplomarbeitsthemas, für seine positive Grundeinstellung allen Problemen gegenüber, für die stets offene Tür zu seinem Büro, für seinen liberalen Führungsstil sowie für die vielen hilfreichen Diskussionen, die wir im Laufe der Zeit geführt haben. Ich danke Prof. Dr. Werner Timmermann für die Übernahme der Zweitkorrektur, für viele wertvolle Hinweise zum Verständnis der Theorie quantendynamischer Halbgruppen, für seine unkomplizierte Art und vor allem für seine hervorragende Mathematikausbildung über insgesamt sechs Semester meines Studiums, die mich definitiv nachhaltig geprägt hat.

Ich danke Norman Mertig für die Hilfe bei Fragen zur Zufallsmatrixtheorie, Falk Wunderlich fürs aufmerksame Korrekturlesen, Martin Körber, Steffen Lange und Martin Richter für allerlei technische Beratungen und Diskussionen, meinem Raumteiler Bogusz Bujnowski für lustige Zeiten im Büro und, genauso wie Jacob Schmiedt, Alexander Wollny und Tim Ludwig, für nette Kaffeepausen und diverse Tipps zu diversen Problemen.

Der Friedrich-Ebert-Stiftung danke ich für die Förderung meines Studiums und die vielen bewusstseinsweiternden Veranstaltungen, an und bei denen ich im Rahmen des Stipendiums teilnehmen und tolle Leute kennenlernen durfte.

Ich danke meiner Familie für die Unterstützung in allen Lebenslagen, für Humor, Verständnis und gutes Essen. Lieber Papa, danke, dass du dich durch diesen Kauderwelsch gekämpft hast und auch sonst immer hilfst, wenn ich darum bitte. Liebe Mama, danke, dass du dir immer zu viele Sorgen machst. Danke euch beiden und danke, liebe Omas und Opas, dass ihr immer für mich da sein. Ich hab euch alle lieb!

Und schließlich danke ich meinem Schicksal, dass es so nett zu mir ist und mir schon so viele liebe Menschen über den Weg hat laufen lassen. Liebe Freunde, schön, dass es euch gibt!