TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Institut für Massivbau http://massivbau.tu-dresden.de

SILKE SCHEERER, MANFRED CURBACH (HRSG.)

LEICHT BAUEN MIT BETON

FORSCHUNG IM SCHWERPUNKTPROGRAMM 1542 FÖRDERPHASE 1

Liniengeometrie für den Leichtbau

Daniel Lordick
Daniel Klawitter
Markus Hagemann

Institut
für Geometrie,
TU Dresden

Regelflächen, das sind durch die Bewegung von Geraden erzeugte Flächen, haben für den Betonleichtbau unter den Gesichtspunkten Statik und Herstellung herausragende Eigenschaften: Auch wenn sie doppelt gekrümmt sind, können sie geradlinig bewehrt oder vorgespannt werden. Außerdem kann die Schalung beispielsweise durch Heißdrahtschneiden aus Polystyrol-Hartschaum gewonnen werden. In gängigen CAD-Systemen ist die Klasse der Regelflächen bislang nicht angemessen repräsentiert und steht deshalb für die Bauteilgestaltung nur eingeschränkt zur Verfügung. *Liniengeometrie für den Leichtbau* liefert nun ein mathematisches Modell, das Regelflächen und auf sie wirkende Kräfte abbildet, und entwickelt daraus Formfindungswerkzeuge, die in einer vertrauten Entwurfsumgebung das Prinzip *form follows force* unterstützen.

1 Einführung

Liniengeometrie für den Leichtbau führt zwei sehr gegensätzliche Themenfelder zusammen. Auf der einen Seite steht eine weit verzweigte mathematische Theorie und auf der anderen Seite die Praxis des Bauens mit ihren konkreten Anforderungen.

Die Liniengeometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik mit zahlreichen Anwendungen, beispielsweise in Optik und Robotik. Die Grundelemente der Liniengeometrie sind die Geraden. Das ist durchaus besonders, weil wir eigentlich gewohnt sind, unseren Anschauungsraum mithilfe des kartesischen Koordinatensystems als dreidimensionalen Punktraum zu begreifen. In diesem Modell entstehen Kurven durch die Bewegung von Punkten und sind insofern eine einparametrische Schar der Grundelemente. Betrachtet man nun aber die Geraden als Grundelemente, so stellt man zunächst fest, dass die Mannigfaltigkeit aller Geraden des Anschauungsraumes nicht drei-, sondern vierdimensional ist. Das macht den Umgang mit Geraden ungleich schwerer und insbesondere das Entwerfen mit Geraden fordert die Vorstellungskraft stark heraus. Vierdimensional bedeutet: Um eine Gerade im Raum festlegen zu können, sind vier Werte nötig. Legt man zunächst mit zwei Koordinaten einen Punkt in der Grundrissebene fest, so braucht man darüber hinaus noch zwei Winkel. Anschaulich gesprochen sind das die Richtung im Grundriss und der Neigungswinkel. Alternativ kann man auch den Schnitt der Geraden mit einer weiteren Ebene angeben.

Damit die Geraden einem eleganten Kalkül zugänglich werden, gibt es verschiedene Methoden, die Geraden in ein höherdimensionales Punktmodell zu übersetzen. Jeder Punkt in diesem repräsentiert dann eine Gerade und jede Kurve entspricht einer Regelfläche. Auf diesem theoretischen Fundament behandeln wir in *Liniengeometrie für den Leichtbau* Regelflächen so ähnlich wie NURBS-Kurven in CAD-Programmen: Es greifen nun Interpolations- und Relaxationsalgorithmen.

Der Leichtbau, und hier insbesondere der Leichtbau mit Beton, erfordert geschickte Bauteilformen, um Lasten mit einem effektiven Materialeinsatz abzutragen. Soll die Liniengeometrie dem Leichtbau dienen und somit die Vorteile bei der Herstellung von Regelflächen gewährleisten, muss sie auch Kräfte und Lastfälle in den Modellraum übersetzen und dort behandeln. Nur so wird während des Formfindungsprozesses die Klasse der Regelflächen nicht verlassen. In diesem Zusammenhang ist eine entscheidende Eigenschaft unserer Herangehensweise, dass nicht nur einfache Kräfte, sondern notwendigerweise zugleich auch Momente mit erfasst werden können.

Wir berichten, nach einem kurzen Abriss zur Anwendung von Regelflächen im Bauwesen und deren Implementierung in CAD-Software, welche Strategien wir verfolgt haben, um die Liniengeometrie im Sinne des Leichtbaus nutzbar zu machen. Wir geben einen Überblick über die bisherigen Resultate und skizzieren, in welche Richtung die ausgebreiteten Konzepte weiterentwickelt werden sollen. Außerdem geben exemplarische Ergebnisse aus einem Modellierungskurs mit Studierenden der Architektur einen Einblick in die grundsätzlichen Herausforderungen beim Transfer des hier akkumulierten Wissens und regen insofern künftige Aufgaben an.

2 Regelflächen im Bauwesen

Unter dem Blickwinkel »Herstellung« und »Statik« zerfällt die Klasse der Regelflächen in zwei wesentliche Arten. Zur einen Art, den abwickelbaren Regelflächen, gehören die Zylinder, Kegel und Torsen. Das sind Flächen mit durchgängig verschwindender Gauss'scher Krümmung (einfach gekrümmte Flächen), die aus ebenem Baumaterial, z. B. Blech, durch einfaches Biegen hergestellt werden können. Die andere Art sind die windschiefen Regelflächen mit im Wesentlichen negativer Gauss'scher Krümmung (gegensinnig doppelt gekrümmte Flächen), die durch ihre Krümmung günstige statische Eigenschaften aufweisen. *Liniengeometrie für den Leichtbau* befasst sich mit letzteren, weil Beton für das Herstellen doppelt gekrümmter Bauteile in besonderer Weise geeignet ist und derartige Konstruktionen auch bei geringer Materialstärke überdurchschnittlich leistungsfähig sind.

Die gebräuchlichsten windschiefen Regelflächen im Bauwesen sind die algebraischen Regelflächen 2. Ordnung, die sogenannten Reguli, namentlich das hyperbolische Paraboloid (HP-Fläche) und das einschalige Hyperboloid. Die Besonderheit der Reguli ist, dass auf ihnen zwei Scharen von Geraden liegen, sie also in doppelter Hinsicht Regelflächen sind. Einschalige Drehhyperboloide sind seit den Konstruktionen des russischen Ingenieurs Wladimir Schuchow (1853–1939) als extrem wirtschaftliche Bauformen für große Bauwerke bekannt und dienen vielfach als Grundform für Kühltürme, z. B. Beckh [1]. Antoni Gaudí hat Reguli als Gestaltungsmittel umfangreich in der *Sagrada Família* eingesetzt, Burry [2]. Als dünne Betonschalen wurden insbesondere die HP-Flächen durch Félix Candela (1910–1997) berühmt. Ebenso haben aber auch Anton Tedesko (1903–1994), Eduardo Catalono (1917–2010), Ulrich Müther (1934–2007) und viele andere HP-Flächen verwendet, siehe z. B. Heinle & Schlaich [3]

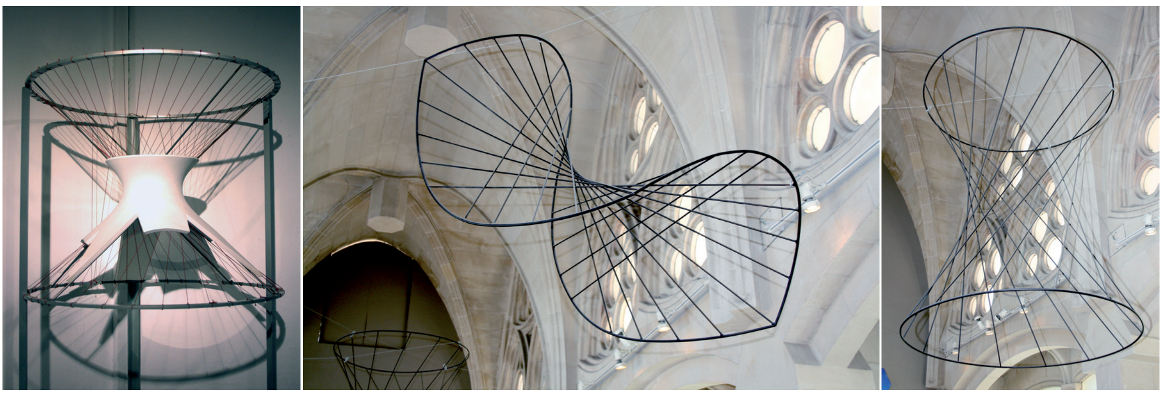

Bild 1: Durch Geraden erzeugte Regelflächen im Modell, Museum in der Sagrada Família
[Fotos: Silke Scheerer]

oder Dechau [4]. Als vorgefertigte Bauteile sind die Hyperboloidschalen von Wilhelm Silberkuhl (1912–1984) bekannt geworden, bei denen Vorspannung zur Anwendung kam, Ruppert et al. [5]. Ein besonderes Beispiel für die Anwendung von Reguli ist das Panorama-Bauwerk Bad Frankenhausen, bei dem sowohl die Wände als auch das Dach aus HP-Schalensegmenten errichtet wurden, Müller & Kokott [6].

Das internationale Symposium *Shell Pioneers*, 2012 durchgeführt am Fachgebiet von Prof. Mike Schlaich (TU Berlin), förderte weitere, kaum populäre, doch nicht minder spektakuläre Beispiele aus dem europäischen Ausland zu Tage [7]. Auch jenseits von HP-Fläche und Drehhyperboloid sind die Vielseitigkeit der Betonschalenkonstruktionen und ihr verhältnismäßig geringer Baustoffverbrauch unbestritten. Jedoch führt insbesondere der hohe Arbeitsaufwand bei der Herstellung dazu, dass sie heute kaum mehr gebaut werden, Schlaich [8]. Offensichtlich ist eine zentrale Aufgabe, die Schalung für doppelt gekrümmte Schalen wirtschaftlich in den Griff zu bekommen. Das ist auch der Grund, warum wir uns auf die Klasse der Regelflächen beschränken. Schließlich können in diesem Fall die Schalungselemente einigermaßen unkompliziert durch Heißdrahtschneiden aus extrudiertem Polystyrol gewonnen werden.

Regelflächen, die keine Reguli sind, kommen im Bauwesen relativ selten vor. Konoide, bei denen die Erzeugenden zu einer Richtebene parallel sind (das gilt auch für HP-Flächen), treten dabei noch am häufigsten auf. Die Untersicht von massiven Wendeltreppen ist oft als Wendelfläche ausgeführt, obwohl auch schiefe Schraubregelflächen anzutreffen sind. Antoni Gaudí (1852–1926) hat darüber hinaus solche Konoide verwendet, die eine Sinuskurve als Leitkurve besitzen. In neuerer Zeit finden sogar allgemeine windschiefe Regelflächen, unter anderem im Werk von Zaha Hadid, Anwendung, Flöry & Pottmann [9]. Im Übrigen ist aber das Gestaltungspotential der Regelflächen noch bei weitem nicht ausgeschöpft. Das liegt unter anderem daran, dass Regelflächen in aktuellen CAD-Programmen nicht strukturiert gehandhabt werden können. Wesentliche konstruktive Eigenschaften sind nur auf Umwegen erreichbar, der Einsatz von Regelflächen im Entwurf somit mühsam.

3 Standard-Implementierung von Regelflächen in CAD-Software

Regelflächen treten in CAD-Software als eine Untergruppe der NURBS-Flächen auf. Sind beispielsweise für eine Loft-Fläche nur zwei Profilkurven vorgegeben, so werden diese linear verbunden und man erhält eine NURBS-Fläche, deren Parameterkurven in einer Richtung Geradenstücke sind. Es handelt sich bei einer derartigen NURBS-Fläche somit um einen Ausschnitt einer Regelfläche. Die Erzeugenden der Regelfläche, also die Geraden, verbinden immer einander entsprechende Parameterpunkte auf den Profilkurven. Diese Zuordnung ist aber weitgehend willkürlich, hängt nur von der Parametrisierung der Profilkurven ab und entzieht sich zunächst der Kontrolle des Benutzers. Es bedarf typischerweise einer zusätzlichen Bearbeitung, um die gewünschte Regelfläche zu erhalten. Allgemein gilt nämlich, dass erst durch drei Kurven eine Regelfläche eindeutig bestimmt ist (Bild 2 und Pottmann/Wallner [10]).

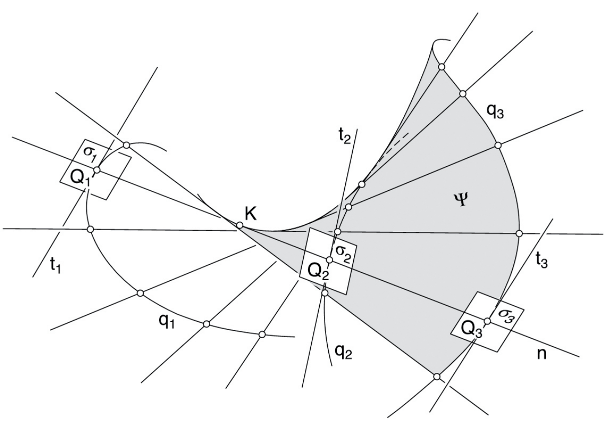

Bild 2: Festlegung einer Regelfläche durch die Treffgeraden zu drei Kurven q_1, q_2 und q_3, aus Lordick [11]

Bild 3: Kilden Theater- und Konzerthaus in Kristiansand bei Nacht
[Foto: Knut Arne Gjertsen, CC BY-SA 3.0]

Beim Kilden Theater- und Konzerthaus in Kristiansand (Bild 3) war beispielsweise das Entwurfsziel, eine konoidale Fläche zu erzeugen. In der Frontansicht sollten die Erzeugenden, als Holzleisten materialisiert, zueinander parallel erscheinen. Das leistete aber das geometrische Modell der Architekten zunächst nicht und es wurde erst erreicht, indem nachträglich die Parametrisierung der Randkurven manipuliert wurde(Bild 4). Diese Aufgabe war also dem digitalen Entwurf nachgeordnet und wurde von der auf Geometriemodellierung spezialisierten Firma *Design-to-Production* durchgeführt, Scheurer [12].

Dieser Ablauf bei der Formfindung und Realisierung ist in gewisser Weise typisch, aber keineswegs zufriedenstellend! Wir wollen die geometrische und statische Optimierung in die Formfindung einbeziehen und so zu einer grundsätzlichen Verbesserung beim Entwerfen mit Regelflächen beitragen.

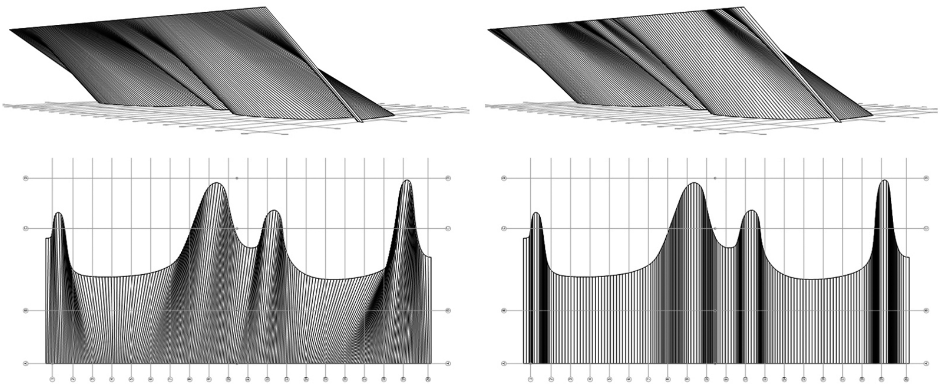

Bild 4: Fassade des Kilden Theater- und Konzerthauses, ALA Architects; links: NURBS-Entwurf, rechts: konoidale Fläche
[Abbildungen: Design to production, Fabian Scheurer [12]]

4 Liniengeometrisches Modell

Liniengeometrie für den Leichtbau stellt dem Konzept der NURBS-Flächen eine neue und – in Bezug auf windschiefe Regelflächen – artgerechte Berechnungsmethode zur Seite. Das Grundprinzip ist, die Menge aller Geraden des Anschauungsraums in einem höherdimensionalen Modellraum zu behandeln. Die Projektmitarbeiter Markus Hagemann und Daniel Klawitter haben insbesondere zwei bekannte liniengeometrische Modelle auf ihre Tauglichkeit für die Anwendung im Leichtbau näher untersucht, das Plücker'sche Geradenmodell und die Dualsphäre.

Das Plücker'sche Geradenmodell ist eingebettet in einen projektiven, fünfdimensionalen Raum, in dem alle Geraden des dreidimensionalen Raumes als Punkte auf der sogenannten Klein-Quadrik liegen. Die Besonderheit des Modells liegt in seiner Vollständigkeit. So sind Ferngeraden in dieses Modell in natürlicher Weise integriert. Das Parallelenaxiom ist außer Kraft: Irgend zwei verschiedene Geraden haben entweder einen Schnittpunkt oder sind windschief. Liniengeometrische Zusammenhänge können sehr gut mit Hilfe der durch die Klein-Quadrik induzierten Polarität erklärt werden. All das macht das Plücker'sche Geradenmodell aus mathematischer Sicht elegant. Allerdings werden Fernelemente und die projektive Sichtweise für ingenieurspezifische Fragestellungen nicht benötigt.

Ein weiteres Modell ist die Dualsphäre. Ausgangspunkt sind die dualen Quaternionen zur Beschreibung von Bewegungen im Raum (allgemein: Schraubungen). Durch Einschränkung auf Drehungen um 180° erhält man die sogenannten liniensymmetrischen Bewegungen. Die dualen Quaternionen vereinfachen sich in diesem Fall entscheidend und erfüllen die Dualsphäre, die damit wiederum als eine Einbettung der Geraden des dreidimensionalen Raumes in das Bewegungsmodell angesehen werden kann. Während das Attribut „dual" auf die zu Grunde liegende algebraische Struktur der dualen Zahlen zurückzuführen ist, ist der Begriff der „Sphäre" durch eine Normierungsbedingung geprägt. In der Tat können also Geraden als Punkte auf einer zweidimensionalen Sphäre im dreidimensionalen Modul über dem Ring der dualen Zahlen angesehen werden.

Die Dualsphäre hat zwar den Nachteil, Fernelemente nicht erfassen zu können, aber den für das Bauwesen entscheidenden Vorteil, dass eine Norm induziert wird. Diese Norm ist eine duale Zahl und beinhaltet den Abstand und den Winkel zwischen zwei Geraden. Diese Eigenschaft ist vor allem aus Sicht der zu behandelnden Optimierungsaufgaben wichtig. Außerdem bietet die Korrespondenz des Modells mit der Darstellung von Bewegungen als duale Quaternionen die Möglichkeit, bereits bekannte Erkenntnisse aus der Kinematik auf Geraden zu übertragen. Faktisch ist es mit diesem Kalkül sehr einfach möglich, Geraden im Raum gezielt zu bewegen.

Eine Besonderheit der Dualsphäre ist die Tatsache, dass jede Geodätische, das heißt die kürzeste Verbindung zweier Punkte im Punktmodell, immer genau einer Wendelfläche im dreidimensionalen Raum entspricht. Nun sind die Wendelflächen bekanntermaßen die einzigen Regelflächen, die zugleich Minimalflächen sind. Offensichtlich harmoniert also das Modell der Dualsphäre mit den Zielen des Leichtbaus, weil in organischer Weise solche Flächen bevorzugt werden, die minimalen Flächeninhalt haben und damit Materialersparnis bringen. Aus den genannten Gründen haben wir uns auf das liniengeometrische Modell der Dualsphäre konzentriert und es für die Belange des Entwerfens im Leichtbau ausgearbeitet. Im Zuge dieser Arbeit und zum Teil deutlich über die vordergründigen Intentionen des Projektes hinaus, sind mathematische Grundlagen geschaffen worden, die unsere Ergebnisse in einen wesentlich größeren theoretischen Kontext einbetten.

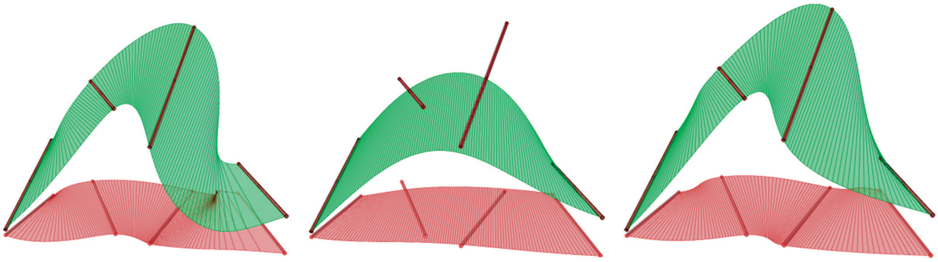

Bild 5: Subdivisionsalgorithmen für vier Geraden (Aitken, Bézier, B-Spline)

4.1 Interpolationsalgorithmen für Regelflächen

Zunächst wurde die Interpolation von Regelflächen aus einer Schar vorgegebener Erzeugender untersucht, Hagemann/Klawitter [4], Klawitter [13]. Die Erzeugenden sind Punkte auf der Dualsphäre und die gesuchte Regelfläche eine Kurve, die diese Punkte interpoliert. Dieser Zugang unterscheidet sich grundsätzlich von der NURBS-Technologie im Euklidischen Modell, kann aber durch eine analoge Betrachtung erschlossen werden. Der große Vorteil ist, dass Regelflächen definierbarer Güte entstehen.

Mit dem Übertragungsprinzip von Bewegungen und im Zusammenspiel mit der Definition eines Teilverhältnisses konnten verschiedene Subdivisionalgorithmen konstruiert werden, die etablierte Konzepte etwa von Aitken, de Casteljau und Bézier unter Beachtung der Gruppenstruktur auf der Dualsphäre adaptieren (Bild 5). Die Besonderheit bei diesem Zugang liegt in der direkten Verarbeitung der vorgegebenen diskreten Geradenmenge. Spezifisch liniengeometrische Größen, wie der Drall, können nun direkt in den Algorithmus integriert werden. Der Benutzer kann durch einzelne Geraden den Interpolationsalgorithmus steuern und die Regelfläche so manipulieren, wie er durch Steuerpunkte einen *Spline* manipuliert. Maßgeblich ist dabei der Unterschied zu bekannten Interpolationsalgorithmen, welche auf dem Konzept der Hermite-Interpolation basieren und lediglich C^2-Stetikeit gewährleisten. So bietet das neue Verfahren eine Spline-Interpolation mit beliebig hohem Grad und entspricht damit einem adaptierten B-Spline-Verfahren für Geraden. Eine weitere Eigenschaft des Algorithmus ist die zwanglose Erzeugung konoidaler Regelflächen, sobald die vorgegebenen diskreten Geraden eine gemeinsame Ferngerade schneiden.

4.2 Verallgemeinerung der kinematischen Abbildung

Im Zuge unserer Forschung konnte die kinematische Abbildung, welche die Bewegungsgruppe SE(3) auf Punkte einer Hyperquadrik im siebendimensionalen projektiven Raum abbildet, verallgemeinert werden, Klawitter & Hagemann [15]. Mit Hilfe des Clifford-Algebra-Kalküls wurden Isometriegruppen von Cayley-Klein-Geometrien auf pseudo-algebraische Varietäten als Teilmenge von projektiven Räumen abgebildet. Insbesondere ließen sich mit Hilfe des entwickelten Apparates die bekannten Abbildungen von Blaschke und Grünwald sowie von Study im Clifford-Algebra-Kalkül vereinheitlichen. Außerdem wurden Möglichkeiten bereitgestellt, die Isometriegruppen verschiedener Cayley-Klein-Gruppen als Matrix-Gruppen darzustellen.

4.3 Entwicklung eines liniengeometrischen Clifford-Algebra-Models

Weiterhin wurde ein homogenes Clifford-Algebra-Model entwickelt, welches die Klein-Quadrik als Maßquadrik besitzt, siehe Klawitter [16]. In diesem Modell finden

Geraden, welche in Plücker-Koordinaten dargestellt sind, ein natürliches Analogon als Nullvektoren. Geometrische Objekte, die im Klein-Modell vorkommen, werden in das Clifford-Algebra-Model übertragen und sind dort durch bestimmte Algebraelemente beschrieben. So lassen sich beispielsweise Reguli, lineare Geradenkongruenzen und lineare Geradenkomplexe einfach als Algebraelemente darstellen. Nach Pottmann & Wallner [10] ist die Gruppe der regulären projektiven Transformationen des dreidimensionalen projektiven Raumes isomorph zur Gruppe der automorphen Kollineationen der Klein-Quadrik. Diese Gruppe kann in dem Clifford-Algebra-Modell als Pingruppe gefunden werden. Es wurde eine Möglichkeit bereitgestellt, beliebige projektive Abbildungen direkt in das Modell zu übertragen. Vorteile ergeben sich dadurch, dass die Transformation, wenn sie in der Algebra dargestellt ist, mit einer Algebraoperation auf verschiedene geometrische Objekte, die in der Algebra darstellbar sind, angewendet werden kann.

4.4 Relaxation auf der Dualsphäre

Für Formfindung und Optimierung von Regelflächen haben wir im liniengeometrischen Modell die entsprechenden Grundlagen geschaffen. Abhängig von gewählten Zielgrößen können etwa Evolutionsgleichungen betrachtet werden. Eine der bekanntesten Evolutionsgleichungen ist der Curve-Shortening Flow, welcher aus der Wärmeleitungsgleichung resultiert. Die Verallgemeinerung dieser Theorie auf duale Zahlen, vor allem für eine Anwendung auf der Dualsphäre, erforderte eine intensive Einarbeitung in Kurvenflüsse, Hagemann, Klawitter, Odehnal [17].

Die Anwendung des Curve-Shortening Flow hat große Gemeinsamkeit mit der Simulation eines Masse-Feder-Dämpfer-Systems. Werden Federn als Kanten eines polygonalen Netzes angenommen, können damit Membranen unter Krafteinfluss simuliert werden. Diese Idee lässt sich für Polygonzüge (eindimensionale polygonale Netze) auf die Dualsphäre übertragen. Der Feder, als Gerade zwischen zwei Punkten, entsprechen dann jedoch duale Großkreisbögen und diese wiederum der kleinsten Wendelfläche zwischen zwei Geraden. Dies steht in Analogie zu Geraden als kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Mechanische Eigenschaften dieser dualen Felder sind ebenfalls zu dualisieren, wodurch eine Abhängigkeit von translatorischer und rotatorischer Steifigkeit erreicht werden kann. Mit Hilfe dieses Ansatzes lassen sich dynamische Einflüsse auf Regelflächen übertragen, was direkt für eine geeignete Formfindung im Raum der Regelflächen – und das ist das Entscheidende! – Verwendung finden kann, siehe Bild 6 und Hagemann, Klawitter, Lordick [18].

4.5 Rückübertragung in den Anschauungsraum

Im Bauwesen liegen Regelflächen immer nur ausschnittweise vor, während die Erzeugenden auf der Dualsphäre als unendlich lange Geraden definiert sind. Die Modifikation der Regelflächen im Anschauungsraum gelingt dennoch über einen Zusammenhang mit der Kinematik: Da Wendelflächen Schraubbewegungen von Geraden entsprechen,

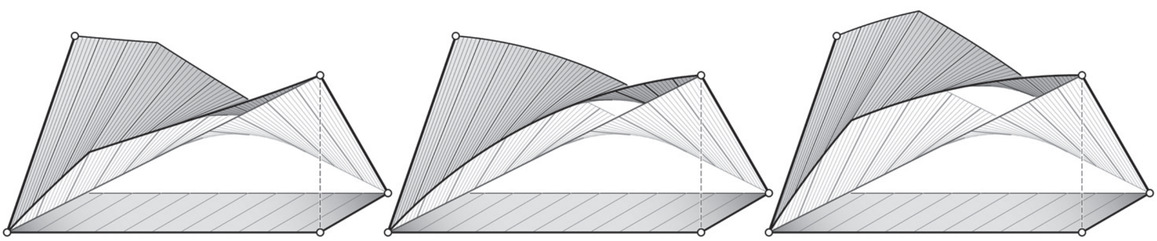

Bild 6: Relaxation unter Flächen- und Einzellast mit fixen Randgeraden, Hagemann et al. [18]

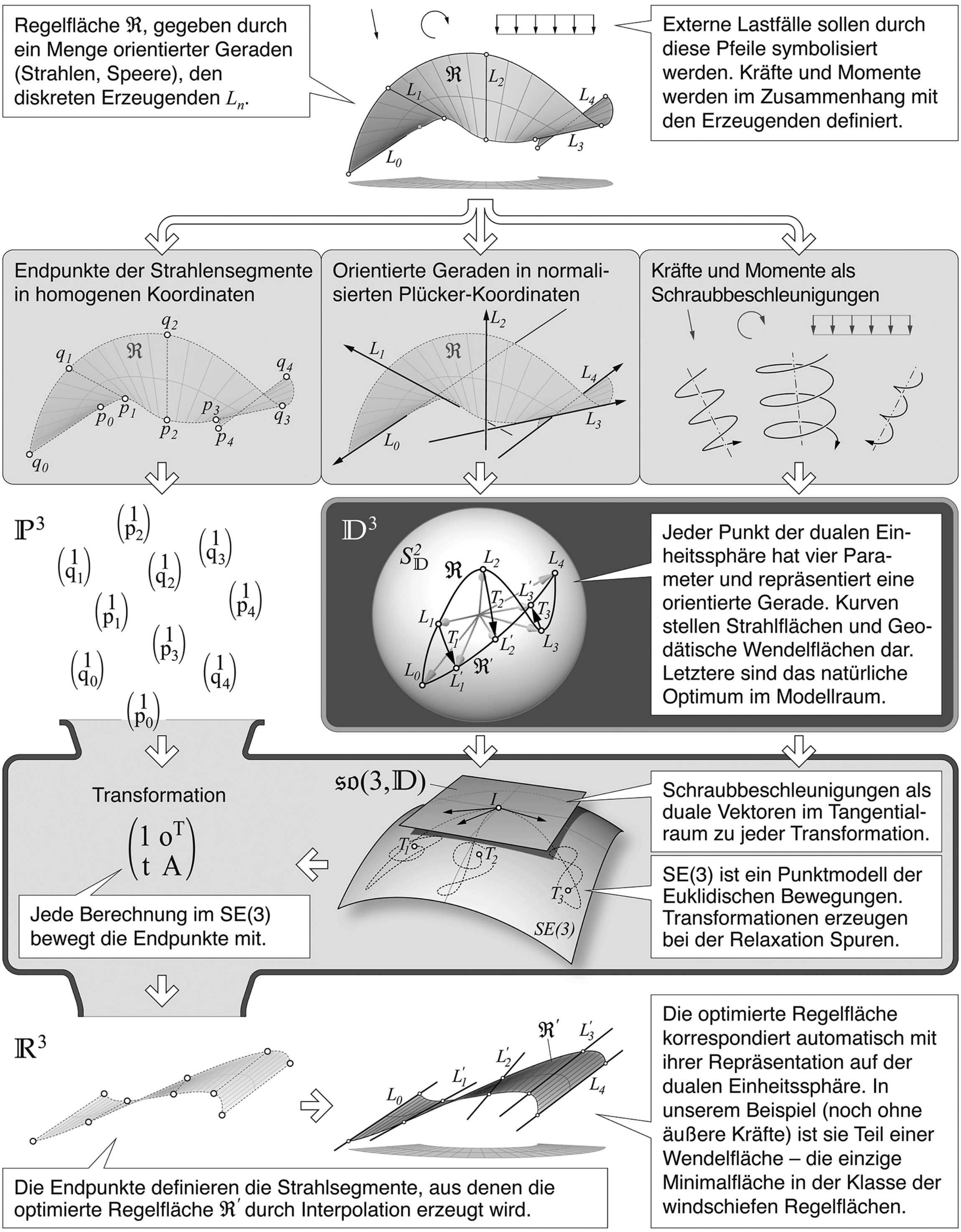

Bild 7: Diagramm des Prozesses, vgl. [18]

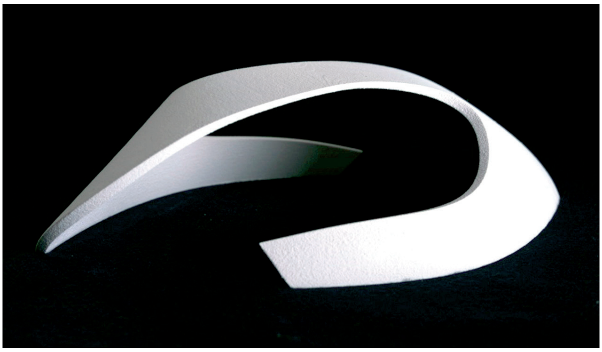

Bild 8: *3-D-Druck des Summer School Pavillon aus dem 3D LAB B25 [Foto: Jens Martin Bornemann]*

lassen sich die Bewegungsvorgänge auch auf andere Objekte, speziell auf die Endpunkte der Geradensegmente übertragen. Es werden also zunächst im liniengeometrischen Modell nur die Geraden manipuliert und erst nach der Optimierung die Endpunkte der Geradenstücke durch die Anwendung der gefundenen Transformationsmatrix zurückübertragen und dargestellt. Der Gesamtvorgang dieser Regelflächenmanipulation mag im Detail aufwändig erscheinen (Bild 7), ist aber in nahe Echtzeit durchführbar.

Die gefundenen Ergebnisse wurden als Add-On in das Rhinoceros-Plug-In Grasshopper implementiert. Darüber hinaus wurden grundlegende Funktionalitäten plattformübergreifend in Matlab und Python realisiert. Dazu zählt neben dem Geradenkalkül für verschiedene liniengeometrische Modelle ein Simulationswerkzeug für Regelflächenrelaxation.

Das Grasshopper-Add-On ist ein Entwurfswerkzeug zum geradenbasierten Design von Regelflächen mit Interpolations- und Relaxationsalgorithmen. Abgerundet wird das Add-On durch ein Werkzeug zur Erzeugung von Asymptoten- und Hauptkrümmungslinien, welches die Approximation von Freiformflächen durch Regelflächenpatches ermöglicht. In einer Fallstudie Summer School Pavillon wurde der Prototyp einer Regelflächenschale während der SPP-Sommerschule 2013 entworfen (siehe Bild 8 und Beitrag Scheerer/Curbach im vorliegenden Band). Beteiligt waren Markus Hagemann (Mathematik, TU Dresden), Björn Freund (Massivbau, TU Darmstadt) und Michael Breitenberger (Statik, TU München). Zum Entwurf wurde mit Hilfe von CARAT++ eine Festigkeitsanalyse durchgeführt. Ein Modell der Fläche entstand im 3D LAB B25 am Institut für Geometrie, TU Dresden.

5 Modellierungskurs „Gestalten mit Regelflächen"

Im Sommersemester 2014 hatten 20 Studierende aus der Architekturfakultät der TU Dresden Gelegenheit, in die Liniengeometrie einzusteigen, mit Regelflächen zu entwerfen und die im Forschungsprojekt entstandenen Werkzeuge zu nutzen. Vier Teilaufgaben strukturierten den Kurs *3-D-Modellieren* von Prof. Lordick. Zunächst sollten die Studierenden lediglich gebaute Beispiele sammeln und präsentieren. Dabei stellte sich heraus, dass es für Neulinge keineswegs einfach ist, windschiefe Regelflächen zu erkennen und etwa von anderen Freiformflächen zu unterscheiden.

Bild 9: *Studierende mit ihren Fadenmodellen [Foto: Daniel Lordick]*

Die zweite Aufgabe war, eine freie Regelflächenstudie zu kreieren, und sich dabei beispielsweise durch Fadenmodelle aus der mathematischen Sammlung am Institut für Geometrie inspirieren zu lassen [19]. Diese Übung war formal streng gefasst: Alle mussten ihre Modelle in einem Würfelmodul von 25 cm Kantenlänge realisieren (Bild 9). Das Material – Faden und ein Rahmen aus Holzwerkstoff – war vorgegeben. Für den Rahmen wurde der Lasercutter im 3D LAB B25 verwendet; die Schnittmuster mussten also auf digitalem Wege gewonnen werden. Bis zu diesem Punkt hatten die Studierenden nicht nur prinzipielle Erzeugungsweisen von Regelflächen, sondern auch die grafische Programmierumgebung Grasshopper kennengelernt.

Im nächsten Schritt erhielten die Studierenden einen Einblick in die Formfindungswerkzeuge aus unserem Forschungsprojekt und sollten außerdem ein inhaltliches Konzept für einen kleinen Pavillon auf dem Campusgelände entwickeln. In der Abschlussaufgabe galt es dann, die gesammelten Kenntnisse und Konzepte zu einem Pavillonentwurf zusammenzuführen (Bild 10). Für die Evaluierung der Entwürfe wurden neben den Zeichnungen auch 3-D-Drucke erstellt.

Während des Kurses wurde offenbar, welche Herausforderung für die räumliche Vorstellung der Umgang mit Regelflächen bedeutet. Der digitale Modellbau war insofern unabdingbarer Bestandteil der Veranstaltung. Der weitgehend unvoreingenommene Zugang der Teilnehmer zum Thema war ein Vorteil, weil dadurch ein ungeahntes Spektrum an Regelflächenentwürfen angeboten wurde – zunächst ohne Rücksicht auf die Effektivität der Konstruktionen.

Bild 10: *Pavillonentwürfe zum Thema »Campus-Station«; von links oben nach rechts unten von* Mark Ullrich, Andreas Margert, Daniel Petermann und Sandy Klemm *[Rendering: die jeweiligen Autoren]*

6 Ausblick

Die bisherigen Ergebnisse des Projektes ermöglichen die Gestaltung mit Regelflächen auf eine neuartige und zugleich kraftadaptive Weise. Im SPP-Anschlussprojekt *Dünnwandige Betonbauteile mit Regelflächengeometrie*, in Kooperation mit

Prof. Mike Schlaich von der Technischen Universität Berlin, wird es darum gehen, die mathematische Strategie mit ingenieurtechnischen Formfindungs- und Optimierungsmethoden abzugleichen, zu systematisieren und somit praxistauglich zu machen. Das Ziel sind Werkzeuge zur Konstruktion unkonventioneller, aber effektiver und leichter Betonbauteile mit Regelflächengeometrie.

Damit die Leistungsfähigkeit der regelflächenbasierten Herangehensweise zu Tage treten kann, sollen schalenartige Bauteile und exemplarische Tragwerkskonzepte entwickelt werden. Dabei wird auch die wirtschaftliche Herstellung der Schalung mitbehandelt. Im Fokus steht die Untersuchung und Evaluierung von Dachsegmenten (Schalen), Balkenkonstruktionen, Wandsegmenten und Stützen mit numerischen und experimentellen Mitteln.

Die Erfahrung mit Studierenden hat gezeigt, dass der Wissenstransfer in Bezug auf das Gestalten mit Regelflächen eine komplexe Herausforderung ist. Um eine breite Wissensbasis zu schaffen, soll deshalb ein Doktorandenworkshop zum Thema *Entwurf mit Regelflächen im konstruktiven Betonleichtbau* durchgeführt werden. Dieser Workshop bietet zugleich die Möglichkeit, die Entwurfswerkzeuge zu evaluieren und für die Nutzung in einer gewohnten CAD-Umgebung auszubauen.

Literaturverzeichnis

[1] Beckh, M.: Hyperbolische Stabwerke: Suchovs Gittertürme als Wegweiser in den modernen Leichtbau. München: Detail, 2012.

[2] Burry, M.: Gaudí Unseen: Completing the Sagrada Família. Berlin: Jovis, 2007.

[3] Heinle, E.; Schlaich, J.: Kuppeln aller Zeiten, aller Kulturen. Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt DVA, 1996.

[4] Dechau, W. (Hrsg.): Kühne Solitäre. Ulrich Müther, Schalenbaumeister der DDR. Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt DVA, 2000.

[5] Ruppert, M.; Gebbeken, N.; Janowski, D.; Raabe, K.-H.: Zur Berechnung von vorgespannten Hyperboloidschalen. Beton- und Stahlbetonbau 97 (2002), Heft 4, S. 212–220.

[6] Müller, H.; Kokott, H.-J.: »Panorama«-Bauwerk Bad Frankenhausen. Bauplanung – Bautechnik 32 (1978), Heft 2, S. 52–56.

[7] Shell Pioneers: Internationales Symposium am 18./19.10.2012. http://www.tu-cottbus.de/fakultaet2/de/bautechnikgeschichte/lehrstuhl/franz-dischinger-symposium/inhalt.html an der TU Berlin (aufgerufen am 07.11.2013).

[8] Schlaich, M.: Von den dünnen Betonschalen Félix Candelas zu den leichten Flächentragwerken von heute. VDI-Bautechnik Jahresausgabe 2011/2012, 2011, S. 122–131.

[9] Flöry, S.; Pottmann, H.: Ruled Surfaces for Rationalization and Design in Architecture. LIFE in:formation. On Responsive Information and Variations in Architecture (2010), S. 103–109.

[10] Pottmann, H.; Wallner, J.: Computational Line Geometry. Heidelberg · Berlin u. a.: Springer, 2001.

[11] Lordick, D.: Konstruktion der Schattengrenzen krummer Flächen mithilfe von Begleitflächen. Dissertation, Aachen: Shaker Verlag, 2001.

[12] Scheurer, F.: Bis zur letzten Schraube – Kilden Konzerthaus. Werk, Bauen + Wohnen 98/65 (2011), Heft 5, S. 12–19.

[13] Klawitter, D.: Clifford Algebras – Geometric Modelling and Chain Geometries with Application in Kinematics. PhD thesis, Technische Universität Dresden, 2014.

[14] Hagemann, M.; Klawitter, D.: Discretisation of light-weight concrete elements using a line-geometric model. In: Müller, H. S.; Haist, M.; Acosta, F. (Hrsg.): Proceedings of the 9th fib International PhD Symposium in Civil Engineering, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), 22.–25.07.2012 in Karlsruhe, Karlsruhe: KIT Scientific Publishing, 2012, S. 269–274.

[15] Klawitter, D.; Hagemann, M.: Kinematic mappings for Cayley-Klein geometries via Clifford algebras. Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry 54 (2013), S. 737–761.

[16] Klawitter, D.: Line geometry in the Context of Clifford Algebra. submitted for publication to Advances in Applied Clifford Algebras.

[17] Hagemann, M; Klawitter, D.; Odehnal, B.: Curve Flows on Ruled Surfaces. Journal of Geometry and Graphics 17 (2013), Heft 2, S. 129–140.

[18] Hagemann, M.; Klawitter, D.; Lordick, D.: Force Driven Ruled Surfaces. Journal for Geometry and Graphics (JGG) 17 (2013), Heft 2, S. 193–204.

[19] http://www.math.tu-dresden.de/modellsammlung/.

Kraftadaptive Diskretisierung leichter Betonbauteile mittels liniengeometrischer Modellierung

Projektleiter

Prof. Dr.-Ing. Daniel Lordick
Prof. em. Dr. tech. Gunter Weiß

Projektbearbeiter

Dipl.-Math. Markus Hagemann
Dipl.-Math. Daniel Klawitter

Projektlaufzeit

10/2011 – 09/2014

Web

http://www.math.tu-dresden.de/geo/