Christian Scheunert

Über die Modellierung und Simulation zufälliger Phasenfluktuationen

© Christian Scheunert 2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Über die Modellierung und Simulation zufälliger Phasenfluktuationen

Christian Scheunert
geboren am 28.12.1971

der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Dresden

zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTORINGENIEUR

(Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. habil. Leon Urbas
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Adolf Finger, Prof. Dr.-Ing. habil. Hans-Joachim Jentschel
Tag der Einreichung: 4. Dezember 2009, Tag der Verteidigung: 25. Juni 2010

Für meine Frau Katja und
unsere Kinder Celina und Simon.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die mich bei der Ausarbeitung dieser Dissertation unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Adolf Finger für die Unterstützung meiner wissenschaftlichen Arbeit und die Bereitstellung hervorragender Arbeitsbedingungen am Institut für Nachrichtentechnik der TU Dresden. Außerdem danke ich ihm für die Anfertigung eines Gutachtens zur vorliegenden Dissertation.

Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Prof. Hans-Joachim Jentschel vom Institut für Verkehrsinformationssysteme der TU Dresden für das Schreiben eines weiteren Gutachtens, trotz schwerer Krankheit.

Darüber hinaus danke ich allen Kollegen des Lehrstuhls Theoretische Nachrichtentechnik für die sehr gute Zusammenarbeit und das ausgezeichnete Arbeitsklima in den vergangenen Jahren. Insbesondere bedanke ich mich bei Hrjehor Mark, Martin Mittelbach, Axel Schmidt und Anne Wolf, die weder Zeit noch Mühe bei der Durchsicht des Manuskripts dieser Dissertation gescheut haben, um mir meine Grenzen aufzuzeigen. Mitunter hatte ich den Eindruck, sie hatten Freude daran.

Des weiteren danke ich meinem Freund und Kommilitonen Konrad Schubert für die höchstens abzählbar vielen Gespräche zu verschiedenen mathematischen Fragestellungen und möglichen Lösung dazu. Oft haben seine kritischen Fragen erst zum tieferen Verständnis einer Aussage geführt.

Schließlich danke ich meiner ganzen Familie, eingeschlossen Schilskys, für die Förderung und Unterstützung meiner Ausbildung, das entgegengebrachte Vertrauen und die notwendige Geduld. In besonderem Maße danke ich meiner lieben Frau Katja, die mir immer wieder Freiräume zur Bearbeitung dieser Dissertation geschaffen hat. Ohne ihr Verständnis und ihre Kompromißbereitschaft wären viele Dinge nicht geworden.

Christian Scheunert
Dresden, Dezember 2010

Inhaltsverzeichnis

Notation **xi**

Einleitung **1**

Kapitel 1 Grundlagen **3**
§ 1 Prozesse zweiter Ordnung . . . 3
§ 2 Stationäre Prozesse . . . 8
§ 3 Stationäre Vektorprozesse . . . 17
§ 4 Reelle Gaußsche zufällige Elemente . . . 18
§ 5 Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . 19
§ 6 Stochastische Differentialgleichungen . . . 20
§ 7 Zeitdiskrete lineare dynamische Systeme . . . 22

Kapitel 2 Über die Beschreibung zufälliger Phasenfluktuationen **27**
§ 1 Kleine Kugeln und zufällige Fluktuationen . . . 27
§ 2 Zufällige Frequenz- und Phasenfluktuationen in Oszillatoren . . . 42
§ 3 Modellierung zufälliger Phasenfluktuationen . . . 52

Kapitel 3 Von stetigen Spektren und diskreter Zeit **63**
§ 1 Spektrale Leistung zufälliger Frequenz- und Phasenfluktuationen . . . 64
§ 2 Modellierung zufälliger Frequenzfluktuationen . . . 69
§ 3 Simulation zufälliger Frequenz- und Phasenfluktuationen . . . 78

Kapitel 4 Aspekte der Stabilität **95**
§ 1 Berechnung der theoretischen Kovarianzfunktion . . . 96
§ 2 Analyse des autoregressiven Prozesses erster Ordnung . . . 102
§ 3 Stationäre ARMA-Prozesse mit endlicher Startzeit . . . 107
§ 4 Konzepte der zufälligen Initialisierung . . . 111
§ 5 Numerische Gesichtspunkte der zufälligen Initialisierung . . . 118

Zusammenfassung und Ausblick **123**

Anhang A Mathematische Hilfsmittel **125**
§ 1 Die Indikatorfunktion . . . 125
§ 2 Summen von Exponentialfunktionen . . . 126
§ 3 Einige Reihen und ihre Grenzwerte . . . 126
§ 4 Fourieranalyse . . . 135

Anhang B Die Kovarianzmatrix des Ausgabevektors **141**
§ 1 Die Elemente der Hauptdiagonale 143
§ 2 Die Elemente der Nebendiagonalen 148

Literaturverzeichnis **153**

Notation

Mathematische Zeichen

$\mathbb{1}$	Indikatorfunktion
B	Rückwärtsverschiebung
D^2	Varianz
E	Erwartungswert
R	Kovarianzfunktion
S	Spektraldichte
$\mathfrak{I}$	Einheitsmatrix
$\mathcal{A}'$	Transponierte der Matrix $\mathcal{A}$
$\mathfrak{B}$	BORELsche σ-Algebra
$\mathfrak{L}_p$	Raum der p-integrierbaren Funktionen, $1 \leqslant p < \infty$
BV	Raum der Funktionen von beschränkter Variation
C	Raum der stetigen Funktionen
l_p	Raum der p-summierbaren Folgen, $1 \leqslant p < \infty$
l_∞	Raum der beschränkten Folgen
L_p	Raum der Äquivalenzklassen von $\mathfrak{L}_p$, $1 \leqslant p < \infty$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{T}$	Menge der zulässigen Zeitpunkte
$\mathbb{W}$	Menge der zulässigen FOURIER-Frequenzen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$	Wahrscheinlichkeitsraum

Abkürzungen

AR	Autoregressive
ARMA	Autoregressive Moving Average
BIBO	Bounded Input Bounded Output
DGL	Differentialgleichung
GNU	GNU is not UNIX
IEEE	Institute of Electrical and Electronic Engineers
MA	Moving Average
NAG	Numerical Algorithms Group
STD	Standard

Einleitung

Seit mehr als hundert Jahren beschäftigen sich Wissenschaftler verschiedener Fachgebiete mit einem Phänomen, das unser Bild von der Welt grundlegend gewandelt hat. Seinen Ursprung hat dieser Wandel im Jahre 1905, als es Einstein gelang, eine theoretische Erklärung für jene physikalische Erscheinung zu liefern, die als Brownsche Bewegung bezeichnet wird. Damit hatte er sich zum Ziel gesetzt, eine zuvor kontrovers diskutierte Frage zu beantworten, nämlich, ob Atome existieren oder nicht. Heute wissen wir, daß dieses Resultat unerwartet weitreichende Konsequenzen für die Wissenschaft hatte. Basierend auf den Einsteinschen Überlegungen entwickelte sich nach 1905 eine neue mathematische Theorie, um Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern, wie sie auch zur Beschreibung der Brownschen Bewegung benötigt wurden, lösen zu können. Mit Hilfe dieser Theorie war es fortan möglich, sehr verschiedene, scheinbar regellos schwankende physikalische Erscheinungen sinnvoll zu charakterisieren.

Ein Fachgebiet hat über alle Maßen von dieser Entwicklung profitiert. Etwa zeitgleich mit der Entstehung der Theorie stochastischer Differentialgleichungen entwickelte sich auch die Elektrotechnik zu einer Wissenschaft von enormer technischer wie gesellschaftlicher Bedeutung. Den Anstoß dazu gab die Erfindung eines Bauelements zur Verstärkung elektrischer Ströme durch De Forest im Jahre 1906. Mit diesem als Triode bezeichneten Verstärker konnten plötzlich neuartige Geräte entwickelt werden, etwa zur Schwingungserzeugung, wie Barkhausen zeigte. Auch elektrische Meßgeräte von bislang unerreichter Genauigkeit gehörten dazu. Sie gaben Anlaß zu der Vermutung, daß es damit möglich sei, meßtechnisch bis ins unendlich Kleine vorzudringen und somit das Wesen der Natur vollends erkunden zu können. Durch die Anwendung des Einsteinschen Resultates konnte Schottky diese Vermutung um 1918 aber klar widerlegen, indem er zufällige Fluktuationen für die Endlichkeit der erreichbaren Verstärkung verantwortlich machte. Dazu betrachtete er zwei Arten zufälliger Fluktuationen unterschiedlichen Charakters, welche als thermisches Rauschen und als Schrotrauschen bezeichnet werden. Neben Schottky waren auch Johnson und Nyquist an der Erforschung zufälliger Fluktuationen in elektrischen Schaltungen beteiligt. Von wissenschaftlicher Bedeutung waren vor allem ihre Beiträge zum thermischen Rauschen, aber auch die Entdeckung des Funkelrauschens im Jahre 1925 geht auf Johnson zurück. Heute ist bekannt, daß es Schottky, Johnson und Nyquist damit gelungen ist, die drei Grundarten zufälliger Fluktuationen in elektrischen Bauelementen meßtechnisch zu erkunden und theoretisch zu beschreiben. Insbesondere aber schufen sie mit ihren Resultaten bei Ingenieuren und Wissenschaftlern ein Bewußtsein für die Existenz unvermeidbarer zufälliger Störungen in elektrischen Netzwerken. In der Folge stellte sich daher die Frage, welchen Effekt diese Störungen haben. Zu deren Beantwortung publizierte Rice 1944 einen umfassenden Artikel, in welchem er einen mathematischen Satz von Wiener und Chintschin der elektrotechnischen Anwendung zugänglich machte. Danach sind Autokorrelation und Spektraldichte stationärer Prozesse durch das Fourier-Integral miteinander verbunden. Kurze Zeit nach dem Riceschen Artikel und nach zahlreichen Vorarbeiten anderer Wissenschaftler gelang

es SHOCKLEY, BARDEEN und BRATTAIN 1948, ein neuartiges Bauelement zu entwickeln, das die Triode als elektrischen Verstärker ablösen sollte. Es wurde Transistor genannt. Weil dieser kleiner war als die Triode, weniger Energie benötigte und darüber hinaus nur selten ausfiel, konnten damit elektrische Geräte wesentlich verbessert und vielfältiger eingesetzt werden. Ein anderes Problem konnte aber auch mit dem Transistor nicht vermieden werden, nämlich die Verunreinigung des durchfließenden Stromes durch zufällige Fluktuationen. Aufgrund dieser Tatsache und der zunehmenden Bedeutung elektrischer Geräte für das gesellschaftliche Leben formierte sich in den 1960er Jahren eine Bewegung[1] mit dem Ziel, den Einfluß zufälliger Fluktuationen in kritischen Anwendungen genauer zu charakterisieren. Von Beginn an waren dabei Oszillatoren von Bedeutung, da elektrische Geräte der Meß- und Nachrichtentechnik häufig von zufälligen Störungen in dieser Komponente betroffen sind. Den Ausgangspunkt der Charakterisierung zufälliger Fluktuationen bildete ein Modell für die Oszillatorausgabe ψ gemäß

$$\psi(t) = [a + \alpha(t)]\ \cos[w_0 t + \varphi(t)], \qquad t \geqslant t_0,$$

worin α zufällige Amplituden- und φ zufällige Phasenfluktuationen beschreiben. Obwohl beide Störungen α und φ in praktischen Anwendungen beobachtet werden können, sind Ingenieure und Wissenschaftler oft nur an den Eigenschaften der zufälligen Phasenfluktuationen interessiert. Dabei wird zwischen den Spezialfällen der Kurz- und Langzeitstabilität von Oszillatoren unterschieden. Während die Langzeitstabilität vorwiegend für präzise Zeitangaben etwa in der Meßtechnik von Bedeutung ist, hat man in der Nachrichtentechnik vor allem an der Kurzzeitstabilität ein Interesse. Anhand der Eigenschaften zufälliger Phasenfluktuationen läßt sich deren Einfluß schon zur Entwurfszeit eines elektrischen Gerätes mittels Simulationen diskutieren.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein Verfahren zur Simulation zufälliger Phasenfluktuationen von Oszillatoren mit kurzem Gedächtnis unter Berücksichtigung von Datenblattangaben zu gewinnen. Obwohl Vorschläge dazu existieren, können diese wegen mangelnder Modelltreue nicht überzeugen. Eine Methode besteht etwa darin, φ gemäß der Vorschrift

$$\varphi(t) = \sum_{s=0}^{t} \xi(s), \qquad t \in \mathbb{N}_0$$

aus einem weißen Rauschen ξ zu generieren. Auch wenn dies ein effizientes Berechnungsverfahren darstellt, hat das Ergebnis, aufgrund unzureichender Spektraleigenschaften, nur wenig mit zufälligen Phasenfluktuationen von Oszillatoren zu tun. Einen anderen Ansatz verfolgt ein Modul, das mit der Software MATLAB angeboten wird. Die dort eingesetzte Methode stammt von KASDIN und beschreibt ein Verfahren zur Simulation der fraktionalen BROWNschen Bewegung. Somit führt auch dieser Ansatz zu stochastischen Prozessen, welche abweichende Spektraleigenschaften besitzen. Prinzipiell läßt sich sagen, daß bisher kein zufriedenstellendes Verfahren zur Simulation zufälliger Phasenfluktuationen in der Literatur beschrieben wurde.

Nach der Bereitstellung theoretischer Grundlagen wird im zweiten Kapitel zunächst der Stand aktueller Forschungen dargelegt. Anschließend wird darin ein zeitstetiges Modell zufälliger Phasenfluktuationen beschrieben, welches im dritten Kapitel in ein zeitdiskretes Simulationsmodell übertragen wird. Kapitel vier diskutiert schließlich Aspekte der Stabilität, die bei der praktischen Realisierung des Simulationsmodells zu beachten sind.

[1] Als IEEE *Subcommittee on Frequency Stability* im IEEE *Technical Committee on Frequency and Time.*

Kapitel 1

Grundlagen

In der gesamten Arbeit bezeichne $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{T} \neq \emptyset$ die Menge zulässiger Zeiten und $\mathbb{W} \neq \emptyset$ die Menge zulässiger FOURIER-Frequenzen.

1.1 Definition. Ein *reeller stochastischer Prozeß* ξ auf $\mathbb{T}$ ist eine Abbildung, die jedem Element $t \in \mathbb{T}$ eine Zufallsgröße $\xi(t)$ auf Ω zuordnet. Sind die Zufallsgrößen komplexwertig, so heißt ξ *komplexer stochastischer Prozeß*.

1.2 Bemerkung. Oft wird für die Zufallsgröße $\xi(t)$ auch ξ_t geschrieben. Darüber hinaus wird der stochastische Prozeß ξ auch mit $\{\xi_t\}$ oder $\{\xi_t : t \in \mathbb{T}\}$ bezeichnet.

Auch wenn wir uns später ausschließlich mit reellen stochastischen Prozessen befassen werden, müssen wir uns bei der Diskussion der Grundlagen nicht auf diesen Fall beschränken. Aus diesem Grund schreiben wir statt $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ allgemeiner $\mathbb{K}$. Ist $\mathbb{T}$ ein Intervall aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Z}$, so werden wir sagen, der stochastische Prozeß ξ sei *zeitstetig* bzw. *zeitdiskret*. Ferner bezeichnen wir die Abbildung $t \mapsto \xi(\omega, t)$ für $t \in \mathbb{T}$ und $\omega \in \Omega$ als *Realisierung* des stochastischen Prozesses ξ.

§1 Prozesse zweiter Ordnung

In der üblichen Form[1] bezeichne $\mathfrak{L}_2(P) := \mathfrak{L}_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ den Raum aller Zufallsgrößen ξ mit

$$\int_\Omega |\xi(\omega)|^2 \, P(d\omega) < \infty.$$

Dann ist durch

$$\|\xi\| := \sqrt{\int_\Omega |\xi(\omega)|^2 \, P(d\omega)}$$

eine Halbnorm auf $\mathfrak{L}_2(P)$ definiert. Da die Zufallsgrößen aus $\mathfrak{L}_2(P)$ nur Werte in $\mathbb{K}$ besitzen, ist $\mathfrak{L}_2(P)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Darin bildet die Menge $\mathfrak{N}$ der Zufallsgrößen ξ mit $\xi = 0$ P-fast sicher einen Unterraum. Also ist der Quotientenraum

$$L_2(P) := L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P) := \mathfrak{L}_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)/\mathfrak{N}$$

sinnvoll definiert. Die Elemente von $L_2(P)$ sind die Nebenklassen $[\xi] = \xi + \mathfrak{N}$, wobei ξ eine Zufallsgröße aus $\mathfrak{L}_2(P)$ repräsentiert. Zwei Zufallsgrößen ξ, η aus $\mathfrak{L}_2(P)$ liegen genau dann in

[1] Vergleiche dazu etwa [56, S. 229 ff.].

derselben Nebenklasse, wenn

$$\int_\Omega |\xi(\omega) - \eta(\omega)|^2 \, P(d\omega) = 0$$

gilt. Werden Addition und skalare Multiplikation für die Nebenklassen aus $L_2(P)$ mit Hilfe von Vertretern dieser Nebenklassen definiert, so ist auch $L_2(P)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für alle Vertreter ξ der Nebenklasse $[\xi]$ aus $L_2(P)$ hat $\|\xi\|$ den gleichen Wert. Folglich ist auch

$$\|[\xi]\| := \|\xi\|$$

sinnvoll definiert. Damit gilt $\|[\xi]\| = 0$ genau dann, wenn $[\xi] = \mathfrak{N}$ ist. Also ist $(L_2(P), \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Obwohl die Elemente von $L_2(P)$ keine Zufallsgrößen sind, werden diese üblicherweise als solche bezeichnet. Statt $[\xi]$ schreibt man also kürzer ξ. Dabei ist aber zu beachten, daß $\xi(\omega)$ keinen sinnvollen Ausdruck darstellt.

1.3 Satz (RIESZ-FISCHER). *$L_2(P)$ ist vollständig, d. h. zu jeder* CAUCHY*-Folge $\{\xi(n)\}$ aus $L_2(P)$ existiert ein ξ in $L_2(P)$, so daß $\|\xi(n) - \xi\| \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.*

Beweis. Siehe etwa [56, S. 231 f.]. □

Demnach ist $L_2(P)$ ein BANACH-Raum, der mit dem *Skalarprodukt*

$$\langle \xi, \eta \rangle := \int_\Omega \xi(\omega)\overline{\eta(\omega)} \, P(d\omega)$$

für beliebige ξ, η aus $L_2(P)$ und dem Zusammenhang

$$\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$$

zu einem HILBERT-Raum wird. Aufbauend darauf können wir nun Folgendes definieren.

1.4 Definition. Ein stochastischer Prozeß ξ heißt *Prozeß zweiter Ordnung*, wenn dieser durch eine Abbildung $\xi : \mathbb{T} \to L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ gegeben ist.

Erwartungswertfunktion und Kovarianzfunktion.

1.5 Definition. Sei ξ ein Prozeß zweiter Ordnung auf $\mathbb{T}$. Dann heißt die durch

$$M(t) := E[\xi(t)] := \langle \xi(t), \mathbb{1}_{\mathbb{T}}(t) \rangle, \qquad t \in \mathbb{T}$$

definierte Funktion M auf $\mathbb{T}$ die *Erwartungswertfunktion von ξ*.[2] Gilt $M(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$, so sagen wir, der Prozesses ξ ist *zentriert*.

[2] Die Existenz des Erwartungswertes ist laut Voraussetzung gesichert [56, S. 233 Satz 2.10].

1.6 Definition. Sei ξ ein Prozeß zweiter Ordnung auf $\mathbb{T}$. Dann heißt die durch

$$R(t,s) := E[\xi(t) - M(t)]\overline{[\xi(s) - M(s)]} = \langle \xi(t) - M(t), \xi(s) - M(s) \rangle$$

definierte Funktion R auf $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ die *Kovarianzfunktion* von ξ.

1.7 Satz. *Sei R die Kovarianzfunktion eines Prozesses zweiter Ordnung auf $\mathbb{T}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} R(t,t) &\geqslant 0, \qquad t \in \mathbb{T}, \\ R(t,s) &= \overline{R(s,t)}, \qquad s,t \in \mathbb{T}, \\ |R(t,s)| &\leqslant \sqrt{R(t,t)R(s,s)}, \qquad s,t \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe etwa [8, S. 16 f.]. □

1.8 Satz. *Eine Funktion R auf $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ ist genau dann die Kovarianzfunktion eines Prozesses zweiter Ordnung, wenn sie* HERMITEsch *und positiv semidefinit ist.*

Beweis. Sei R die Kovarianzfunktion eines Prozesses zweiter Ordnung ξ auf $\mathbb{T}$. Für eine beliebige Wahl von Punkten $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_i,t_j)\, c_i\, \overline{c_j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E[\xi(t_i) - M(t_i)]\overline{[\xi(t_j) - M(t_j)]}\, c_i\, \overline{c_j} \\ &= E\left|\sum_{i=1}^{n} [\xi(t_i) - M(t_i)]\, c_i\right|^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Also ist R HERMITEsch und positiv semidefinit. Zur Hinlänglichkeit siehe etwa [14, S. 18 f.]. □

1.9 Bemerkung. Werden im Beweis von Satz 1.8 die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gewählt, so ist die Symmetrieeigenschaft gesondert zu zeigen.

1.10 Definition. Für $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ sei ξ ein Prozeß zweiter Ordnung auf $\mathbb{T}$ mit der Kovarianzfunktion R. Existieren eine Zahl $m \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $R^* : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, so daß

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} E[\xi(t)] &= m, \\ \lim_{t\to\infty} R(t+s,t) &= R^*(s) \end{aligned}$$

für jedes $s \in \mathbb{T}$ gilt, dann heißt ξ *asymptotisch stationär*. Statt R^* schreiben wir wieder R.

Konvergenz im quadratischen Mittel.

1.11 Definition. Sei $\{\xi(n)\}$ eine Folge von Zufallsgrößen aus $L_2(P)$. Existiert eine Zufallsgröße ξ aus $L_2(P)$, so daß gilt

$$\lim_{n\to\infty} E|\xi(n) - \xi|^2 = 0,$$

dann heißt die Folge $\{\xi(n)\}$ *im quadratischen Mittel konvergent* gegen ξ, und wir schreiben

$$\xi = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \xi(n).$$

1.12 Lemma. *Seien $\{\xi(n)\}$, $\{\eta(n)\}$ zwei Folgen von Zufallsgrößen aus $L_2(P)$, welche im quadratischen Mittel gegen ξ bzw. η konvergieren. Dann gilt*

$$E(\xi) = \lim_{n\to\infty} E[\xi(n)],$$
$$E(\xi\eta) = \lim_{n\to\infty} E[\xi(n)\eta(n)].$$

Beweis. Siehe etwa [149, S. 60 f.]. □

Stetigkeit im quadratischen Mittel.

1.13 Definition. Ein Prozeß zweiter Ordnung ξ auf einem Intervall $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ heißt *im quadratischen Mittel stetig in $t \in \mathbb{T}$*, wenn gilt

$$\operatorname*{l.i.m.}_{s\to t} \xi(s) = \xi(t).$$

Ferner heißt ξ *im quadratischen Mittel stetig*, wenn dieser Prozeß in jedem Punkt $t \in \mathbb{T}$ stetig im quadratischen Mittel ist.

1.14 Satz. *Ein Prozeß zweiter Ordnung ist genau dann im quadratischen Mittel stetig in $t \in \mathbb{T}$, wenn seine Kovarianzfunktion in (t,t) stetig ist. Ist die Kovarianzfunktion stetig in (t,t) und (s,s) für $s \in \mathbb{T}$, so ist diese auch stetig in (t,s) und (s,t).*

Beweis. Siehe etwa [14, S. 32], [42, S. 83], [182, S. 77 f.]. □

1.15 Bemerkung. Aus der Stetigkeit eines Prozesses zweiter Ordnung im quadratischen Mittel kann nicht die Stetigkeit seiner Realisierungen gefolgert werden. Ein Beispiel dafür stellt der Poisson-Prozeß dar [42, S. 83 f.].

Differenzierbarkeit im quadratischen Mittel.

1.16 Definition. Ein Prozeß zweiter Ordnung ξ auf einem offenen Intervall $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ heißt *im quadratischen Mittel differenzierbar in $t \in \mathbb{T}$*, wenn der Grenzwert

$$\operatorname*{l.i.m.}_{s\to 0} \frac{\xi(t+s) - \xi(t)}{s}$$

existiert. Ist dies der Fall, dann wird dieser Grenzwert mit $\dot{\xi}(t)$ bezeichnet. Speziell heißt ξ *im quadratischen Mittel differenzierbar*, wenn dieser Prozeß in jedem Punkt $t \in \mathbb{T}$ differenzierbar im quadratischen Mittel ist. Dann bezeichnen wir die Ableitung des Prozesses ξ mit $\dot{\xi}$.

1.17 Satz. *Ein Prozeß zweiter Ordnung ξ ist genau dann im quadratischen Mittel differenzierbar in $t \in \mathbb{T}$, wenn seine Kovarianzfunktion stetige partielle Ableitungen in (t, t) besitzt.*

Beweis. Siehe etwa [14, S. 36 Problem 4 und S. 263], [42, S. 84], [182, S. 79 f.]. □

1.18 Bemerkung. Aus der Differenzierbarkeit eines Prozesses zweiter Ordnung im quadratischen Mittel kann nicht auf die Differenzierbarkeit seiner Realisierungen geschlossen werden. Ein Beispiel dafür stellt das Integral über einen Poisson-Prozeß dar [42, S. 84].

Stochastisches Riemann-Integral.

1.19 Definition. Seien ξ ein Prozeß zweiter Ordnung und f eine komplexwertige Funktion auf dem endlichen Intervall $\mathbb{T} = [a, b]$. Ferner seien $\{\mathbb{T}_n\}$ eine Folge von Zerlegungen von $\mathbb{T}$, d. h.

$$\mathbb{T}_n = \{t_1, \ldots, t_n : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$$

mit $\max(t_{j+1} - t_j) \to 0$ für $n \to \infty$, und $\{\varsigma(n)\}$ eine Folge von Zufallsgrößen gemäß

$$\varsigma(n) := \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j)\xi(t_j)(t_{j+1} - t_j).$$

Existiert eine Zufallsgröße ι mit

$$\iota = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{n\to\infty} \varsigma(n)$$

unabhängig von der Wahl der Folge $\{\mathbb{T}_n\}$, so heißt ι *stochastisches* Riemann*-Integral*. Anstelle von ι schreiben wir dann

$$\int_a^b f(t)\xi(t)\,dt. \tag{1.1}$$

1.20 Bemerkung. Werden in Definition 1.19 statt $\mathbb{T} = [a, b]$ Intervalle der Art $\mathbb{T}_m = [-m, m]$ betrachtet, so kann das stochastische Riemann-Integral analog durch den Limes

$$\iota = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{m\to\infty} \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{n\to\infty} \varsigma(m, n)$$

auf $\mathbb{R}$ eingeführt werden, falls dieser Grenzwert existiert. Anstelle von ι schreiben wir dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\xi(t)\,dt. \tag{1.2}$$

1.21 Satz. *Seien ξ ein zentrierter Prozeß zweiter Ordnung mit der Kovarianzfunktion R und f eine komplexwertige Funktion auf $\mathbb{T} = [a, b]$. Das stochastische* RIEMANN*-Integral*

$$\iota := \int_a^b f(t)\xi(t)\,dt$$

existiert genau dann, wenn das gewöhnliche RIEMANN*-Integral*

$$I := \int_a^b \int_a^b f(t)\overline{f(s)}R(t,s)\,ds\,dt$$

existiert. Ist dies der Fall, dann gilt $E(\iota) = 0$ und $E|\iota|^2 = I$.

Beweis. Siehe etwa [42, S. 86 f.], [182, S. 80 f.]. □

1.22 Bemerkung. Satz 1.21 gilt analog für das stochastische RIEMANN-Integral (1.2).

1.23 Folgerung. *Seien ξ und f wie in Satz 1.21 gegeben. Ist R auf $[a, b] \times [a, b]$ stetig und f* RIEMANN*-integrierbar, dann existiert wegen*

$$\int_a^b \int_a^b \left|f(t)\overline{f(s)}R(t,s)\right| ds\,dt \leqslant \max_{t,s\in[a,b]} |R(t,s)| \left(\int_a^b |f(t)|\,dt\right)^2$$

das stochastische RIEMANN*-Integral* (1.1).

1.24 Bemerkung. Folgerung 1.23 gilt analog für das stochastische RIEMANN-Integral (1.2), wenn man zusätzlich verlangt, daß R beschränkt ist. Diese Aussage folgt sofort aus

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} \left|f(t)\overline{f(s)}R(t,s)\right| ds\,dt \leqslant \sup_{t,s\in\mathbb{R}} |R(t,s)| \left(\int_{-\infty}^{-\infty} |f(t)|\,dt\right)^2.$$

§2 Stationäre Prozesse

Bei der Modellierung physikalischer Vorgänge durch stochastische Prozesse zweiter Ordnung können oft zusätzliche Annahmen über die Eigenschaften der Erwartungswert- und Kovarianzfunktion gemacht werden. Dabei spielt die Klasse der stationären Prozesse eine besondere Rolle.

1.25 Definition. Sei ξ ein Prozeß zweiter Ordnung auf $\mathbb{T}$. Ist die Erwartungswertfunktion von ξ konstant auf $\mathbb{T}$ und genügt dessen Kovarianzfunktion der Relation

$$R(t,s) = R(t-s,0), \qquad s,t \in \mathbb{T},$$

dann heißt ξ *stationär*. Statt $R(t-s,0)$, $s,t \in \mathbb{T}$ schreiben wir dann kürzer $R(t)$, $t \in \mathbb{T} - \mathbb{T}$.[3]

[3] Wie üblich gelte dabei $\mathbb{T} - \mathbb{T} := \{t - s : s, t \in \mathbb{T}\}$.

1.26 Bemerkung. Die Bezeichnung des stationären Prozesses wird in der Literatur nicht immer einheitlich verwendet. Man versteht darunter bisweilen auch die starke Stationarität bzw. die Stationarität im engeren Sinne [49, S. 94].

Aufgrund ihrer besonderen Struktur lassen sich gewisse Aussagen von §1 für stationäre Prozesse weiter präzisieren. In der Anwendung ergeben sich daraus oft kürzere Darstellungen.

1.27 Folgerung. *Ein stationärer Prozeß ξ mit der Kovarianzfunktion R ist genau dann im quadratischen Mittel stetig, wenn R in $0 \in \mathbb{T} - \mathbb{T}$ stetig ist. Dann ist R stetig auf $\mathbb{T} - \mathbb{T}$.*

Beweis. Siehe dazu Satz 1.14 und vergleiche [14, S. 32 f.] sowie [42, S. 123 f.]. □

1.28 Folgerung. *Ein stationärer Prozeß ξ mit der Kovarianzfunktion R ist genau dann im quadratischen Mittel differenzierbar, wenn R in $0 \in \mathbb{T} - \mathbb{T}$ zweimal stetig differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so ist $\dot{\xi}$ ein stationärer Prozeß mit der Kovarianzfunktion $-\ddot{R}$.*

Beweis. Siehe dazu Satz 1.17 und vergleiche [14, S. 33], [42, S. 124] sowie [176, S. 50 f.]. □

1.29 Folgerung. *Seien ξ ein zentrierter stationärer Prozeß mit der Kovarianzfunktion R und f eine komplexwertige Funktion auf $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$. Ist R stetig auf $\mathbb{T} - \mathbb{T}$ und f* Riemann*-integrierbar, dann existiert das stochastische* Riemann*-Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\xi(t)\,dt.$$

Beweis. Siehe dazu Bemerkung 1.24 und beachte, daß wegen Lemma 1.12 für alle $t \in \mathbb{T} - \mathbb{T}$ gilt $|R(t)| \leqslant R(0)$. Ferner vergleiche [42, S. 124] unter Berücksichtigung von [75, S. 454 f.]. □

1.30 Satz. *Seien ξ ein stationärer Prozeß auf $\mathbb{T}$ und $a \in \mathbb{T}$ beliebig fest. Existiert das stochastische* Riemann*-Integral*

$$\eta(t) := \int_a^t \xi(s)\,ds, \qquad t \geqslant a,$$

dann ist η im quadratischen Mittel stetig. Ist darüber hinaus auch der Prozeß ξ im quadratischen Mittel stetig, dann ist η im quadratischen Mittel differenzierbar und es gilt $\dot{\eta} = \xi$.

Beweis. Siehe etwa [34, S. 27], [92, S. 68 f.]. □

1.31 Satz. *Seien ξ ein stationärer Prozeß auf $\mathbb{T}$ und $[a, b] \subset \mathbb{T}$ ein Intervall. Ist die Kovarianzfunktion von ξ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt*

$$\xi(t) = \xi(a) + \int_a^t \dot{\xi}(s)\,ds, \qquad t \in [a, b].$$

Beweis. Siehe etwa [34, S. 27], [92, S. 69 f.]. □

Spektraldarstellung der Kovarianzfunktion. Die besondere Struktur der Kovarianzfunktion stationärer Prozesse kann genutzt werden, um eine entsprechende Spektraldarstellung zu gewinnen. Dabei sind die Fälle $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ zu unterscheiden.[4]

1.32 Satz (Bochner-Chintschin). *Eine Funktion $R : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist genau dann Kovarianzfunktion eines im quadratischen Mittel stetigen, stationären Prozesses auf $\mathbb{R}$, wenn ein eindeutiges endliches Maß F auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ existiert, so daß gilt*

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt}\, F(dw), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Beweis. Siehe etwa [8, S. 39 ff.], [49, S. 519 ff.], [114, S. 97 f.], [182, S. 94 ff.]. □

1.33 Satz (Herglotz). *Eine Funktion $R : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist genau dann Kovarianzfunktion eines stationären Prozesses auf $\mathbb{Z}$, wenn ein eindeutiges endliches Maß F auf $\mathfrak{B}\big((-\pi, \pi]\big)$ existiert, so daß gilt*

$$R(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\, F(dw), \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Beweis. Siehe etwa [33, S. 117 f.], [49, S. 474 ff.], [165, S. 409 f.]. □

1.34 Bemerkung. Wird in Satz 1.33 nicht das Intervall $(-\pi, \pi]$ sondern $[-\pi, \pi]$ gewählt, so ist das Maß F im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

1.35 Definition. Sei ξ ein stationärer Prozeß mit stetiger Kovarianzfunktion R. Das Maß F, welches R gemäß Satz 1.32 bzw. Satz 1.33 eindeutig zugeordnet ist, heißt *Spektralmaß von ξ*. Ferner heißen (1.3) bzw. (1.4) *Spektraldarstellung der Kovarianzfunktion R*.

Spektraldichte. Aus der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen ist bekannt, daß sich jede nichtfallende, rechtsseitig stetige Funktion $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ mittels

$$f(w) = f_1(w) + f_2(w) + f_3(w), \qquad w \in \mathbb{W}$$

darstellen läßt [144, S. 40 f.]. Dabei ist f_1 eine Treppenfunktion, f_2 eine absolut stetige und f_3 eine singuläre Funktion. In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden Funktionen vom Typ f auch maßdefinierend oder Verteilungsfunktionen genannt, da diesen in eindeutiger Weise ein Maß

$$F\big((a, b]\big) = f(b) - f(a), \qquad a, b \in \mathbb{W} \text{ mit } a \leqslant b$$

zugeordnet ist [24, S. 167]. Folglich kann äquivalent dazu jedes Maß F dieser Art in der Form

$$F(B) = F_1(B) + F_2(B) + F_3(B), \qquad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{W})$$

[4] Beachte, daß in diesen Fällen $\mathbb{T} = \mathbb{T} - \mathbb{T}$ gilt.

geschrieben werden, wenn F_1 ein diskretes, F_2 ein absolut stetiges und F_3 ein singuläres Maß bezeichnen. Oft interessiert man sich jedoch ausschließlich für absolut stetige Maße, also für $F = F_2$. Wird F in diesem Fall mit dem Spektralmaß identifiziert, so besitzt es nach dem Satz von RADON-NIKODÝM bezüglich des LEBESGUE-Maßes eine fast sicher eindeutig bestimmte Dichte.[5]

1.36 Definition. Sei ξ ein stationärer Prozeß mit stetiger Kovarianzfunktion. Ist das Spektralmaß F von ξ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{W})$ absolut stetig, dann heißt die durch F fast sicher eindeutig bestimmte Dichte auf $\mathbb{W}$ *Spektraldichte von* ξ, welche mit S bezeichnet wird.

1.37 Bemerkung. Im Zusammenhang mit physikalischen Vorgängen und $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ wird der Spektraldichte häufig auch der Begriff der *spektralen Leistungsdichte* zugeordnet. Hingegen spricht man im Fall $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ auch vom *Leistungsspektrum*.

1.38 Bemerkung. Gemäß Definition 1.36 hat der Begriff der Spektraldichte nur dann einen Sinn, wenn man von stationären Prozessen mit stetiger Kovarianzfunktion und absolut stetigem Spektralmaß spricht. Insbesondere können instationäre Prozesse keine Spektraldichte besitzen.

1.39 Folgerung. *Sei ξ ein stationärer Prozeß mit stetiger Kovarianzfunktion R. Besitzt ξ eine Spektraldichte S auf $\mathbb{W}$, dann gilt*

$$R(t) = \int_{\mathbb{W}} e^{iwt} S(w)\, dw, \qquad t \in \mathbb{T}. \tag{1.5}$$

Beweis. Die Aussage folgt aus den Sätzen 1.32, 1.33 und dem von RADON-NIKODÝM [165, S. 207]. □

1.40 Bemerkung. Da (1.5) nur eine spezielle Darstellung von (1.3) bzw. (1.4) ist, wird auch diese Gleichung als *Spektraldarstellung der Kovarianz* bezeichnet.

Um in der praktischen Anwendung überprüfen zu können, ob ein stationärer Prozeß eine Spektraldichte besitzt, erweist sich der Satz von RADON-NIKODÝM als nicht vorteilhaft. Daher ist es sinnvoll, andere Aussagen für diesen Nachweis zu verwenden. Weil (1.5) das FOURIER-Umkehrintegral repräsentiert, genügt es, sich auf die Eigenschaften der Kovarianzfunktion zu beziehen.[6] Dabei sind erneut die Fälle $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ zu unterscheiden.

1.41 Satz. *Ein stationärer Prozeß auf $\mathbb{R}$ mit der stetigen Kovarianzfunktion R besitzt eine Spektraldichte, wenn $R \in L_1(\mathbb{R})$ gilt.*

Beweis. Siehe etwa [8, S. 42], [114, S. 99]. □

1.42 Satz. *Ein stationärer Prozeß auf $\mathbb{Z}$ mit der Kovarianzfunktion R besitzt eine Spektraldichte, wenn $R \in l_1(\mathbb{Z})$ gilt.*

Beweis. Siehe etwa [8, S. 42], [33, S. 120]. □

[5] Vergleiche dazu auch [56, S. 281].
[6] Vergleiche dazu auch §4 in Anhang A.

1.43 Satz. *Für einen stationären Prozeß mit stetiger Kovarianzfunktion R und Spektraldichte S ist R genau dann reell, wenn S und R gerade Funktionen sind.*

Beweis. Siehe etwa [8, S. 44 f.], [114, S. 99]. □

1.44 Satz. *Sei ξ ein stationärer Prozeß auf $\mathbb{Z}$ mit der Kovarianzfunktion R und der Spektraldichte S. Ist S auf $(-\pi, \pi]$ von beschränkter Variation, dann gilt*

$$S(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-iwt} R(t) \quad (f.s.), \qquad w \in (-\pi, \pi].$$

Beweis. Siehe etwa [8, S. 43] und vergleiche §4 in Anhang A. □

Spektraldarstellung stationärer Prozesse. Neben der eingeführten Spektraldarstellung für Kovarianzfunktionen wird in zahlreichen Aussagen eine analoge Darstellung auch für stationäre Prozesse selbst benötigt. Allerdings sind die FOURIER-Reihe bzw. das FOURIER-Integral für eine solche Darstellung nicht geeignet, weil die Realisierungen solcher Prozesse im allgemeinen weder periodisch noch integrierbar sind.[7] Wird die FOURIER-Darstellung aber auf Integrale bezüglich zufälliger orthogonaler Maße erweitert, so gelangt man zum gewünschten Resultat. Derartige Integrale werden auch als stochastisch bezeichnet.

1.45 Definition. Seien F ein endliches Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{W})$ und $\zeta : \mathfrak{B}(\mathbb{W}) \to L_2(P)$ eine zufällige Mengenfunktion. Genügt ζ den Bedingungen

1.) $E[\zeta(B)] = 0$ für alle $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{W})$,

2.) $\zeta\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(B_k)$ für alle $B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{W})$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $B_k \cap B_l = \emptyset$ mit $k \neq l$,

3.) $E\big[\zeta(B_1)\overline{\zeta(B_2)}\big] = F(B_1 \cap B_2)$ für alle $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{W})$,

dann heißt ζ *orthogonales zufälliges Maß bezüglich F.*

Nach dieser Definition ist die abgeschlossene lineare Hülle von $\{\zeta(B) : B \in \mathfrak{B}(\mathbb{W})\}$ also ein abgeschlossener Unterraum von $L_2(P)$. Wir wollen diesen Unterraum mit $L_2(\zeta)$ bezeichnen und $L_2(F)$, $L_2(\zeta)$ durch einen isometrischen, linearen Operator miteinander verbinden.

1.46 Satz. *Sei ζ ein orthogonales zufälliges Maß bezüglich F. Dann existiert ein isometrischer, linearer Operator $I : L_2(F) \to L_2(\zeta)$, so daß für jede einfache meßbare Funktion*

$$f := \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{B_k}$$

aus $L_2(F)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $c_k \in \mathbb{C}$ und $B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{W})$ gilt

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \zeta(B_k).$$

[7] Vergleiche dazu auch [144, S. 15 ff. und S. 206 ff.] sowie §4 in Anhang A.

Beweis. Siehe etwa [14, S. 51], [155], [165, S. 413 f.]. □

Für das weitere Vorgehen ist nun entscheidend, daß der Unterraum der einfachen meßbaren Funktionen $f \in L_2(F)$, wie wir sie in Satz 1.46 verwendet haben, dicht in $L_2(F)$ liegt. Folglich besitzt I eine eindeutige Fortsetzung zu einem isometrischen, linearen Operator auf ganz $L_2(F)$ mit Werten in $L_2(\zeta)$ [14, S. 52]. Bezeichnen wir auch die Fortsetzung wieder mit I, dann können wir das stochastische Integral bezüglich des orthogonalen zufälligen Maßes definieren.

1.47 Definition. Sei ζ ein orthogonales zufälliges Maß bezüglich F. Für $f \in L_2(F)$ heißt

$$\int_{\mathbb{W}} f(w)\,\zeta(dw) := I(f)$$

stochastisches Integral von f bezüglich ζ.

Nach den genannten Voraussetzungen und der Isometrie des linearen Operators I können wir nun folgende nützliche Eigenschaften des stochastisches Integrals bezüglich ζ notieren.

1.48 Satz. *Sei ζ ein orthogonales zufälliges Maß bezüglich F. Ferner seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $f_n, f, g \in L_2(F)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

1.) $\int_{\mathbb{W}} f(w)\,\zeta(dw) \in L_2(P)$,

2.) $E\Big[\int_{\mathbb{W}} f(w)\,\zeta(dw)\overline{\int_{\mathbb{W}} g(w)\,\zeta(dw)}\Big] = \int_{\mathbb{W}} f(w)\overline{g(w)}\,F(dw)$,

3.) $\int_{\mathbb{W}} af(w) + bg(w)\,\zeta(dw) = a\int_{\mathbb{W}} f(w)\,\zeta(dw) + b\int_{\mathbb{W}} g(w)\,\zeta(dw)$,

4.) $\mathrm{l.\,i.\,m.}_{n\to\infty} f_n = f$ *genau dann, wenn* $\mathrm{l.\,i.\,m.}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{W}} f_n(w)\,\zeta(dw) = \int_{\mathbb{W}} f(w)\,\zeta(dw)$.

Beweis. Siehe etwa [14, S. 52], [155], [165, S. 413]. □

Nun bezeichne ξ einen zentrierten stationären Prozeß mit dem Spektralmaß F. Ist $L_2(\xi)$ der durch ξ erzeugte Unterraum von $L_2(P)$ und ζ ein orthogonales zufälliges Maß bezüglich F, dann wissen wir aufgrund der bisherigen Aussagen, daß $L_2(\zeta) \subset L_2(\xi)$ gilt. Aus dem Satz von Karhunen erhalten wir darüber hinaus auch $L_2(\zeta) \supset L_2(\xi)$ und daher $L_2(\zeta) = L_2(\xi)$ [8, S. 34 ff.]. Folglich lassen sich zentrierte stationäre Prozesse in Form stochastischer Integrale bezüglich orthogonaler zufälliger Maße notieren, wie die folgende Aussage zeigt.

1.49 Satz (Cramér). *Sei ξ ein zentrierter stationärer Prozeß auf $\mathbb{T}$ mit stetiger Kovarianzfunktion und dem Spektralmaß F auf $\mathfrak{B}(\mathbb{W})$. Dann existiert genau ein orthogonales zufälliges Maß ζ bezüglich F, so daß ξ wie folgt darstellbar ist*

$$\xi(t) = \int_{\mathbb{W}} e^{iwt}\,\zeta(dw), \qquad t \in \mathbb{T}. \tag{1.6}$$

Beweis. Siehe etwa [8, S. 43 f.], [14, S. 58 f.], [114, S. 102 ff.]. □

1.50 Definition. Sei ξ ein zentrierter stationärer Prozeß auf $\mathbb{T}$ mit stetiger Kovarianzfunktion und dem Spektralmaß F auf $\mathfrak{B}(\mathbb{W})$. Dann heißt das orthogonale zufällige Maß, welches F gemäß Satz 1.49 eindeutig zugeordnet ist, *zufälliges Spektralmaß von* ξ. Darüber hinaus heißt (1.6) *Spektraldarstellung des stationären Prozesses* ξ.

Beispiele stationärer Prozesse. Im Verlauf der vorliegenden Arbeit werden wir uns vorwiegend mit stationären Prozessen befassen, die gewissen Anforderungen genügen. Im Zusammenhang mit diskreter Zeit handelt es sich dabei um nachfolgende Prozesse.

1.51 Definition. Sei ξ ein zentrierter Prozeß zweiter Ordnung auf $\mathbb{Z}$. Sind die zufälligen Größen $\xi(t)$ und $\xi(s)$ für $t \neq s$ unkorreliert, gilt für die Kovarianzfunktion von ξ also

$$R_\xi(t,s) = \mathbb{1}_{\{0\}}(t-s), \qquad t,s \in \mathbb{Z},$$

dann heißt ξ *weißes Rauschen.*

1.52 Definition. Für $m \in \mathbb{N}$ seien $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ mit $a_0 a_m \neq 0$ und ξ ein weißes Rauschen auf $\mathbb{Z}$. Ist η ein Prozeß mit der Eigenschaft

$$\eta(t) = a_0\xi(t) + a_1\xi(t-1) + \cdots + a_m\xi(t-m), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

dann heißt η *Prozeß der gleitenden Mittel* oder *moving average (MA-) Prozeß* m-ter Ordnung.

1.53 Definition. Seien $h := (h_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ eine Folge reeller Zahlen und ξ ein weißes Rauschen auf $\mathbb{Z}$. Gilt $h \in l_2(\mathbb{N}_0)$ und ist η ein Prozeß mit der Eigenschaft

$$\eta(t) = h_0\xi(t) + h_1\xi(t-1) + h_2\xi(t-2) + \cdots, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

dann heißt η *linearer Prozeß* oder *Prozeß des unendlichen gleitenden Mittels.*

Offenbar ist der lineare Prozeß mit $h_k = a_k \mathbb{1}_{\{0,\ldots,m\}}(k)$ eine allgemeinere Darstellung des MA-Prozesses m-ter Ordnung. Nun wollen wir eine Aussage zur Stationarität des linearen Prozesses formulieren. Dabei ist zu beachten, daß für $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ gilt $l_p \subset l_q$ [77, S. 91].

1.54 Satz. *Seien $h := (h_k)$, $k \in \mathbb{Z}$ eine Folge reeller Zahlen und ξ ein stationärer Prozeß auf $\mathbb{Z}$ mit der Kovarianzfunktion R_ξ. Gilt $h \in l_1(\mathbb{Z})$, dann existiert der Grenzwert*

$$\eta(t) = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} h_k\xi(t-k), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

und η ist ein stationärer Prozeß mit der Erwartungswertfunktion

$$E[\eta(t)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} h_k E[\xi(t)], \qquad t \in \mathbb{Z}$$

und der Kovarianzfunktion

$$R_\eta(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \sum_{k=-n}^{n} h_j h_k R_\xi(t-j+k), \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Siehe etwa [33, S. 84]. □

1.55 Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_0, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_0 b_n \neq 0$, $b_0 = 1$ und ξ ein weißes Rauschen auf $\mathbb{Z}$. Ist η ein Prozeß mit der Eigenschaft

$$b_0\eta(t) + b_1\eta(t-1) + \cdots + b_n\eta(t-n) = a_0\xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

dann heißt η *autoregressiver (AR-) Prozeß* n-ter Ordnung.

1.56 Definition. Für $m, n \in \mathbb{N}$ seien $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_0 a_m b_n \neq 0$, $b_0 = 1$ und ξ ein weißes Rauschen auf $\mathbb{Z}$. Ist η ein Prozeß mit der Eigenschaft

$$b_0\eta(t) + \cdots + b_n\eta(t-n) = a_0\xi(t) + \cdots + a_m\xi(t-m), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

dann heißt η *autoregressiver moving average (ARMA-) Prozeß* (m, n)-ter Ordnung.

Neben Prozessen mit diskreter Zeit werden wir später auch Prozesse mit stetiger Zeit betrachten. Speziell werden wir uns für diejenigen zeitstetigen Prozesse interessieren, welche sich durch Abtastung in Prozesse mit diskreter Zeit überführen lassen.

1.57 Definition. Seien $W > 0$ und ξ ein stationärer Prozeß auf $\mathbb{R}$ mit stetiger Kovarianzfunktion und dem Spektralmaß F auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Besitzt F die Eigenschaft

$$F((-\infty, -W]) = F([W, \infty)) = 0,$$

dann heißt ξ *bandbegrenzt mit der Grenzfrequenz W*.

1.58 Satz (KOTELNIKOV-SHANNON). *Sei ξ ein stationärer Prozeß auf $\mathbb{R}$ mit stetiger Kovarianzfunktion. Ist ξ bandbegrenzt mit der Grenzfrequenz W, dann gilt*

$$\xi(t) = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \xi(\pi k/W) \frac{\sin(Wt - \pi k)}{Wt - \pi k}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Siehe etwa [14, S. 68 und S. 272], [182, S. 106 f.]. □

Darstellung stationärer Prozesse im Zeitbereich. Zur Beschreibung stationärer Prozesse im Zeitbereich hält die Theorie der linearen Vorhersage weitreichende Resultate bereit, welche wir später benötigen werden. Im folgenden wollen wir die wichtigsten Begriffe sowie einige Aussagen in diesem Zusammenhang formulieren. Dabei werden wir uns gemäß [42, S. 104 ff.] auf die wesentlichen Fakten beschränken. Zur weiterführenden Behandlung dieser Thematik sei der interessierte Leser auf [8, S. 121 ff.], [14, S. 63 ff.], [144, S. 727 ff.] verwiesen.

Wie üblich bezeichne $L_2(P)$ den HILBERT-Raum aller im allgemeinen komplexwertigen zufälligen Größen mit endlichen zweiten Momenten. Da wir im folgenden ausschließlich lineare Operationen betrachten, nehmen wir ferner ohne Einschränkung an, daß die zufälligen Größen den Erwartungswert Null besitzen. Ist ξ ein gegebener zentrierter stationärer Prozeß auf $\mathbb{T}$, dann beschreibt dieser in $L_2(P)$ eine gewisse Kurve K. Die mit $H(\xi)$ bezeichnete abgeschlossene

lineare Hülle von ξ ist dann der kleinste Unterraum von $L_2(P)$, der die Kurve K vollständig enthält. Insbesondere läßt sich zeigen, daß $H(\xi)$ auch ein HILBERT-Raum ist. Nun bezeichnen wir $H(\xi,t)$ für $t \in \mathbb{T}$ als den linearen Unterraum von $H(\xi)$, der durch die zufälligen Größen $\xi(s)$ mit $s \leqslant t$ erzeugt wird. Dann enthält $H(\xi,t)$ genau jenen Abschnitt der Kurve K, welcher mit den Punkten $\xi(s)$ aus $H(\xi)$ für $s \leqslant t$ korrespondiert. Die Elemente von $H(\xi,t)$ sind demnach als Linearkombination $a_1\xi(s_1) + \cdots + a_n\xi(s_n)$ mit $s_1, \ldots, s_n \leqslant t$ bzw. als Grenzwert einer solchen im quadratischen Mittel darstellbar. Anschaulich läßt sich daher sagen, daß $H(\xi,t)$ bezüglich des Zeitpunktes t die Vergangenheit und die Gegenwart des Prozesses ξ repräsentiert. Betrachten wir nun die Gesamtheit aller Unterräume $H(\xi,t)$ von $H(\xi)$, dann können wir für jedes $t \in \mathbb{T}$ die folgende Relation notieren

$$H(\xi,-\infty) \subset H(\xi,t) \subset H(\xi),$$

worin $H(\xi,-\infty) := \lim_{t\to-\infty} H(\xi,t)$ die unendliche Vergangenheit von ξ beschreibt. Dieser Teilmengenbeziehung lassen sich nun zwei Extremfälle entnehmen.

1.59 Definition. Sei ξ ein zentrierter stationärer Prozeß auf $\mathbb{T}$. Gilt $H(\xi,-\infty) = H(\xi)$, d. h. ist $H(\xi,t)$ identisch für alle $t \in \mathbb{T}$, dann heißt ξ *deterministisch* bzw. *singulär*. Hingegen heißt ξ *rein nichtdeterministisch* oder *regulär*, wenn ξ der Relation $H(\xi,-\infty) = \{0\}$ genügt.

Gelegentlich wird neben dem Begriff des rein nichtdeterministischen auch der des nichtdeterministischen Prozesses eingeführt. Man sagt, ein zentrierter stationärer Prozeß ξ auf $\mathbb{T}$ sei *nichtdeterministisch*, wenn dieser nicht singulär ist, d. h. wenn ein $t \in \mathbb{T}$ existiert, so daß

$$H(\xi,-\infty) \subsetneq H(\xi,t)$$

gilt. Allerdings hat dieser Begriff aufgrund der folgenden Aussage[8] nur eine geringe Bedeutung.

1.60 Satz (WOLD). *Sei θ ein zentrierter stationärer Prozeß auf $\mathbb{Z}$. Dann existieren ein regulärer Prozeß η und ein singulärer Prozeß ς, so daß η und ς gegenseitig unkorreliert sind und θ die eindeutige Darstellung*

$$\theta(t) = \eta(t) + \varsigma(t), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

besitzt. Darüber hinaus existiert eine quadratisch summierbare Koeffizientenfolge (h_k) auf $\mathbb{N}_0$, so daß der reguläre Prozeß η als linearer Prozeß

$$\eta(t) = \operatorname*{l.i.m.}_{s\to\infty} \sum_{k=0}^{s} h_k\xi(t-k), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

bezüglich des weißen Rauschens ξ beschrieben werden kann.

Beweis. Siehe etwa [14, S. 65], [42, S. 107 f.], [144, S. 756 ff.], [181]. □

[8] Ein entsprechendes Resultat für den Fall $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ist [144, S. 735 f.] zu entnehmen.

Zur praktischen Anwendung des WOLDschen Satzes benötigen wir noch ein Resultat, mit welchem sich die Regularität eines zentrierten stationären Prozesses einfach überprüfen läßt.[9]

1.61 Satz. *Sei η ein zentrierter stationärer Prozeß auf $\mathbb{Z}$. Genau dann ist η regulär, wenn dieser Prozeß eine Spektraldichte S_η besitzt, welche der folgenden Eigenschaft genügt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\bigl[S_\eta(w)\bigr]\, dw > -\infty.$$

Beweis. Siehe etwa [8, S. 55], [14, S. 66 f.]. □

§3 Stationäre Vektorprozesse

Neben eindimensionalen werden wir später auch mehrdimensionale stationäre Prozesse, d. h. stationäre Vektorprozesse betrachten. Diese werden analog zum eindimensionalen Fall definiert.

1.62 Definition. Sei $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)'$ ein Vektorprozeß zweiter Ordnung auf $\mathbb{T}$ mit der durch

$$M(t) := E[\xi(t)] := \bigl\{E[\xi_1(t)], \ldots, E[\xi_n(t)]\bigr\}', \qquad t \in \mathbb{T}$$

definierten Erwartungswertvektorfunktion sowie der Kovarianzmatrixfunktion

$$R(t,s) := E\bigl[\xi(t) - M(t)\bigr]\,\overline{\bigl[\xi(s) - M(s)\bigr]'}, \qquad t, s \in \mathbb{T}.$$

Ist M konstant auf $\mathbb{T}$ und genügt R der Relation

$$R(t,s) = R(t-s, 0), \qquad t, s \in \mathbb{T},$$

dann heißt ξ *stationär*. Statt $R(t-s,0)$, $s, t \in \mathbb{T}$ schreiben wir dann kürzer $R(t)$, $t \in \mathbb{T} - \mathbb{T}$.

1.63 Satz. *Sei ξ ein stationärer Vektorprozeß auf $\mathbb{T}$ mit Werten in $\mathbb{K}^n$ und einer Kovarianzmatrixfunktion $R := (R_{k,l})$, $1 \leqslant k, l \leqslant n$. Dann gelten folgende Aussagen:*

1.) $R_{k,k}$ ist eine Kovarianzfunktion für alle $1 \leqslant k \leqslant n$,

2.) $|R_{k,l}(t)| \leqslant \sqrt{R_{k,k}(0) R_{l,l}(0)}$ für alle $1 \leqslant k, l \leqslant n$ und $t \in \mathbb{T} - \mathbb{T}$,

3.) $R(t) = \overline{R'(-t)}$ für alle $t \in \mathbb{T} - \mathbb{T}$,

4.) $\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} u_k' R(t_k - t_l) u_l \geqslant 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{T}$ und $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Siehe etwa [33, S. 403]. □

[9] Im Fall $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ liefert die PALEY-WIENER-Bedingung ein entsprechendes Kriterium dafür [144, S. 735 f. und S. 751 ff.].

§ 4 Reelle Gaußsche zufällige Elemente

1.64 Definition. Eine zufällige Größe $\xi \in L_2(P)$ heißt GAUßsche *zufällige Größe*, wenn deren charakteristische Funktion in folgender Form darstellbar ist

$$E(e^{it\xi}) = e^{itE(\xi)-t^2D^2(\xi)/2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Neben dieser Definition der GAUßschen zufälligen Größe mittels charakteristischer Funktion kann der Begriff auch unter Verwendung einer Verteilungsdichte eingeführt werden. Dies hätte allerdings den Nachteil, daß entartete zufällige Größen, also fast sicher konstante zufällige Größen, nicht mit erfaßt würden.

1.65 Definition. Ein zufälliger Vektor ξ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ heißt GAUßscher *Vektor*, wenn $u'\xi$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ eine GAUßsche zufällige Größe ist.

1.66 Definition. Die GAUßschen zufälligen Größen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn

$$u_1(\xi_1 - E\xi_1) + \cdots + u_n(\xi_n - E\xi_n) = 0$$

die Relation $u_1 = \cdots = u_n = 0$ nach sich zieht. Sonst heißen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *linear abhängig*.

1.67 Definition. Ein GAUßscher Vektor mit linear abhängigen Komponenten heißt *entartet*.

1.68 Lemma. *Seien ξ, η stochastisch unabhängige* GAUßsche *Vektoren. Dann ist auch $\xi + \eta$ ein* GAUßscher *Vektor mit $E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta)$ und $R_{\xi+\eta} = R_\xi + R_\eta$.*

Beweis. Siehe etwa [17, S. 262]. □

1.69 Satz. *Seien ξ ein* GAUßscher *Vektor mit Werten in $\mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$. Dann ist $\eta := \mathcal{A}\xi + b$ ein* GAUßscher *Vektor mit $E(\eta) = \mathcal{A}E(\xi) + b$ und $R_\eta = \mathcal{A}R_\xi\mathcal{A}'$.*

Beweis. Siehe etwa [17, S. 264]. □

1.70 Satz. *Seien ξ, η* GAUßsche *Vektoren mit Werten in $\mathbb{R}^n$. Gilt $E(\xi) = 0$ und $R_\xi = \mathcal{I}$, dann existiert ein $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß $\eta - E(\eta) = \mathcal{A}\xi$.*

Beweis. Siehe etwa [28, S. 123 f.]. □

1.71 Satz. *Ein* GAUßscher *Vektor η ist genau dann nicht entartet, wenn R_η positiv definit ist.*

Beweis. Um die Notwendigkeit der Aussage zu zeigen, nehmen wir η als entartet an. Dann gibt es ein $u \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq 0$, so daß $u'(\eta - E\eta) = 0$. Also ist $u'(\eta - E\eta)$ konstant, und es gilt

$$0 = D^2\big[u'(\eta - E\eta)\big] = D^2(u'\eta) = u'R_\eta u.$$

Um auch die Hinlänglichkeit zu zeigen, setzen wir R_η als nicht positiv definit voraus. Sei ξ ein GAUßscher Vektor mit $E(\xi) = 0$ und $R_\xi = \mathcal{I}$. Dann existiert nach Satz 1.70 ein $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß $\eta = \mathcal{A}\xi + E(\eta)$ gilt. Folglich ist $\mathcal{A}$ wegen Satz 1.69 und

$$0 = \det(R_\eta) = \det(\mathcal{A}R_\xi\mathcal{A}') = \det(\mathcal{A}\mathcal{I}\mathcal{A}') = \det(\mathcal{A}\mathcal{A}') = [\det(\mathcal{A})]^2$$

singulär, besitzt also linear abhängige Zeilen. Folglich existiert ein $u \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq 0$, so daß

$$0 = u'\mathcal{A}\xi = u'(\eta - E\eta)$$

gilt. Damit ist η entartet und die Aussage bewiesen. □

1.72 Lemma. *Sei (ξ_t), $t \in \mathbb{N}$ eine Folge zentrierter* Gaußscher *Vektoren, die im quadratischen Mittel gegen ξ konvergiert. Dann ist ξ ein zentrierter* Gaußscher *Vektor.*

Beweis. Siehe etwa [165, S. 316 f.], [182, S. 47 f.] und beachte, daß die Konvergenz im quadratischen Mittel die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit nach sich zieht. □

1.73 Definition. Ein Vektorfeld ξ auf $\mathbb{T}^m$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ heißt Gaußsches *Vektorfeld*, wenn

$$u_1'\xi(t_1) + \cdots + u_k'\xi(t_k), \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n, \qquad t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{T}^m$$

eine Gaußsche zufällige Größe ist. Gilt $n = 1$, dann heißt ξ Gaußsches *Feld*. Gilt $m = 1$, dann heißt ξ Gaußscher *Vektorprozeß*. Gilt $n = 1$ und $m = 1$, dann heißt ξ Gaußscher *Prozeß*.

1.74 Satz. *Sei ξ ein* Gaußsches *Vektorfeld auf $\mathbb{T}^m$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$. Konvergiert ξ bezüglich der i-ten Komponente von $t \in \mathbb{T}^m$ für ein $1 \leqslant i \leqslant m$ im quadratischen Mittel gegen ein Vektorfeld η auf $\mathbb{T}^{m-1}$, dann ist auch η ein* Gaußsches *Vektorfeld mit Werten in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir $i = m$ an. Anderenfalls numerieren wir um. Für $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, $u_j \in \mathbb{R}^n$ und $t_j \in \mathbb{T}^m$ mit $t_j = (t_{j,1}, \ldots, t_{j,m})'$ sowie $s_j \in \mathbb{T}^{m-1}$ mit $s_j = (t_{j,1}, \ldots, t_{j,m-1})'$ beliebig können wir unmittelbar schreiben

$$\begin{aligned} u_1'\eta(s_1) + \cdots + u_k'\eta(s_k) &= u_1'\eta(t_{1,1}, \ldots, t_{1,m-1}) + \cdots + u_k'\eta(t_{k,1}, \ldots, t_{k,m-1}) \\ &= \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{t_{,m}\to\infty} u_1'\xi(t_{1,1}, \ldots, t_{1,m}) + \cdots + \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{t_{,m}\to\infty} u_k'\xi(t_{k,1}, \ldots, t_{k,m}) \\ &= \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{t_{,m}\to\infty} \big[u_1'\xi(t_{1,1}, \ldots, t_{1,m}) + \cdots + u_k'\xi(t_{k,1}, \ldots, t_{k,m})\big]. \end{aligned}$$

Daraus aber folgt die behauptete Aussage, weil nach Lemma 1.72 die rechte und damit die linke Seite der Gleichung Gaußsche zufällige Größen sind. □

§5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Um Phasenfluktuationen geeignet modellieren zu können, werden wir in Kapitel zwei zunächst das Schwingungsverhalten eines Oszillators ohne zufällige Störungen untersuchen. Anschließend gehen wir dann zu einem stochastischen Modell über. In der Literatur finden sich zahlreiche Beispiele zur mathematischen Beschreibung schwingender Systeme [39, S. 60 ff.], [57, S. 97 ff.], [74, S. 512 ff.], die alle eine Gemeinsamkeit aufweisen: Sie modellieren das Schwingungsverhalten durch ein im allgemeinen nichtlineares Differentialgleichungssystem der Form

$$\dot{x} = f\big(t, x\big) \tag{1.7}$$

mit einer stetigen Funktion $f : \mathbb{T} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $\mathbb{T} \times \mathbb{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dabei wird die unabhängige Variable $t \in \mathbb{T}$ physikalisch als Zeit interpretiert.

1.75 Definition. Seien $\mathbb{T}_x \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x : \mathbb{T}_x \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion. Gelten $(t, x(t)) \in \mathbb{T} \times \mathbb{U}$ und $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in \mathbb{T}_x$, dann heißt x *Lösung von* (1.7). Ist darüber hinaus ein $x_0 \in \mathbb{U}$ gegeben, so daß $x(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in \mathbb{T}_x$ gilt, dann heißt x *Lösung von* (1.7) *zum Anfangswert* (t_0, x_0).

1.76 Satz (PICARD-LINDELÖF). *Sei $f : \mathbb{T} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $\mathbb{T} \times \mathbb{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ lokal* LIPSCHITZ*-stetig bezüglich $x \in \mathbb{U}$. Dann existiert zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{U}$ ein offenes Intervall $\mathbb{T}_x \subset \mathbb{T}$ mit $t_0 \in \mathbb{T}_x$, auf dem* (1.7) *genau eine Lösung x zum Anfangswert (t_0, x_0) besitzt.*

Beweis. Siehe etwa [96, S. 530 ff.], [112, S. 138 und S. 140 f.]. □

1.77 Definition. Eine Lösung x von (1.7) zum Anfangswert (t_0, x_0) heißt:

1.) *stabil im* LJAPUNOW*schen Sinne*, falls für alle $K_2 > 0$ und $t_1 \geqslant t_0$ ein $K_1 = K_1(t_1, K_2)$ existiert, so daß für jede weitere Lösung x^* von (1.7) zum Anfangswert (t_1, x_1^*) gilt

$$\|x(t_1) - x_1^*\| < K_1 \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x^*(t)\| < K_2, \qquad t \geqslant t_1,$$

2.) *anziehend*, falls für alle $t_1 \geqslant t_0$ ein $K_1 = K_1(t_1)$ existiert, so daß für jede weitere Lösung x^* von (1.7) zum Anfangswert (t_1, x_1^*) gilt

$$\|x(t_1) - x_1^*\| < K_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \|x(t) - x^*(t)\| = 0,$$

3.) *asymptotisch stabil*, falls x anziehend und stabil im LJAPUNOWschen Sinne ist.

Weiterführende Stabilitätsaussagen, welche im Zusammenhang mit zeitstetigen linearen dynamischen Systemen stehen, können etwa [4], [57, S. 20 ff.] entnommen werden.

§6 Stochastische Differentialgleichungen

Haben wir ein geeignetes Modell zur Beschreibung schwingender physikalischer Systeme gefunden, dann müssen wir dieses durch zufällige Störungen erweitern, um zu einer entsprechenden Darstellung der zugehörigen Phasenfluktuationen zu gelangen. Zunächst verallgemeinern wir dazu die Funktion f der gewöhnlichen Differentialgleichung (1.7). Seien $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Nun definieren wir die Funktion $f : \Omega \times \mathbb{T} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ durch $(\omega, t, x) \mapsto f(\omega, t, x)$ und nennen

$$\dot{\xi}(t) = f[\cdot, t, \xi(t)] \tag{1.8}$$

stochastische Differentialgleichung bezüglich f. Dabei ist zu beachten, daß der links stehende Ableitungsoperator zunächst nur symbolisch zu deuten ist, da zur mathematischen Behandlung statt (1.8) die äquivalente Integralgleichung betrachtet wird [13, S. 11 ff.], [112, S. 139].

Spricht man von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen, dann muß zwischen verschiedenen Typen unterschieden werden [13, S. 11], [34, S. 25]. In den Natur- und Ingenieurwissenschaften werden reale Vorgänge intuitiv als realisierungsweise Lösung von (1.8), also als Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachtet. Dieses Vorgehen hat allerdings nur dann einen Sinn, wenn die dabei verwendeten Funktionen, Parameter und Anfangswerte gewissen Regularitätsbedingungen genügen.

1.78 Definition. Ein Vektorprozeß ξ auf $\mathbb{T}$ heißt *realisierungsweise Lösung von* (1.8), wenn fast alle Realisierungen von ξ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\xi}(\omega, t) = f[\omega, t, \xi(\omega, t)] \tag{1.9}$$

im Intervall $\mathbb{T}$ genügen. Ist darüber hinaus ξ_0 ein zufälliger Vektor, so daß $\xi(t_0) = \xi_0$ fast sicher für ein $t_0 \in \mathbb{T}$ gilt, dann heißt ξ *realisierungsweise Lösung von* (1.8) *zur Anfangsbedingung* (t_0, ξ_0). Insbesondere heißt ξ *eindeutig*, wenn es eine Menge $\Omega^* \in \mathfrak{F}$ mit $P(\Omega^*) = 1$ gibt, so daß für jede weitere realisierungsweise Lösung η von (1.8) zur gleichen Anfangsbedingung die Relation $\xi(\omega, t) = \eta(\omega, t)$ für alle $(\omega, t) \in \Omega^* \times \mathbb{T}$ gilt.

Um also Aussagen über die Existenz von realisierungsweisen Lösungen zu erhalten, sind stets zwei Dinge erforderlich. Zuerst ist unter Anwendung der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zu überprüfen, ob (1.9) auf einem von $\omega \in \Omega$ unabhängigen Intervall fast sicher eine Lösung besitzt. Ist dies der Fall, so bleibt noch zu zeigen, daß die einzelnen Lösungen auch Realisierungen eines stochastischen Vektorprozesses sind [34, S. 13 f.].

Damit werden mögliche Probleme bei der Betrachtung zufälliger Störungen als realisierungsweise Lösung einer stochastischen Differentialgleichung offenkundig. Sind etwa die analytischen Eigenschaften von f gar nicht oder nur unzureichend bekannt, so ist die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht anwendbar und eine Aussage über Lösungen in diesem Sinne unmöglich. Für praktisch orientierte Anwendungen ist es daher oft sinnvoll, Lösungen unter schwächeren Voraussetzungen zu betrachten.

1.79 Definition. Ein Vektorprozeß ξ auf $\mathbb{T}$ mit endlichen zweiten Momenten heißt *Lösung von* (1.8) *im quadratischen Mittel*, wenn er die Bedingungen $f[\cdot, t, \xi(t)] \in L_2(P)$ und

$$\dot{\xi}(t) = f[\cdot, t, \xi(t)]$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ erfüllt. Ist darüber hinaus $\xi_0 \in L_2(P)$, so daß $\xi(t_0) = \xi_0$ für ein $t_0 \in \mathbb{T}$ gilt, dann heißt ξ *Lösung von* (1.8) *im quadratischen Mittel zur Anfangsbedingung* (t_0, ξ_0). Insbesondere heißt ξ *eindeutig*, wenn für jede weitere Lösung η von (1.8) im quadratischen Mittel zur gleichen Anfangsbedingung die Relation $\xi(t) = \eta(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$ gilt.

Mit Hilfe dieser Definition sind die Vorteile bei der Betrachtung zufälliger Störungen als Lösungen im quadratischen Mittel offensichtlich. Es werden meist nur sehr einfach zu erfüllende Voraussetzungen an die Funktion f gestellt. Andererseits tritt jedoch ein neues Problem zutage. Zunächst steht keine Theorie zur Verfügung, mit deren Hilfe Lösungen von (1.8) im Sinne von Definition 1.79 zu gewinnen sind. Für die uns interessierenden sehr einfachen stochastischen

Differentialgleichungen stellt dies jedoch kein Hindernis dar. In den Sätzen 1.30, 1.31 haben wir Lösungen derartiger Anfangswertprobleme bereits diskutiert. Schließlich sind wir in der Lage, eine Aussage zur Existenz und Eindeutigkeit dieser Lösungen zu formulieren.

1.80 Satz. *Seien η ein stationärer Prozeß auf $\mathbb{T}$ mit stetiger Kovarianzfunktion, $t_0 \in \mathbb{T}$ beliebig fest und $\xi_0 \in L_2(P)$. Dann besitzt die stochastische Differentialgleichung*

$$\dot{\xi}(t) = \eta(t), \qquad t_0 \leqslant t \in \mathbb{T}$$

zur Anfangsbedingung (t_0, ξ_0) eine eindeutige Lösung im quadratischen Mittel, die durch

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} \eta(s)\, ds, \qquad t_0 \leqslant t \in \mathbb{T}$$

gegeben ist.

Beweis. Siehe etwa [34, S. 30] und berücksichtige Satz 1.30. □

§7 Zeitdiskrete lineare dynamische Systeme

Mathematisch motivierte Betrachtungsweise. Während wir später gewöhnliche und stochastische Differentialgleichungen betrachten, um ein Modell zur Beschreibung der Phasenfluktuationen mit stetiger Zeit zu gewinnen, nutzen wir *Differenzengleichungen* zur Entwicklung eines entsprechenden Simulationsmodells mit diskreter Zeit. Der Begriff der Differenzengleichungen wird in der Literatur für verschiedene mathematische Objekte verwendet [133, S. 1 f.]. Wir wollen darunter Gleichungen vom Typ

$$x(t+1) = f[t, x(t)] \tag{1.10}$$

mit einer zunächst beliebigen Funktion $f : \mathbb{T} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{T} \times \mathbb{U} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n$ verstehen, welche auch als *Rekursionsgleichungen* bezeichnet werden [1, S. 5]. Die unabhängige Variable $t \in \mathbb{T}$ wird dabei erneut als Zeit interpretiert.

1.81 Definition. Seien $\mathbb{T}_x \subset \mathbb{Z}$ ein Intervall und $x : \mathbb{T}_x \to \mathbb{R}^n$ eine gegebene Funktion. Gelten $[t, x(t)] \in \mathbb{T} \times \mathbb{U}$ und $x(t+1) = f[t, x(t)]$ für alle $t \in \mathbb{T}_x$, dann heißt x *eine Lösung von* (1.10). Ist darüber hinaus ein $x_0 \in \mathbb{U}$ gegeben, so daß $x(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in \mathbb{T}_x$ gilt, dann heißt x *Lösung von* (1.10) *zum Anfangswert* (t_0, x_0).

Um die Lösungen von (1.10) anhand ihrer Eigenschaften einordnen zu können, ist es sinnvoll, diese zunächst geeignet zu klassifizieren. Zur Vereinfachung der Notation ist es ferner von Vorteil, statt $t, t_0 \in \mathbb{T}_x$ mit $t \geqslant t_0$ kürzer nur $t \geqslant t_0$ zu schreiben.

1.82 Definition. Eine Lösung x von (1.10) zum Anfangswert (t_0, x_0) heißt:

1.) *stabil*, falls zu jedem $K_2 > 0$ ein $K_1 = K_1(t_0, K_2) > 0$ existiert, so daß für jede weitere Lösung x^* von (1.10) zum Anfangswert (t_0, x_0^*) gilt

$$\|x_0 - x_0^*\| < K_1 \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x^*(t)\| < K_2, \qquad t \geqslant t_0,$$

2.) *anziehend*, falls ein $K_1 = K_1(t_0) > 0$ existiert, so daß für jede weitere Lösung x^* von (1.10) zum Anfangswert (t_0, x_0^*) gilt

$$\|x_0 - x_0^*\| < K_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \|x(t) - x^*(t)\| = 0,$$

3.) *asymptotisch stabil*, falls x stabil und anziehend ist,

4.) *gleichmäßig stabil*, falls x stabil und K_1 unabhängig von t_0 ist,

5.) *gleichmäßig anziehend*, falls x anziehend und K_1 unabhängig von t_0 ist,

6.) *gleichmäßig asymptotisch stabil*, falls x gleichmäßig stabil und gleichmäßig anziehend ist.

In vielen Fällen kann die Funktion f aus (1.10) genauer spezifiziert werden. Auch zur Entwicklung des genannten Simulationsmodells ist dies möglich, wie sich in Kapitel drei zeigen wird. Dort werden wir (1.10) mittels Approximation in Form einer linearen Differenzengleichung

$$x(t+1) = \mathcal{A}x(t) + b(t) \tag{1.11}$$

mit einer konstanten Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und einer Funktion $b : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ notieren. Dieser Spezialfall ist besonders vorteilhaft, weil eine ausgereifte Theorie zur Behandlung solcher Gleichungen zur Verfügung steht [1], [133]. Damit ist es unmittelbar möglich, Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (1.11) zu formulieren.

1.83 Satz. *Zu jedem Anfangswert $(t_0, x_0) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n$ existiert genau eine Lösung x von* (1.11) *mit*

$$x(t+1) = \mathcal{A}x(t) + b(t), \qquad t \geqslant t_0.$$

Beweis. Siehe etwa [133, S. 3 f.]. □

Darüber hinaus können die Lösungen von (1.11) auch explizit angegeben werden. Um zu diesem Resultat zu gelangen [133, S. 4 ff.], betrachtet man zunächst nur die homogene Gleichung

$$x(t+1) = \mathcal{A}x(t). \tag{1.12}$$

Es läßt sich zeigen, daß (1.12) genau dann n linear unabhängige Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ besitzt, wenn die Matrix $\mathcal{A}$ regulär ist. Zusammen erhält man aus diesen Lösungen eine Matrixfunktion

$$\mathcal{F} := (x_1; \ldots; x_n)$$

mit Werten in $\mathbb{R}^{n,n}$, die als *Fundamentalsystem* oder *-matrix* bezeichnet wird. Aufgrund der rekursiven Struktur von (1.12) besitzt $\mathcal{F}$ für alle $t \geqslant t_0$ die Eigenschaft $\mathcal{F}(t) = \mathcal{A}^t$. Daher gilt

$$\mathcal{F}(0) = \mathcal{I}, \qquad \mathcal{F}(t+1) = \mathcal{A}\mathcal{F}(t), \qquad \mathcal{F}(t)\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(t+s), \qquad t, s \geqslant t_0.$$

Das Tupel $(\mathbb{R}^n, \mathbb{T}, \mathcal{F})$ wird in der Mathematik als *dynamisches System* bezeichnet [57, S. 17]. Für die Lösungen von (1.11) ist nun entscheidend, daß diese mittels $\mathcal{F}$ auf einfache Weise dargestellt werden können.

1.84 Satz. *Seien $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine reguläre Matrix und $b : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung x von* (1.11) *zum Anfangswert $(t_0, x_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ durch*

$$x(t) = \mathcal{A}^{t-t_0} x_0 + \sum_{l=t_0}^{t-1} \mathcal{A}^{t-1-l} b(l), \qquad t \geqslant t_0$$

gegeben.

Beweis. Siehe etwa [1, S. 60], [133, S. 13 f. und S. 18 f.]. □

Neben der aus Satz 1.84 resultierenden Darstellung der Lösungen von (1.11) werden wir uns später vor allem für deren asymptotisches Verhalten im Grenzfall $t_0 \to -\infty$ interessieren. Aufgrund der damit einhergehenden unendlichen Rekursion ist es notwendig, ein Kriterium für die Beschränkung der Lösungen von (1.11) zu formulieren. Dazu führen wir zunächst einen weiteren Stabilitätsbegriff ein und notieren einige damit verbundene Aussagen.

1.85 Definition. Eine Lösung x von (1.11) heißt *bounded input bounded output* (BIBO-) *stabil*, wenn es positive Konstanten K_1, K_2 gibt, so daß gilt

$$\|b(t)\| \leqslant K_1 \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \leqslant K_2, \qquad t \geqslant t_0.$$

Obwohl wir die bisher eingeführten Stabilitätsbegriffe nur für einzelne Lösungen definiert haben, können diese bei linearen Differenzengleichungssystemen gemäß (1.11) für alle Lösungen gemeinsam formuliert werden. Eine derartige Erweiterung der Stabilitätsbegriffe ist offenbar zulässig, da das Stabilitätsverhalten solcher Differenzengleichungssysteme allein von den Eigenschaften der Matrix $\mathcal{A}$ bestimmt wird. Häufig spricht man in diesem Zusammenhang daher nicht von der Stabilität einer einzelnen Lösung, sondern von der des linearen Differenzengleichungssystems selbst [1, S. 255].

1.86 Satz. *Genau dann ist das lineare Differenzengleichungssystem* (1.11) *gleichmäßig asymptotisch stabil, wenn es positive Konstanten K_1, K_2 gibt, so daß folgende Relation gilt*

$$\|\mathcal{A}^{t-t_0}\| \leqslant K_1 e^{-K_2(t-t_0)}, \qquad t \geqslant t_0.$$

Beweis. Siehe etwa [1, S. 255 ff. und S. 59 f.]. □

1.87 Satz. *Für $1 \leqslant j \leqslant 4$ seien $K_j > 0$ konstant mit $K_2 \neq K_4$, so daß $\mathcal{A}$ und b den Relationen*

$$\|b(t)\| \leqslant K_1 K_2^{t-t_0}, \qquad \|\mathcal{A}^{t-t_0}\| \leqslant K_3 K_4^{t-t_0}, \qquad t \geqslant t_0$$

genügen. Dann existiert ein $K_5 > 0$, so daß jede Lösung x von (1.11) *folgende Relation erfüllt*

$$\|x(t)\| \leqslant K_5 \big(\max\{K_2, K_4\}\big)^{t-t_0}, \qquad t \geqslant t_0.$$

Beweis. Siehe etwa [1, S. 242]. □

1.88 Folgerung. *Das lineare Differenzengleichungssystem* (1.11) *ist* BIBO*-stabil, wenn es gleichmäßig asymptotisch stabil ist.*

Beweis. Um die behauptete Aussage zu zeigen, genügt es, in Satz 1.87 die Konstanten $K_2 := 1$ und $K_4 := e^{-K_2'}$ zu setzen, wobei K_2' die Konstante K_2 aus Satz 1.86 bezeichnet. □

Systemtheoretisch motivierte Betrachtungsweise. Ebenso wie in der Mathematik hat sich in der Elektrotechnik, genauer in der Systemtheorie, der Begriff des dynamischen Systems etabliert. Obwohl sich die systemtheoretische Beschreibung formal von derjenigen aus der Mathematik unterscheidet, führt sie inhaltlichen dennoch zum gleichen Resultat. Anders als in der Mathematik geht man in der Systemtheorie zunächst von einem gegebenen technischen System mit der Eingabe x aus und untersucht den Einfluß des Systems auf dessen Ausgabe y. Dabei wird zwischen Systemen mit und ohne Speicher unterschieden. Die uns interessierenden Systeme mit Speicher besitzen neben einer Ein- und einer Ausgabe zusätzlich einen Zustand, der häufig mit z bezeichnet wird. Das Verhalten des technischen System wird durch eine Zustandsfunktion f und eine Ausgabefunktion g für alle $t \in \mathbb{T}$ gemäß

$$\begin{aligned} z(t+1) &= f[z(t), x(t)] \\ y(t) &= g[z(t), x(t)] \end{aligned}$$

charakterisiert. Dabei nehmen x, y, z Werte aus den Alphabeten $X \subset \mathbb{R}^p$, $Y \subset \mathbb{R}^q$, $Z \subset \mathbb{R}^m$ an. Die Zusammenfassung der Alphabete und Systemfunktionen zu einem Tupel (X, Y, Z, f, g) wird dann als *dynamisches System* bezeichnet. Einen besonders wichtigen Spezialfall stellen *lineare dynamische Systeme* dar. Bei diesen werden die Systemfunktionen f, g durch die Systemmatrizen $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m,p}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{q,m}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{q,p}$ ersetzt, so daß für $t \in \mathbb{T}$ gilt

$$z(t+1) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}x(t) \tag{1.13a}$$

$$y(t) = \mathcal{C}z(t) + \mathcal{D}x(t). \tag{1.13b}$$

Anhand dieses Gleichungssystems wird die Äquivalenz der Begriffe des dynamischen Systems im mathematischen und systemtheoretischen Sinne offenbar. Die Zustandsgleichung (1.13a) ist ein Spezialfall von (1.11). Folglich sind die Aussagen zu den Lösungen linearer Differenzenglei-

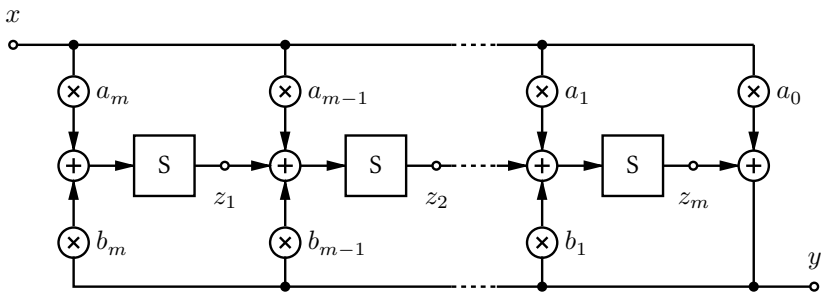


Abb. 1.1: Zeitdiskretes lineares dynamisches System in der ersten kanonischen Form.

chungen auch für die hier angeführten linearen dynamischen Systeme gültig. Für die praktische Anwendung sind darüber hinaus noch weitere Zusammenhänge von Bedeutung. Diese betreffen die Darstellungsmöglichkeiten und damit die technische Realisierbarkeit solcher Systeme. Im Spezialfall $p = q = 1$ läßt sich zeigen [185, S. 204 f.], daß lineare dynamische Systeme in der sogenannten ersten kanonischen Form darstellbar sind (Abb. 1.1). Für die zugehörigen Systemmatrizen gilt der folgende Satz.

1.89 Satz. *Die Systemmatrizen eines linearen dynamischen Systems* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ *gemäß* (1.13) *in der ersten kanonischen Form (Abb. 1.1) sind wie folgt darstellbar*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_m + a_0 b_m \\ a_{m-1} + a_0 b_{m-1} \\ a_{m-2} + a_0 b_{m-2} \\ \dots \\ a_1 + a_0 b_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = a_0.$$

Beweis. Folgt durch Ablesen aus (Abb. 1.1) oder durch Rechnung wie [185, S. 205 f.] es zeigt. □

In Bezug auf die Darstellung des dynamischen Systems ist zu beachten, daß diese nicht eindeutig ist [80, S. 148 ff.]. Neben der ersten kanonischen Darstellung wird uns im dritten Kapitel besonders die Kaskadenform (Abb. 1.2) interessieren. Dabei wird eine Hintereinanderschaltung

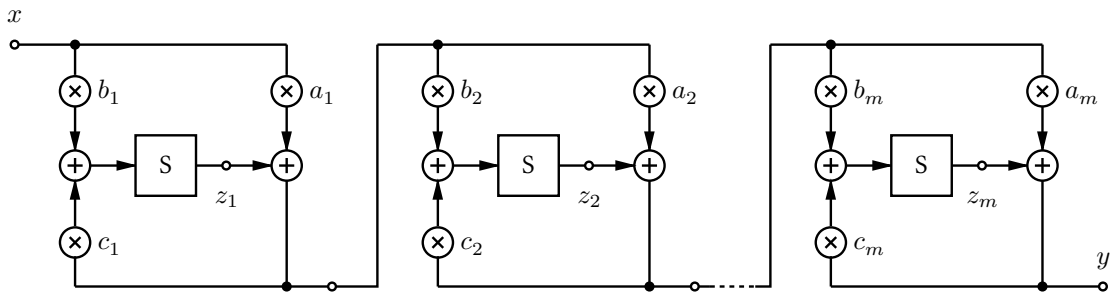


Abb. 1.2: Zeitdiskretes lineares dynamisches System in Kaskadenform.

von m Systemen erster Ordnung betrachtet. Diese Art von System hat den Vorteil, daß auf eine Rückkoppelung über mehrere Speicherstufen hinweg verzichtet wird, und damit eine Quelle für Instabilitäten nicht entsteht. Die zugehörigen Systemmatrizen liefert der folgende Satz.

1.90 Satz. *Die Systemmatrizen eines linearen dynamischen Systems* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ *gemäß* (1.13) *in Kaskadenform (Abb. 1.2) sind wie folgt darstellbar*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 + a_2 c_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_2(b_3 + a_3 c_3) & b_3 + a_3 c_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 \cdots a_{m-1}(b_m + a_m c_m) & \dots & a_{m-1}(b_m + a_m c_m) & b_m + a_m c_m & c_m \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 c_1 \\ a_1(b_2 + a_2 c_2) \\ \dots \\ a_1 \cdots a_{m-2}(b_{m-1} + a_{m-1} c_{m-1}) \\ a_1 \cdots a_{m-1}(b_m + a_m c_m) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \prod_{k=1}^{m} a_k.$$

Beweis. Folgt durch Ablesen aus (Abb. 1.2) oder durch Rechnung wie [185, S. 205 f.] es zeigt. □

Kapitel 2

Über die Beschreibung zufälliger Phasenfluktuationen

In der Einleitung haben wir bereits deutlich gemacht, daß das Ziel der vorliegenden Arbeit in der Herleitung eines Verfahrens zur Simulation der in technischen Systemen auftretenden zufälligen Phasenfluktuationen besteht. Folglich müssen wir zunächst die Frage beantworten, was unter dem Begriff zufällige Phasenfluktuationen zu verstehen ist, wie sie entstehen und wie sie in geeigneter Weise beschrieben werden können. Zur Einstimmung auf diese Problematik wollen wir mit einem historischen Rückblick beginnen und stützen uns dabei auf [38], [50], [153].

§ 1 Kleine Kugeln und zufällige Fluktuationen

Unter dem Begriff *Fluktuation* ist in einschlägigen Lexika etwa folgende Erklärung zu finden: Abgeleitet vom lateinischen Wort *fluctuare* für hin- und herschwanken, bezeichnet die Fluktuation den fortwährenden Wechsel oder die Veränderung eines Zustandes. In Abhängigkeit vom jeweiligen Fachgebiet werden mit diesem Begriff jedoch höchst unterschiedliche Vorstellungen verbunden. In den uns interessierenden Gebieten der Natur- und Ingenieurwissenschaften sind damit stets Abweichungen von einem bekannten Zustand gemeint. Unterstellt man diesen Fluktuationen einen zufälligen Charakter, so spricht man von zufälligen Fluktuationen, welche in der Literatur oft auch als Rauschen bezeichnet werden. Oberflächlich betrachtet könnte der Eindruck entstehen, zufällige Fluktuationen wären in der Wissenschaft einzig als ungewollte Störungen, etwa bei der Übertragung von Informationen von einem Sender zu einem Empfänger, von Bedeutung. Tatsächlich hat deren Erforschung jedoch nicht nur verschiedenste Fachgebiete nachhaltig geprägt, sondern unser Bild von der Welt grundlegend verändert [175, S. 22 ff.].

Annus mirabilis – Das Wunderjahr. Es war im Jahre 1905 als Einstein im Berner Patentamt arbeitete und fünf Artikel in den *Annalen der Physik* veröffentlichte. Allein in jenem Jahr lieferte er damit drei fundamentale Beiträge zur theoretischen Physik. Speziell in [54] diskutierte er Erscheinungen, die wir heute als Brownsche Bewegung bezeichnen. Mit dieser Veröffentlichung beantwortete er nicht nur eine der bedeutendsten Fragen jener Zeit, nämlich die Frage nach der Existenz von Atomen, sondern führte auch das Prinzip von der Berücksichtigung zufälliger Fluktuationen in physikalischen Betrachtungen ein. Dies war der Keim für die Entwicklung der Theorie stochastischer Differentialgleichungen und ihrer Anwendung in zahlreichen Wissenschaftsgebieten.

Kleine Kugeln, Temperatur und kinetische Energie. Um die Existenz von Atomen nachzuweisen, zeigte Einstein, daß Teilchen mikroskopischer Größe infolge von Wärme Bewegungen ausführen, welche sich anhand makroskopischer Partikel mit einem Mikroskop feststellen lassen. Dabei stützte er sich unter anderem auf Resultate von Bernoulli.

Dieser hatte im Jahre 1738 eine wissenschaftliche Erklärung für das Boyle-Mariotte-Gesetz gefunden. Demnach läßt sich Luft komprimieren, und der dabei entstehende Druck ist reziprok zum Volumen des Gases. Bernoulli begründete diese Beobachtung, indem er sich vorstellte, daß Luft aus kleinen Kugeln besteht und der Druck aus jener Kraft resultiert, welche das Aneinanderstoßen eben dieser Kugeln verursacht. Mit dieser Überlegung war Bernoulli seiner Zeit weit voraus und fand daher kaum Gehör. Erst etwa hundert Jahre später wurde diese Idee erneut aufgegriffen.

Es war Clausius, der um 1850 das Konzept revolutionierte. Er brachte die kleinen Kugeln aber nicht nur in Zusammenhang mit Druck und Volumen, sondern formulierte die damals unvorstellbare Hypothese, daß die Temperatur eines Gases ein Maß für die kinetische Energie der darin befindlichen Kugeln sei. Damit stellte sich aber unweigerlich auch die Frage nach deren Geschwindigkeit. Clausius vermutete, daß sich die Kugeln bei einer gegebenen Temperatur gleich schnell bewegen.

Motiviert durch die neuen Erkenntnisse auf dem Gebiet der Thermodynamik wandte sich auch Maxwell dem Geschwindigkeitsproblem zu. Allerdings verwarf er die Idee der gleich schnellen Bewegung und fand heraus, daß sich die Kugeln mit höchst unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen müssen. Insbesondere war er davon überzeugt, daß sich die relativen Häufigkeiten der Geschwindigkeit einer Gaußschen Verteilungsdichte annähern. Bezugnehmend auf diese Annahme wandte Clausius 1860 schließlich ein, die Temperatur sei proportional zur mittleren kinetischen Energie, also zur Varianz der Verteilung. Damit wurde die Temperatur erstmals als stochastische Maßzahl interpretiert.

Den Nachweis für die Maxwellsche Annahme der Geschwindigkeitsverteilung lieferte jedoch erst einige Jahre später Boltzmann. Wesentlich für dieses Resultat war die Beantwortung der Frage, wie und warum es, unabhängig von der Verteilung der Anfangsgeschwindigkeiten, zur Konvergenz gegen eine Gaußsche Verteilungsdichte kommt. Boltzmann erkannte als erster, daß die Ursache dafür in den Stoßvorgängen der kleinen Kugeln zu suchen war. Daraufhin formulierte er eine mathematische Relation zur Beschreibung der momentanen Geschwindigkeitsverteilung unter Berücksichtigung eines Kollisionsterms, welche später Boltzmann-Gleichung genannt wurde. Die Lösung dieser Gleichung bestätigte schließlich die Maxwellsche Annahme und ist heute als Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung in der Gas-Theorie bekannt.

Die Existenz von Atomen. Alle bis zum Jahre 1905 erzielten Resultate bezüglich der kleinen angenommenen Kugeln waren jedoch rein hypothetisch, da niemand in der Lage war, diese experimentell zu beobachten. Dann aber hatte Einstein die einfache wie geniale Idee, daß eine große Kugel inmitten der vielen kleinen die gleiche mittlere kinetische Energie wie diese aufweisen müsse [54]. Dabei assoziierte er die Eigenschaft einer Kugel, groß zu sein, mit dem Begriff der mikroskopischen Sichtbarkeit. Er argumentierte, daß die Bewegung einer großen Kugel innerhalb eines gewählten Zeitintervalls über deren Geschwindigkeit und folglich auch über die Geschwindigkeit der kleinen Kugeln Auskunft gebe, wenn nur die Massenunterschiede berücksichtigt würden.

Bemerkenswert ist aber nicht nur die zugrundeliegende Idee, sondern auch die Art und

Weise wie EINSTEIN das Problem löste. Entgegen der damals vorherrschenden Lehrmeinung verzichtete er auf die Anwendung der NEWTONschen Gesetze und wandte statt dessen Methoden an, wie wir sie heute aus der Stochastik kennen. Speziell berechnete EINSTEIN zunächst eine Verteilungsdichte $f(x,t)$ für die Position x der großen Kugel zum Zeitpunkt t, um daraus schließlich ihre mittlere quadratische Auslenkung zu bestimmen. Für die Berechnung von f zeigte er, daß diese Funktion der Differentialgleichung der Diffusion

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

mit dem Diffusionskoeffizienten D genügen muß. Die Lösung dieser Gleichung war EINSTEIN wohlbekannt und er notierte sie allgemeiner für eine Anzahl von n großen, sich näherungsweise unabhängig voneinander bewegenden Kugeln. Im Fall $n = 1$ lautet sie

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4Dt\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Für jeden gewählten Zeitpunkt t wird demnach die Auslenkung x durch eine GAUßsche Verteilung mit der Standardabweichung $\sqrt{2Dt}$ beschrieben. EINSTEIN nannte diese Größe mittlere Verschiebung und bezeichnete sie mit λ_x. Zuvor hatte er bereits den Diffusionskoeffizienten D in Abhängigkeit von der Gaskonstanten R, der Temperatur T, der LOSCHMIDTschen Konstanten N, der Viskosität k sowie vom Radius P der großen Kugel bestimmt

$$D = \frac{RT}{N}\,\frac{1}{6\pi kP}.$$

Insgesamt erhielt er damit einen Ausdruck für die mittlere Verschiebung, in dem alle Größen entweder näherungsweise bekannt waren oder durch Messungen bestimmt werden konnten

$$\lambda_x(t) = \sqrt{2Dt} = \sqrt{t}\,\sqrt{\frac{RT}{N}\,\frac{1}{3\pi kP}}.$$

Damit gab EINSTEIN den Wissenschaftlern seiner Zeit ein Kriterium, um zu entscheiden, ob die kleinen angenommenen Kugeln, also Atome, existieren oder nicht. Im Jahre 1908 gelang PERRIN schließlich dieser Nachweis anhand von Experimenten, so daß fortan Atome und die molekularkinetische Theorie der Wärme aus der Physik nicht mehr wegzudenken waren.

Stochastische Differentialgleichungen. Inspiriert vom EINSTEINschen Resultat wandte sich auch LANGEVIN den physikalischen Erscheinungen der BROWNschen Bewegung zu. Anders als EINSTEIN war er jedoch kein Erneuerer, sondern strebte nach physikalischer Klarheit und mathematischer Vereinfachung. Dennoch kann heute gesagt werden, daß LANGEVIN mit [120] im Jahre 1908 die Entwicklung stochastischer Differentialgleichungen begründet hat. Inhaltlich verifizierte er EINSTEINS Resultat, wobei er sich auf das zweite NEWTONsche Gesetz

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t)$$

stützte und so in wenigen Schritten zur gesuchten Lösung gelangte. LANGEVIN argumentierte, die Kraft F sei die Resultierende des thermischen Antriebs und der ihr entgegenwirkenden Reibung. Er beschrieb den thermischen Antrieb als eine willkürlich um Null schwankende, d. h. zufällige Größe X und interpretierte die Reibung gemäß dem STOKESschen Gesetz. Danach hängt die Reibung sowohl von der Viskosität μ des Fluids, also der Menge der kleinen Kugeln, als auch von der Geschwindigkeit und dem Radius a der großen Kugel ab. Er notierte

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -6\pi\mu a\frac{dx(t)}{dt} + X(t).$$

Dies war das erste Mal in der Geschichte der Wissenschaft, daß die NEWTONschen Gesetze unter Berücksichtigung einer zufälligen Veränderlichen eingesetzt wurden. Gleichungen diesen Typs werden heute stochastische Differentialgleichungen genannt. Da LANGEVIN nach einem Ausdruck für die mittlere quadratische Auslenkung der großen Kugel suchte, multiplizierte er diese Gleichung mit x und erhielt[1]

$$\frac{m}{2}\frac{d^2x^2(t)}{dt^2} - m\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 = -3\pi\mu a\frac{dx^2(t)}{dt} + x(t)X(t).$$

Anschließend mittelte er die Ausdrücke der linken und rechten Seite unter der Annahme, daß eine Vielzahl identischer großer Kugeln existiert und diese sich unabhängig voneinander bewegen. Aufgrund der Eigenschaften von X setzte er weiter $\overline{xX} := 0$ und substituierte

$$m\overline{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2} = \frac{RT}{N}.$$

Diese Ersetzung war wesentlich für seine Herleitung, denn auch EINSTEIN hatte sie verwendet. Sie beschreibt das Resultat von CLAUSIUS, wonach die mittlere kinetische Energie der Kugeln proportional zu ihrer Temperatur ist. Weiter setzte er $z(t) := \overline{dx^2(t)/dt}$ und fand

$$\frac{m}{2}\frac{dz(t)}{dt} + 3\pi\mu a z(t) = \frac{RT}{N}.$$

Die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung war LANGEVIN bekannt und er notierte sie unter Verwendung einer vom Anfangszustand abhängigen Konstanten C

$$z(t) = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi\mu a} + Ce^{-\frac{6\pi\mu a}{m}t}.$$

Schließlich diskutierte er, daß der zweite Summand der rechten Seite für beliebige C nach hinreichend langer Zeit jede noch so kleine Schranke unterschreite und folglich gelten müsse

$$\overline{dx^2(t)} = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi\mu a}\,dt.$$

[1] Man beachte, daß mittels Ketten- und Produktregel der Differentiation $(x^2)'' = (2xx')' = 2xx'' + 2(x')^2$ gilt.

Damit hatte LANGEVIN, von unterschiedlichen Bezeichnern abgesehen, das EINSTEINsche Resultat verifiziert. Seine Vorgehensweise war jedoch direkter und seine Methode einfacher zu verstehen. Während EINSTEIN zur Bestimmung der mittleren Verschiebung der großen Kugel eine partielle Differentialgleichung, die FOKKER-PLANCK-Gleichung[2], aufstellte und löste, nutzte LANGEVIN dazu das zweite NEWTONsche Gesetz. Heute werden Gleichungen der Art

$$\frac{dv(t)}{dt} = -bv(t) + X(t)$$

mit $v(t) = dx(t)/dt$ und einer Konstanten b, wie LANGEVIN sie zuerst benutzte, nach ihm benannt. Doch wenngleich beide, FOKKER-PLANCK- und LANGEVIN-Gleichungen, MARKOVsche Prozesse beschreiben, so hat das LANGEVINsche Resultat einen allgemeineren Charakter. Vom heutigen Standpunkt aus betrachtet beschrieb LANGEVIN die Geschwindigkeit der großen Kugel durch einen ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozeß, welcher einen Term für die Drift der Verschiebung enthält [13, S. 146 ff.], [167], [174]. EINSTEIN hingegen formulierte die Verschiebung basierend auf einem driftlosen WIENERschen Prozeß, so daß sein Resultat als Spezialfall der LANGEVINschen Theorie dargestellt werden kann [13, S. 172 f.], [63].

Von der Entstehung im Jahre 1908 bis zur mathematischen Formulierung stochastischer Differentialgleichungen, wie wir sie heute kennen, vergingen jedoch noch viele Jahre. Es war WIENER, der um 1923 dieser Entwicklung in besonderer Weise Vorschub leistete [178]. Er erkannte als erster das enorme mathematische Potential in der EINSTEINschen Beschreibung der BROWNschen Bewegung. Sein Interesse galt der Definition der dazu gehörenden Pfade. Damit war jedoch ein elementares Problem verbunden. Wie sollten die offenbar stetigen und dennoch völlig regellosen, d. h. nirgends differenzierbaren Schwankungen dargestellt werden? WIENER löste das Problem, indem er eine damals neue Theorie, die Maßtheorie, zur idealisierten Beschreibung dieser Pfade in Form eines stochastischen Prozesses nutzte. Bezugnehmend auf diese Leistung, wird die BROWNsche Bewegung in mathematischer Sprechweise heute auch als WIENER-Prozeß bezeichnet. Genauer handelt es sich dabei um einen GAUßschen Prozeß W mit $E[W(t)] = 0$ und $E[W(t)W(s)] = \min(t, s)$, der durch ein Integral über einen verallgemeinerten stationären Prozeß, das weiße Rauschen X, gemäß

$$W(t) = \int_0^t X(s)\, ds$$

dargestellt werden kann. Oft wird statt dessen symbolisch auch kürzer geschrieben

$$dW(t) = X(t)\, dt.$$

Als Folge der WIENERschen Beschreibung der BROWNschen Bewegung entwickelte sich in den Jahren danach ein völlig neues Verständnis für die konsequent mathematische Behandlung stochastischer Differentialgleichungen. Gleichwohl sollte es noch über zwanzig Jahre dauern, bis sich diese moderne Wahrscheinlichkeitstheorie vollständig durchgesetzt hatte.

[2] Vergleiche dazu auch [148, S. 4 f.].

Einen fundamentalen Beitrag dazu lieferte Doob im Jahre 1942. Inhaltlich verfolgte er das Ziel, die Lösungen der Langevinschen Gleichung mit dieser Theorie zu beschreiben [48]. Auch Ornstein und Uhlenbeck hatten sich 1930 diesen Lösungen gewidmet, aber auf die Anwendung der Wienerschen Resultate verzichtet [167]. Doob jedoch argumentierte, daß sich die Lösungen damit formal einfacher beschreiben ließen und scheinbare Widersprüche bei ihrer Herleitung gar nicht erst entstünden. Genauer führte er aus, daß so die peinliche Situation vermieden werden könne, die zweite Ableitung der Verschiebung x zur Berechnung von x verwenden zu müssen, ohne daß diese existiert. Folglich verwarf Doob die Langevinsche Darstellung des zweiten Newtonschen Gesetzes in Gestalt einer Differentialgleichung und formulierte das Problem statt dessen anhand von Integralen. Symbolisch notierte er

$$dv(t) = -bv(t)\,dt + \,dW(t)$$

und assoziierte damit den Ausdruck

$$v(t) = -b\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} dW(s).$$

Schließlich konnte er damit die Resultate von Ornstein und Uhlenbeck ohne Einschränkungen in Bezug auf die mathematische Strenge verifizieren. Gleichzeitig warf seine Methode aber die Frage auf, ob diese auch zur Lösung von Gleichungen allgemeineren Typs, also für

$$dv(t) = f(v,t)\,dt + g(v,t)\,dW(t)$$

mit gewissen, möglicherweise nichtlinearen Funktionen f und g, geeignet sei. Heute ist diese Frage positiv zu beantworten. Damals stellte sich die Bestimmung des stochastischen Integrals

$$\int_{t_0}^{t} g(v,s)\,dW(s)$$

jedoch als prinzipielles Problem heraus. Ursache dafür war die Abhängigkeit der Funktion g vom stochastischen Prozeß v. Zwei Jahre später war das Problem gelöst.[3]

Im Jahre 1944 veröffentlichte Itô in [90] eine mathematische Definition für das gesuchte stochastische Integral und erweiterte so die Doobsche Theorie. Für $G(t) = g(v,t)$ notierte er ähnlich zur Riemannschen Darstellung mittels Grenzwert die Relation[4]

$$\int_{t_0}^{t} G(s)\,dW(s) := \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} G(t_{k-1})[W(t_k) - W(t_{k-1})].$$

Heute trägt dieses Integral den Namen seines Entdeckers und stellt in der Wahrscheinlichkeitstheorie ein zentrales Werkzeug zur Lösung stochastischer Differentialgleichungen dar.

[3] Vergleiche dazu auch [91].

[4] Vergleiche dazu auch [13, S. 85 ff.], [14, S. 210 ff.], [22, S. 429 ff.].

Elektromagnetische Wellen und erste Oszillatoren. Ungefähr zeitgleich zur Entstehung der physikalisch-mathematischen Theorie der Brownschen Bewegung keimte eine andere, an praktischen Problemen orientierte Wissenschaft, die Elektrotechnik, auf.

Abermals war es Maxwell, der im Jahre 1864, basierend auf den Arbeiten von Faraday und Ampère, eine umfassende Theorie zur Beschreibung elektrischer und magnetischer Felder sowie deren Auswirkung auf die Materie an der britischen Royal Society veröffentlichte. Damit sagte er nicht nur die Existenz elektromagnetischer Wellen voraus, sondern vermutete auch, daß diese mit Lichtgeschwindigkeit expandieren. Weiter diskutierte er, falls sich diese Hypothese als richtig erwiese, dann müsse das Licht selbst eine elektromagnetische Welle sein.

Etwa zwanzig Jahre später experimentierte neben anderen Wissenschaftlern auch Hertz an der Erzeugung und Übertragung solch elektromagnetischer Wellen [72]. Dabei verwendete er als Oszillator eine Ruhmkorff-Spule, um aus einer kleinen Gleichspannung Impulse mit großer Amplitude zu erzeugen. Optisch sichtbar machte er diese Impulse durch eine Funkenstrecke, die parallel zu einer Dipolantenne am Ausgang der Spule befestigt war. Hertz überlegte, wenn sich mit dieser Anordnung als Sender elektromagnetische Wellen erzeugen ließen, dann wäre eine Dipolantenne mit Funkenstrecke auch als Empfänger geeignet. Schließlich positionierte er Sender und Empfänger einige Meter voneinander entfernt und beobachtete im Experiment die simultane Entstehung von Lichtbögen auf beiden Seiten der Übertragungsstrecke. Damit hatte Hertz die Existenz elektromagnetischer Wellen bewiesen. Das war im Jahre 1887. Nur ein Jahr später gelang ihm auch der Nachweis der Maxwellschen Hypothese über die Geschwindigkeit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen [73]. Heute wissen wir, daß dieses Resultat die Grundlage der Nachrichtentechnik bildete und damit die Welt in technischer wie sozialer Hinsicht grundlegend verändert wurde.

Doch zunächst fand die Hertzsche Entdeckung bei den Elektroingenieuren jener Zeit kaum Beachtung. Ursache dafür war eine etwa zur gleichen Zeit stattfindende zweite technische Revolution. Die erste brachte den Menschen die Industrialisierung, die zweite elektrisches Licht. Um 1900, nach sechzig Jahren Entwicklung, war die Glühlampe zu einem gebrauchsfähigen Leuchtmittel erwachsen. Dann hatte Edison die Vision, ganze Städte mit elektrischem Licht zu versorgen. Dafür benötigte er jedoch Generatoren. Er entwickelte und baute sie, ebenso wie Tesla. Im Unterschied zu Edison, der sich auf Generatoren zu Erzeugung von Gleichstrom konzentrierte, zog Tesla jedoch die Wechselstromtechnik vor. Sie war der Gleichstromtechnik überlegen und setzte sich, nach Jahren der Auseinandersetzung, schließlich durch. Außer der elektrischen Beleuchtung gab es zahlreiche weitere Entwicklungen, welche die Elektrizität zu einer der bedeutendsten Techniken unserer Zeit machten. Eine dieser Entwicklungen hat die Welt jedoch geprägt wie keine andere.

Elektronenröhre, Ohmscher Widerstand und zufällige Fluktuationen. Es war die Elektronenröhre, welche von Fleming im Jahre 1904 entwickelt und zunächst als Gleichrichter in elektrischen Schaltungen eingesetzt wurde. Ihre Funktionsweise basiert auf einem erstmals von Edison beobachteten physikalischen Effekt. Danach kann in Vakuumröhren ein Stromfluß von einem glühenden Draht, der Glühkatode, zu einer Platte, der Anode, auch ohne leitende Verbindung hergestellt werden, wenn letztere im Verhältnis zur Glühkatode ein positives Potential

besitzt. Heute ist bekannt, daß dafür die negative Ladung der vom heißen Draht emittierten Elektronen verantwortlich ist.

Auch wenn der Flemingsche Gleichrichter ein nützliches elektrisches Bauelement war, revolutioniert wurde die Elektronenröhre erst durch De Forest im Jahre 1906. Er setzte ein Gitter zwischen Glühkatode und Anode und vermochte durch Variation der Spannung am Gitter, den Stromfluß zu regulieren. Folglich konnte die Triode, wie die Elektronenröhre mit einem Gitter später genannt wurde, als elektrischer Schalter oder Verstärker eingesetzt werden. Daher konnten plötzlich neuartige Geräte entwickelt werden, beispielsweise zur Schwingungserzeugung, wie Barkhausen zeigte [18]. Auch elektrische Meßgeräte gehörten dazu. Bald gelang es den Elektroingenieuren mehrere dieser Verstärker hintereinander zu schalten und somit Ströme sehr kleiner Amplitude zu messen. Dabei waren zunächst keine Grenzen für die erreichbare Verstärkung erkennbar. Daher hofften die Wissenschaftler, mit dieser Technik bis ins unendlich Kleine vordringen zu können.

Diese Hoffnung wurde jedoch 1918 von Schottky zerschlagen. Er wies durch theoretische Überlegungen unüberwindbare Grenzen der Verstärkung nach, indem er die molekularkinetische Theorie der Wärme anwandte und die feste Größe der elektrischen Elementarladung berücksichtigte [157]. Damit machte er zufällige Fluktuationen für die Beschränkung der Verstärkung verantwortlich, welche später unter den Bezeichnungen thermisches Rauschen und Schrotrauschen bekannt wurden. Zur Beschreibung des thermischen Einflusses folgte Schottky den Argumentationen von Einstein und Langevin. Zunächst betrachtete er dazu einen metallischen Leiter und verglich die darin befindlichen freien Ladungsträger mit den von Einstein angenommenen Kugeln. Dann, so folgerte er, sei auch deren mittlere kinetische Energie zur Temperatur proportional. Zudem identifizierte er den Ohmschen Widerstand des Leiters mit der von Langevin beschriebenen stoßbedingten Reibung und gelangte so zu einem erstaunlichen Resultat. Wird einem metallischen Leiter durch Anlegen einer Spannung äußere Energie zugeführt, so erhöht sich mit der kinetischen Ladungsträgerenergie im Mittel auch dessen Temperatur. Weil das thermische Gleichgewicht dabei aber stets erhalten bleibt, muß auch der Widerstand des Leiters wachsen. Durch diesen Zusammenhang, so leitete Schottky ab, müsse der Widerstand eines metallischen Leiters ein Maß für die Verunreinigung des hindurchfließenden Stromes sein. Also, stellte er abschließend fest, können nur solche Ströme sinnvoll verstärkt werden, welche im Vergleich zur Verunreinigung eine hinreichend große Amplitude besitzen. Wesentlich für dieses Resultat war die Schottkysche Feststellung über das thermische Gleichgewicht im betrachteten Leiter. Ihm waren die Ursachen dafür sehr wohl bekannt, und er notierte, daß dieser Zustand auf hinreichend kleine freie Weglängen der Ladungsträger zurückzuführen sei. Für größere freie Weglängen jedoch, könne dieses Gleichgewicht nicht mehr beobachtet werden. In diesen Fällen, so argumentierte er weiter, wären die Zusammenhänge komplizierter und nur unter zusätzlichen Annahmen zu beschreiben. Einfache Verhältnisse erhalte man erst am anderen Ende der Skala, wenn nämlich die freien Ladungsträger das angelegte elektrische Feld gänzlich ohne Stöße durchschreiten. Dieser Spezialfall, welcher auch in Elektronenröhren anzutreffen ist, führte ihn schließlich zu einer weiteren Einschränkung der erreichbaren Verstärkung. Schottky diskutierte, aufgrund der atomischen Natur der Elektrizität könne der von der Glühkatode zur Anode fließende Strom nicht als gleichmäßig aufgefaßt werden. Vielmehr handle es sich dabei um einen

Hagel von Ladungsträgern, den er als *Schroteffekt*[5] bezeichnete. Insbesondere ist die Anzahl der durch diesen Hagel pro Zeiteinheit übergehenden Ladungsträger nicht konstant und könne als regellose Schwankung im Stromfluß wahrgenommen werden. Um diesen Effekt auch quantitativ zu beurteilen, interessierte sich SCHOTTKY für das mittlere Schwankungsquadrat des Stromes während eines Zeitintervalls τ. Er schrieb

$$j_\tau = i_\tau - i_0,$$

worin er i_τ und i_0 mit dem zeitlichen Mittelwert des Stromes über der Zeit τ bzw. über einer gegen τ sehr langen Zeit identifizierte. Nach einigen Rechnungen gelangte er schließlich zum gesuchten Resultat. Danach ist die Amplitude

$$a = \sqrt{\overline{j_\tau^2}}$$

der durch den Schroteffekt verursachten Stromschwankung proportional zur Wurzel aus der bekannten elektrischen Elementarladung e. Ausführlich notierte er sein Resultat in der Form

$$a = \sqrt{\frac{i_0\, e}{\tau}}$$

und stellte fest, daß auch umgekehrt eine meßtechnische Erfassung des Schroteffektes zur Bestimmung von e genutzt werden kann. Am Ende seiner Ausführungen schlug er schließlich eine elektrische Schaltung für derartige Meßungen vor und analysierte die damit zu erwartenden Ergebnisse. Dabei unterlief ihm jedoch ein Rechenfehler, den er nach einem Kommentar von JOHNSON [93] im Jahre 1922 korrigierte [158]. Rückblickend kann heute gesagt werden, daß SCHOTTKY mit diesem Resultat eine neue Epoche in der Elektrotechnik eröffnet hat. So schuf er bei den Ingenieuren nicht nur ein Bewußtsein für die Existenz zufälliger Fluktuationen, sondern zeigte klare Grenzen für den Einsatz der Elektrizität in technischen Systemen auf.

Neben SCHOTTKY war JOHNSON einer der ersten Wissenschaftler, die den Einfluß zufälliger Stromschwankungen in elektrischen Schaltungen untersuchten. Da sein Interesse der Durchführung von Experimenten galt, war auch er an der Verifikation des SCHOTTKYschen Resultates beteiligt. Er setzte zur Verstärkung der Ströme Elektronenröhren mit Glühkatoden aus verschiedenen Materialien ein und konnte bei Messungen im Jahre 1925 den Schroteffekt sowie bis dahin unbekannte zufällige Fluktuationen beobachten [94]. Weil letztere von einem Funkeln kleiner Lichtblitze an der Glühkatode begleitet waren, bezeichnete JOHNSON diese Erscheinung als *Funkel-Rauschen*[6]. Eine theoretische Erklärung dafür lieferte er jedoch nicht. Erneut war es SCHOTTKY, der sich diesem Problem zuwandte und im darauffolgenden Jahr eine mathematische Beschreibung dazu publizierte [159]. Weitaus wichtiger jedoch als die JOHNSONschen Untersuchungen zum Schroteffekt waren dessen Beiträge zum thermischen Rauschen. Im Jahre 1928 veröffentlichte er dazu einen grundlegenden Artikel [95], mit dem er die SCHOTTKYsche Beschreibung des thermischen Rauschens unter Berücksichtigung frequenzabhängiger Variationen

[5] Häufig wird diese Erscheinung auch als *shot effect* bezeichnet.
[6] Häufig wird diese Erscheinung auch als *flicker noise* bezeichnet.

verallgemeinerte. Dabei stützte er sich insbesondere auf Resultate von NYQUIST [137] und konnte experimentell zeigen, daß der in metallischen Leitern auftretende temperaturbedingte Stromfluß im zeitlichen quadratischen Mittel durch

$$\overline{I^2} = \frac{2kT}{\pi} \int_0^\infty R(w)\,|Y(w)|^2\,dw$$

beschrieben werden kann. Darin bezeichnet k die BOLTZMANN-Konstante, T die Temperatur, R den frequenzabhängigen Wirkwiderstand des Leiters sowie Y die ebenfalls von der Frequenz abhängige Admittanzübergangsfunktion des verwendeten Verstärkers.

Auch NYQUIST war an der Erforschung zufälliger Fluktuationen in der Elektrizität interessiert und arbeitete eng mit JOHNSON zusammen. Ihre Erkenntnisse zum thermischen Rauschen veröffentlichten sie gemeinsam, JOHNSON berichtete über experimentelle Beobachtungen [95] und NYQUIST gab eine theoretische Erklärung dafür [137]. Doch auch die SCHOTTKYschen Arbeiten lagen ihrem Erfolg zugrunde. Diese erlaubten es NYQUIST, auf eine thermodynamische Beschreibung der temperaturbedingten Stromschwankungen zu verzichten. Damit aber hatte er eine freie Sicht auf die wesentlichen Zusammenhänge und konnte zur Herleitung seiner Theorie Methoden verwenden, wie wir sie heute aus der Leitungs- und Systemtheorie kennen. Speziell modellierte er einen elektrischen Leiter durch die Reihenschaltung eines OHMschen Widerstandes R und einer Störquelle der Spannung U, die er als elektromotorische Kraft bezeichnete.

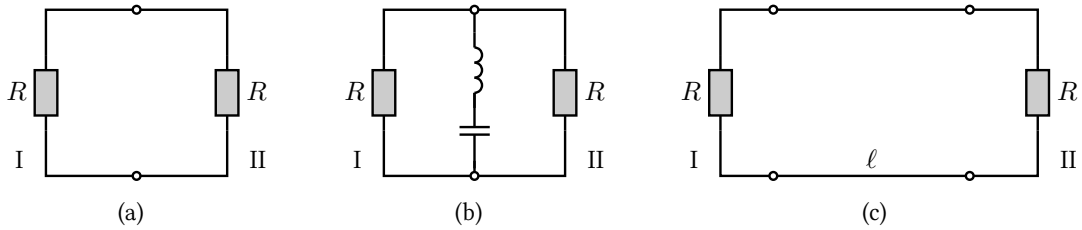


Abb. 2.1: Grundschaltungen von NYQUIST zur Bestimmung des thermischen Rauschens.

Seine Herleitung begann er am Beispiel einer Schaltung, in der zwei identische Leiter in Form rauschender Widerstände verbunden waren (Abb. 2.1(a)). In einem derartigen Netzwerk, meinte NYQUIST, müsse die von Leiter I hervorgehende elektromotorische Kraft einen Stromfluß

$$I = \frac{U}{2R}$$

und einen Leistungsumsatz

$$P = I^2 R$$

in Leiter II bewirken. Zudem wäre ein solcher Schluß aufgrund der Schaltungssymmetrie auch in entgegengesetzter Richtung möglich. Folglich sei im thermischen Gleichgewicht derselbe Austausch von Leistungen zwischen den Leitern zu beobachten, da diese als identisch vorausgesetzt

wurden. Insbesondere, so argumentierte er weiter, könne dieser Austausch nicht nur im ganzen, sondern für beliebige Frequenzintervalle beobachtet werden. Den Nachweis für diese Behauptung erbrachte er indirekt und setze dazu voraus, daß Leiter II in einem Frequenzbereich $[\nu, \nu + d\nu]$ mehr Leistung gewinnt als verliert. Durch Hinzunahme von Spule und Kondensator in die ursprüngliche Schaltung (Abb. 2.1(b)) konnte er einen Widerspruch provozieren. Damit hatte er die Aussage bewiesen und folgerte daraus, daß die elektromotorische Kraft nur eine Funktion der Frequenz, der Temperatur und des Widerstandes sei. Um auch diese Behauptung zeigen zu können, modifizierte er die anfängliche Schaltung erneut. Gedanklich schaltete er dazu eine vollkommen verlustfreie Leitung der Länge ℓ und dem Wellenwiderstand R zwischen die rauschenden Widerstände (Abb. 2.1(c)). Dann diskutierte NYQUIST, sei die Leitung auf beiden Seiten elektrisch abgeschlossen, so daß keine Reflexionen entstehen. Auch gibt es in Bezug auf den Leistungsaustausch im thermischen Gleichgewicht keinen Unterschied zur ursprünglichen Schaltung. Dennoch ist aufgrund der Länge ℓ nun zu beachten, daß sich die Leistung als Welle der Geschwindigkeit v durch die Leitung bewegt. Speziell wird die Leitung also einen Betrag an Energie enthalten, den diese auch nach einem beidseitigen Kurzschluß nicht mehr verliert. Vielmehr kommt es in diesem Fall zur Totalreflexion, so daß die Leitung selbst als Resonator zu interpretieren ist. Mit dessen Eigenschaften war NYQUIST sehr wohl vertraut und er argumentierte, infolge der Randbedingungen würden sich darin nur stehende Wellen bewegen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache von $v/(2\ell)$ betragen. Also, überlegte er weiter, lassen sich in einem beliebigen Frequenzintervall $[\nu, \nu + d\nu]$ der Art

$$\nu = \frac{mv}{2\ell} < \frac{(m+1)v}{2\ell} < \cdots < \frac{(m+n)v}{2\ell} = \nu + d\nu$$

genau

$$n = \frac{2\ell(\nu + d\nu)}{v} - \frac{2\ell\nu}{v} = \frac{2\ell d\nu}{v}$$

dieser Wellen zählen. Wird diese Anzahl nun durch die Länge ℓ hinreichend vergrößert[7], dann hat auch der Begriff der mittleren Wellenenergie einen Sinn. Speziell ist deren Wert im thermischen Gleichgewicht durch das Produkt aus BOLTZMANN-Konstante k und Temperatur T gegeben. Daraus aber läßt sich die durchschnittliche, in der Zeit ℓ/v von einem der rauschenden Widerstände abgegebene Gesamtleistung im Frequenzintervall $d\nu$ durch die Relation

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\,\frac{v}{\ell}\,nkT = kT d\nu$$

bestimmen. Also, resümierte NYQUIST, sind zur Herleitung der Lösung nur noch die anfänglich genannten Zusammenhänge zwischen Leistung, Strom und elektromotorischer Kraft

$$\overline{P} = \overline{I^2}R = \overline{\left(\frac{U}{2R}\right)^2}R = \frac{\overline{U^2}}{4R}$$

[7] Dies kann etwa durch ganzzahliges Vervielfachen der ursprünglichen Länge ℓ erreicht werden.

zu beachten. Damit hatte er das gesuchte Resultat gefunden und notierte mit $E^2 d\nu$ anstelle von $\overline{U^2}$ den Zusammenhang

$$E^2 d\nu = 4RkT d\nu.$$

Am Ende seiner Ausführungen schlug er schließlich noch einen Ausdruck zur experimentellen Verifikation seines Resultates vor, welchen später JOHNSON verwendete. Dazu erweiterte er den gefundenen Zusammenhang zunächst um frequenzabhängige Widerstände und erhielt

$$E_\nu^2 d\nu = 4R_\nu kT d\nu.$$

Dann bezog er auch einen für die meßtechnische Erfassung notwendigen Verstärker in seine Rechnungen ein und konnte somit den zufälligen Stromfluß im zeitlichen quadratischen Mittel bestimmen. Gemeinsam war es JOHNSON und NYQUIST damit erstmals gelungen, den stets unvermeidbaren temperaturbedingten Anteil des Stromes in elektrischen Netzwerken analytisch zu beschreiben und experimentell zu verifizieren. Bezugnehmend auf diese Leistung wird das thermische Rauschen heute daher oft auch als JOHNSON-NYQUIST-Rauschen bezeichnet.

Zeitliches Mittel, Ergodenhypothese und zufällige Fluktuationen. Obgleich die Arbeiten von SCHOTTKY, JOHNSON und NYQUIST wegweisend für das Verständnis zufälliger Fluktuationen in der Elektrizität waren, so ließen ihre Resultate gewisse mathematische Fragen offen. Stets hatten sie zur Herleitung ihrer Aussagen zeitliche Mittel der betrachteten physikalischen Größen verwendet. Heute wissen wir jedoch, daß ein solches Vorgehen mathematisch nur dann zu rechtfertigen ist, wenn der zugrundeliegende stochastische Prozeß hinreichenden Bedingungen über einen Zusammenhang zwischen Zeit- und Realisierungsmittel genügt.

Es war BOLTZMANN, der diesen Zusammenhang um 1887 als erster in Frage stellte. Bei seinen Untersuchungen zu den Stoßvorgängen der angenommenen, kleinen Kugeln kam er zu der Überzeugung, daß Wege, auf denen keine Arbeit geleistet wird, alle möglichen Systemzustände gleicher Gesamtenergie erreichen können. Dann aber, argumentierte er weiter, wären Zeit- und Realisierungsmittel als identisch anzusehen. Gemäß den griechischen Worten *Ergo* für Arbeit und *Odos* für Weg wurde dieser Zusammenhang später als Ergodenhypothese bekannt. Zu deren mathematischer Formulierung wird die interessierende physikalische Größe zunächst als reellwertige, meßbare Funktion f über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ interpretiert. Bezeichnet (U_t) für $t \geqslant 0$ zudem eine Familie $\mathfrak{F}$-meßbarer Transformationen mit geeigneten Eigenschaften[8] und ist f integrierbar, dann gilt mit Wahrscheinlichkeit Eins die Relation

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(U_t\omega)\, dt = \int_\Omega f(\omega)\, P(d\omega).$$

Diese beschreibt den von BOLTZMANN vermuteten Zusammenhang, wobei die rechte Seite für das Mittel über die Realisierungen, also den Erwartungswert von f steht. Da dieser jedoch konstant ist, werden auf der linken Seite der Gleichung genau diejenigen Wege $(U_t\omega)$ für $t \geqslant 0$ repräsentiert, welche zur gleichen Gesamtenergie des betrachteten Systems führen. Trotz ihrer

[8] Vergleiche dazu auch [30, S. xv f.], [42, S. 92 ff.].

enormen Bedeutung für eine streng mathematische Analyse physikalischer Probleme, sollte es mehr als fünfzig Jahre dauern, bis die Ergodenhypothese um 1931 durch VON NEUMANN [171] und BIRKHOFF [27] bewiesen wurde.[9] Nach acht weiteren Jahren veröffentlichte HOPF schließlich ein erstes umfassendes Werk zu dieser Theorie [81] und sorgte so für deren breite Anwendung in verschiedenen Wissenschaftsgebieten. Heute ist die Ergodentheorie speziell in der Elektrotechnik und Systemtheorie eines der wichtigsten Werkzeuge zur Untersuchung von Netzwerken unter Berücksichtigung zufälliger Fluktuationen.

Verteilung, Autokorrelation und spektrale Leistung. In der Elektrizität weitreichend eingesetzt wurde die Ergodentheorie zuerst durch RICE in einem um 1945 publizierten zweiteiligen Artikel [146], [147]. Darin hatte er es sich zum Ziel gesetzt, den Einfluß technischer Systeme auf zufällige Fluktuationen mathematisch zu analysieren. Aus heutiger Sicht waren für die weitere Entwicklung auf diesem Gebiet neben den Resultaten auch die Methoden dieser Veröffentlichung von besonderer Bedeutung. So gelang ihm etwa der Nachweis, daß der Schroteffekt am Ausgang linearer Systeme stets zu Strömen mit einer GAUßschen Verteilung führt. Inhaltlich begann er mit der Beschreibung einer Wirkung F am Ausgang des betrachteten Systems, welche durch die Ankunft eines Elektrons an der Anode zur Zeit $t = 0$ verursacht wurde. Aufgrund der angenommenen Linearität definierte RICE den Ausgabestrom I folglich durch die Relation

$$I(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(t - t_k),$$

wobei er t_k mit der Ankunftszeit des k-ten Elektrons identifizierte. Ferner verlangte er die Unabhängigkeit der Elementarereignisse und konnte mittels CAMBELLschem Theorem, Ergodentheorie und unter Verwendung charakteristischer Funktionen den behaupteten Zusammenhang beweisen. Wichtiger noch als dieses Resultat war die von ihm verwendete Methode, denn auch NYQUIST war 1932 zu dieser Aussage gelangt. Im Gegensatz zu RICE stützte er sich jedoch auf FOURIERsche Reihen mit GAUßschen Koeffizienten a_n, b_n, so daß er für I schrieb

$$I(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t).$$

Heute aber ist bekannt, daß eine derartige Beschreibung im allgemeinen unzulässig ist. Repräsentiert der Strom etwa ein bandbegrenztes weißes Rauschen über der reellen Achse, so führt die Annahme der Existenz von (a_n) und (b_n) zum Widerspruch im gewählten Modell. Ursache für dieses Problem ist der Umstand, daß Realisierungen stationärer Prozesse in der Regel weder periodisch noch integrierbar sind.[10] Schon RICE war dieses Problem bekannt, so daß er auch alternative Beschreibungen zufälliger Fluktuationen mittels Autokorrelation und spektraler Leistung untersuchte. Dabei konnte er sich jedoch auf zahlreiche Vorarbeiten berufen.

Zum ersten Mal unter dem Begriff der *Charakteristik* erwähnt wurde die Autokorrelation von EINSTEIN. Im Zusammenhang mit Untersuchungen zur BROWNschen Bewegung und

[9] Um mehr über die damaligen Geschehnisse zu erfahren, sei der interssierte Leser auf [189] verwiesen.
[10] Vergleiche dazu auch [144, S. 206 ff.], [42, S. 128 ff.].

motiviert durch Diskussionen auf einer Fachtagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Jahre 1914 sandte er ein Manuskript [55] an den Direktor des Meteorologisch-Magnetischen Observatoriums in Potsdam. Seine Ausführungen begannen mit den Worten: „*Es sei eine quasi-periodisch schwankende Größe F in Funktion einer Unabhängigen t für ein sehr großes t-Intervall T beobachtet. Wie lassen sich aus den Beobachtungen statistische Angaben übersichtlichen Charakters über F ermitteln? Im folgenden gebe ich eine neuartige Methode zur Erreichung dieses Zieles, in der Hoffnung, daß sie sich als praktisch verwendbar erweise.*“ Dann führte er eine neue Funktion χ ein, um das Verhalten von F zu beschreiben. Diese nannte er *Charakteristik* und definierte für eine gegen T hinreichend kleine Größe Δ

$$\chi(\Delta) = \overline{F(\Delta)F(t+\Delta)} = \frac{1}{T}\int_0^\infty F(\Delta)F(t+\Delta)\,dt.$$

Im Anschluß schrieb Einstein weiter: „*Es wird sich zeigen, daß zwischen der Charakteristik und der Intensität eine einfache Abhängigkeit besteht.*“ In heutiger Sprechweise meinte er damit den Zusammenhang zwischen Autokorrelation und spektraler Leistung. Schließlich notierte er

$$2\chi(\Delta) = \text{konst} + \int_0^\infty I(x)\cos(x\Delta)\,dx,$$

worin I die Intensität repräsentierte. In den nachfolgenden Jahren wurde diese Methode vielfältig weiterentwickelt und stellte ein zentrales Werkzeug der harmonischen Analysis dar [25].

Etwa dreißig Jahre später war auch Rice an diesem Zusammenhang interessiert. Bei seinen Untersuchungen ging er jedoch schrittweise vor und betrachtete zunächst nichtzufällige Funktionen beschränkter Leistung, welche im Unendlichen nicht verschwinden. Erneut bezeichnete er diese mit I und diskutierte, daß deren Leistung als Funktion der Frequenz gemäß

$$w(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{2|S(f)|^2}{T} \quad \text{mit} \quad S(f) = \int_0^T I(t)e^{-i2\pi ft}\,dt$$

darstellbar sei. Zudem wäre die Autokorrelation der Funktion I durch den Ausdruck

$$\psi(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T I(t)I(t+\tau)\,dt$$

zu definieren. Existieren diese Grenzwerte, argumentierte er, so lassen sich w, ψ gegenseitig in integraler Schreibweise repräsentieren. Rice bewies diese Aussage und schrieb

$$w(f) = 4\int_0^\infty \psi(\tau)\cos(2\pi f\tau)\,d\tau \quad \text{und} \quad \psi(\tau) = \int_0^\infty w(f)\cos(2\pi f\tau)\,df.$$

Dann ging er zum Fall zufälliger Funktionen über und formulierte, daß dabei nicht Autokorrelation und spektrale Leistung selbst im Mittelpunkt stehen. Vielmehr wären solche Funktionen von Interesse, die deren mittleren Werten für festes f und τ entsprächen. Kurzum bezeichnete er diese mit $\overline{w}$, $\overline{\psi}$ und verlangte die Gültigkeit der Relationen

$$\overline{w(f)} = 4\int_0^\infty \overline{\psi(\tau)}\cos(2\pi f\tau)\,d\tau \quad \text{und} \quad \overline{\psi(\tau)} = \int_0^\infty \overline{w(f)}\cos(2\pi f\tau)\,df.$$

Dazu aber, stellte er fest, müsse nach den vorhergehenden Ergebnissen notwendigerweise auch

$$\overline{w(f)} = \lim_{T\to\infty} \frac{2\overline{|S(f)|^2}}{T} \quad \text{und} \quad \overline{\psi(\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \overline{I(t)I(t+\tau)}\, dt$$

gelten. Diesbezüglich wies RICE aber auf einen wichtigen Sonderfall hin. Ist der Integrand der letzten Gleichung unabhängig von der Zeit t,[11] so wird sich stets

$$\overline{\psi(\tau)} = \overline{I(t)I(t+\tau)}$$

ergeben. Also wäre für solche Funktionen die mittlere spektrale Leistung auch durch das Integral über $\overline{\psi}$ sehr einfach zu berechnen. Um dies am Beispiel zu belegen, ermittelte er $\overline{w}$ schließlich noch für einige praktisch relevante Signale. Heute ist bekannt, daß RICE mit dieser Methode einen wichtigen mathematischen Satz auch der elektrotechnischen Anwendung zugänglich machte. Bereits um 1930 war es WIENER [179] und CHINTSCHIN [37] unabhängig voneinander gelungen, Autokorrelation und Spektraldichte durch das FOURIER-Integral miteinander zu verbinden.[12] Nach der RICEschen mathematischen Analyse schien die Zeit auf diesem Gebiet aber plötzlich still zu stehen. Thermisches, Schrot- und Funkelrauschen waren entdeckt und ließen sich mittels spektraler Leistung beschreiben. Es war die Ruhe vor einem Sturm.

Transistor und präzise Oszillatoren. Als RICE seinen wegweisenden Artikel um 1945 veröffentlichte, waren über vierzig Jahre seit der Entdeckung der Elektronenröhre vergangen. In diesem Zeitraum wurden die Triode sowie zahlreiche weitere Varianten dieses Bauelements entwickelt und in verschiedenen elektrischen Systemen eingesetzt. Zu dieser Zeit war an elektronische Schaltungen ohne Elektronenröhren nicht zu denken, obwohl mit deren Einsatz auch schwerwiegende Nachteile verbunden waren. Da Elektronenröhren dem Prinzip nach eine Glühkatode besitzen, wurde stets ein Stromfluß zu deren Erhitzung benötigt. Solche Ströme verursachten jedoch nicht nur unerwünschte Verluste, sondern führten oft auch zum Durchschmelzen der Glühkatoden, so daß die Wahrscheinlichkeit für einen Systemausfall schnell mit der Anzahl der verwendeten Elektronenröhren stieg. Für die Entwicklung sparsamer und ausfallsicherer Systeme mußten die Ingenieure und Wissenschaftler folglich nach Alternativen suchen. Außer einer Verbesserung der Elektronenröhre selbst bestand eine Möglichkeit in der Entwicklung eines gänzlich neuen Bauelements. Diese Aufgabe erwies sich jedoch als überaus schwierig und sollte viele Jahre in Anspruch nehmen.

Im Dezember 1948 war es endlich soweit. Nach zahlreichen Vorarbeiten verschiedener Wissenschaftler gelang es SHOCKLEY, BARDEEN und BRATTAIN, erstmals einen Transistor unter Laborbedingungen zu betreiben. Dieses aus zwei Germanium-pn-Übergängen bestehende Bauelement zeigte all jene für elektronische Schalter und Verstärker benötigten Eigenschaften, ohne jedoch die Nachteile der Elektronenröhre zu besitzen. Insbesondere aber war der Transistor klein und überzeugte durch seine schwache Neigung zum Rauschen. Folglich stellte der Transistor, ebenso wie zuvor die Triode, eine Revolution in der Elektrotechnik dar. Aufgrund der geringen

[11] Dies ist etwa der Fall, wenn I einen stationären Prozeß beschreibt.
[12] Vergleiche dazu auch [144, S. 218 ff.].

Größe und Verlustleistung dieses Bauelementes konnten plötzlich vollkommen neue Einsatzgebiete für elektronische Schaltungen erschlossen werden. Nach der SCHOTTKYschen Theorie führte dessen reduziertes Eigenrauschen außerdem zur Vergrößerung der erreichbaren Verstärkung. Dadurch wurde es etwa möglich, sehr präzise Oszillatoren bauen zu können, wie sie für zahlreiche Anwendungen dringend benötigt wurden [150], [151].

§2 Zufällige Frequenz- und Phasenfluktuationen in Oszillatoren

Aufgrund der fortschreitenden technologischen Entwicklung in der Elektrotechnik nach 1948 hatten Ingenieure und Wissenschaftler aus verschiedenen Anwendungs- und Fachgebieten bald den Wunsch, die unvermeidbaren zufälligen Fluktuationen in Oszillatoren anhand geeigneter Kriterien charakterisieren und vergleichen zu können. Eine einheitliche Festlegung solcher Kriterien war zunächst jedoch nicht möglich, weil in verschiedenen Fachgebieten abweichende Konzepte und Bezeichnungen zur Anwendung kamen.

Dieser Zustand änderte sich erst mit der Vereinbarung gemeinsamer Konventionen. Deren Erarbeitung begann nach einem vom *Institute of Electrical and Electronic Engineers* (IEEE) veranstalteten Symposium zur Kurzzeitfrequenzstabilität von Oszillatoren im Jahre 1964 und der nachfolgenden Gründung des *Subcommittee on Frequency Stability* als Unterausschuß des *IEEE Technical Committee on Frequency and Time*. Damit hatte man sich zum Ziel gesetzt, einen gemeinsamen Standard zur Charakterisierung zufälliger Frequenz- und Phasenfluktuationen in Oszillatoren zu schaffen. Zwei Jahre darauf, im Februar 1966, erschien dann eine Sonderausgabe der *Proceedings of the IEEE*, die erste Resultate für einen solchen Standard präsentierte. Es war die Zeit, in der durch ALLAN [2], BAGHDADY, LINCOLN und NELIN [16] sowie CUTLER und SEARLE [43] die Grundideen zur Charakterisierung zufälliger Frequenz- und Phasenfluktuationen im Zeit- und Frequenzbereich entstanden. Nach vier weiteren Jahren der Konsolidierung veröffentlichte das *Subcommittee on Frequency Stability* einen ersten Entwurf für den kommenden Standard [19], [20]. Dieser wurde schließlich unter der Bezeichnung IEEE STD 1139 im Jahre 1988 veröffentlicht [85] und im Jahre 1999 noch einmal aktualisiert [87]. Bald nach der Veröffentlichung von IEEE STD 1139 aber wurde klar, daß dieser Standard für praktische Anwendungen nicht genügt. Zwar wurden darin verschiedene Größen zur Charakterisierung zufälliger Frequenz- und Phasenfluktuationen beschrieben, Hinweise zum praktischen Vorgehen für deren Bestimmung enthielt der Standard jedoch nicht. Daher wurde im Jahre 1994 der Standard IEEE STD 1193 als praktischer Leitfaden zur Anwendung von IEEE STD 1139 publiziert [86]. Eine Aktualisierung des IEEE STD 1193 erfolgte im Jahre 2004 [88].

Die Charakterisierung der zufälligen Frequenz- und Phasenfluktuationen basiert auf der Annahme, daß man die Ausgabe von Oszillatoren stets als stochastischen Prozeß V gemäß

$$V(t) = [V_0 + \epsilon(t)]\,\cos[2\pi\nu_0 t + \varphi(t)], \qquad t \geqslant 0 \tag{2.1}$$

darstellen kann, dessen nominelle Amplitude V_0 und momentane Phase $2\pi\nu_0 t$ durch unerwünschte Fluktuationen ϵ und φ überlagert werden [151]. Weil die Amplitudenfluktuationen ϵ in Oszillatoren oft aber nur schwach ausgeprägt und für praktische Anwendungen von geringer Bedeutung sind, interessierte man sich nur für die Beschreibung der Phasenfluktuationen φ

und folglich für ein Modell der Oszillatorausgabe V gemäß [43]

$$V(t) = V_0 \cos[2\pi\nu_0 t + \varphi(t)], \qquad t \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Bezogen auf dieses Modell wurden unerwünschte Abweichungen von der Nominalfrequenz ν_0 fortan als Frequenzinstabilitäten bezeichnet. Als Frequenzstabilität hingegen bezeichnete man ein Zeitintervall, in welchem ein Oszillator Schwingungen mit konstanter Frequenz erzeugt. Weil kein realer Oszillator in diesem Sinne als frequenzstabil bezeichnet werden kann, ohne auch die Genauigkeit der zur Messung eingesetzten Geräte zu benennen, wurden diese Begriffe jedoch häufig synonym verwendet.

Unerwünschte Frequenzinstabilitäten können aufgrund zahlreicher physikalischer Effekte und umgebungsabhängiger Einflüsse entstehen. Diese verursachen etwa systematische Schwankungen, welche sehr langsam verlaufen und somit als Drift, Trend oder Langzeitinstabilitäten bezeichnet werden. Darüber hinaus können sich Frequenzsprünge, periodische Abweichungen und zufällige Fluktuationen ergeben [88]. Letztere sind auf das thermische, Schrot- und Funkelrauschen in den elektrischen Bauelementen der Oszillatoren zurückzuführen und werden Kurzzeitinstabilitäten genannt. Obwohl die Begriffe der Lang- und Kurzzeitinstabilität aus praktischen Gründen entstanden, besitzen sie keine Allgemeingültigkeit und wurden, wie sich später zeigt, aus mathematischer Sicht unglücklich gewählt. Im allgemeinen entstehen Frequenzinstabilitäten durch eine Kombination verschiedener Effekte. Dennoch werden zur Charakterisierung der Frequenzinstabilitäten nur zufällige Fluktuationen betrachtet, mit der Begründung, daß sich die übrigen bei Messungen unter Laborbedingungen verhindern oder aus den resultierenden Ergebnissen rechnerisch entfernen lassen [87], [151].

Ausgehend von der Beschreibung der Oszillatorausgabe (2.2) werden die zufälligen Frequenzfluktuationen in IEEE Std 1139 mit y bezeichnet und als normierte erste Ableitung der zufälligen Phasenfluktuationen bezüglich t definiert [87], [151]. Bezeichnet ν gemäß

$$\nu(t) := \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}[2\pi\nu_0 t + \varphi(t)] = \nu_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

zunächst die zufälligen Frequenzfluktuationen ohne Normierung, dann wird y durch

$$y(t) := \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{2\pi\nu_0}\frac{d\varphi(t)}{dt} \tag{2.3}$$

festgelegt. Ohne weitere Kommentare ist diese Definition jedoch aus zwei Gründen problematisch. Einerseits ist dem Standard nicht zu entnehmen, in welchem Sinne die Ableitung von φ zu interpretieren ist. Andererseits ist nicht gewiß, ob eine solche Ableitung überhaupt existiert [29].[13] Bevor wir inhaltlich fortfahren, wollen wir diese Probleme daher diskutieren. Folgen wir den Ausführungen des Standards, so ist zu vermuten, daß es sich dabei um eine Ableitung im Sinne der L_2-Theorie handelt. Nach Satz 1.17 ist deren Existenz gesichert, wenn die Kovarianzfunktion von φ in jedem Punkt (t,t) mit $t \geqslant 0$ stetige partielle Ableitungen besitzt. Grundsätzlich wäre es also möglich, bei der Modellierung diese Eigenschaft von φ zu verlangen. Dies

[13] Vergleiche die Doobschen Kommentare zur Ornstein-Uhlenbeck-Lösung der Langevin-Gleichung auf Seite 32.

allerdings hätte den Nachteil, daß sich daraus keine weiteren Aussagen über das Verhalten von y ableiten lassen. Bedeutsam ist diese Einschränkung vor allem daher, weil y in Übereinstimmung mit physikalischen Beobachtungen als zentrierter stationärer Prozeß modelliert werden kann [150]. Auch IEEE Std 1139 macht von dieser Möglichkeit unter Verwendung von Spektraldichten Gebrauch, ohne die Eigenschaft der Stationarität jedoch explizit zu erwähnen. Aufgrund dieser Argumentation ist es vorteilhaft, nicht y als Ableitung von φ im quadratischen Mittel zu definieren, sondern vielmehr φ durch ein stochastisches Riemann-Integral gemäß

$$\varphi(t) := 2\pi\nu_0 \int_0^t y(s)\,ds, \qquad t \geqslant 0, \tag{2.4}$$

über einen zentrierten stationären Prozeß y festzulegen [29].[14] Verlangt man dabei insbesondere, daß y eine stetige Kovarianzfunktion besitzt, dann gilt wegen Satz 1.30 unmittelbar $\dot{\varphi} = 2\pi\nu_0 y$. Zudem folgt aus dieser Definition mittels Integral offensichtlich, daß φ im allgemeinen nicht stationär sein kann. Bezeichnet y etwa ein weißes Rauschen, dann beschreibt φ den Prozeß der Brownschen Bewegung. Dennoch wird im Standard IEEE Std 1139 auch von der Spektraldichte des Prozesses φ gesprochen. Dieser und weitere Aspekte werden unter dem Begriff der Charakterisierung im Frequenzbereich zusammengefaßt.

Charakterisierung im Frequenzbereich. Wird von der Charakterisierung zufälliger Frequenz- und Phasenfluktuationen im Frequenzbereich gesprochen, dann ist zu klären, welche Bedeutung die verschiedenen Frequenzbegriffe haben. Einerseits ist darunter die zeitabhängige Momentanfrequenz der Oszillators ν bzw. deren normierte Entsprechung y zu verstehen. Andererseits verbindet man damit den Begriff der zeitunabhängigen Fourier-Frequenz f, welche als Frequenzvariable der Spektraldarstellung zu deuten ist. Letztere hat aufgrund endlicher Bandbreiten der zur Messung der Spektraldichten verwendeten Geräte einen Gültigkeitsbereich von $-f_h < f < f_h$. Weil die gemessenen Signale darüber hinaus reellen Prozessen entsprechen, sind deren Spektraldichten symmetrisch um Null, so daß es oft genügt, diese im Bereich $0 \leqslant f < f_h$ anzugeben. Gemäß IEEE Std 1139 haben wir es nun mit zwei unterschiedlichen «Spektraldichten» zu tun, nämlich mit der des als zentrierten, im quadratischen Mittel stetigen stationären Prozesses y sowie mit der des im allgemeinen instationären Prozesses φ.

Aufgrund theoretischer Untersuchungen und zahlreicher Messungen an unterschiedlichsten Oszillatoren hat sich bereits in den 1960er Jahren gezeigt, daß die Spektraldichte S_y der zufälligen Frequenzfluktuationen y in sehr guter Näherung durch den Ausdruck

$$S_y(f) := \begin{cases} \sum_{\alpha=-2}^{2} h_\alpha f^\alpha & \text{für } 0 < f < f_h \\ 0 & \text{für } f \geqslant f_h \end{cases} \tag{2.5}$$

beschrieben werden kann [16], [20]. Hierbei entsprechen die Koeffizienten h_α nichtnegativen Konstanten. Im Standard IEEE Std 1139 werden die Summanden der rechten Seite durch spezielle Bezeichner klassifiziert. Dabei korrespondiert f^{-2} mit der *Frequenzmodulation durch eine*

[14] Vergleiche das Doobsche Vorgehen bei der Behandlung stochastischer Differentialgleichungen.

zufällige Irrfahrt, f^{-1} mit der *Frequenzmodulation durch ein Funkelrauschen*, f^0 mit der *Frequenzmodulation durch ein weißes Rauschen*, f^1 mit der *Phasenmodulation durch ein Funkelrauschen* und f^2 mit der *Phasenmodulation durch ein weißes Rauschen* [151].

Ebenso wie bei der Definition (2.3) von y ist auch bei der Beschreibung (2.5) von S_y Vorsicht geboten, weil sich auch daraus, bei falscher Interpretation, Inkonsistenzen im betrachteten Modell ergeben können. Um mögliche Probleme in diesem Zusammenhang besser zu verstehen, wollen wir zunächst einige Eigenschaften der Spektraldichten stationärer Prozesse diskutieren. Dabei interessieren wir uns wegen (2.5) nur für bandbegrenzte Prozesse. Berücksichtigen wir diesen Aspekt, so dürfen wir vorübergehend annehmen, daß y der äquidistant abgetasteten Variante der zufälligen Frequenzfluktuationen entspricht. Auch die Kovarianz R_y von y ist dann eine zeitdiskrete Funktion. Nun unterscheiden wir zwei Klassen stationärer Prozesse. Man sagt, y ist ein *Prozeß mit kurzem Gedächtnis*, wenn dessen Kovarianzfunktion der Relation

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R_y(t)| < \infty \tag{2.6}$$

genügt. Anderenfalls heißt y *Prozeß mit langem Gedächtnis* [129]. Gemäß Satz 1.42 halten wir zunächst fest, daß Prozesse mit kurzem Gedächtnis stets eine Spektraldichte besitzen. Zudem läßt sich eine weitere Aussage formulieren. Ein stationärer Prozeß y mit der Spektraldichte S_y besitzt genau dann ein kurzes Gedächtnis, wenn S_y bezüglich des LEBESGUE-Maßes fast sicher beschränkt ist. Um diese Aussage zu zeigen, nehmen wir zunächst an, daß (2.6) gilt. Dann ist

$$S_y^*(f) := \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} R_y(t), \qquad -f_h < f \leqslant f_h$$

gleichmäßig konvergent, S_y^* also eine stetige und somit auf $[-f_h, f_h]$ beschränkte Funktion. Da S_y^* zudem die gleichmäßig konvergente FOURIER-Reihe von S_y ist, muß $S_y^*(f) = S_y(f)$ bis auf endliche viele Punkte f gelten [9]. Nun nehmen wir an, S_y sei fast sicher beschränkt. Dann existiert ein $K > 0$, so daß $|S_y(f)| < K$ für fast alle f gilt. Also können wir schreiben

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R_y(t)| = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-f_h}^{f_h} e^{i2\pi ft} S_y(f)\, df \right| \leqslant \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left| K \int_{-f_h}^{f_h} e^{i2\pi ft}\, df \right| = 2 f_h K,$$

was die Aussage schließlich beweist. Neben Prozessen mit kurzem Gedächtnis wollen wir auch Prozesse mit langem Gedächtnis betrachten, welche Spektraldichten der Form f^α besitzen. Solche Prozesse werden *fraktional* genannt, falls $\alpha < 0$ gilt [66]. Unter Verwendung von Satz 1.33 können wir die Varianz eines fraktionalen stationären Prozesses y wie folgt notieren

$$D^2(y) = R_y(0) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} 2 \int_\epsilon^{f_h} f^\alpha\, df = \lim_{\epsilon \downarrow 0} 2 \begin{cases} \ln(f_h) - \ln(\epsilon) & \text{für } \alpha = -1 \\ \frac{1}{1+\alpha}\left(f_h^{1+\alpha} - \epsilon^{1+\alpha}\right) & \text{für } \alpha \neq -1 \end{cases}.$$

Demnach kann ein stationärer Prozeß nur dann fraktional sein, wenn $-1 < \alpha < 0$ gilt. Anderenfalls nämlich wäre die Varianz des Prozesses unendlich, was im Widerspruch zum betrachteten

Modell stünde. Anhand dieser Aussagen werden mögliche Probleme der Darstellung (2.5) von S_y offensichtlich. Wird der Bereich zulässiger FOURIER-Frequenzen $0 < f \leqslant f_h$ beibehalten, dann muß stets $h_{-2} = h_{-1} = 0$ gelten. Dies widerspricht jedoch meßtechnischen wie theoretischen Resultaten. Wählt man andererseits aber $\epsilon > 0$ und schränkt damit den zulässigen FOURIER-Frequenzbereich in der Umgebung von Null ein, dann ist durch

$$S_y(f) := \begin{cases} \sum_{\alpha=-2}^{2} h_\alpha f^\alpha & \text{für } \epsilon \leqslant f < f_h \\ 0 & \text{für } f \geqslant f_h \end{cases} \tag{2.7}$$

eine Beschreibung gegeben, welche den genannten Widerspruch vermeidet. Insbesondere läßt sich die Begrenzung der zulässigen FOURIER-Frequenzen in (2.7) anhand praktischer Randbedingungen begründen. Offenbar ist es nicht möglich, das Verhalten von S_y für beliebig kleine FOURIER-Frequenzen zu bestimmen, da aus Messungen stets nur endliche Ausschnitte der zufälligen Frequenzfluktuationen zur Verfügung stehen. Der Betrag von ϵ ist somit proportional zum Kehrwert der Meßdauer von y. Daß dennoch $0 < f < f_h$ statt $\epsilon \leqslant f < f_h$ geschrieben wird, ist auf eine Vermutung zurückzuführen, wonach sich der Verlauf von S_y auch für $\epsilon \to 0$ identisch fortsetzt [151]. Diese Vermutung basiert auf Messungen von sehr langer Dauer. Einen Beweis liefern solche Messungen jedoch nicht. Zur Modellierung der zufälligen Frequenzfluktuationen kann man somit zwischen zwei Alternativen wählen. Entweder man läßt die Forderung nach der Stationarität von y fallen und entscheidet sich für die Beschreibung der «Spektraldichte» S_y gemäß (2.5) oder man verlangt die Stationarität von y und charakterisiert S_y durch eine Darstellung, welche dem Ausdruck (2.7) entspricht. Wir werden später die zweite Alternative wählen, um zu einer mathematisch konsistenten Beschreibung der zufälligen Frequenzfluktuationen zu gelangen. Hat man sich für die Stationarität von y entschieden, dann bleibt S_y noch für $0 < f < \epsilon$ zu spezifizieren. Erneut gibt es dafür zwei Möglichkeiten, welche davon abhängen, ob y mit einem stationären Prozeß korrespondiert, der entweder ein langes oder ein kurzes Gedächtnis besitzt. Eng damit verbunden ist die Frage, ob y als Lang- bzw. Kurzzeitinstabilität zu beschreiben ist. Gemäß der ursprünglichen Intention wären zufällige Frequenzfluktuationen als Kurzzeitinstabilität zu interpretieren, weil diese das Verhalten der drei Grundrauscharten wiedergeben. Allerdings ist eine solche Beschreibung verwirrend, da sie suggeriert, daß damit Instabilitäten verbunden sind, welche nur über kurze Zeitintervalle hinweg Abweichungen vom nominellen Verhalten bewirken. Bei den zufälligen Frequenzfluktuationen ist dies im allgemeinen jedoch nicht der Fall. Um diesen Sachverhalt besser zu verstehen, nehmen wir zunächst an, daß sich y durch einen stationären Prozeß mit langem Gedächtnis beschreiben läßt. Dann gilt

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R_y(t)| = \infty,$$

so daß momentane Abweichungen stets Auswirkungen bis in die unendliche Zukunft haben können. Ursache dafür ist, daß die Kovarianzfunktion R_y für $t \to \infty$ nicht schnell genug gegen Null konvergiert. Gehen wir zur Beschreibung von y nun von einem stationären Prozeß mit kurzem Gedächtnis aus, dann zeigt sich wegen (2.6) ein differenziertes Bild. Es könnte etwa $R_y(t) = 0$ für alle $|t| > m \in \mathbb{N}$ gelten. Dies entspräche beispielsweise dem Verhalten eines MA-Prozesses

der Ordnung m. Im allgemeinen wird jedoch der Träger der Kovarianzfunktion R_y nicht endlich sein. Also ist es auch bei stationären Prozessen mit kurzem Gedächtnis möglich, daß momentane Abweichungen Auswirkungen auf die unendliche Zukunft haben. Allerdings ist deren Einfluß aufgrund der starken Dämpfung von R_y für $t \to \infty$ sehr gering, so daß er für praktische Anwendungen vernachlässigt werden kann. Aufgrund dieser Überlegungen ist es sinnvoll, die Begriffe der Lang- bzw. Kurzzeitinstabilität neu festzulegen. Einen stationären Prozeß werden wir *Langzeitinstabilität* nennen, falls dieser ein langes Gedächtnis besitzt. Hingegen werden wir einen stationären Prozeß mit kurzem Gedächtnis als *Kurzzeitinstabilität* bezeichnen.

Für die Charakterisierung im Frequenzbereich ist neben der Spektraldichte der zufälligen Frequenzfluktuationen S_y auch die der zufälligen Phasenfluktuationen S_φ von besonderer Bedeutung, weil häufig zunächst S_φ bestimmt und daraus S_y berechnet wird. Allerdings ist dabei zu beachten, daß erstere aufgrund der Eigenschaften von y im allgemeinen nicht existiert. Gemäß (2.4) können diese Eigenschaften nämlich die Instationarität von φ verursachen. Dies ist etwa dann der Fall, wenn die Spektraldichte der zufälligen Frequenzfluktuationen im Intervall $(0, \epsilon)$ der Relation $S_y(f) = h_\alpha f^\alpha$ mit $\alpha \leqslant 1$ genügt. Dennoch wird in IEEE STD 1139

$$S_y(f) = \left(\frac{f}{\nu_0}\right)^2 S_\varphi(f), \qquad -f_h < f < f_h \tag{2.8}$$

ohne Einschränkung geschrieben. Die Begründung dafür stützt sich auf die Definition (2.3) von y und ist in zahlreichen Publikationen zu finden [43], [150]. Darin wird argumentiert, es müsse $R_{\dot\varphi} = -\ddot R_\varphi$ gelten, so daß aus den Regeln der FOURIER-Analyse für $-f_h < f < f_h$ folgt

$$(2\pi\nu_0)^2 S_y(f) = S_{\dot\varphi}(f) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} R_{\dot\varphi}(t) = -\sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} \ddot R_\varphi(t) = -(i2\pi f)^2 S_\varphi(f).$$

Grundsätzlich wäre gegen diese Begründung nichts einzuwenden, wenn man gemäß den Sätzen 1.28, 1.31 die Differenzierbarkeit von y im quadratischen Mittel verlangt. Auch die oft zitierte LEESONsche Beschreibung von S_φ setzt diese Eigenschaft voraus [119], [156]. Dennoch steht sie im Widerspruch zu praktischen Erfahrungen [16], [53], [116]. Damit bleibt zu diskutieren, wie die «Spektraldichte» der zufälligen Phasenfluktuationen zu deuten ist. Eng damit verbunden ist die Frage nach den Methoden, welche zur Messung von φ sowie zur anschließenden Schätzung von S_φ zum Einsatz kommen können. Verfahren zur meßtechnischen Erfassung von φ werden ausführlich im Standard IEEE STD 1193 und zahlreichen anderen Arbeiten beschrieben [16], [43], [173]. Zur Schätzung von S_φ kommen verschiedene Methoden in Betracht [142]. Einerseits ist es möglich, die Spektraldichte anhand des Periodogramms zu schätzen [8, S. 73 ff.], [144, S. 394 ff.]. Obwohl für den mathematisch korrekten Gebrauch dieser Methode die Stationarität des betrachteten Prozesses vorauszusetzen ist, führt deren sture Anwendung auf instationäre Prozesse in der Praxis zu nützlichen Resultaten [60], [65]. Dazu zählt etwa der Zusammenhang (2.8). In Kapitel drei werden wir dies eingehend diskutieren. Andererseits kann man zur Schätzung von S_φ den Begriff der Spektraldichte für instationäre Prozesse neu definieren. Eine solche Definition ist durch das WIGNER-VILLE-Spektrum gegeben [59], [127]. Dabei handelt es sich um eine zeitabhängige Funktion, welche anders als die Spektraldichte auch negative Werte besitzen kann. Auch

wenn dies zunächst physikalischen Beobachtungen widerspricht, ist dieses Spektrum ein nützliches Werkzeug, um S_φ zu bestimmen. Entsprechende Resultate hält [58] bereit. Darin wird gezeigt, daß das WIGNER-VILLE-Spektrum fraktionaler Prozesse durch äquidistante Abtastung seine Zeitabhängigkeit verliert. Wird S_φ im Sinne des WIGNER-VILLE-Spektrums interpretiert, dann läßt sich gemäß (2.7) und (2.8) schreiben

$$S_\varphi(f) := \begin{cases} \sum_{\beta=0}^{4} h_\beta f^\beta & \text{für } \epsilon \leqslant f < f_h \\ 0 & \text{für } f \geqslant f_h \end{cases}, \tag{2.9}$$

worin h_β nichtnegative Konstanten sind. Eine graphische Übersicht zu den «Spektraldichten» der zufälligen Frequenz- und Phasenfluktuationen ist in IEEE STD 1139 gegeben.

Charakterisierung im Zeitbereich. Neben der Beschreibung von Frequenzinstabilitäten in Oszillatoren mittels Spektraldichten haben sich auch Kriterien zur Charakterisierung im Zeitbereich etabliert. Diese Kriterien entstanden auf natürliche Weise, weil die Frequenzinstabilitäten stochastische Prozesse beschreiben. Folglich begann man, endliche Ausschnitte dieser Prozesse anhand verschiedener Varianzmaße miteinander zu vergleichen [151]. Den Ausgangspunkt für solche Vergleiche bildete eine an praktischen Verhältnissen orientierte äquidistante Abtastfolge der Frequenzinstabilitäten gemäß

$$\overline{y}_k(\tau) := \frac{1}{\tau}\int_0^\tau y(t_k + t)\,dt, \qquad \tau \leqslant T := t_k - t_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zunächst wurde die sogenannte *echte Varianz*[15] der Abtastfolge $\{\overline{y}_k(\tau)\}$ definiert. Diese zeigte jedoch Unzulänglichkeiten, wenn es darum ging, die Frequenzmodulation infolge von Funkelrauschen zu charakterisieren. Eine Alternative zur echten Varianz stellte die *Abtastwerte-Varianz*

$$\sigma_y^2(N, T, \tau) := \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left[\overline{y}_k(\tau) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\overline{y}_j(\tau)\right]^2$$

dar. Obwohl diese keine der Schwächen der echten Varianz zeigte, war sie aufgrund der unspezifischen Parameter N und T für praktische Vergleiche der Frequenzinstabilitäten nicht geeignet. Einem Vorschlag von ALLAN folgend wurde schließlich die *Zwei-Abtastwerte-Varianz*

$$\sigma_y^2(\tau) := \left\langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau)\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \left[\overline{y}_{l+1}(\tau) - \overline{y}_l(\tau)\right]^2\right\rangle$$

in IEEE STD 1139 standardisiert [2], [87]. Darin wurde $\overline{y}_{k+l-1}$ statt $\overline{y}_k$ verwendet und $\langle . \rangle$ als unendliches Zeitmittel interpretiert. In der praktischen Anwendung ist $\langle . \rangle$ dann durch eine endliche Mittelung zu approximieren. Auch wenn die Zwei-Abtastwerte-Varianz in vielen Belangen den Wünschen der Wissenschaftler entsprach, so konnte sie in einem Punkt nicht überzeugen. Aufgrund der Differenz von nur je zwei benachbarten Abtastwerten ist es damit nicht möglich,

[15] Die echte Varianz wird auch als *true variance* bezeichnet.

die aus einer zufälligen Irrfahrt und einem Funkelrauschen resultierende Frequenzmodulation zu unterscheiden [3], [164, S. 205]. Um auch den Einfluß dieser Ursachen auf die Frequenzinstabilitäten vergleichen zu können, wurde in IEEE STD 1139 ein weiteres Varianzmaß definiert. Es wird als modifizierte ALLAN-*Varianz* bezeichnet und kann in der Form

$$\operatorname{mod}\,\sigma_y^2(\tau) := \frac{1}{2}\left\langle \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{y}_{l+n+j-1}(\tau) - \overline{y}_{l+j-1}(\tau) \right]^2 \right\rangle$$

dargestellt werden [152]. Neben den hier genannten Varianzmaßen werden zahlreiche weitere in der Literatur diskutiert [23], [83], [122]. Eine übersichtliche Zusammenstellung dazu sowie Möglichkeiten zur Berechnung der Varianzmaße aus den «Spektraldichten» S_y und S_φ sind [151], [152] zu entnehmen. Daß im allgemeinen nicht umgekehrt auch die «Spektraldichten» aus den Varianzmaßen berechnet werden können, wurde in [67] diskutiert. Damit ist die hier vorgestellte Charakterisierung im Zeitbereich nicht geeignet, um die Frequenzinstabilitäten im Sinne der L_2-Theorie eindeutig zu beschreiben. Unter Verwendung der Spektraldichte S_y ist eine solche Beschreibung jedoch möglich. Wir kommen später darauf zurück.

Charakterisierung mittels stochastischer Differentialgleichungen. Während das IEEE Subcommittee on Frequency Stability mit dem Standard IEEE STD 1139 Kriterien publizierte, um Frequenzinstabilitäten in Oszillatoren beurteilen und vergleichen zu können, gab es auch Bestrebungen, diese anhand stochastischer Differentialgleichungen analytisch zu beschreiben.

Ihren Ursprung haben diese Bestrebungen in den 1920er Jahren. Es war VAN DER POL, der nach 1917 damit beschäftigt war, die Folgen der HEAVISIDEschen Hypothese über die Existenz einer ionisierten Schicht in der Atmosphäre zu untersuchen [89]. Für die genaue Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten ionisierter Gase benötigte er Oszillatoren, um Schwingungen mit sehr kurzer Wellenlänge zu erzeugen. Die Beschäftigung mit den zunächst nur als Werkzeug verwendeten Oszillatoren sollte sein späteres wissenschaftliches Streben nachhaltig beeinflussen. Zwischen 1920 und 1922 arbeiteten VAN DER POL und APPLETON gemeinsam, um das Hystereseverhalten erzwungener Schwingungen in nichtlinearen Systemen zu analysieren [11], [12], [168]. Speziell betrachteten sie einen MEIßNER-Oszillator mit Triode und gelangten damit zu einer Gleichung, welche später in veränderter Form Berühmtheit erlangen sollte. Sie notierten

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d}{dt}\chi(v) + w_0^2 v = 0, \qquad \chi(v) = \frac{Rv}{L} + \frac{\psi(v)}{C}, \quad w_0^2 = \frac{1}{CL}$$

und bemerkten, mögliche Lösungen dazu seien ihnen nicht bekannt. Dennoch war diese Gleichung geeignet, um erste Erkenntnisse darüber zu erlangen. Nach vier weiteren Jahren gelang es VAN DER POL, die parameterabhängigen Lösungen zu beschreiben [169]. Zunächst schrieb er

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + w^2 x = 0 \tag{2.10}$$

und argumentierte, falls $\alpha > 0$ und $\alpha^2 < 4w^2$ gelte, dann würde die Lösung von (2.10) eine gedämpfte Schwingung beschreiben. Zudem, diskutierte er weiter, würde sich im Fall $\alpha < 0$ und $\alpha^2 < 4w^2$ als Lösung eine ungedämpfte Schwingung ergeben. Daraufhin stellte VAN DER POL

fest: Um eine Lösung zu erhalten, welche dem Schwingungsverhalten der Oszillatorausgabe entspricht, ist α so zu gestalten, daß dieser Parameter als Funktion von x einmal positiv und einmal negativ ist. Also ersetzte er α durch $\alpha - 3\gamma x^2$ mit $\alpha, \gamma > 0$ und erhielt

$$\ddot{x} - (\alpha - 3\gamma x^2)\dot{x} + w^2 x = 0. \tag{2.11}$$

Anschließend substituierte er die Variablen und notierte (2.11) in der heute üblichen Form

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Dann diskutierte VAN DER POL das Verhalten zugehöriger Lösungen in Abhängigkeit von ϵ und stellte entsprechende Kurvenverläufe schließlich in der Phasenebene $(x, \dot{x})$ graphisch dar.

Obwohl die VAN DER POLschen Resultate aus heutiger Sicht die mathematische Theorie der nichtlinearen dynamischen Systeme begründeten, fand er bei Mathematikern seiner Zeit kein Gehör. Ursache dafür waren die von ihm verwendeten heuristischen Methoden. Bereits um 1900 hatten POINCARÉ und LJAPUNOW das Konzept der Grenzzyklen entwickelt, mit dem sich periodische Lösungen in nichtlinearen Systemen finden lassen. Aus mathematischer Sicht hatte es daher zunächst den Anschein, daß die VAN DER POLschen Resultate keinen Erkenntnisgewinn liefern. Diese Einschätzung war jedoch falsch, wie sich später zeigte. POINCARÉ und LJAPUNOW hatten das Konzept der Grenzzyklen entwickelt, um Probleme der klassischen Mechanik und mathematischen Physik zu lösen. Dabei auftretende Gleichungen unterschieden sich aber vom VAN DER POLschen Resultat. Es war ANDRONOW um 1930, der die Bedeutung der Unterschiede als erster erkannte [7]. Dazu notierte er, daß auch in biologischen Systemen schwingende Vorgänge zu beobachten seien, etwa wenn zwei verschiedene Spezies miteinander koexistieren. ANDRONOW war mit der Modellierung solcher Systeme sehr wohl vertraut, so daß er resümierte, die Selbstoszillationen können durch zwei simultane Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{2.12}$$

erster Ordnung beschrieben werden. Schließlich betrachtete er periodische Lösungen von (2.12) und stellte fest, daß diese unter gewissen Randbedingungen den Grenzzyklen von POINCARÉ und LJAPUNOW entsprechen. Dies war der Auslöser für die Entwicklung der heute bekannten mathematischen Theorie der nichtlinearen dynamischen Systeme, welche maßgeblich von der sowjetischen Schule geprägt wurde [57], [89].

Mit der fortschreitenden Entwicklung der Theorie der nichtlinearen dynamischen Systeme nach 1930 entwickelte sich bald auch das Bedürfnis den Einfluß zufälliger Fluktuationen in Oszillatoren analysieren zu können. Speziell für den schaltungstechnischen Entwurf sehr präziser Oszillatoren gab es in dieser Hinsicht zahlreiche offene Probleme. Erste Resultate dazu erschienen in den 1950er Jahren. Erneut waren es sowjetische Wissenschaftler wie KUZNETSOV, STRATONOVICH und TIKHONOV, welche einen wesentlichen Anteil daran hatten [115, S. 221 ff.]. Sie erweiterten den ANDRONOWschen Ansatz (2.12) um eine zufällige Komponente ξ gemäß

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \xi), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \xi). \tag{2.13}$$

Dann wendeten sie zur Analyse des neuen Gleichungssystems eine Methode an, welche später in ähnlicher Form als *Störungsanalyse* bekannt wurde. Weitere Resultate folgten in den 1960er Jahren. Einen bedeutenden Betrag lieferte HAFNER, indem er zeigte, daß die Ausgabe eines durch zufällige Fluktuationen gestörten Oszillators als stationärer Prozeß beschrieben werden kann [68]. Speziell stellte er dessen Kovarianzfunktion und Spektraldichte durch eine Summe aus vier Grundkomponenten dar. Zudem interessierte ihn auch die Beschreibung der zufälligen Phasenfluktuationen, welche er ebenfalls mittels Kovarianzfunktion in Summenform charakterisierte. Dabei bemerke er, daß der erste Term nicht zeitunabhängig war. Dennoch notierte er: *„With some care in dealing with the first term"* und berechnete eine Spektraldichte, welche aber erstaunlicherweise keine Zeitabhängigkeit mehr enthielt. Abgesehen von solchen für die Praxis oft irrelevanten mathematischen Unzulänglichkeiten zeichnete sich HAFNERS Arbeit durch eine detaillierte Herleitung der Kovarianzfunktionen von Ausgabe und Phasenfluktuationen aus. Auf die Anwendung der Störungsanalyse hatte er aber verzichtet. Nach weiteren 25 Jahren und zahlreichen anderen Arbeiten publizierte KAERTNER um 1990 seine wegweisenden Resultate [97], [98]. Er benutzte die Störungsanalyse, das ITÔ-Integral, die FLOQUET-Theorie sowie Resultate von POINCARÉ, um zu einer mathematisch exakten Beschreibung der zufälligen Fluktuationen in Oszillatoren und deren numerischer Berechnung zu gelangen. Er begann seine Ausführungen ausgehend vom stochastischen Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = F(x, \xi) \tag{2.14}$$

mit einer zufälligen Störung ξ. Unter der Annahme, daß diese eine hinreichend kleine Varianz besitzt, verwendete KAERTNER die Störungsanalyse und notierte zunächst

$$\dot{x} = F(x, 0) + G(x)\xi, \qquad G_{ij}(x) := \left.\frac{\partial F_i(x, \xi)}{\partial \xi_j}\right|_{\xi=0}.$$

Weiter argumentierte er, daß (2.14) mit $\xi = 0$ einen ungestörten Oszillator beschreibt, dessen Lösung einem stabilen Grenzzyklus x_0 der Periode T_0 entspricht. Dann zerlegte er x gemäß

$$x(t) = x_0[1 + \vartheta(t)] + x_\perp[1 + \vartheta(t)]$$

in orthogonale Komponenten, worin $x_\perp$ und ϑ die zufälligen Amplituden- und Phasenfluktuationen repräsentieren. Schließlich erhielt KAERTNER nach weiteren Zwischenschritten

$$\vartheta(t) = \int_0^t \alpha(s)\xi(s) + \beta(s)x_\perp(s)\, ds, \tag{2.15}$$

mit gewissen, den Oszillator charakterisierenden Funktionen α und β. Diese Beschreibung der zufälligen Phasenfluktuationen in Oszillatoren stellt den heutigen Stand der Wissenschaft dar. Zwar gab es um das Jahr 2000 noch zwei weitere Theorien, welche für sich in Anspruch nahmen, allgemeingültig zu sein, doch gaben diese nur wieder, was KAERTNER bereits zehn Jahre zuvor gezeigt hatte. Zunächst waren dies die Arbeiten von HAJIMIRI und LEE [69], [118]. Später folgten die Publikationen von DEMIR, MEHROTRA und ROYCHOWDHURY [45], [46], [47]. Obwohl letztere prinzipiell die gleichen Methoden wie KAERTNER verwendeten, enthielten ihre Ausführungen mathematische Schwächen. Ein Gegenbeispiel wurde etwa von CORAM diskutiert [41].

§3 Modellierung zufälliger Phasenfluktuationen

Obgleich mit (2.15) eine mathematisch exakte Beschreibung der zufälligen Phasenfluktuationen in Oszillatoren existiert, so ist diese zur Herleitung eines entsprechenden Simulationsmodells nur bedingt geeignet. Ursache dafür sind die Funktionen α und β. Wir aber streben nach einfachen Lösungen. Daher werden wir im folgenden verschiedene Oszillatorenmodelle untersuchen und uns zugehörige Lösungen erarbeiten. Genauer, im Rahmen der Theorie stochastischer Prozesse zweiter Ordnung werden wir zeigen, daß die Ausgabe von Oszillatoren mit einer Störung in der Form eines zentrierten stationären Prozesses η mit stetiger Kovarianzfunktion durch

$$\psi(t) = a\cos[w_0 t + \varphi(t)] \quad \text{mit} \quad \varphi(t) := \int_{t_0}^{t} \eta(s)\,ds, \qquad t \geqslant t_0 \tag{2.16}$$

darstellbar ist. Dies ist eine Beschreibung für die Ausgabe von Oszillatoren, welche eingesetzt werden kann, wenn nur zufällige Phasenfluktuationen zu modellieren sind. Auch für die vorliegende Arbeit ist dies der Fall, so daß wir uns im weiteren Verlauf ausschließlich auf (2.16) konzentrieren werden. Zunächst bleibt aber zu klären, wie man zu dieser Darstellung gelangt.

Instabilitäten und Lösungen autonomer DGL-Systeme. Sprechen wir von Instabilitäten in schwingenden physikalischen Systemen, dann sind damit stets Abweichungen vom stabilen Schwingungszustand gemeint. In der praktischen Anwendung wird man sich daher fragen, ob das Verhalten des gestörten von dem des ungestörten Systems nur in einem vertretbaren Ausmaß differiert. Ist dies der Fall, so spricht man von einem stabilen, anderenfalls von einem instabilen System. Man verbindet den Begriff der Stabilität schwingender physikalischer Systeme also mit der Vorstellung, daß kleine Störungen nur kleine Abweichungen vom ungestörten Schwingungszustand verursachen können. Dabei ist jedoch zwischen verschiedenen Arten von Störungen zu unterscheiden. Ein schwingendes System könnte etwa in dem Sinne stabil sein, daß kleine Schwankungen im Anfangszustand nur kleine Abweichungen in der Ausgabe bewirken. Dieser Stabilitätsbegriff ist von grundlegender Bedeutung, weil darin eine notwendige Bedingung für die Schwingfähigkeit des Systems besteht. Allerdings liefert er keine Auskunft darüber, wie sich das gleiche System unter permanenter Einwirkung sehr kleiner additiver Störungen verhält. Notwendigerweise muß das betrachtete System also über gewisse Rücktriebskräfte verfügen, um auch einer ununterbrochenen Störung nachhaltig entgegenwirken zu können.

Folglich kommen zur mathematischen Modellierung schwingender physikalischer Systeme nur DGL-Systeme in Betracht, deren ungestörte, d. h. autonome Entsprechung

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.17}$$

stabile Grenzzyklen, also asymptotisch orbital stabile periodische Lösungen besitzt [96, S. 280]. Damit sind jedoch prinzipielle Unwägbarkeiten verbunden. Schon der Nachweis der Existenz periodischer Lösungen erweist sich oft als überaus schwierig, da allgemeingültige Aussagen zu dieser Problematik nicht verfügbar sind [57, S. 83 f. und S. 250 ff.]. Lediglich für zweidimensionale DGL-Systeme erster Ordnung stehen entsprechende Resultate bereit [57, S. 84 ff.], [70, S. 365 ff.]. Ein weiteres Problem betrifft die Darstellung der Lösungen. Selbst im Fall ihrer Existenz ist

zunächst nichts über deren Gestalt bekannt. Nur für sehr wenige nichtlineare DGL-Systeme können die Lösungen überhaupt explizit angegeben werden [39, S. 50], [96, S. 1].

Oszillatoren und Schwingungen ohne Störung. Aufgrund unserer bisherigen Überlegungen ist es sinnvoll, zur mathematischen Modellierung der Instabilitäten von Oszillatoren zunächst auf die Betrachtung entsprechender Störungen zu verzichten. Vielmehr müssen wir an erster Stelle darauf achten, ein geeignetes Modell in Form eines autonomen DGL-Systems für den betrachteten Oszillator zu finden. Weil wir uns insbesondere für die Existenz sowie die Darstellung zugehöriger periodischer Lösungen interessieren, werden wir unsere Betrachtungen auf ausgewählte zweidimensionale DGL-Systeme erster Ordnung beschränken. Dabei gehen wir wie folgt vor. Ausgehend vom Schema eines MEIßNER-Oszillators werden wir ein erstes mathematisches Modell formulieren und die Eigenschaften der zugehörigen periodischen Lösung zusammenfassen. Aufgrund der Komplexität dieser Lösung sowie Problem bei ihrer Herleitung, werden wir im Anschluß weitere mathematische Modelle betrachten, deren periodische Lösungen jene des ersten Modells approximieren. In Bezug auf die Lösungen werden wir dabei auf einfache Darstellungen sowie den Erhalt wichtiger Eigenschaften achten. Schließlich werden wir die Modelle untereinander vergleichen und ihre Eignung für unseren Zweck prüfen.

2.1 Modell (MEIßNER-Oszillator). Wir betrachten ein schwingendes physikalisches System in Form eines elektrischen Parallelresonators sowie einer durch induktive Rückkopplung gesteuerten Triode (Abb. 2.2). In der Literatur wird ein solcher Aufbau als MEIßNER-Oszillator bezeichnet

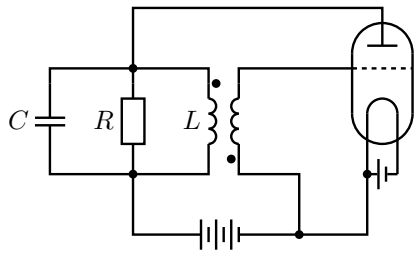


Abb. 2.2: Schaltung eines MEIßNER-Oszillators mit Triode.

[113, S. 149 ff.], [162, S. 475]. Entwickelt man die Kennlinie der Triode in einer TAYLORschen Reihe und bricht nach dem dritten Glied ab, dann kann das Verhalten des Oszillators durch die VAN DER POL-Gleichung modelliert werden [57, S. 97 ff.], [123, S. 52 ff.], [170]. Darin bezeichnet $m > 0$ einen Parameter und x ist proportional zur Spannung am Kondensator C.

$$\ddot{x} + m(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{2.18}$$

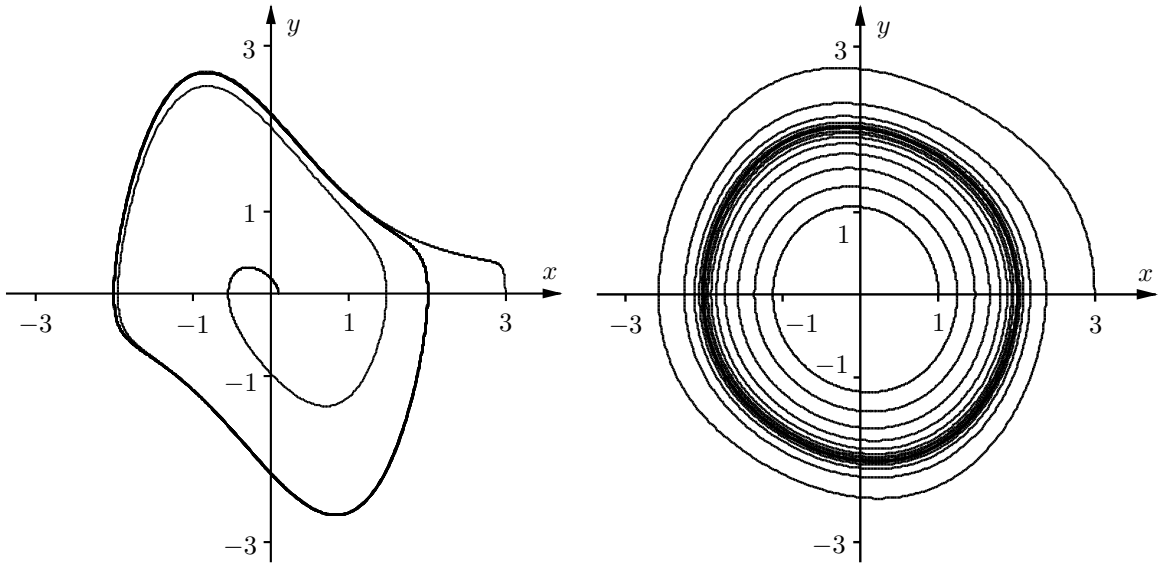
Diese Gleichung weist nun einige Besonderheiten auf. Zunächst läßt sich zeigen, daß (2.18) zu jedem $m > 0$ genau eine asymptotisch orbital stabile periodische Lösung x_m besitzt, gegen die jede weitere nichtkonstante Lösung mit wachsender Zeit konvergiert [57, S. 369 f.], [70, S. 379 f.]. Es ist jedoch zu beachten, daß die Lösungen x_m im allgemeinen nicht explizit darstellbar sind

[96, S. 114]. Folglich wird man sich zur Untersuchung der Lösungseigenschaften auf ausgewählte Spezialfälle beschränken oder sich um geeignete Näherungsverfahren bemühen. Eine häufig angewandte Methode zur Behandlung der zweiten Alternative besteht etwa im Studium numerischer Näherungen von x_m. Dabei geht man wie folgt vor. Zunächst notiert man (2.18) in Form eines äquivalenten DGL-Systems

$$\dot{x} = -y, \qquad x(t_0) := x_0 \tag{2.19a}$$

$$\dot{y} = x - m(x^2 - 1)y, \qquad y(t_0) := y_0 \tag{2.19b}$$

zum Anfangswert (x_0, y_0) und stellt anschließend die damit erzielten numerischen Lösungen in der Phasenebene graphisch dar (Abb. 2.3). Weil mit x_m auch die Lösung (x_m, y_m) von (2.19)



(a) Für $m = 1$ und $(x_0, y_0) \in \{(0.1, 0), (3, 0)\}$.

(b) Für $m = 0.1$ und $(x_0, y_0) \in \{(1, 0), (3, 0)\}$.

Abb. 2.3: Konvergente Lösungen der VAN DER POL Gleichung in der Phasenebene.

a priori unbekannt ist, müssen dabei stets zwei Lösungen pro Bild abgetragen werden. Eine die von innen und eine die von außen gegen (x_m, y_m) konvergiert. Nach hinreichend langer Zeit werden diese Lösungen einen beliebig kleinen Abstand zum Orbit von (x_m, y_m) besitzen. Für jedes m erhält man somit das approximierte Verhalten der gesuchten periodischen Lösung (x_m, y_m). Beispiele für die Darstellung konvergierender Lösungen für verschiedene Werte von m können etwa (Abb. 2.3) entnommen werden. Darin zeigen sich zwei wesentliche Eigenschaften. Einerseits ist die Konvergenzgeschwindigkeit der Lösungen gegen (x_m, y_m) um so geringer, je kleiner m dem Betrage nach ist. Andererseits ändert sich aber auch die Gestalt von (x_m, y_m). So nähern sich diese Lösungen insbesondere für $0 < m \ll 1$ kreisförmigen Kurven um Null mit dem Radius 2 an [57, S. 369 f.].[16] Zu diesem Resultat gelangt man auch auf anderem Wege, da x_m

[16] Im Fall $m \gg 1$ siehe auch [163].

im Spezialfall $m \to 0$ auch analytisch ermittelt werden kann. Es gilt

$$x_m = u_m \cos(v_m) - m\, u_m^3 \sin(3v_m)/32 + O(m^2), \tag{2.20}$$

worin u_m die Amplitude und v_m die Phase von x_m gemäß

$$u_m(t) = 2/\sqrt{1 + (4u_0^{-2} - 1)\, e^{-m(t-t_0)}} \tag{2.21a}$$

$$v_m(t) = v_0 - m\big\{\ln[u_m(t)/8] + 7u_m^2(t)/64\big\} + (1 - m^2/16)(t - t_0) \tag{2.21b}$$

für alle $t \geqslant t_0$ zum Anfangswert (u_0, v_0) beschreibt [143, S. 299]. Also kann x_m für genügend kleine, positive Werte von m nach hinreichend langer Zeit näherungsweise durch eine Cosinusfunktion mit der Amplitude 2 und der Phase $v_0 + (1 - m^2/16)(t - t_0)$ dargestellt werden.

Gemäß unserem Wunsch verfügen wir mit (2.18) nun über ein erstes mathematisches Modell zu einem gegebenen Oszillator (Abb. 2.2), der für $0 < m \ll 1$ ein nahezu kosinusförmiges, asymptotisch orbital stabiles Ausgabesignal besitzt. Wir sind ausschließlich an diesem Spezialfall interessiert, der in der praktischen Anwendung stets durch Parametervariation der Oszillatorbauelemente erreicht werden kann [57, S. 97 ff.]. Doch obwohl dieses Modell eine Reihe notwendiger Voraussetzungen erfüllt, ist es in dieser Form für unsere Untersuchungen nicht geeignet. Die Ursache dafür ist in den für eine analytische Bestimmung von (2.20) notwendigen Berechnungsschritten begründet [143, S. 299]. Sind etwa additive Störungen zu berücksichtigen, dann können solche Lösungen nicht mehr explizit ermittelt werden. Folglich werden wir nach alternativen mathematischen Modellen suchen, die den betrachteten Spezialfall geeignet approximieren. Mit anderen Worten, wir suchen nach zweidimensionalen DGL-Systemen erster Ordnung mit asymptotisch orbital stabilen periodischen Lösungen, die in der Phasenebene kreisförmig und auf einfache Weise explizit darstellbar sind. Weil wir dabei frei wählen dürfen, werden wir für unseren Zweck günstige DGL-Systeme bevorzugen. Diese zeichnen sich dadurch aus, daß sie mittels Transformation in Produktsysteme, also in DGL-Systeme mit getrennten Veränderlichen überführt werden können [70, S. 185 ff.]. Wir definieren zunächst die Mengen

$$\mathbb{U} := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad \mathbb{V} := (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

2.2 Modell (Naiver Oszillator). Eine erste Alternative zur mathematischen Beschreibung des Meißner-Oszillators gemäß (2.18) erhält man für $m = 0$ und anschließende Multiplikation von x mit einer Konstanten w_0^2, wobei $w_0 > 0$ gelte. Wählt man ferner $(x_0, y_0) \in \mathbb{U}$ beliebig fest, dann kann (2.18) in Form eines Anfangswertproblems wie folgt notieren werden

$$\dot{x} = -w_0 y, \qquad x(t_0) := x_0 \tag{2.22a}$$

$$\dot{y} = w_0 x, \qquad y(t_0) := y_0. \tag{2.22b}$$

In der Literatur wird (2.22) oft als linearer harmonischer Oszillator bezeichnet [96, S. 10 f.]. Ausgehend davon gelangt man durch einfache Transformation zum äquivalenten DGL-System

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0, \qquad x(t_0) := x_0$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = w_0(x^2 + y^2), \qquad y(t_0) := y_0,$$

welches nach Umformung in Polarkoordinaten mit $(x, y) \in \mathbb{U}^{\mathbb{T}}$, $(u, v) \in \mathbb{V}^{\mathbb{T}}$ gemäß

$$x := u \cos v, \qquad y := u \sin v \tag{2.23}$$

in ein entsprechendes Anfangswertproblem mit $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}$ überführt werden kann

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 0, & u(t_0) &:= u_0 \\ \dot{v} &= w_0, & v(t_0) &:= v_0. \end{aligned}$$

Da jede der Gleichungen von der jeweils anderen unabhängig ist, erhält man deren Lösungen aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung [111, S. 200 f.], [112, S. 139]. Sie lauten

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \\ v(t) &= v_0 + w_0(t - t_0) \end{aligned}$$

für alle $t \geqslant t_0$. Betrachtet man schließlich einen Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}$ beliebig fest und transformiert obige Lösungen mittels (2.23) in kartesische Koordinaten zurück, dann wird das ursprüngliche Anfangswertproblem (2.22) gemäß Satz 1.76 für alle $t \geqslant t_0$ durch

$$x(t) = u_0 \cos[v_0 + w_0(t - t_0)] \tag{2.24a}$$
$$y(t) = u_0 \sin[v_0 + w_0(t - t_0)] \tag{2.24b}$$

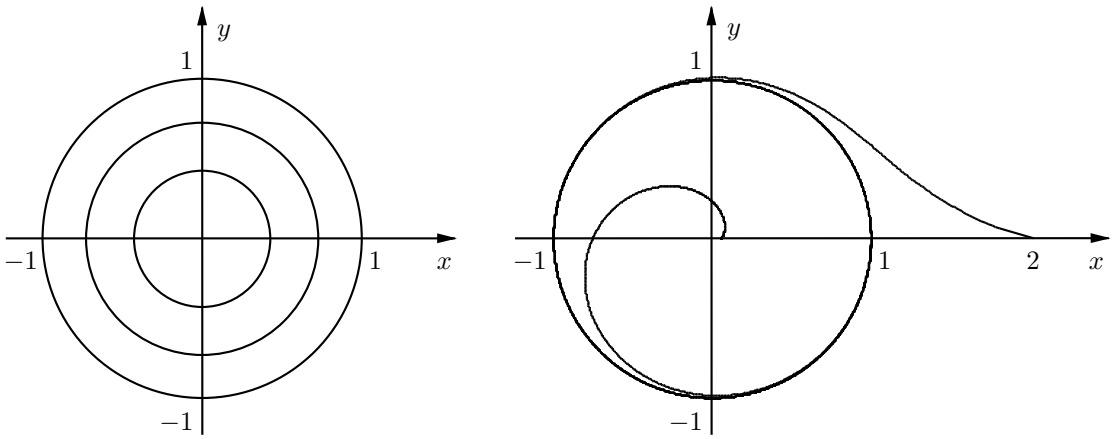
eindeutig gelöst. Damit sind für $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}$ die Lösungen von (2.22) periodisch und beschreiben in der Phasenebene kreisförmige Kurven um Null mit dem Radius u_0 und der Phase $v_0 + w_0(t - t_0)$. Stets besitzen diese Lösungen also einen konstanten Radius und sind daher nicht asymptotisch orbital stabil. Allerdings sind sie stabil im Ljapunowschen Sinne [96, S. 290 f.] und damit zumindest orbital stabil [96, S. 286].

2.3 Modell (Idealer Oszillator). Eine weitere Alternative zur mathematischen Modellierung des Meißner-Oszillators besteht in der nichtlinearen Erweiterung von Modell 2.2. Bezeichnet $p > 0$ einen Parameter, so könnte beispielsweise das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = -w_0 y + x\big(p^2 - x^2 - y^2\big), \qquad x(t_0) := x_0 \tag{2.25a}$$
$$\dot{y} = w_0 x + y\big(p^2 - x^2 - y^2\big), \qquad y(t_0) := y_0 \tag{2.25b}$$

betrachtet werden. Dabei handelt es sich um ein wohlbekanntes DGL-System, welches in engem Zusammenhang mit der Hopfschen Bifurkation steht [70, S. 344 ff.], [96, S. 437 ff.]. Nach analoger Anwendung der im Modell 2.2 beschriebenen Transformationen erhält man daraus ein äquivalentes Produktsystem zum Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}$ gemäß

$$\dot{u} = u(p^2 - u^2), \qquad u(t_0) := u_0 \tag{2.26a}$$
$$\dot{v} = w_0, \qquad v(t_0) := v_0. \tag{2.26b}$$



(a) Für $u_0 \in \{0.4, 0.7, 1\}$. (b) Für $p = 1$ und $u_0 \in \{0.05, 1, 2\}$.

Abb. 2.4: Lösungen für (a) den naiven Oszillator und (b) den idealen Oszillator mit $v_0 = 0$.

Darin bezeichnet (2.26a) eine Bernoullische Differentialgleichung, welche unter Anwendung der Substitution $z := u^{-2}$ in eine lineare Differentialgleichung bezüglich z umgeformt und folglich elementar gelöst werden kann [111, S. 264 f.], [143, S. 4]. Damit gilt

$$u_p(t) = p/\sqrt{1 + (p^2 u_0^{-2} - 1)\, e^{-2p^2(t-t_0)}} \tag{2.27a}$$

$$v_p(t) = v_0 + w_0(t - t_0) \tag{2.27b}$$

für alle $t \geqslant t_0$. Betrachtet man erneut einen beliebigen festen Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}$, dann besitzt (2.27a) folgende Eigenschaften [70, S. 208 ff.], [112, S. 145 f.]. Für $u_0 = p$ ist u_p konstant mit $u_p = u_0$. Im Fall $u_0 \neq p$ jedoch ist u_p streng monoton und es gilt $\lim_{t\to\infty} u_p(t) = p$. Damit erhält man die Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems (2.25) schließlich wieder durch Rücktransformation in kartesische Koordinaten. Es gilt

$$x_p(t) = p/\sqrt{1 + (p^2 u_0^{-2} - 1)\, e^{-2p^2(t-t_0)}}\, \cos[v_0 + w_0(t - t_0)] \tag{2.28a}$$

$$y_p(t) = p/\sqrt{1 + (p^2 u_0^{-2} - 1)\, e^{-2p^2(t-t_0)}}\, \sin[v_0 + w_0(t - t_0)] \tag{2.28b}$$

für alle $t \geqslant t_0$. Wählt man also $u_0 = p$, dann bildet diese Lösung in der Phasenebene erneut einen Kreis mit dem Radius u_0. Anderenfalls jedoch zeigen sich spiralförmige Kurven, welche für $u_0 \in (0, p)$ von innen bzw. für $u_0 \in (p, \infty)$ von außen mit wachsender Zeit gegen einen Kreis mit dem Radius p konvergieren. Daraus aber folgt, daß das ursprüngliche Anfangswertproblem (2.25) auf $\mathbb{U}$ genau eine asymptotisch orbital stabile periodische Lösung um Null mit dem Radius p besitzt [57, S. 412 ff.], [70, S. 378 f.].

Mit den Modellen 2.2, 2.3 verfügen wir nun über zwei Approximationen der Eigenschaften des Meißner-Oszillators aus Modell 2.1. Im nächsten Schritt wollen wir diese Modelle miteinander vergleichen. Dazu stellen wir erst die Modelle 2.1, 2.2 und anschließend die Modelle 2.1, 2.3

gegenüber. Da diese ausschließlich auf autonomen DGL-Systemen basieren, können wir dabei ohne Einschränkung stets $t_0 = 0$ voraussetzen [57, S. 17 f.], [112, S. 144].

2.4 Bemerkung (Modell 2.1 vs. Modell 2.2). Abweichend von unserem Wunsch sind die Lösungen (x, y) des naiven Oszillators zwar explizit darstellbar und in der Phasenebene kreisförmig (Abb. 2.4(a)), jedoch nicht asymptotisch orbital stabil. Folglich besitzt dieses Modell keinen stabilen Grenzzyklus und beschreibt daher ein nicht selbsterregendes System [96, S. 26 ff. und S. 37 ff.], dessen Ausgabeamplitude vom Anfangswert abhängig ist. Dennoch ist es aufgrund seiner orbitalen Stabilität stabil bezüglich des Anfangswertes. Also kann unter Vernachlässigung zusätzlicher Störungen die Ausgabe des Meißner-Oszillators im eingeschwungenen Zustand durch jene des naiven Oszillators approximiert werden. Setzt man für $|m| \ll 1$ in (2.21) also

$$u_0 := 2, \qquad v_0 := m(2\ln 2 + 7)/16 \tag{2.29}$$

voraus und wählt in (2.24a) zudem

$$u_0 := 2, \qquad v_0 := 0, \qquad w_0 := 1 - m^2/16,$$

dann besitzen die Lösungen nach (2.20) und (2.24a) identische Phasen und es gilt

$$|x_m - x| \leqslant m/4 + O(m^2).$$

2.5 Bemerkung (Modell 2.1 vs. Modell 2.3). Infolge seiner Nichtlinearität wird der ideale Oszillator unseren Wünschen vollkommen gerecht. So haben wir bereits diskutiert, daß dieses Modell zu jedem $p > 0$ genau eine periodische Lösung (x_p, y_p) mit den uns interessierenden Eigenschaften besitzt. Damit ist auch der ideale Oszillator als Approximation des Meißner-Oszillators im eingeschwungenen Zustand geeignet. Setzt man unter der Bedingung $|m| \ll 1$ in (2.21) also erneut den Anfangswert (2.29) voraus und verlangt für (2.28a) ferner

$$p := 2, \qquad u_0 := p, \qquad v_0 := 0, \qquad w_0 := 1 - m^2/16,$$

dann besitzen auch die Lösungen (2.20), (2.28a) identische Phasen und es gilt

$$|x_m - x_p| \leqslant m/4 + O(m^2).$$

Darüber hinaus kann der Meißner-Oszillator aber auch im nicht eingeschwungenen Zustand durch den idealen Oszillator approximiert werden. Dazu wählt man zunächst eine Konstante $k > 0$ beliebig und setzt für $|m| \ll 1$ in (2.21a) den Anfangswert

$$u_0 := k, \qquad v_0 := m(2\ln 2 + 7)/16$$

voraus. Verlangt man für (2.28a) ferner

$$p := \sqrt{m/2}, \qquad u_0 := kp/2, \qquad v_0 := 0, \qquad w_0 := 1 - m^2/16,$$

dann konvergiert die Phase von (2.20) mit wachsender Zeit gegen jene von (2.28a). Zudem bewegen sich die Amplituden mit identischer Geschwindigkeit zum jeweiligen Grenzradius. Dieser ist allerdings für die betrachteten Modelle verschieden. In (2.28a) entspricht er dem Wert $\sqrt{m/2}$ gegenüber einem Wert von 2 in (2.20). Abgesehen von diesem Unterschied, zeigen die Lösungen beider Modelle unter den genannten Voraussetzungen ein nahezu identisches Verhalten. Damit ist der ideale Oszillator als Approximation des Meißner-Oszillators für unseren Zweck geeignet.

Über den Einfluß additiver Störungen. Nach den Ausführungen im vorherigen Abschnitt sind wir in der Lage, den MEIßNER-Oszillator (Abb. 2.2) unter Vernachlässigung permanent einwirkender Störungen durch die Modelle 2.2, 2.3 zu approximieren. Speziell können wir dabei in Abhängigkeit vom Anfangswert sowie der Parameterwahl zwei Anwendungsfälle unterschieden. Einerseits läßt sich der eingeschwungene Systemzustand betrachten, für den die Lösungen der Modelle 2.2, 2.3 mit dem kreisförmigen Grenzzyklus in Übereinstimmung zu bringen sind. Andererseits kann damit auch der nicht eingeschwungene Systemzustand diskutiert werden. In diesem Fall werden die gegen den kreisförmigen Grenzzyklus konvergierenden Lösungen zumindest durch das Modell 2.3 sinnvoll approximiert.

Aus diesen Resultaten leiten sich unmittelbare Konsequenzen für die Modellierung des gestörten MEIßNER-Oszillators ab. So eignet sich etwa der eingeschwungene Systemzustand, um die ausschließliche Existenz von Phasenstörungen zu beschreiben. Dieser Zusammenhang ist sofort klar, weil dabei die Lösungen den Orbit des kreisförmigen Grenzzyklus niemals verlassen. Sind darüber hinaus auch Amplitudenstörungen zu modellieren, dann kommt ausschließlich der nicht eingeschwungene Systemzustand in Betracht.

Neben der Unterscheidung nach Amplituden- und Phasenstörungen sind stets auch deren Eigenschaften zu berücksichtigen. Beispielsweise stellt sich die Frage, auf welche Weise die betrachteten Störungen den Oszillator beeinflussen. Diesen als Charakterisierung der Instabilitäten bezeichneten Themenbereich haben wir bereits in §2 umfassend diskutiert. Darin hat sich gezeigt, daß additive Störungen die realen Abweichungen sinnvoll beschreiben. Im Vergleich zu ungestörten DGL-Systemen gemäß (2.17) sind dabei insbesondere Modifikationen der Art

$$\dot{x} = f(x) + g(x)b(t) \tag{2.30}$$

von Interesse. In diesem Abschnitt werden wir die Modelle 2.2, 2.3 daher gemäß (2.30) erweitern und uns zugehörige Lösungen erarbeiten. Vorrangig werden wir uns dabei auf Phasenstörungen konzentrieren. Abschließend vergleichen wir die gewonnenen Resultate und gehen kurz auf den Fall zusätzlicher Amplitudenstörungen ein.

2.6 Modell (Naiver Oszillator mit additiver Störung). Bezeichnet man den Störterm $g(x)b$ aus (2.30) im zweidimensionalen Fall kürzer als (b_x, b_y), dann ist der additiv gestörte naive Oszillator auch durch ein Anfangswertproblem mit $(x_0, y_0) \in \mathbb{U}$ in der Form

$$\dot{x} = -w_0 y + b_x(t), \qquad x(t_0) := x_0 \tag{2.31a}$$
$$\dot{y} = w_0 x + b_y(t), \qquad y(t_0) := y_0 \tag{2.31b}$$

darstellbar. Werden nun (b_x, b_y) mittels (2.32) in Polarkoordinaten überführt [132, S. 529 f.]

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_u \\ b_v \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

und die im Modell 2.2 beschriebene Transformation auf (2.31) angewendet, so gelangt man zum

äquivalenten DGL-System

$$\dot{u} = b_u(t), \qquad u(t_0) := u_0 \tag{2.33a}$$

$$\dot{v} = w_0 + \frac{b_v(t)}{u}, \qquad v(t_0) := v_0 \tag{2.33b}$$

mit dem Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}$. Da (2.33b) von u abhängig ist, handelt es sich dabei nicht mehr um ein Produktsystem. Dennoch kann (2.33) eindeutig gelöst werden, wenn (b_u, b_v) den Voraussetzungen des Satzes 1.76 genügt. Die Lösung (u, v) erhält man erneut durch Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung [111, S. 200 f.], [112, S. 139]. Es gilt

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} b_u(s)\, ds$$

$$v(t) = v_0 + w_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{b_v(s)}{u(s)}\, ds$$

für alle $t \geqslant t_0$. Bezüglich (2.33a) sind diese Voraussetzungen insbesondere erfüllt, wenn ausschließlich Phasenstörungen betrachtet werden. Setzt man zu diesem Zweck also $b_u := 0$ sowie Anfangswerte $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}$ voraus, dann ist die Lösung von (2.33) durch

$$u(t) = u_0 \tag{2.34a}$$

$$v(t) = v_0 + w_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{b_v(s)}{u_0}\, ds \tag{2.34b}$$

für alle $t \geqslant t_0$ gegeben. Deren Rücktransformation mittels (2.23) in kartesische Koordinaten liefert schließlich die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (2.31) gemäß

$$x(t) = u_0 \cos\left(v_0 + w_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{b_v(s)}{u_0}\, ds\right) \tag{2.35a}$$

$$y(t) = u_0 \sin\left(v_0 + w_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{b_v(s)}{u_0}\, ds\right) \tag{2.35b}$$

für alle $t \geqslant t_0$. Damit wird der Einfluß additiver Störungen auf die Lösungen des naiven Oszillators unmittelbar klar. Sowohl Amplituden- als auch Phasenstörungen akkumulieren sich mit wachsender Zeit. Dabei wirken Phasenstörungen additiv nur auf das Argument der harmonischen Ausgabe. Amplitudenstörungen hingegen manipulieren die Ausgabe sowohl im Betrag als auch im Argument und üben dabei einen multiplikativen Einfluß aus.

2.7 Modell (Idealer Oszillator mit additiver Störung). Analog zum Modell 2.6 kann auch das Modell 2.3 durch additive Störungen erweitert werden. Verwendet man für die Störungen dabei dieselben Bezeichner wie zuvor, dann wird der additiv gestörte ideale Oszillator durch

$$\dot{x} = -w_0 y + x\big(p^2 - x^2 + y^2\big) + b_x(t), \qquad x(t_0) := x_0 \tag{2.36a}$$

$$\dot{y} = w_0 x + y\big(p^2 - x^2 + y^2\big) + b_y(t), \qquad y(t_0) := y_0 \tag{2.36b}$$

mit dem Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{U}$ modelliert. Nach dem Schema des Modells 2.6 gelangt man folglich durch sukzessive Transformation von (b_x, b_y) und (2.36) in Polarkoordinaten zu einem äquivalenten DGL-System zum Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}$ in der Form

$$\dot{u} = u(p^2 - u^2) + b_u(t), \qquad u(t_0) := u_0 \tag{2.37a}$$

$$\dot{v} = w_0 + \frac{b_v(t)}{u}, \qquad v(t_0) := v_0. \tag{2.37b}$$

Darin sind Übereinstimmungen zum entsprechenden DGL-System aus Modell 2.6 zu erkennen. Offenbar haben (2.33b) und (2.37b) dieselbe Gestalt. Andererseits zeigen sich bedeutende Unterschiede in den Differentialgleichungen bezüglich u. So stellt (2.37a) eine Abelsche Differentialgleichung erster Ordnung dar, welche im allgemeinen nicht integrierbar ist [143, S. 9]. Betrachtet man jedoch nur Phasenstörungen und setzt dazu (b_u, b_v) gemäß Satz 1.76 mit $b_u := 0$ voraus, dann besitzt auch (2.37) eine eindeutige Lösung (u_p, v_p) mit $u_p > 0$, die durch

$$u_p(t) = p/\sqrt{1 + (p^2 u_0^{-2} - 1)\, e^{-2p^2(t-t_0)}}$$

$$v_p(t) = v_0 + w_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{b_v(s)}{u(s)}\, ds$$

für alle $t \geqslant t_0$ gegeben ist. Verlangt man darüber hinaus $p := u_0$, dann gilt speziell

$$u_p(t) = u_0 \tag{2.38a}$$

$$v_p(t) = v_0 + w_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{b_v(s)}{u_0}\, ds, \tag{2.38b}$$

so daß die Lösungen (2.34) und (2.38) identisch sind. Ausgehend von diesem Resultat gelangt man durch Rücktransformation in kartesische Koordinaten schließlich zur Lösung (2.35) des ursprünglichen Anfangswertproblems (2.36).

2.8 Bemerkung. Werden die Modelle 2.2, 2.3 zur Analyse permanent einwirkender Störungen den Modellen 2.6, 2.7 entsprechend modifiziert, dann lassen sich zusammenfassend folgende Aussagen formulieren. Bei exklusiver Betrachtung von Störungen der Art $(0, b_v)$, die den Voraussetzungen von Satz 1.76 genügen, weisen beide Modelle für alle $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}$ und $p = u_0$ dieselbe Lösung (2.35) auf. Diese besitzt eine konstante Amplitude, und ihre Phasenstörungen akkumulieren sich mit anwachsender Zeit. Werden jedoch auch Amplitudenstörungen berücksichtigt, so zeigt sich ein differenziertes Bild. Auf den naiven Oszillator wirken sie katastrophal, denn aufgrund des nicht existierenden stabilen Grenzzyklus können Amplitudenstörungen durch diesen nicht kompensiert werden. Infolgedessen ändert sich mit jeder von Null verschiedenen Störung b_u die Amplitude der Ausgabe und bleibt bis zum erneuten Auftreten einer solchen konstant. Anders verhält es sich mit dem idealen Oszillator, da dieser einen stabilen Grenzzyklus besitzt. Treten in diesem Modell ausschließlich verträgliche Amplitudenstörungen auf, dann wirken die inhärenten Rücktriebskräfte den Störungen derart entgegen, daß die Lösungen gegen den stabilen Grenzzyklus konvergieren. Der Begriff Verträglichkeit ist dabei so zu verstehen, daß die akkumulierten Amplitudenstörungen die Rücktriebskräfte nicht übersteigen [112, S. 139 ff.].

Zufällige additive Störungen. Bisher haben wir den Einfluß determinierter additiver Störungen auf das Verhalten der Oszillatoren aus den Modellen 2.6, 2.7 untersucht. Nun wollen wir uns auf den Fall additiver zufälliger Störungen konzentrieren. Dabei betrachten wir ausschließlich Phasenstörungen, welche durch Integration aus zentrierten stationären Prozessen mit stetiger Kovarianzfunktion entstehen. Maßgebend für die Wahl dieser Prozesse ist die Charakterisierung der zufälligen Frequenz- und Phasenfluktuationen, welche wir in §2 diskutiert haben. Speziell genügt es, im weiteren Verlauf nur eins der genannten Modelle zu betrachten, da diese im Fall exklusiver Phasenstörungen identische Lösungen besitzen. Wir gehen vom naiven Oszillator aus.

2.9 Modell (Naiver Oszillator mit zufälliger additiver Störung). Als Ausgangspunkt der Modellierung zufälliger Phasenstörungen betrachten wir das Anfangswertproblem (2.33) mit geeigneten Voraussetzungen an den Anfangswert (u_0, v_0) und die Störung (b_u, b_v). Unverändert gelte $u_0 > 0$ und $b_u = 0$, so daß (2.34a) die eindeutige Lösung von (2.33a) beschreibt. Ferner bezeichne v_0 statt einer Konstanten nun eine reelle zufällige Größe mit endlichem zweiten Moment und b_v repräsentiere einen zentrierten stationären Prozeß mit stetiger Kovarianz. Dann hat auch (2.33b) nach Satz 1.80 für $t \geqslant t_0$ eine eindeutige Lösung

$$v(t) = v_0 + w_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{b_v(s)}{u_0}\, ds \tag{2.39}$$

im quadratischen Mittel. Abgesehen von dem hier zu verwendenden stochastischen Integral im Riemannschen Sinne, stimmt diese Lösung in ihrer Darstellung mit (2.34b) überein. Betrachtet man also stochastische Prozesse statt Funktionen, dann bleibt nach der Variablensubstitution

$$\psi := x, \qquad \theta := y, \qquad \eta := b_v/u_0, \qquad \varphi := v$$

noch zu zeigen, daß auch

$$\begin{aligned} \psi(t) &= u_0 \cos[w_0(t - t_0) + \varphi(t)] \\ \theta(t) &= u_0 \sin[w_0(t - t_0) + \varphi(t)] \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \eta(s)\, ds \tag{2.40}$$

für alle $t \geqslant t_0$ eine Lösung des DGL-Systems (2.31) im quadratischen Mittel beschreibt. Die Eindeutigkeit dieser Lösung folgt dann unmittelbar aus der Eindeutigkeit von (2.39). Um also zu überprüfen ob (ψ, θ) den Bedingungen der Definition 1.79 genügt, setzen wir (2.40) zuerst auf der rechten Seite von (2.31a) ein und erhalten daraus wegen (2.32)

$$-w_0\theta(t) + b_\psi = -w_0\theta(t) - u_0\eta(t)\sin[w_0(t - t_0) + \varphi(t)] = -[w_0 + \eta(t)]\theta(t).$$

Für die Varianz dieses Ausdrucks gilt offenbar

$$E\big|[w_0 + \eta(t)]\theta(t)\big|^2 \leqslant u_0^2 E[w_0 + \eta(t)]^2 = u_0^2\big[w_0^2 + E\eta^2(t)\big] < \infty,$$

so daß $\psi(t) \in L_2$ für alle $t \geqslant t_0$ erfüllt ist. Nutzt man weiterhin aus, daß φ wegen Satz 1.30 die Ableitung η im quadratischen Mittel besitzt, dann gilt nach formaler Differentiation der linken Seite von (2.31a) im quadratischen Mittel die Relation

$$\dot{\psi}(t) = -[w_0 + \eta(t)]\theta(t).$$

Durch analoge Anwendung dieses Vorgehens auf (2.31b) gelangt man schließlich zum gesuchten Resultat, daß also (2.40) das DGL-System (2.31) eindeutig im quadratischen Mittel löst.

Kapitel 3

Von stetigen Spektren und diskreter Zeit

Nachdem wir im zweiten Kapitel ein zeitstetiges Modell für die in freilaufenden Oszillatoren auftretenden, unvermeidbaren zufälligen Phasenfluktuationen gewonnen haben, wollen wir dieses nun in ein entsprechendes zeitdiskretes Simulationsmodell überführen. Dazu gehen wir von der Darstellung der zufälligen Phasenfluktuation φ als stochastisches RIEMANN-Integral über den Prozeß der zufälligen Frequenzfluktuationen η gemäß

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \eta(s)\, ds, \qquad t \geqslant t_0 \tag{3.1}$$

aus. Den Resultaten aus Kapitel zwei entsprechend bezeichne η einen reellwertigen, zentrierten stationären GAUßschen Prozeß mit kurzem Gedächtnis, stetiger Kovarianzfunktion und der Spektraldichte S_η. Ferner sei φ_0 eine zentrierte GAUßsche zufällige Größe, welche den Wert der zufälligen Phasenfluktuation zur Startzeit t_0 beschreibt. Aufgrund der Linearität des Integrals ist dann auch φ ein zentrierter GAUßscher Prozeß.

Obgleich wir mit dieser Beschreibung über eine qualitative Beschreibung von φ verfügen, so sind uns quantitative Angaben über diesen Prozeß bisher nicht bekannt. Entsprechende Informationen lassen sich jedoch aus der Charakterisierung der Oszillatorinstabilitäten gewinnen. In Kapitel zwei haben wir diesen Aspekt bereits diskutiert. Dabei zeigten sich grundsätzlich zwei Möglichkeiten, das Verhalten der zufälligen Phasenfluktuation zu beschreiben [87]. Einerseits kann deren Charakterisierung im Zeitbereich anhand verschiedener Varianzmaße erfolgen. Andererseits bietet sich unter Verwendung von Spektraldichten eine Charakterisierung im Frequenzbereich an. Ein Vergleich der beiden Alternativen zeigt jedoch, daß nur die Spektraldichten geeignet sind, um die Eigenschaften der zufälligen Phasenfluktuation vollständig zu beschreiben [67]. Dieser Zusammenhang resultiert unmittelbar aus Folgerung 1.39, wonach jeder Spektraldichte eine eindeutige Kovarianzfunktion zugeordnet ist, welche einen zentrierten GAUßschen Prozeß eindeutig beschreibt. Um also quantitative Aussagen über den Prozeß φ zu erhalten, gehen wir im folgenden von der Charakterisierung im Frequenzbereich aus. Angaben zu den Spektraldichten können beispielsweise Datenblättern der betrachteten Oszillatoren entnommen [78] oder durch Messungen ermittelt werden [87].

Trotz unserer anschaulichen Schlußfolgerung stehen wir mit dieser Argumentation vor einem Dilemma, weil wir eine wesentliche Voraussetzung nicht erfüllen können. Bereits in Kapitel zwei haben wir diskutiert, daß die zufälligen Frequenzfluktuationen ein weißes Rauschen enthalten. Folglich muß die Varianz der Phasenfluktuation mit der Zeit über jede beliebige Schranke wachsen. Zwar ist φ mit dieser Eigenschaft ein Prozeß zweiter Ordnung, er ist jedoch keineswegs stationär und kann daher gemäß Bemerkung 1.38 auch keine Spektraldichte besitzen.

In der praktischen Anwendung hat man es häufig mit instationären Prozessen zu tun. Liegt ein solcher Prozeß vor, dann wird in der Regel zunächst versucht, diesen mittels einer geeigneten

Transformation als Funktion eines stationären Prozesses und dessen Spektraleigenschaften zu beschreiben. Im Fall der zufälligen Phasenfluktuationen ist die gesuchte Transformation bereits durch die Relation (3.1) gegeben, da der Prozeß der zufälligen Frequenzfluktuationen als stationär vorausgesetzt wurde.

Für die Herleitung des uns interessierenden Simulationsmodells bleibt damit noch zu zeigen, wie der Prozeß η geeignet dargestellt werden kann. Mit derselben Begründung wie zuvor werden wir uns dabei auf die Charakterisierung im Frequenzbereich stützen. Weil Datenblätter von Oszillatoren im allgemeinen jedoch keine Angaben über die Spektraldichten der Frequenzfluktuationen enthalten, müssen wir diese zunächst aus den Spektraleigenschaften der zufälligen Phasenfluktuation gewinnen.

§1 Spektrale Leistung zufälliger Frequenz- und Phasenfluktuationen

Sprechen wir von den Spektraleigenschaften zufälliger Phasenfluktuationen, dann sind damit die aus Messungen bzw. Datenblättern verfügbaren Kurven und Parameterwerte gemeint. Unser Ziel ist es nun, aus diesen Angaben eine Approximation der wahren Spektraldichte der zugehörigen Frequenzfluktuationen zu bestimmen. Dabei gehen wir schrittweise vor. Zunächst werden wir ein für die Spektralmessung gebräuchliches Schätzverfahren analysieren und anhand dessen einen Zusammenhang zwischen den «Spektraldichten» der zufälligen Frequenz- und Phasenfluktuation extrahieren. Unter Ausnutzung dieses Resultates werden wir im Anschluß den Verlauf der Spektraldichten der zufälligen Frequenzfluktuationen anhand von Datenblattangaben bestimmen.

Phasenfluktuationen und Schätzung der Spektraldichte. In der Literatur werden zahlreiche Verfahren beschrieben, um die Spektraldichte stationärer Prozesse anhand einer einzelnen Realisierung zu schätzen [8, S. 91 ff.], [43]. In der Mathematik spricht man in diesem Zusammenhang von der sogenannten Zeitreihenanalyse. Bemerkenswert ist, daß die sture Anwendung dieser Methoden unter Umständen auch zur Schätzung der «Spektraldichte» instationärer Prozesse nützlich ist [8, S. 203 ff.]. Allerdings ist dabei zu beachten, daß wir einen solchen Begriff für instationäre Prozesse bisher nicht eingeführt haben, weil damit eine zeitvariante Funktion zu verbinden wäre [127]. In der Praxis interessiert man sich daher oft für eine Art mittlerer «Spektraldichte» dieser Prozesse. Um einen entsprechenden Ausdruck für die zufälligen Phasenfluktuationen herzuleiten und um dessen Zusammenhang mit der Spektraldichte der zugehörigen Frequenzfluktuationen zu verstehen, werden wir uns im folgenden auf gewisse Resultate von [8, S. 201 ff.] beziehen. Bevor wir jedoch damit beginnen, wollen wir noch die Darstellung von φ präzisieren und die Kovarianzfunktion dieses Prozesses bestimmen.

Gemäß (3.1) wird das Verhalten von φ sowohl durch den Prozeß η als auch durch den Anfangswert (t_0, φ_0) spezifiziert. Es ist klar, daß wir dabei ohne Einschränkung stets $t_0 := 0$ wählen können, weil anderenfalls nur die betrachtete Zeitachse zu verschieben wäre. Darüber hinaus kann auch $\varphi_0 := 0$ gesetzt werden, wenn die Vergangenheit des Prozesses φ bis zur Startzeit t_0 bedeutungslos ist. Beispielsweise ist dies bei der Simulation nachrichtentechnischer Systeme der Fall, da diese meist von einem synchronen Anfangszustand ausgehend betrachtet werden. Im folgenden wollen wir uns gänzlich auf diesen Spezialfall beschränken. Setzen wir also

$(t_0, \varphi_0) := (0, 0)$, dann lassen sich die zufälligen Phasenfluktuationen durch ein stochastisches RIEMANN-Integral über die zufälligen Frequenzfluktuationen gemäß

$$\varphi(t) = \int_0^t \eta(s)\, ds, \qquad t \geqslant t_0 \tag{3.2}$$

beschreiben. Neben dieser Darstellung ist es im folgenden notwendig, von einer Bandbegrenzung des stationären Prozesses η auszugehen, da alle Verfahren zur Spektraldichteschätzung im Sinne einer Abtastung von dieser Voraussetzung Gebrauch machen. Bis auf eine multiplikative Konstante können wir dabei sogar verlangen, daß η die Grenzfrequenz π besitzt.[1] Gemäß Satz 1.39 ist die Kovarianzfunktion von η dann in der Form

$$R_\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt} S_\eta(w)\, dw, \qquad t \in \mathbb{R}$$

darstellbar. Beachten wir dabei noch, daß laut Voraussetzung R_η stetig ist, dann können wir gemäß Satz 1.21 aus dieser Darstellung einen Ausdruck für die Kovarianzfunktion des instationären Prozesses φ gewinnen. Für alle $t', t \geqslant t_0$ gilt

$$\begin{aligned} R_\varphi(t', t) &= \int_0^{t'} \int_0^t R_\eta(s' - s)\, ds' ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{t'} \int_0^t e^{iw(s'-s)} S_\eta(w)\, ds' ds\, dw \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{iw(t'-t)} f(t', w) \overline{f(t, w)} S_\eta(w)\, dw, \end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichung

$$f(t, w) := \frac{e^{iwt} - 1}{iw}$$

zu setzen ist.[2] Daraus folgt wegen $S_\eta(w) = 0$ für alle $w \in (-\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty)$ offensichtlich, daß auch φ bandbegrenzt mit der Grenzfrequenz π ist und daher durch Abtastung in einen zeitdiskreten Prozeß überführt werden kann. Natürlich ist dabei erneut zu beachten, daß wir die Begriffe der Bandbegrenzung sowie der Abtastung bisher nur für stationäre Prozesse definiert haben. Ohne weitere Diskussion nehmen wir im folgenden dennoch an, daß eine entsprechende Verallgemeinerung für den Fall instationärer Prozesse zulässig ist. Unter den genannten Voraussetzungen wollen wir nun eine Funktion, das sogenannte *Periodogramm* [8, S. 73 ff.], verwenden, um einen Ausdruck für die mittlere «Spektraldichte» des Prozesses der zufälligen Phasenfluktuationen zu bestimmen [8, S. 91 ff.].

[1] Vergleiche dazu auch § 3 in diesem Kapitel.

[2] Aufgrund der Bedeutung dieser Funktion für die harmonische Analysis sei zum weiteren Studium auf [25] verwiesen. Ferner ist zu beachten, daß f hinreichende Eigenschaften besitzt, um auch eine Spektraldarstellung für instationäre Prozesse der Art (3.2) sinnvoll zu definieren [8, S. 34 ff. und S. 201].

Inhaltlich charakterisiert das Periodogramm eine empirische Schätzung der Spektraldichte eines stationären Prozesses, von dem nur ein endlicher Ausschnitt einer Realisierung zur Verfügung steht. Formal entsteht es durch Einsetzen einer Schätzung der jeweiligen Kovarianzfunktion in die Umkehrformel gemäß Satz 1.44. Angewendet auf den instationären Prozeß der zufälligen Phasenfluktuationen interessiert uns nun der Erwartungswert dieses Schätzers.

Im folgenden gehen wir also davon aus, daß wir den bandbegrenzten Prozeß φ für ein gewisses Zeitintervall beobachtet und ihm äquidistant Abtastwerte entnommen haben. Dann verfügen wir über eine Stichprobe $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ vom Umfang $n \in \mathbb{N}$ und können eine erwartungstreue Schätzung der zugehörigen Kovarianzfunktion[3] wie folgt notieren

$$\hat{R}_\varphi(k) = \frac{1}{n-|k|} \sum_{t=1}^{n-|k|} \varphi(t+|k|)\varphi(t), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Dabei ist zu beachten, daß wir die Instationarität von φ vollkommen ignoriert haben.[4] Wählen wir nun ein $m \in \mathbb{N}$ und setzen den Schätzer $\hat{R}_\varphi$ in die gestutzte Umkehrformel aus Satz 1.44 ein, dann erhalten wir durch Bilden des Erwartungswertes auf beiden Seiten der Gleichung

$$E\big[\hat{S}_\varphi(w)\big] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} E\big[\hat{R}_\varphi(k)\big]\, e^{-iwk}, \qquad -\pi \leqslant w \leqslant \pi. \tag{3.4}$$

Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes und der Darstellung der Kovarianzfunktion von φ gemäß (3.3) kann für den Erwartungswert der rechten Seite auch

$$\begin{aligned} E\big[\hat{R}_\varphi(k)\big] &= \frac{1}{n-|k|} \sum_{t=1}^{n-|k|} R_\varphi(t+|k|,t) \\ &= \frac{1}{n-|k|} \sum_{t=1}^{n-|k|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iw|k|} f(t+|k|,w)\overline{f(t,w)} S_\eta(w)\, dw \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{iw|k|} \left[\frac{1}{n-|k|} \sum_{t=1}^{n-|k|} f(t+|k|,w)\overline{f(t,w)} \right] S_\eta(w)\, dw \end{aligned} \tag{3.5}$$

geschrieben werden. Schließlich läßt sich der rechts stehende Klammerausdruck durch eine Vereinfachung ersetzen. Dazu nehmen wir an, daß die natürliche Zahl m der gestutzten Umkehrformel sehr viel kleiner ist als der Stichprobenumfang n. Sind die äquidistanten Abstände zwischen den Abtastwerten außerdem hinreichend klein,[5] so daß gilt $f(t+|k|,w) \approx f(t,w)$, dann läßt sich der Klammerausdruck wie folgt approximieren

$$\frac{1}{n-|k|} \sum_{t=1}^{n-|k|} f(t+|k|,w)\overline{f(t,w)} \approx \frac{1}{n-|k|} \sum_{t=1}^{n-|k|} |f(t,w)|^2 \approx \frac{2}{w^2} =: g(w).$$

[3] Siehe dazu auch [144, S. 321 ff.].

[4] Beachte, daß $\hat{R}_\varphi$ eine einparametrige Funktion ist.

[5] Diese praktisch oft einfach zu realisierende Forderung wird als Überabtastung bezeichnet und beispielsweise in der Signalverarbeitung eingesetzt, um Quantisierungsfehler bei der A/D-Wandlung zu verringern [138, S. 270 ff.].

Beachten wir außerdem, daß $E[\hat{R}_\varphi]$ eine reellwertige Funktion ist, also das Integral der rechten Seite von (3.5) mit seiner konjugiert komplexen Darstellung übereinstimmt, dann können wir wegen Satz 1.43 statt $|k|$ auch k schreiben und erhalten so die Relation

$$E\big[\hat{R}_\varphi(k)\big] \approx \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwk} g(w) S_\eta(w)\, dw, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Folglich entspricht $E[\hat{R}_\varphi(k)]$ gemäß Satz 1.44 näherungsweise dem zur Aufbaufunktion e^{-iwk} gehörenden k-ten FOURIER-Koeffizienten der Funktion gS_η. Weil (3.4) darüber hinaus die m-te Partialsumme der FOURIER-Reihe von gS_η repräsentiert, ist zu erwarten, daß

$$E\big[\hat{S}_\varphi(w)\big] \approx g(w) S_\eta(w), \qquad -\pi \leqslant w \leqslant \pi$$

gilt. Nun identifizieren wir $E[\hat{S}_\varphi]$ mit der «Spektraldichte» der zufälligen Phasenfluktuationen, setzen also $E[\hat{S}_\varphi] := S_\varphi$. Damit erhalten wir das gesuchte Resultat, d. h. einen Zusammenhang zwischen den «Spektraldichten» der zufälligen Frequenz- und Phasenfluktuationen gemäß

$$S_\eta(w) \approx \tfrac{1}{2}\, w^2 S_\varphi(w), \qquad -\pi \leqslant w \leqslant \pi. \tag{3.6}$$

Diese Relation ist uns nicht ganz unbekannt, haben wir doch einen vergleichbaren Ausdruck (2.8) bereits in Kapitel zwei diskutiert. Bemerkenswert daran ist, daß das Approximationsverfahren trotz vager Annahmen und zahlreicher Näherungen in der Praxis hinreichend genaue Resultate liefert, was numerischen Studien entnommen werden kann [60], [65]. Dabei ist jedoch zu beachten, daß wir den Begriff der Spektraldichte für instationäre Prozesse überhaupt nicht definiert haben. Letztlich zeigt dieses Resultat nur, was passiert, wenn das Periodogramm stur auch auf instationäre Prozesse angewendet wird. Dennoch ist (3.6) für das weitere Vorgehen von entscheidender Bedeutung, schon allein deshalb, weil wir über keinen anderen Zusammenhang zwischen den Spektraleigenschaften der Prozesse η und φ verfügen. Darüber hinaus stimmt diese Relation auch mit den Vorgaben der Standardisierung überein [87]. Im folgenden werden wir daher (3.6) verwenden, um die durch Datenblätter gegebenen «Spektraldichten» der zufälligen Phasenfluktuationen in jene der zugehörigen Frequenzfluktuationen zu überführen.

Spektraldichte der Frequenzfluktuationen. Datenblätter von Oszillatoren beinhalten zahlreiche Informationen, die für den System- und Schaltungsentwurf dringend benötigt werden [88]. Dazu gehört beispielsweise die Ausgabeleistung eines Oszillators bei einer spezifizierten Last, welche oft mit $50\,\Omega$ angegeben wird. Zudem sind diesen Datenblättern Angaben zur Schwingfrequenz, mögliche temperaturbedingte Abweichungen davon sowie die uns interessierenden «Spektraldichten» der zufälligen Phasenfluktuationen zu entnehmen. Für gewöhnlich werden die «Spektraldichten» auf die halbe Ausgabeleistung des Oszillators normiert und anschließend als einseitiger Offset vom Träger mittels technischen Leistungsspektrums in doppeltlogarithmischer Form dargestellt. Dabei wird jeder Meßpunkt der Kurve durch eine Mittelung über ein festgelegtes Frequenzintervall bestimmt. Dementsprechend werden die Meßwerte in der Einheit dBC/Hz angegeben, wobei sich der Buchstabe C auf die Normierung bezüglich der Träger-

bzw. Ausgabeleistung des Oszillators bezieht. Mit den Bezeichnungen aus Kapitel zwei kann das technische Leistungsspektrum der zufälligen Frequenz- bzw. Phasenfluktuationen gemäß

$$L_{\cdot}(w) := 10\log\left[\frac{S_{\cdot}(w)}{K_1}\right], \qquad 0 < w \leqslant \pi \tag{3.7}$$

notiert werden. Darin bezeichnet S erneut die «Spektraldichte» des betrachteten Prozesses und K_1 eine Konstante, welche die Normierung der «Spektraldichte» auf die halbe Ausgabeleistung des Oszillators charakterisiert. Nehmen wir im folgenden an, daß (3.6) nicht nur näherungsweise, sondern mit Gleichheit fast sicher bezüglich des LEBESGUE-Maßes gilt, dann erhalten wir das technische Leistungsspektrum der zufälligen Phasenfluktuationen für $0 < w \leqslant \pi$ gemäß

$$L_{\varphi}(w) = 10\log\left[\frac{S_{\varphi}(w)}{K_1}\right] = 10\log\left[\frac{S_{\eta}(w)}{K_1}\right] - 20\log(w) + 10\log(2) \quad (f.s.)$$

und nach elementarer Umformung auch das der zufälligen Frequenzfluktuationen

$$L_{\eta}(w) = L_{\varphi}(w) + 20\log(w) - 10\log(2) \quad (f.s.), \qquad 0 < w \leqslant \pi. \tag{3.8}$$

Zur Transformation der technischen Leistungsspektren ist demnach nichts anderes erforderlich, als den Kurvenverlauf von L_{φ} um $-10\log(2)$ zu verschieben und diesen anschließend entgegen dem Uhrzeigersinn um einen Betrag von 20 dBC/Hz je Dekade zu drehen. Wir wollen uns dies an einem Beispiel veranschaulichen. Dazu nehmen wir an, daß dem Datenblatt eines Oszillators die Kurve (Abb. 3.1) entnommen wurde. Wegen fehlender Zahlenwerte in dieser Graphik wollen wir die Abstände zwischen den vertikalen Hilfslinien als je eine Dekade und die der horizontalen

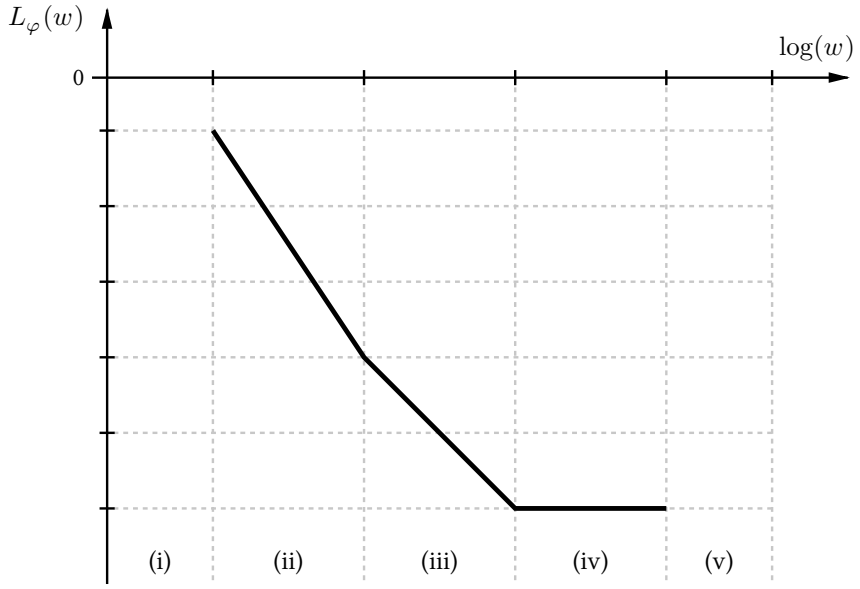


Abb. 3.1: Schema des technischen Leistungsspektrums der zufälligen Phasenfluktuationen.

Hilfslinien als 10 dBC/Hz verstehen. Dann zeigt diese Kurve mit wachsender Frequenz eine Zunahme der Dämpfung um 30 dBC/Hz je Dekade im Bereich (ii), um 20 dBC/Hz je Dekade im Bereich (iii) und um 0 dBC/Hz je Dekade im Bereich (iv). Natürlich haben wir diesen Kurvenverlauf nicht vollkommen willkürlich gewählt. Dieser entspricht dem LEESONschen Modell [119]. Darüber hinaus enthält diese Darstellung die drei wichtigsten der standardisierten Spektralkomponenten [87], was zahlreiche Publikationen zur Charakterisierung zufälliger Phasenfluktuationen belegen [16], [151]. Im folgenden wollen wir uns daher ausschließlich auf das LEESONsche Modell beziehen. Dennoch ist diese Festlegung nicht als Einschränkung zu verstehen, da sich alle damit gewonnenen Resultate mühelos auf andere Modelle übertragen lassen. Durch Anwendung der Transformationsvorschrift (3.8) erhalten wir aus (Abb. 3.1) das technische Leistungsspektrum der zufälligen Frequenzfluktuationen (Abb. 3.2). Gemäß unserer Konventionen zeigt diese Kurve

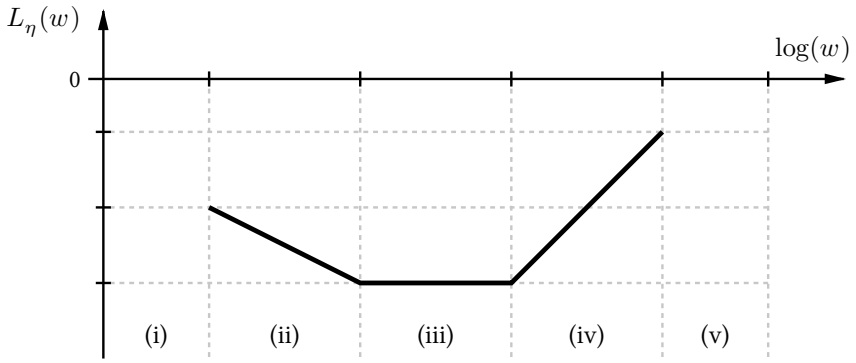


Abb. 3.2: Schema des technischen Leistungsspektrums der zufälligen Frequenzfluktuationen.

mit wachsender Frequenz also eine Zunahme der Dämpfung um 10 dBC/Hz je Dekade im Bereich (ii) und um 0 dBC/Hz je Dekade im Bereich (iii), sowie eine Abnahme der Dämpfung um 20 dBC/Hz je Dekade im Bereich (iv). Mit diesem Resultat ist eine wesentliche Voraussetzung für die Simulation der zufälligen Phasenfluktuationen erfüllt, da uns nun eine zumindest stückweise Darstellung der Spektraldichte der zufälligen Frequenzfluktuationen zur Verfügung steht. Allerdings sind für die Herleitung eines Simulationsmodells weitere Fragen zu klären. Diese betreffen beispielsweise die Wahl einer geeigneten Prozeßfamilie, so daß η dieser angehört und gleichzeitig den gegebenen Voraussetzungen genügt. Auch ist der Verlauf von L_η in den Bereichen (i) und (v) noch sinnvoll zu ergänzen, um zu einer konsistenten Beschreibung der zufälligen Frequenzfluktuationen zu gelangen.

§2 Modellierung zufälliger Frequenzfluktuationen

In der Literatur werden verschiedene Familien stochastischer Prozesse beschrieben, welche zur Modellierung von η grundsätzlich in Frage kommen. Eine dieser Familien, nämlich die der sogenannten ARMA-Prozesse, ist für diesen Zweck besonders geeignet. Ihr Anwendungsbereich umfaßt zahlreiche Forschungsgebiete, und die meisten der in praktischen Problemen auftretenden stationären Prozesse lassen sich durch dieses Modell approximieren. Ein für die Modellie-

rung entscheidender Vorteil etwa gegenüber den AR- bzw. MA-Prozessen besteht darin, daß die Familie der ARMA-Prozesse diese enthält und zur Modellanpassung im allgemeinen eine geringere Anzahl von Koeffizienten benötigt wird [144, S. 140 f.]. Auch aus dem Blickwinkel der Elektrotechnik, genauer der Systemtheorie, ist das Modell der ARMA-Prozesse von großem Interesse, da diese Prozesse als Filterung eines weißen Rauschens interpretiert werden können [99, S. 343 ff.], [184, S. 189 ff.]. Folglich kann die Theorie zeitdiskreter Filter zur Beschreibung von ARMA-Prozessen eingesetzt werden. Auch wir wollen uns später auf diesen Zusammenhang beziehen. Bevor wir jedoch überhaupt mit der Modellierung von η als ARMA-Prozeß beginnen können, müssen wir einige grundsätzliche Fragen klären. Beispielsweise ist uns bisher nicht bekannt, ob jeder stationäre Prozeß eine Darstellung als ARMA-Prozeß besitzt. Kann diese Frage nicht positiv beantwortet werden, dann müssen wir uns fragen, welche stationären Prozesse einer solchen Darstellung genügen und ob auch der Prozeß der zufälligen Frequenzfluktuationen dazugehört. Nehmen wir die Gültigkeit der letzten Aussage an, dann ist ferner zu zeigen, ob und wie sich die Koeffizienten des ARMA-Modells aus den Eigenschaften von η bestimmen lassen.

Darstellung stationärer Prozesse. Es ist klar, daß wir zur Untersuchung der Darstellbarkeit stationärer Prozesse grundsätzlich nur Begriffe der L_2-Theorie verwenden dürfen. Beschränken wir uns insbesondere auf den Fall zentrierter stationärer Prozesse,[6] dann kommen dafür nur die zugehörige Kovarianzfunktion, das Spektralmaß oder aber die Spektraldichte in Frage, falls eine solche überhaupt existiert. Wir wollen unsere Untersuchungen mit stationären ARMA-Prozessen beginnen und später zu beliebigen stationären Prozessen übergehen.

Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein. Seien η ein beliebiger zentrierter stationärer ARMA(n, m)-Prozeß und ξ ein weißes Rauschen auf $\mathbb{Z}$. Ferner sei B der lineare Operator der Rückwärtsverschiebung, so daß für $a, b \in \mathbb{C}$ und $s, t \in \mathbb{Z}$ gilt

$$B^l\big[a\eta(t) + b\eta(s)\big] = a\eta(t-l) + b\eta(s-l), \qquad l \in \mathbb{N}.$$

Dann können wir η gemäß Definition 1.56 in der Form

$$b(B)\eta(t) = a(B)\xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{3.9}$$

notieren, wobei wir

$$a(B) := a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \cdots + a_m B^m, \quad b(B) := b_0 + b_1 B + b_2 B^2 + \cdots + b_n B^n$$

gesetzt haben. Für gewöhnlich wird $b(B)$ als autoregressiver Operator und $a(B)$ als Operator des gleitenden Mittels bezeichnet. Wir wollen nun untersuchen, ob η auch als linearer Prozeß darstellbar ist. Zur Beantwortung dieser Frage werden wir uns auf ausgesuchte Resultate der Spektraltheorie im Zusammenhang mit linearen Operationen stützen [14, S. 70 ff.]. Ferner wird es sich als vorteilhaft erweisen, zunächst nur den autoregressiven Anteil von η zu betrachten. Bezeichnen wir diesen mit θ, dann können wir schreiben

$$\eta(t) = a(B)\theta(t), \qquad b(B)\theta(t) = \xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

[6] Dies stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, falls wir ausschließlich lineare Transformationen betrachten.

Offenbar ist der Prozeß θ stationär.[7] Nun wollen wir die Spektraldarstellung von θ und ξ verwenden, um zu einer alternativen Darstellung von θ zu gelangen. Seien F_θ, F_ξ die Spektralmaße und ζ_θ, ζ_ξ die zugehörigen zufälligen Spektralmaße der Prozesse θ, ξ auf $\mathfrak{B}\big([-\pi,\pi]\big)$. Dann können wir aufgrund der Linearität der Spektraldarstellung gemäß Satz 1.48.3 für $t \in \mathbb{Z}$ notieren

$$b(B)\theta(t) = b(B)\int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\,\zeta_\theta(dw) = \int_{-\pi}^{\pi} b(B)e^{iwt}\,\zeta_\theta(dw) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\hat{b}(w)\,\zeta_\theta(dw),$$

wobei wir zuletzt die Funktion $\hat{b} \in L_2(F_\theta)$ gemäß

$$\hat{b}(w) := b_0 + b_1 e^{-iw} + b_2 e^{-iw2} + \cdots + b_n e^{-iwn}, \qquad -\pi \leqslant w \leqslant \pi$$

verwendet haben. Gebrauchen wir die Spektraldarstellung auch für das weiße Rauschen ξ, dann können wir statt $b(B)\theta = \xi$ gemäß (3.10) unmittelbar schreiben

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\hat{b}(w)\,\zeta_\theta(dw) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\,\zeta_\xi(dw), \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.11}$$

Ein Vergleich beider Seiten dieser Gleichung läßt einen Zusammenhang zwischen den zufälligen Spektralmaßen erkennen. Aufgrund der Isometrie gemäß Satz 1.48.2 sowie der Eindeutigkeit der Spektraldarstellung gemäß Satz 1.33 muß nämlich gelten

$$\zeta_\xi(W) = \int_W \hat{b}(w)\,\zeta_\theta(dw), \qquad W \in \mathfrak{B}\big([-\pi,\pi]\big).$$

Für unseren Zweck ist nun umgekehrt entscheidend, ob auch ζ_θ bezüglich ζ_ξ dargestellt werden kann. Bereits im Jahre 1973 hat PAGANO ein wesentliches Resultat zur Beantwortung dieser Frage publiziert [139]. Ist der autoregressive Prozeß θ stationär, dann müssen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C}$$

gänzlich außerhalb des Einheitskreises liegen. Wegen der Stationarität von θ sowie $|e^{-iw}| = 1$ muß folglich gelten $\hat{b} \neq 0$. Also ist $\hat{b}$ invertierbar, $1/\hat{b} \in L_2(F_\xi)$ und es gilt

$$\zeta_\theta(W) = \int_W \frac{1}{\hat{b}(w)}\,\zeta_\xi(dw), \qquad W \in \mathfrak{B}\big([-\pi,\pi]\big).^{[8]}$$

Damit haben wir den gesuchten Zusammenhang zwischen ζ_θ und ζ_ξ gefunden, und können nun eine weitere Darstellung für θ bezüglich ξ notieren. Statt (3.11) erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\,\zeta_\theta(dw) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\,\frac{1}{\hat{b}(w)}\,\zeta_\xi(dw), \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

[7] Der Operator des gleitenden Mittels hat keinen Einfluß auf die Stationarität eines Prozesses. Wenn aber $\eta = a(B)\theta$ stationär ist, dann muß dies auch für θ gelten.

[8] Zum Beweis dieser Aussagen siehe [14, S. 54 f.].

Nun wollen wir zum ursprünglichen ARMA-Prozeß η zurückkehren. Dazu betrachten wir die Relation $\eta = a(B)\theta$ gemäß (3.10) und verfahren nach gleichem Schema wie zuvor. Es gilt

$$\eta(t) = a(B)\theta(t) = a(B)\int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\,\frac{1}{\hat{b}(w)}\,\zeta_\xi(dw) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\,\frac{\hat{a}(w)}{\hat{b}(w)}\,\zeta_\xi(dw) \tag{3.13}$$

für $t \in \mathbb{Z}$, wobei wir die Funktion $\hat{a} \in L_2(F_\xi)$ gemäß

$$\hat{a}(w) := a_0 + a_1 e^{-iw} + a_2 e^{-iw2} + \cdots + a_m e^{-iwm}, \qquad -\pi \leqslant w \leqslant \pi$$

eingesetzt haben. Für das weitere Vorgehen ist nun entscheidend, daß auch $\hat{a}/\hat{b} \in L_2(F_\xi)$ gilt [14, S. 54 f.]. Erst damit ist gesichert, daß der Funktion $\hat{a}/\hat{b}$ eine FOURIER-Reihe mit quadratisch summierbarer Koeffizientenfolge zugeordnet werden kann.[9] Also dürfen wir schreiben

$$\frac{\hat{a}(w)}{\hat{b}(w)} = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} h_l e^{-iwl} =: \hat{h}(w), \qquad -\pi \leqslant w \leqslant \pi, \tag{3.14}$$

wobei $\hat{h}$ die FOURIER-Reihe der Koeffizientenfolge $h := (h_l)$ bezeichnet.[10] Verwenden wir nun $\hat{h}$, um η zu beschreiben, dann erhalten wir unter Verwendung von Satz 1.48.4 für $t \in \mathbb{Z}$

$$\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\hat{h}(w)\,\zeta_\xi(dw) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} h_k(B)e^{iwt}\,\zeta_\xi(dw) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{k\to\infty} h_k(B)\xi(t),$$

wobei wir

$$h_k(B) := h_0 + h_1 B + h_2 B^2 + \cdots + h_k B^k$$

gesetzt haben. In der Literatur wird mit $h(B) := h_\infty(B)$ darüber hinaus oft auch die kürzere Schreibweise $\eta = h(B)\xi$ verwendet [79, S. 114 ff.], [144, S. 141 ff.]. Statt dieser wollen wir aber im folgenden die äquivalente Summendarstellung zur Anwendung bringen. Damit wird nämlich sofort klar, daß η als linearer Prozeß gemäß

$$\eta(t) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} h_l \xi(t-l), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{3.15}$$

dargestellt werden kann. Demnach ist η insbesondere kausal, da dessen Verlauf ausschließlich von der Gegenwart und der Vergangenheit des weißen Rauschens ξ abhängig ist. Aufgrund der Kommutativität der Faltung ist für lineare Prozesse auch die Darstellung

$$\eta(t) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{k\to-\infty} \sum_{l=k}^{t} h_{t-l}\xi(l), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

[9] D. h. eine FOURIER-Reihe im Sinne der L_2-Theorie. Diese bildet den Raum $L_2(F_\xi)$ isometrisch isomorph auf den Folgenraum $l_2(\mathbb{Z})$ ab, so daß die PARSEVALsche Identität gilt [56, S. 239], [112, S. 339 f.].

[10] Um $h_l = 0$ für $l < 0$ zu überprüfen, verwende man $\hat{b}(w) = c_0 \prod_{k=1}^{m}(1 + c_k e^{-iw})$, wobei $1/c_k$ für $0 \leqslant k \leqslant m$ die Nullstellen von $\hat{b}$ sind. Dann gilt mittels geometrischer Reihe $\hat{a}(w)/\hat{b}(w) = \hat{a}(w)/c_0 \prod_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\infty} c_k^l e^{-iwl}$.

üblich. In der mathematischen Literatur wird die Koeffizientenfolge h oft als *Filter* bezeichnet [33, S. 152 f.], hingegen spricht man in der Systemtheorie von der *Gewichtsfolge* h. Setzen wir diese nun auf ganz $\mathbb{Z}$ fort, so daß $h_l = 0$ für $l < 0$ gilt, dann können wir η auch in der Form

$$\eta(t) = \operatorname*{l.i.m.}_{k\to\infty} \sum_{l=-k}^{k} h_l \xi(t-l), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{3.16}$$

schreiben. Derartige Prozesse mit quadratisch summierbarer Gewichtsfolge werden auch *verallgemeinerte lineare Prozesse* genannt und zeichnen sich durch folgenden Zusammenhang aus. Genau dann ist ein zentrierter stationärer Prozeß als verallgemeinerter linearer Prozeß darstellbar, wenn dieser eine Spektraldichte besitzt [8, S. 55]. Allerdings sagt die Existenz der Spektraldichte dieses Prozesses nichts über dessen Darstellbarkeit als linearer Prozeß aus. Läßt sich eine solche Darstellung jedoch mit Hilfe einer zusätzlichen Voraussetzung erzwingen, dann kann der betrachtete Prozeß beliebig genau durch einen ARMA-Prozeß approximiert werden [33, S. 77], [144, S. 142]. Es stellt sich daher die Frage, ob eine derartige Voraussetzung existiert. Eine Antwort darauf liefert die Theorie der linearen Vorhersage.

Die Wold'sche Zerlegung gemäß Satz 1.60 enthält als zentrale Aussage, daß jeder zentrierte stationäre Prozeß auf $\mathbb{Z}$ eindeutig als Summe eines regulären und eines singulären Prozesses notiert werden kann. Ferner ist diesem Resultat zu entnehmen, daß ein solcher Prozeß genau dann regulär ist, wenn dieser eine Darstellung als linearer Prozeß besitzt. Im folgenden wir wollen diese Aussagen verwenden und setzen daher η als einen beliebigen zentrierten stationären Prozeß auf $\mathbb{Z}$ mit der Spektraldichte S_η voraus. Aufgrund der unspezifischen Annahme können wir η wieder mit dem Prozeß der zufälligen Frequenzfluktuationen identifizieren. Um nun die Darstellbarkeit von η als ARMA-Prozeß zu überprüfen, genügt es, gemäß der Wold'schen Zerlegung zu zeigen, daß der Prozeß selbst regulär ist. Ein entsprechendes Kriterium dazu haben wir bereits in Satz 1.61 diskutiert. Danach ist η genau dann regulär, wenn die Spektraldichte S_η der folgenden Relation genügt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\bigl[S_\eta(w)\bigr]\, dw > -\infty. \tag{3.17}$$

Diese Bedingung ist von grundlegender Bedeutung, weil damit die Güte einer Vorhersage qualitativ bestimmt werden kann [144, S. 736 ff.]. Zunächst ist klar, daß eine obere Schranke für das Integral der linken Seite von (3.17) existiert, da gemäß Satz 1.33 die Relation

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\bigl[S_\eta(w)\bigr]\, dw \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} S_\eta(w)\, dw = R_\eta(0) < \infty$$

gilt. Folglich ist der Wert des Integrals entweder endlich oder minus unendlich. Gibt es beispielsweise ein Intervall vom Lebesgue-Maß größer Null, auf dem S_η gänzlich verschwindet, dann divergiert das Integral nach minus unendlich. Kann andererseits eine integrierbare Minorante zu S_η gefunden werden, so ist die Relation (3.17) erfüllt. Angewendet auf die zufälligen Frequenzfluktuationen ergibt sich hieraus ein einfaches Kriterium für die Überprüfung der Regularität des

Prozesses. Da wir η als reellwertig vorausgesetzt haben, S_η gemäß Satz 1.43 also eine gerade Funktion ist, können wir unter Verwendung von (3.7) den Zusammenhang

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\bigl[S_\eta(w)\bigr]\,dw = 2\int_0^{\pi} \log(K_1) + \frac{1}{10}L_\eta(w)\,dw = 2\pi\log(K_1) + \frac{1}{5}\int_0^{\pi} L_\eta(w)\,dw$$

notieren. Demnach ist die Relation (3.17) genau dann erfüllt, wenn L_η der Ungleichung

$$\int_0^{\pi} L_\eta(w)\,dw > -\infty. \tag{3.18}$$

genügt. Aufgrund dieser Erkenntnis gelangt man zu folgender Abschätzung. Existieren reelle Konstanten $K', K'' < 0$ sowie eine beliebige FOURIER-Frequenz v mit $0 < v < \pi$, so daß L_η gemäß (Abb. 3.3) durch eine Funktion der Art

$$f(w) := \begin{cases} K' & \text{für } 0 < w \leqslant v \\ K' + K''\log(w/v) & \text{für } v < w \leqslant \pi \end{cases} \tag{3.19}$$

minorisiert werden kann, dann ist η wegen

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} L_\eta(w)\,dw &\geqslant \int_0^{v} f(w)\,dw + \int_v^{\pi} f(w)\,dw \\
&= \int_0^{v} K'\,dw + \int_v^{\pi} K' + K''\log(w/v)\,dw \\
&= \int_0^{\pi} K'\,dw + K''\int_v^{\pi} \log(w/v)\,dw \\
&= K'\pi + K''\bigl[\pi\log(\pi/v) - (\pi - v)\bigr] \\
&> -\infty
\end{aligned}$$

regulär. Damit können wir zusammenfassend folgende Aussage formulieren. Ein zentrierter stationärer Prozeß η mit dem technischen Leistungsspektrum L_η ist als ARMA-Prozeß darstellbar, wenn eine Funktion f gemäß (3.19) mit der Eigenschaft $L_\eta \geqslant f$ existiert. Für unseren Zweck bleibt demnach zu überprüfen, ob auch der Prozeß der zufälligen Frequenzfluktuationen mit dem technischen Leistungsspektrum gemäß (Abb. 3.2) den Voraussetzungen der Aussage genügt. Eine Antwort auf diese Frage können wir jedoch erst formulieren, wenn uns auch Informationen zum Verlauf von L_η in den Bereichen (i) und (v) zur Verfügung stehen. Im folgenden werden wir solche Verläufe diskutieren und diese mittels (Abb. 3.3) graphisch veranschaulichen.

Wir wollen mit der Diskussion des Bereiches (i) beginnen. Aufgrund physikalischer Randbedingungen gibt es klare Grenzen für die möglichen Verläufe von L_η in diesem Bereich [16], [109], [110]. Demnach existieren eine hinreichend kleine FOURIER-Frequenz w' und eine Konstante K, so daß $L_\eta(w) = K$ für alle $0 < w \leqslant w'$ gilt. Wäre dies nicht der Fall, so müßte L_η aufgrund der logarithmischen Skalierung der FOURIER-Frequenzachse für $w \to 0$ unbeschränkt wachsen oder fallen. Würde L_η jedoch unbeschränkt wachsen, dann wäre η kein Prozeß mit

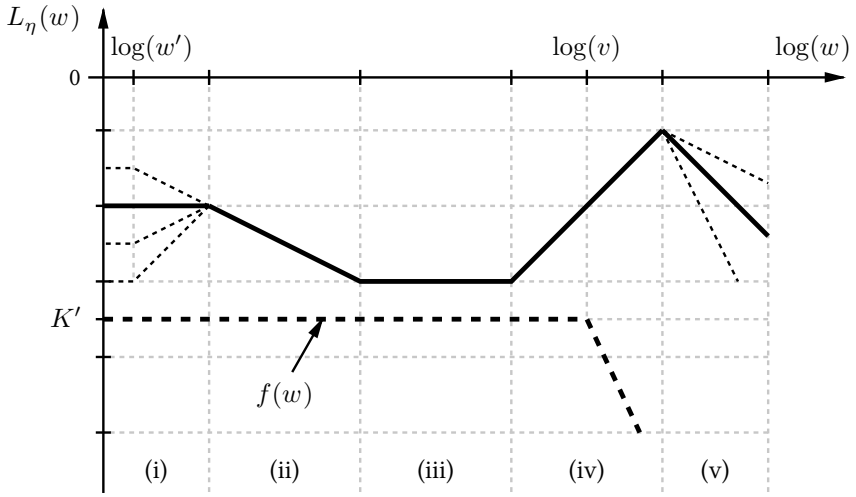


Abb. 3.3: Erweitertes technisches Leistungsspektrum der zufälligen Frequenzfluktuationen.

kurzem Gedächtnis, was im Widerspruch zum betrachteten Modell stünde.[11] Daß L_η auch nicht unbeschränkt fallen kann, ist auf die nichtideale Selbstkohärenz der Oszillatorschwingungen, d. h. die stets endliche Güte der in Oszillatoren verwendeten Resonatoren zurückzuführen. Damit bleibt zu diskutieren, wie sich $L_\eta(w)$ für $w > w'$ im Bereich (i) verhält. Grundsätzlich sind dort verschiedene Verläufe denkbar, wie es (Abb. 3.3) beispielhaft zeigt. Aufgrund der zur Messung von L_η genutzten endlichen Zeitspanne ist der wahre Verlauf jedoch nicht bekannt und kann im nachhinein auch nicht mehr ermittelt werden. Daher können wir frei wählen und entscheiden uns für einen gänzlich konstanten Verlauf. In der Graphik ist dieser als fette, durchgezogene Linie im Bereich (i) dargestellt.

Daß wir L_η im Bereich (v) durch einen negativen linearen Anstieg beschreiben können, läßt sich wie folgt erklären. Gemäß dem Modell von BAGHDADY et al. [16] lassen sich die zufälligen Frequenzfluktuationen in drei Grundkomponenten zerlegen. Die in den Bereichen (iv) und (v) maßgeblich wirkende Komponente ist auf ein additives weißes Rauschen in der Oszillatorausgabe zurückzuführen. Dies zieht einen linearen Anstieg von 20 dBC/Hz je Dekade für L_η in den Bereichen (iv) und (v) nach sich. Weil jedem Oszillator aber ein Ausgabe- bzw. Trennverstärker mit einer gewissen Bandbreite nachzuschalten ist, kommt es zu einer Filterwirkung auf das additive weiße Rauschen. Abhängig von der Ordnung des zugrundeliegenden Filters muß sich der Anstieg von L_η daher ab einer bestimmten FOURIER-Frequenz nivellieren oder ins Gegenteil verkehren. Der Bereich, in dem dies geschieht, wurde mit (v) bezeichnet. Folgt man speziell den Argumentationen von BAGHDADY et al. [16], so ist L_η in diesem Bereich durch einen negativen Anstieg zu modellieren. Aufgrund dieser Forderung läßt sich die vorausgesetzte Bandbegrenzung der zufälligen Frequenz- und Phasenfluktuationen begründen.

Fassen wir die Ergebnisse der bisherigen Diskussion zusammen, dann können wir folgende Aussage zur Darstellbarkeit der zufälligen Frequenzfluktuationen notieren. Aufgrund phy-

[11] Prinzipiell wäre auch ein Wachstum von weniger als 10 dBC/Hz je Dekade möglich. Allerdings wäre η in diesem Fall ein Prozeß mit langem Gedächtnis [9], [124], [125].

sikalischer Ursachen und schaltungstechnischer Notwendigkeiten läßt sich das technische Leistungsspektrum der zufälligen Frequenzfluktuation durch eine Funktion entsprechend der fetten, durchgezogenen Linie in (Abb. 3.3) qualitativ modellieren. Folglich läßt sich gemäß (3.19) stets eine Funktion f finden, welche L_η minorisiert. Damit sind aber die Relationen (3.18) und (3.17) erfüllt, so daß der Prozeß η regulär und seine Darstellbarkeit als ARMA-Prozeß gesichert ist. Damit haben wir ein weiteres wesentliches Resultat zur Herleitung eines Simulationsmodells für die zufälligen Phasenfluktuationen gewonnen. Allerdings müssen wir die Darstellung von L_η noch weiter präzisieren, um auch zu einer quantitativen Beschreibung von η zu gelangen.

Datenblattinformationen und Spektraldichtebestimmung. Bei der Diskussion der Darstellbarkeit zufälliger Frequenzfluktuationen als stationäre ARMA-Prozesse konnten wir auf quantitative Vorgaben in Bezug auf das technische Leistungsspektrum L_η verzichten. Wollen wir den Prozeß η jedoch mit den Eigenschaften eines konkreten Oszillators in Verbindung bringen, so sind dem zugehörigen Datenblatt genaue Angaben zur Beschreibung von η zu entnehmen. Offenbar läßt sich diese Aufgabe abstrahieren, da L_η in guter Näherung als stückweise lineare Funktion dargestellt werden kann. Um die gewünschten Informationen zu erhalten, ist es sinnvoll, in zwei Schritten vorzugehen. Zunächst sind aus den Datenblättern geeignete Parameter der technischen Leistungsspektren der zufälligen Phasenfluktuationen L_φ abzulesen. Anschließend sind diese Parameter zur Beschreibung von L_η mittels (3.8) zu transformieren.

Wir wollen zunächst diskutieren, welche Parameter von L_φ im folgenden benötigt werden und wie man mit geringen Ablesefehlern zu diesen Angaben gelangt. Dabei beziehen wir uns erneut auf das zuvor verwendete Schema, welches, ergänzt um zusätzliche Achseneinteilungen, der Graphik (Abb. 3.4) entnommen werden kann. Die Achseneinteilungen bezeichnen charakte-

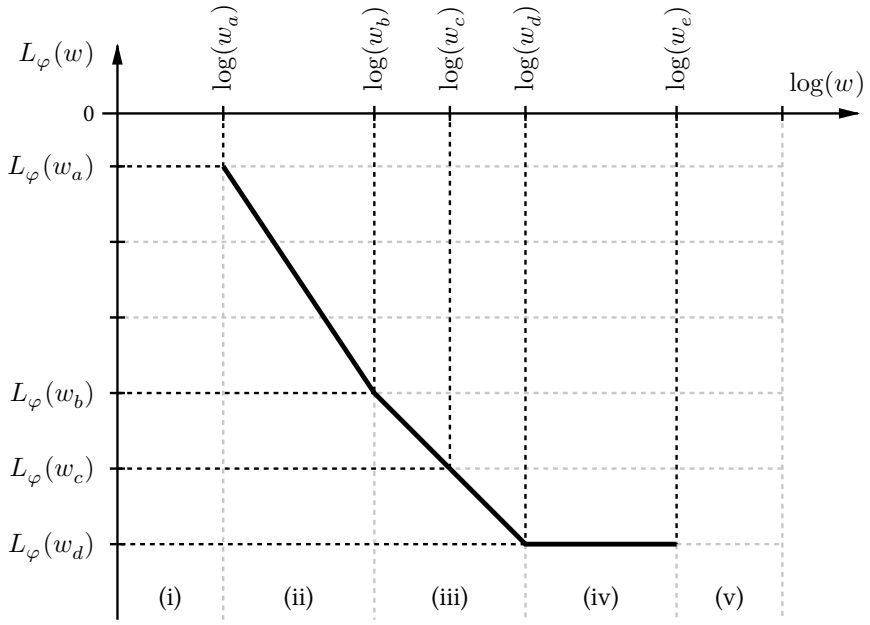


Abb. 3.4: Schema des technischen Leistungsspektrums der zufälligen Phasenfluktuationen.

ristische Punkte von L_φ. Werden aus einem Datenblattdiagramm gemäß (Abb. 3.4) Werte für $\log(w_a)$, $\log(w_b)$, $\log(w_d)$ und $\log(w_e)$ sowie $L_\varphi(w_a)$, $L_\varphi(w_b)$ und $L_\varphi(w_d)$ extrahiert, dann ist L_φ in den Bereichen (ii) bis (iv) vollständig bestimmt. Allerdings ist dies aus praktischen Gründen nicht ohne weiteres möglich. Entgegen der graphischen Darstellung beschreiben die technischen Leistungsspektren realer Oszillatoren an den Bereichsgrenzen (ii)/(iii) und (iii)/(iv) nämlich keine scharfen Ecken, sondern gekrümmte Kurven. Solche Formen sind beispielsweise auch von den Dämpfungsverläufen digitaler Filter bekannt. Natürlich ließen sich die Ecken nachträglich konstruieren, aufgrund der logarithmischen Achsenskalierung wären zugehörige Werte dann meist aber nur ungenau abzulesen. Daher ist es weder sinnvoll noch nötig, L_φ anhand dieser Ecken zu bestimmen. Vielmehr ist es wegen der speziellen Gestalt von L_φ ausreichend, die Werte $\log(w_a)$, $\log(w_c)$ und $\log(w_e)$ sowie $L_\varphi(w_a)$, $L_\varphi(w_c)$ und $L_\varphi(w_d)$ zu kennen. Der Punkt $[\log(w_c), L_\varphi(w_c)]$ im Bereich (iii) kann dabei beliebig gewählt werden. Vorzugsweise ist darauf zu achten, daß sich $\log(w_c)$ oder $L_\varphi(w_c)$ auf einer Hilfslinie im Datenblattdiagramm befinden. Wurden diese Werte bestimmt, dann können die übrigen Größen mittels

$$L_\varphi(w_a) = L_\varphi(w_b) + 10\,(2+x)\big[\log(w_b) - \log(w_a)\big], \qquad 0 < x < 2 \tag{3.20a}$$

$$L_\varphi(w_b) = L_\varphi(w_c) + 20\big[\log(w_c) - \log(w_b)\big] \tag{3.20b}$$

$$L_\varphi(w_c) = L_\varphi(w_d) + 20\big[\log(w_d) - \log(w_c)\big] \tag{3.20c}$$

berechnet werden. Dabei ist zu beachten, daß wir für den Bereich (ii) in (3.20a) nicht 30, sondern $10\,(2+x)$ geschrieben haben. Damit wollen wir der Allgemeingültigkeit des angestrebten Simulationsmodells Rechnung tragen. Mitunter weisen die technischen Leistungsspektren realer Oszillatoren in den Bereichen (ii) und (iii) nicht genau den spezifizierten Anstieg auf [78]. Um beispielhaft zu erklären, wie man in derartigen Fällen verfährt, haben wir für den Bereich (ii) die gegebene Beschreibung mittels $0 < x < 2$ gewählt. Nun wollen wir die abgelesenen Werte transformieren, um zu einer Beschreibung von L_η zu gelangen.

Gemäß der Vorschrift (3.8) ist dazu der Kurvenverlauf von L_φ um den Wert $-10\log(2)$ zu verschieben und entgegen dem Uhrzeigersinn um einen Betrag von 20 dBC/Hz je Dekade zu drehen. Das Resultat dieser Transformation ist aus (Abb. 3.5) ersichtlich. Wurden die Werte

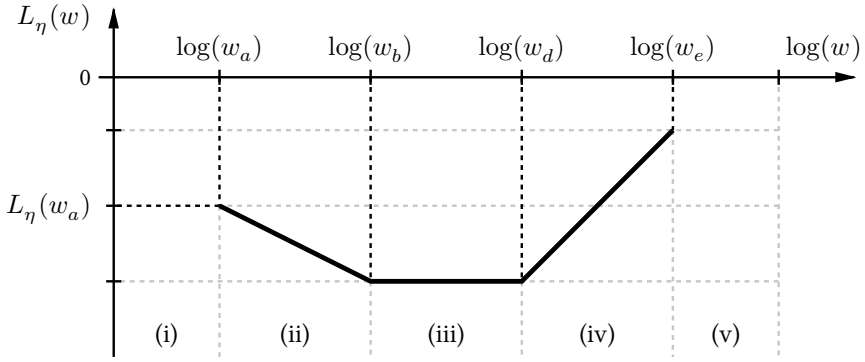


Abb. 3.5: Schema des technischen Leistungsspektrums zufälliger Frequenzfluktuationen.

$\log(w_a)$ und $\log(w_e)$ bereits im voraus ermittelt, dann genügt es, zur Beschreibung von L_η, die übrigen Größen $\log(w_b)$ und $\log(w_d)$ sowie $L_\eta(w_a)$ zu bestimmen. Die logarithmierten FOURIER-Frequenzen erhält man durch elementare Umformungen aus (3.20). Es gilt

$$\log(w_b) = \frac{1}{10x}\big[\log\big(w_a^{10(2+x)}/w_c^{20}\big) + L_\varphi(w_a) - L_\varphi(w_c)\big], \qquad 0 < x < 2$$
$$\log(w_d) = \frac{1}{20}\big[\log\big(w_c^{20}\big) + L_\varphi(w_c) - L_\varphi(w_d)\big].$$

Auch die Berechnung von $L_\eta(w_a)$ bereitet uns keine Schwierigkeiten. Wir müssen lediglich (3.8) verwenden, um den gesuchten Wert

$$L_\eta(w_a) = L_\varphi(w_a) + 20\log(w_a) - 10\log(2)$$

zu bestimmen. Mit diesem Resultat verfügen wir nun über eine quantitative Beschreibung von L_η in den Bereichen (ii) bis (iv). Auch ist uns L_η im Bereich (i) bekannt, weil wir den Kurvenverlauf dort als konstant angenommen haben. Damit bleibt zu klären, aufgrund welcher Daten L_η im Bereich (v) zu beschreiben ist. Einerseits wäre jede Diskussion darüber spekulativ, weil gemäß (Abb. 3.3) die Dämpfung in diesem Bereich vom jeweils verwendeten Trennverstärker abhängig ist und uns darüber keine Informationen zur Verfügung stehen. Dennoch wird andererseits eine sinnvolle Festlegung benötigt, um zum gewünschten Simulationsmodell zu gelangen. Eine Lösung dieses Problems wird sich auf erstaunlich einfache Weise bei der Approximation von L_η durch den Entwurf eines linearen dynamischen Systems ergeben.

§3 Simulation zufälliger Frequenz- und Phasenfluktuationen

Nachdem wir alle Notwendigkeiten diskutiert haben, um die Prozesse der zufälligen Frequenz- und Phasenfluktuationen mit Hilfe von «Spektraldichten» bzw. technischen Leistungsspektren zu beschreiben, ist es nun an der Zeit, ein Modell zu deren Simulation herzuleiten. Bevor wir damit beginnen, fassen wir unsere bisherigen Ergebnisse noch einmal zusammen.

Die Basis unserer Überlegungen bildete ein zeitstetiges Modell der zufälligen Phasenfluktuationen φ in der Form eines stochastischen RIEMANN-Integrals über den Prozeß der zufälligen Frequenzfluktuationen η gemäß

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \eta(s)\,ds, \qquad t \geqslant t_0. \tag{3.21}$$

Zunächst haben wir diese Darstellung aufgrund praxisrelevanter Annahmen durch die Wahl des Anfangswertes $(t_0, \varphi_0) := (0, 0)$ vereinfachen können. Ferner durften wir voraussetzen, daß η und φ bandbegrenzte Prozesse sind, da diese Eigenschaft bereits für die Messung der zugehörigen «Spektraldichten» im Sinne einer Abtastung benötigt wurde. Daher haben wir fortan nur noch von zeitdiskreten Prozessen gesprochen und dafür dieselben Bezeichner verwendet. Um η und φ auch quantitativ festlegen zu können, hatten wir uns zudem entschlossen, Angaben über ihre «Spektraldichten» bzw. technischen Leistungsspektren aus Datenblättern zu

entnehmen. In Übereinstimmung mit den Vorgaben der Standardisierung haben wir zur beispielhaften Ermittlung zugehöriger Werte zunächst ein häufig verwendetes Modell des technischen Leistungsspektrums L_φ der zufälligen Phasenfluktuationen betrachtet. Da der Prozeß φ gemäß Beschreibung aber nicht stationär sein kann, und damit auch keine Spektraldichte besitzt, sind wir mittels Transformation zum technischen Leistungsspektrum L_η der zufälligen Frequenzfluktuationen übergegangen. Daß der Prozeß η als stationärer angenommen werden darf, haben wir bereits in Kapitel zwei diskutiert. Darüber hinaus konnten wir im vorliegenden Kapitel zeigen, daß η als ARMA-Prozeß dargestellt werden kann. Wie man zu einer solchen Darstellung gelangt, haben wir jedoch noch nicht diskutiert. Somit sind zur Herleitung des Simulationsmodells noch folgende zwei Probleme zu lösen. Zum einen müssen wir eine zu (3.21) äquivalente Vorschrift zur Berechnung des zeitdiskreten Prozesses φ als Funktion von η formulieren. Zum anderen benötigen wir eine Bestimmungsgleichung für η, so daß dieser Prozeß dem technischen Leistungsspektrum L_η entspricht.

Die Lösung des ersten Problems ist unmittelbar klar. Statt eines Integrals können wir zur Beschreibung von φ eine Summe bezüglich η verwenden.[12] Das zu (3.21) äquivalente zeitdiskrete Modell für φ läßt sich dann wie folgt notieren

$$\varphi(t) = \sum_{s=0}^{t} \eta(s), \qquad t \in \mathbb{N}_0. \tag{3.22}$$

Die Behandlung des zweiten Problems erweist sich als komplizierter. Zum besseren Verständnis wollen wir daher mit der Diskussion eines möglichen Lösungsansatzes beginnen. Aus §2 wissen wir, daß η als linearer Prozeß gemäß

$$\eta(t) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{k\to-\infty} \sum_{l=k}^{t} h_{t-l}\xi(l), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{3.23}$$

darstellbar ist. Diese Darstellung ist aus systemtheoretischer Sicht von besonderer Bedeutung, weil η damit einer Faltung des weißen Rauschens ξ mit der Gewichtsfolge h entspricht. Folglich kann η als Ausgabe eines linearen dynamischen Systems mit der Eingabe ξ interpretiert werden. Allerdings ist die Darstellung (3.23) nicht geeignet, um einen Zusammenhang zwischen η und dem technischen Leistungsspektrum L_η herzustellen. Betrachten wir hingegen die Relationen (3.13) und (3.14), dann läßt sich eine alternative Beschreibung für η wie folgt notieren

$$\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\hat{h}(w)\,\zeta_\xi(dw), \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.24}$$

Erneut bezeichnen darin $\hat{h}$ die FOURIER-Reihe der Gewichtsfolge h und ζ_ξ das zufällige Spektralmaß des weißen Rauschens ξ. Mit Hilfe von Satz 1.48.2 können wir nun aus (3.24) die Kovarianzfunktion von η bestimmen. Ist F_ξ das Spektralmaß von ξ, dann gilt

$$R_\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\left|\hat{h}(w)\right|^2 F_\xi(dw) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt}\left|\hat{h}(w)\right|^2 S_\xi(w)\,dw, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{3.25}$$

[12] Vergleiche dazu auch das stochastische RIEMANN-Integral gemäß Definition 1.19.

wobei wir berücksichtigt haben, daß ξ die Spektraldichte S_ξ besitzt. Da die Spektraldichte stationärer Prozesse gemäß Satz 1.39 aber fast sicher eindeutig bezüglich des LEBESGUE-Maßes bestimmt ist, muß für die Spektraldichte von η gelten

$$S_\eta(w) = \left|\hat{h}(w)\right|^2 S_\xi(w) \quad (f.s.), \qquad -\pi \leqslant w \leqslant \pi. \tag{3.26}$$

Als nächstes sind die Spektraldichte S_η und das technische Leistungsspektrum L_η in Relation zu bringen. Dies bereitet keine Probleme, denn wegen (3.7) gilt

$$L_\eta(w) = 10\log\left[\frac{S_\eta(w)}{K_1}\right] = 20\log|\hat{h}(w)| + 10\log\left[\frac{S_\xi(w)}{K_1}\right], \qquad 0 < w \leqslant \pi.$$

Identifizieren wir den rechts stehenden Summanden noch mit Null, dann ist der Zusammenhang zwischen $\hat{h}$ und L_η offensichtlich. Mit $S_\xi(w) := K_1$ erhalten wir

$$L_\eta(w) = 20\log|\hat{h}(w)|, \qquad 0 < w \leqslant \pi. \tag{3.27}$$

Fassen wir die Relationen (3.25) und (3.27) noch zusammen, so haben wir eine formale Vorschrift zur Berechnung der Kovarianzfunktion R_η in Abhängigkeit des technischen Leistungsspektrums L_η gefunden. Anhand dieser wollen wir nun ein lineares dynamisches System entwerfen, das die Gewichtsfolge h mit der FOURIER-Reihe $\hat{h}$ gemäß (3.27) besitzt.

Vorbereitungen für den Systementwurf. Vor dem Systementwurf ist es noch notwendig, bisher ungenau formulierte Zusammenhänge zu präzisieren. Zudem wird es sich als vorteilhaft erweisen, gewisse Notationen zu variieren, so daß diese mit üblichen systemtheoretischen Konventionen im Einklang stehen.

Während der Untersuchung der Darstellbarkeit von η als linearer Prozeß haben wir den Zusammenhang der Gewichtsfolge h mit der FOURIER-Reihe $\hat{h}$ eingehend diskutiert. In Übereinstimmung mit mathematischen Konventionen haben wir $\hat{h}$ dabei als Funktion der FOURIER-Frequenz w definiert. In der Systemtheorie ist eine solche Notation jedoch nicht üblich. Vielmehr wird die FOURIER-Reihe dort als Funktion

$$H(z) := \sum_{l=0}^{\infty} h_l z^{-l}$$

der komplexen Variablen $z = e^{iw}$ charakterisiert und als *Übertragungsfunktion* bezeichnet.[13] Diese Form der Darstellung ist sinnvoll, weil das Übertragungsverhalten zeitdiskreter Systeme in der Regel mittels z-Transformation beschrieben wird. Auch wir wollen statt $\hat{h}$ im folgenden H verwenden. Allerdings ist dabei zu beachten, daß den Definitionen von $\hat{h}$ und H verschiedene Konvergenzbegriffe zugrundeliegen. Bezüglich $\hat{h}$ haben wir von der Quadratmittelkonvergenz gesprochen, welche die punktweise Konvergenz der Partialsummenfolge $(\hat{h}_k)$ gemäß

$$\hat{h}_k(w) := \sum_{l=0}^{k} h_l e^{-iwl}, \qquad -\pi \leqslant w \leqslant \pi$$

[13] Diese Thematik wird in [138, S. 139 ff.], [144, S. 263 ff.], [184, S. 145 ff.], [185, S. 191 ff.] umfassend behandelt.

für fast alle w nach sich zieht.[14] Ein hinreichendes Kriterium dafür ist die quadratische Summierbarkeit der Gewichtsfolge h. Für die Konvergenz der Partialsummenfolge (H_k) gemäß

$$H_k(z) := \sum_{l=0}^{k} h_l z^{-l}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

genügt diese Voraussetzung hingegen nicht. Mit der Gewichtsfolge $h := (1/l)$ wird dies sofort klar. Verlangt man jedoch die absolute Summierbarkeit für h, dann sind für (H_k) die gleichmäßige und für $(\hat{h}_k)$ auch die Konvergenz im quadratischen Mittel gesichert [15, S. 11], [56, S. 237].[15] Folglich kann in diesem Fall die z-Transformation für den Entwurf des linearen dynamischen Systems eingesetzt werden. Daraus ergibt sich aber eine scheinbare Rekursion. Wie kann die absolute Summierbarkeit der Gewichtsfolge eines linearen dynamischen Systems im voraus gewährleistet werden, welches doch erst zu entwerfen ist? Wie sich später zeigen wird liefert der Systementwurf mittels Bilineartransformation darauf eine mögliche Antwort. Zudem kann mit diesem Entwurfsverfahren bereits jetzt ein anderes Problem behandelt werden.

Bei der Spektraldichtebestimmung mittels Datenblattinformation war es wegen fehlender Angaben nicht möglich den Verlauf des technischen Leistungsspektrums L_η im Bereich (v) quantitativ zu bestimmen. Verwenden wir für den Systementwurf die Bilineartransformation, dann können wir darauf sogar verzichten, weil dieses Entwurfsverfahren den Aliaseffekt unterbindet. Daher wird das technische Leistungsspektrum des resultierenden Systems im Bereich der Grenzfrequenz π stark gedämpft und verzerrt. Berücksichtigen wir diesen Aspekt schon bei der Beschreibung von L_η, dann können wir dessen Verlauf im Bereich (v) auch als konstant modellieren. Das modifizierte technische Leistungsspektrum für den Systementwurf ist als fette, durchgezogene Linie in der Graphik (Abb. 3.6) zu sehen. In Bezug auf die Verzerrungen bleibt anzumerken, daß sich daraus keine wesentlichen Änderungen der Eigenschaften der simulierten Phasenfluktuationen ergeben werden. Fast die gesamte Leistung von L_φ konzentriert sich nahe bei Null, so daß Abweichungen im Bereich der Grenzfrequenz toleriert werden können.

Neben der Dämpfung des technischen Leistungsspektrums L_η ist eine weitere Größe von entscheidender Bedeutung. Die Grenzfrequenz, welche dem rechten Rand des Bereiches (v) entspricht, haben wir bisher mit dem Wert π versehen. Diese Festlegung stimmt mit der üblichen systemtheoretischen Notation überein. Allerdings werden die technischen Leistungsspektren in Datenblättern ohne eine solche Normierung angegeben. Daher ist es notwendig, diese vor dem Systementwurf entsprechend zu skalieren. Wir kommen später darauf zurück. Im engen Zusammenhang mit dieser Skalierung steht die Frage, bezüglich welcher Abtastfrequenz die in der Realität zeitstetigen zufälligen Phasenfluktuationen zu simulieren sind. Diese Angabe ist wesentlich für die Untersuchung derartiger Störungen in einem technischen System. Wir wollen dies an einem nachrichtentechnisch motivierten Beispiel kurz diskutieren. Angenommen wir wollen die Wirkung der zufälligen Phasenfluktuationen des lokalen Oszillators in einem trägerbasierten

[14] Dabei handelt es sich um ein überaus tiefgreifendes Resultat, das im Jahre 1966 von CARLESON bewiesen wurde [36]. Im allgemeinen folgt aus der Quadratmittelkonvergenz nämlich nur, daß eine Teilfolge punktweise fast überall gegen die Grenzfunktion konvergiert. Weitere Kommentare dazu sind [44, S. XI ff. und S. 50 ff.], [56, S. 235 ff.], [76, S. 163 ff.] zu entnehmen.

[15] Denn es gilt $l_p \subset l_q$ für $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ [77, S. 91].

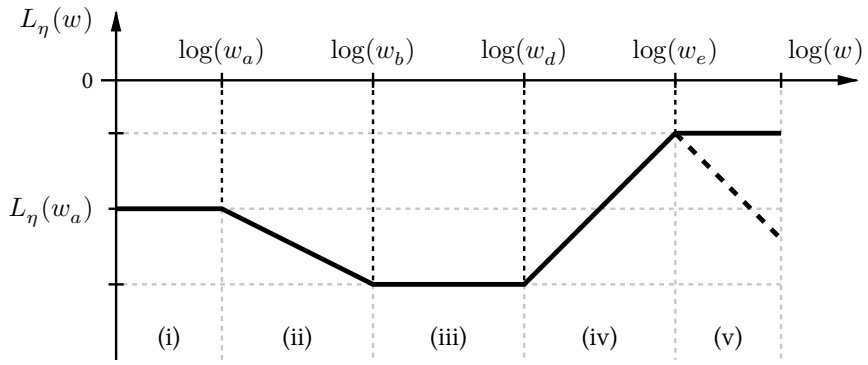


Abb. 3.6: Modifiziertes technisches Leistungsspektrum der zufälligen Frequenzfluktuationen.

Übertragungssystem mittels Simulation analysieren. Für gewöhnlich geht man dazu vom äquivalenten Tiefpaßbereich aus. Die minimal notwendige Abtastfrequenz wird dann durch die Bandbreite des Sendesignals bestimmt. Diese im folgenden mit w_s bezeichnete Größe ist wesentlich für die Simulation des Übertragungssystems. Ist beispielsweise w_s zu klein, dann können zusätzliche Störungen durch den Aliaseffekt entstehen. Wird andererseits w_s zu groß gewählt, dann machen sich Außerbandstörungen bemerkbar. Nun kommen die zufälligen Phasenfluktuationen ins Spiel. Da diese Störungen Schwankungen in der Trägerfrequenz verursachen, ist die tatsächliche Bandbreite des Sendesignals größer als im ungestörten Fall. Soll der Einfluß der zufälligen Phasenfluktuationen also nicht durch das Simulationsmodell selbst beeinträchtigt werden, dann ist w_s genügend groß zu wählen. Weil die Bandbreite des Sendesignals aus praktischen Gründen sehr viel größer ist als die der zufälligen Phasenfluktuationen, kann daher stets

$$w_e < \frac{w_s}{4} \tag{3.28}$$

vorausgesetzt werden.[16] Diese Voraussetzung bedeutet, daß $2w_e$ gemäß (Abb. 3.6) kleiner ist als die größte im Sendesignal enthaltene FOURIER-Frequenz. Letztere identifizieren wir folglich mit $w_s/2$ und bezeichnen diese Größe als *unnormierte Grenzfrequenz*.

Damit kommen wir zum letzten Schritt der Vorbereitungen für den Systementwurf. Ziel ist es, alle bisherigen Erkenntnisse und Fakten zur Beschreibung von L_η zusammenzutragen und durch die Einführung einer Normierung zu einem Dämpfungsschema für das gewünschte lineare dynamische System zu gelangen. Beim Entwurf eines solchen Systems gemäß eines gegebenen Dämpfungsschemas erhält man stets eine Konstante $K_2 > 0$, welche zur Normierung mit der resultierenden Übertragungsfunktion zu multiplizieren ist. Da die Multiplikation im logarithmischen Maßstab einer Addition entspricht, kann man diese Konstante auch als vertikale Verschiebung des Dämpfungsschemas interpretieren. Im Fall $K_2 = 1$ wird sich also keine Änderung ergeben. Umgekehrt läßt sich der Wert Eins für die Konstante auch durch die Verschiebung des Dämpfungsschemas erzwingen. Verlangen wir nämlich $L_\eta(w) = 0$ für $0 < w \leqslant w_a$ oder

[16] Läge die Bandbreite der zufälligen Phasenfluktuationen nicht in diesem Bereich, dann hätten wir es mit einem lokalen Oszillator zu tun, der für trägerbasierte Übertragungssysteme ungeeignet ist.

äquivalent dazu

$$20\log|H(e^{iw})| = L_\eta(w) - L_\eta(w_a), \qquad 0 < w \leqslant w_s/2, \tag{3.29}$$

dann können wir wegen (3.7) und (3.26) für $0 < w \leqslant w_s/2$ schreiben

$$20\log|H(e^{iw})| = 10\log\left[\frac{|H(e^{iw})|^2 S_\xi(w)}{K_1}\right] - L_\eta(w_a) = 20\log|H(e^{iw})| + 10\log\left[\frac{S_\xi(w)}{K_1 K_2}\right].$$

Offenbar sind das Dämpfungsschema und das normierte technische Leistungsspektrum genau dann identisch, wenn wir

$$S_\xi(w) := K_1 K_2, \qquad K_2 := 10^{L_\eta(w_a)/10}, \qquad 0 < w \leqslant w_s/2 \tag{3.30}$$

setzen. Fassen wir abschließend die Resultate unserer Diskussion zusammen, dann können wir das entwurfsrelevante Dämpfungsschema als Funktion der unnormierten Grenzfrequenz gemäß (Abb. 3.7) graphisch veranschaulichen. Das Attribut *entwurfsrelavant* deutet noch einmal darauf

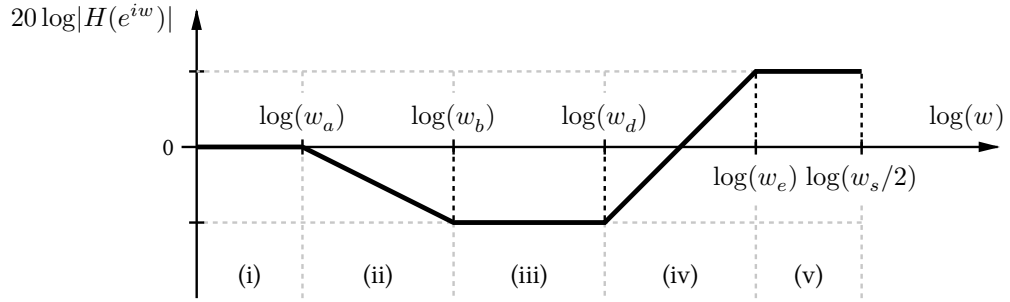


Abb. 3.7: Normiertes technisches Leistungsspektrum der zufälligen Frequenzfluktuationen.

hin, daß das tatsächliche Dämpfungsschema des linearen dynamischen Systems aufgrund der beim Entwurf eingesetzten Bilineartransformation im Bereich (v) eine stärkere Dämpfung als in der Graphik aufweisen wird. Demnach wird sich näherungsweise ein Verlauf entsprechend der fetten, durchgezogenen Linie des Schemas (Abb. 3.3) ergeben. Anhand des Dämpfungsschemas (Abb. 3.7) wird im folgenden ein lineares dynamisches System entstehen, welches zur Simulation zufälliger Frequenzfluktuationen geeignet ist.

Systementwurf mittels Bilineartransformation. Unabhängig vom gewählten Verfahren ist es vor dem Systementwurf sinnvoll, sich mögliche Strukturen linearer dynamischer Systeme sowie deren Zusammenhang mit stationären ARMA-Prozessen ins Gedächtnis zu rufen. Als wir in §2 die Darstellbarkeit des stationären ARMA-Prozesses η gemäß

$$b(B)\eta(t) = a(B)\xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

mit $a(B) = a_0 + a_1 B + \cdots + a_m B^m$ und $b(B) = b_0 + b_1 B + \cdots + b_n B^n$ untersuchten, hat sich gezeigt, daß der Prozeß ebenfalls der Spektraldarstellung

$$\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt} \, \frac{\hat{a}(w)}{\hat{b}(w)} \, \zeta_\xi(dw), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

mit $\hat{a}(w) = a_0 + a_1 e^{-iw} + \cdots + a_m e^{-iwm}$ und $\hat{b}(w) = b_0 + b_1 e^{-iw} + \cdots + b_n e^{-iwn}$ genügt. Insbesondere sind in beiden Darstellungen dieselben Koeffizienten zu verwenden. Weil wir den Quotienten der Spektraldarstellung anschließend mit $\hat{h}(w)$ und diesen wiederum mit $H(e^{iw})$ identifiziert haben, können wir nun mit $z := e^{iw}$ schreiben

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}. \tag{3.31}$$

Für $m = n$ beschreibt (3.31) die Übertragungsfunktion eines linearen dynamischen Systems in der ersten kanonischen Form gemäß (Abb. 3.8). Darüber hinaus stimmen die Koeffizienten dieses

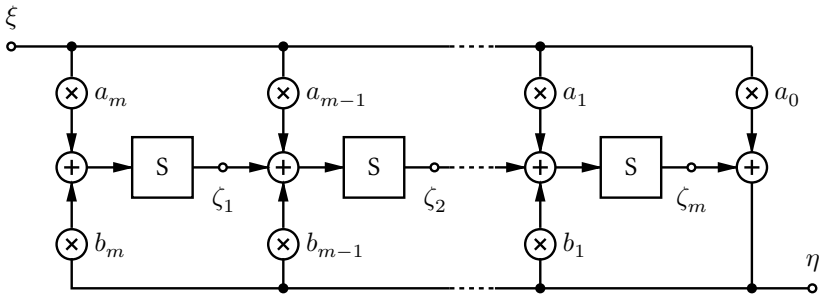


Abb. 3.8: Schema des zeitdiskreten linearen dynamischen Systems in erster kanonischer Form.

Systems mit denen des ARMA-Prozesses η überein. Man kann also sagen, daß ein System der Art (Abb. 3.8) den ARMA-Prozeß η auf natürliche Weise aus einem weißen Rauschen ξ erzeugt. Allerdings ist die Darstellung linearer dynamischer Systeme nicht eindeutig. Daher können verschiedene Systemformen, bei korrekter Wahl der Koeffizienten, zur selben Ausgabe η führen. Aufgrund numerischer Aspekte sind gewisse Formen für den praktischen Einsatz jedoch besonders geeignet. Die erste kanonische Form aus (Abb. 3.8) gehört nicht dazu. Als problematisch daran erweist sich insbesondere die Rückkoppelung über mehrere Speicherstufen hinweg. Dagegen unterliegen lineare dynamische Systeme in Kaskadenform einem solchen Problem nicht. Für den uns einzig interessierenden Fall $m = n$ ist die Übertragungsfunktion des kaskadenförmigen Systems (Abb. 3.9) durch

$$H(z) = \prod_{k=1}^{m} \frac{a_k + b_k z^{-1}}{1 + c_k z^{-1}} \tag{3.32}$$

gegeben. Die Aufgabe des Systementwurfs besteht nun darin, sowohl die natürliche Zahl m als auch die Koeffizienten a_k, b_k und c_k für $1 \leqslant k \leqslant m$ anhand des Dämpfungsschemas (Abb. 3.7) zu bestimmen.[17] Wir werden dazu die Bilineartransformation verwenden.

[17] Beachte, daß die Koeffizienten a_k und b_k der Darstellungen (Abb. 3.8) und (Abb. 3.9) im allgemeinen verschieden sind.

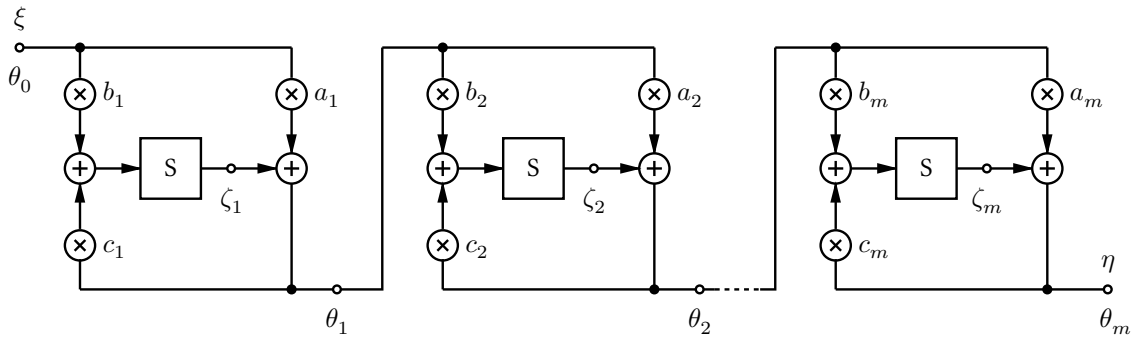


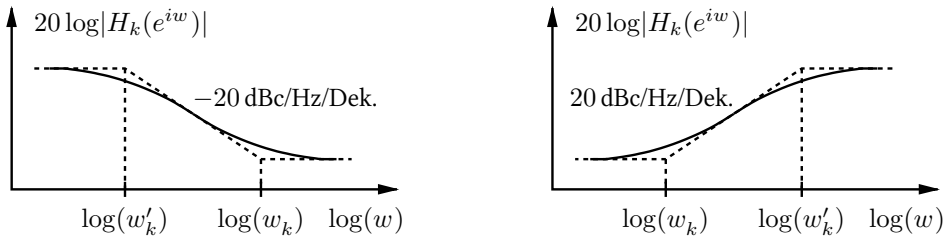
Abb. 3.9: Schema des zeitdiskreten linearen dynamischen Systems in Kaskadenform.

Beim Systementwurf mittels Bilineartransformation sind grundsätzlich vier Arbeitsschritte zu absolvieren [99, S. 82 ff.], [138, S. 547 ff.]. Im ersten Schritt ist das Dämpfungsschema des gewünschten zeitdiskreten linearen dynamischen Systems bereitzustellen. Dafür sind zwei Dinge erforderlich. Zunächst müssen wir den Kurvenverlauf aus (Abb. 3.7) so approximieren, daß jeder Stufe der Kaskade genau ein Pol-Nullstellen-Paar zugewiesen wird. Anschließend sind die resultierenden FOURIER-Frequenzen noch auf die Grenzfrequenz π zu skalieren. Um dabei nicht die Übersicht zu verlieren, werden wir Größen mit normierter FOURIER-Frequenz im folgenden durch ein zusätzliches Symbol markieren. Bezeichnet η den Prozeß der zufälligen Frequenzfluktuation mit der Spektraldichte $S_\eta(w)$ bezüglich $-w_s/2 \leqslant w \leqslant w_s/2$, dann werden wir unter η^* den frequenznormierten Prozeß mit Spektraldichte $S_{\eta^*}(w)$ für $-\pi \leqslant w \leqslant \pi$ verstehen. Im zweiten Schritt ist das Dämpfungsschema des zeitdiskreten Systems mit Hilfe einer nichtlinearen Funktion auf die gesamte reelle Achse zu transformieren. Damit erhalten wir das Dämpfungsschema eines zeitstetigen Systems, welches im dritten Schritt zu realisieren ist. Im vierten Schritt schließlich ist das zeitstetige System mittels Bilineartransformation wieder in ein äquivalentes zeitdiskretes System zu überführen. Wesentlich dabei ist, daß die Stabilität des zeitstetigen Systems die des zeitdiskreten Systems nach sich zieht [99, S. 83], [138, S. 548]. Wir kommen später auf den Aspekt der Stabilität zurück.

Erster Schritt des Systementwurfs. Folgen wir den Vorgaben des beschriebenen Entwurfsverfahrens, so haben wir im ersten Schritt ein Dämpfungsschema für das zeitdiskrete lineare dynamische System bereitzustellen. Inhaltlich ist darunter die Approximation und Normierung der Kurve aus (Abb. 3.7) zu verstehen. Wir beginnen mit der Approximation. Dazu rufen wir uns zunächst noch einmal systemtheoretische Eigenschaften linearer dynamischer Systeme ins Gedächtnis [185, S. 179]. Bezeichnen w'_k und w_k für $1 \leqslant k \leqslant m$ die zur k-ten Pol- bzw. Nullstelle der Übertragungsfunktion (3.32) gehörenden FOURIER-Frequenzen, dann lassen sich folgende Zusammenhänge feststellen. Eine Polstelle fügt im Dämpfungsschema einen zusätzlichen Leistungsabfall um 20 dBC/Hz je Dekade hinzu. Eine Nullstelle führt dagegen zu einer Verstärkung um eben diesen Betrag. Werden folglich die Koeffizienten a_k, b_k und c_k der Übertragungsfunktion entsprechend gewählt, dann sind unter gewissen Bedingungen beliebige Dämpfungsverläufe realisierbar.[18] Für die k-te Stufe der Kaskade (Abb. 3.9) sind demnach zwei Möglichkeiten

[18] Wenn diese Anstiege nur auf endlichen Intervallen zu erzeugen sind [102].

zur Beeinflussung des Dämpfungsschemas denkbar. Gilt einerseits $w'_k < w_k$, dann wird sich der Verlauf aus (Abb. 3.10(a)) ergeben. Für $w'_k > w_k$ zeigt sich anderenfalls ein Anstieg gemäß (Abb. 3.10(b)).[19] Während die punktierten Linien in den Graphiken als Konstruktionshilfe dienen, entsprechen die durchgezogenen Linien dem realen Dämpfungsverlauf. Deren Abweichung voneinander ist bei $\log(w'_k)$ bzw. $\log(w_k)$ am größten und beträgt jeweils 3 dBC/Hz. Daraus leitet sich eine für unseren Zweck überaus nützliche Eigenschaft ab. Liegen die FOURIER-Frequenzen



(a) Erst Pol-, dann Nullstelle. (b) Erst Null-, dann Polstelle.

Abb. 3.10: Manipulation des Dämpfungsschemas mittels Pol- und Nullstellenwahl.

der Pol- und Nullstellen nahe beieinander, dann ist der Kurvenanstieg von ± 20 dBC/Hz je Dekade nicht mehr zu sehen. Vielmehr erscheint dieser etwa als ± 10 dBC/Hz je Dekade. Wird andererseits der Abstand hinreichend groß gewählt, so fallen die Abweichungen in der Umgebung von $\log(w'_k)$ bzw. $\log(w_k)$ kaum ins Gewicht. Damit können wir eine Lösung für unser Approximationsproblem formulieren. Da der Kurvenanstieg des Dämpfungsschemas (Abb. 3.7) im Bereich (iv) genau 20 dBC/Hz je Dekade beträgt, können wir für die letzte Stufe der Kaskade

$$w'_m := w_e, \qquad w_m := w_d \tag{3.33}$$

wählen. Die übrigen $(m-1)$ Stufen lassen sich daher verwenden, um den Kurvenverlauf im Bereich (ii) zu approximieren. Dazu müssen wir Pol- und Nullstellen gleichmäßig und alternierend in diesem Bereich plazieren. In der Graphik (Abb. 3.11) ist dies beispielhaft dargestellt. Auch wenn dieses Approximationsverfahren im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf Anregung aus systemtheoretischen Resultaten gemäß WUNSCH und SCHREIBER [185, S. 179] entstand,[20] so hat KESHNER im Zusammenhang mit fraktionalen Prozessen bereits im Jahre 1982 auf eine solche Möglichkeit hingewiesen [107]. Insbesondere führte er aus, daß der speziell durch diese Approximation entstehende Fehler nur sehr gering ist. Für einen maximal fünfprozentigen Fehler, so argumentierte er, würde bereits ein Pol-Nullstellen-Paar je Dekade genügen. Allerdings führte er diesbezüglich keine Rechnungen durch. Im Jahre 1986 wandte SALETTI darauf ein, daß diese Einschätzung nicht ganz richtig sei [154]. Schließlich berechnete er den wahren Fehler und stellte diesen über der Anzahl der Pol-Nullstellen-Paare je Dekade graphisch dar. Danach ist der relative Approximationsfehler kleiner als 0.8 Prozent, wenn man 1.5 Pol-Nullstellen-Paare je

[19] Der Fall $w'_k = w_k$ ist nicht möglich, da wir H stets als vollständig gekürzt ansehen.

[20] Die erste Idee dazu entstand während eines studienbegleitenden Praktikums bei ADVANCED MICRO DEVICES (AMD) unter Anleitung von Herrn Dr. JÖRG BOROWSKI.

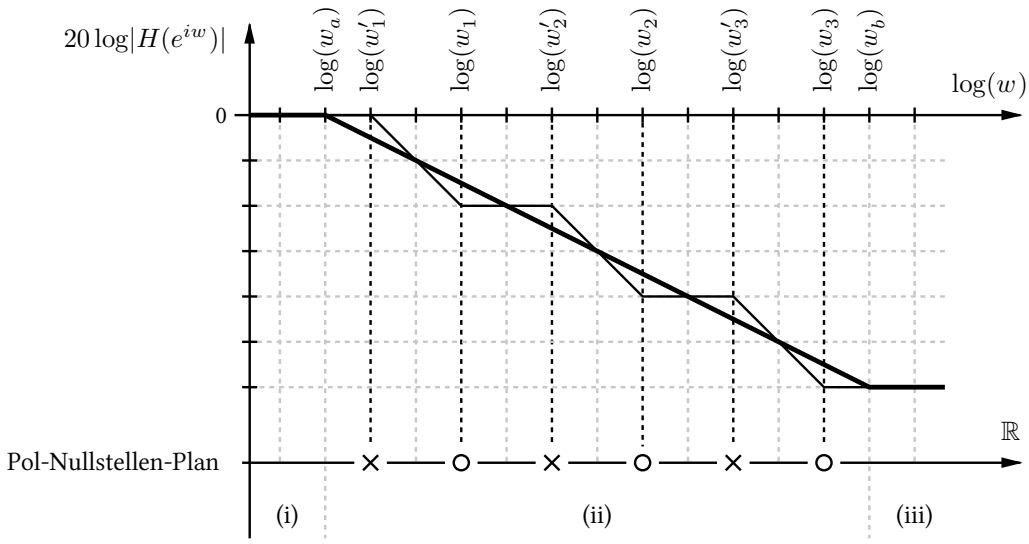


Abb. 3.11: Approximation des Dämpfungsschemas im Bereich (ii).

Dekade verwendet. Weil der Bereich (ii) des Dämpfungsschemas (Abb. 3.7) meist aber nur wenige Dekaden umfaßt, setzen wir einfacher einen Wert von zwei Pol-Nullstellen-Paaren je Dekade voraus. Damit ist die notwendige Stufenanzahl m der Kaskade bekannt, und es bleiben die zugehörigen FOURIER-Frequenzen w'_k und w_k für $1 \leqslant k \leqslant m-1$ zu bestimmen. Dazu führen wir die Hilfsgröße d_w gemäß

$$\log(d_w) := \frac{\log(w_b) - \log(w_a)}{m-1}$$

ein. Sie bezeichnet die Weite, welche durch ein Pol-Nullstellen-Paar zu approximieren ist. Wenn wir zudem beachten, daß das Dämpfungsschema gemäß (3.8), (3.20a) und (3.29) für $0 < x < 2$ im Bereich (ii) einen Anstieg von $-10x$ dBC/Hz je Dekade besitzt, dann können wir uns mittels (Abb. 3.12) für die Berechnung von w'_k und w_k Folgendes überlegen. Da der zu approximierende Anstieg pro Kaskadenstufe einerseits $-10x$ dBC/Hz je Dekade entspricht, andererseits aber durch ein Pol-Nullstellen-Paar nur ein Anstieg von -20 dBC/Hz je Dekade realisierbar ist, müssen w'_k und w_k genügend nahe beieinander liegen. Genauer, nur auf einem Teilintervall von $\log(d_w)$ darf der Anstieg von -20 dBC/Hz je Dekade wirksam werden. Folglich gibt es eine Zahl y mit $0 < y < 1$, so daß

$$-20y \log(d_w) = -10x \log(d_w), \qquad 0 < x < 2$$

gilt. Daraus erhalten wir

$$y = x/2, \qquad 0 < x < 2. \tag{3.34}$$

Daß das Teilintervall $y \log(d_w)$ symmetrisch um den Mittelpunkt zu wählen ist, ergibt sich aus der Forderung nach dem kleinsten maximalen Fehler der Approximation. Schließlich können wir

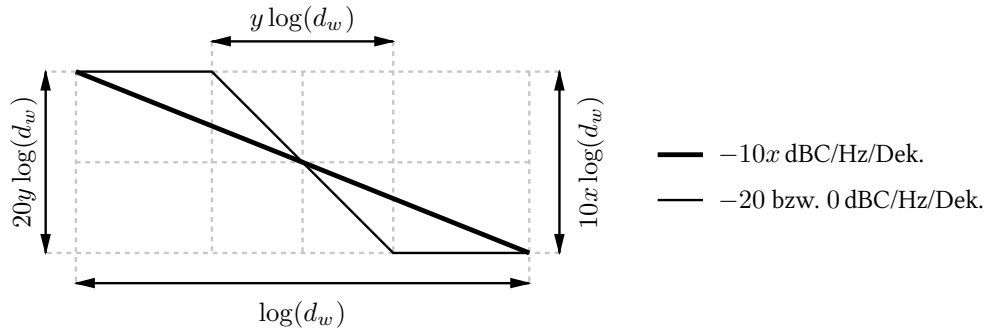


Abb. 3.12: Approximation eines Anstiegs von $-10x$ dBC/Hz je Dekade.

aufgrund der Relation (3.34) und der Darstellung (Abb. 3.11) eine Vorschrift zur Berechnung von w'_k und w_k für $1 \leqslant k \leqslant m-1$ wie folgt notieren. Für die FOURIER-Frequenzen der Polstellen gilt zunächst

$$\begin{aligned}\log(w'_k) &= \log(w_a) + \big[(1-y)/2 + k - 1\big]\log(d_w)\\ &= \log(w_a) + \big[(1-x/2)/2 + k - 1\big]\log(d_w)\\ &= \log(w_a) + \big[4k - x - 2\big]\,\frac{\log(w_b) - \log(w_a)}{4(m-1)}\end{aligned}$$

und für die der Nullstellen analog

$$\begin{aligned}\log(w_k) &= \log(w_a) + \big[(1-y)/2 + y + k - 1\big]\log(d_w)\\ &= \log(w_a) + \big[(1-x/2)/2 + x/2 + k - 1\big]\log(d_w)\\ &= \log(w_a) + \big[4k + x - 2\big]\,\frac{\log(w_b) - \log(w_a)}{4(m-1)},\end{aligned}$$

wobei $0 < x < 2$ durch das Dämpfungsschema gegeben ist. Damit und wegen (3.33) sind nun auch w'_k und w_k für $1 \leqslant k \leqslant m$ bekannt. Deren Werte sind Tabelle 3.1 zu entnehmen.

P-N-Paare	1	.	k	.	$m-1$	m
Polstellen w'_k	$w_a\left(\frac{w_b}{w_a}\right)^{\frac{2-x}{4(m-1)}}$	.	$w_a\left(\frac{w_b}{w_a}\right)^{\frac{4k-x-2}{4(m-1)}}$	.	$w_a\left(\frac{w_b}{w_a}\right)^{\frac{4m-x-6}{4(m-1)}}$	w_e
Nullstellen w_k	$w_a\left(\frac{w_b}{w_a}\right)^{\frac{2+x}{4(m-1)}}$	.	$w_a\left(\frac{w_b}{w_a}\right)^{\frac{4k+x-2}{4(m-1)}}$	.	$w_a\left(\frac{w_b}{w_a}\right)^{\frac{4m+x-6}{4(m-1)}}$	w_d

Tabelle 3.1: FOURIER-Frequenzen der Pol-Nullstellen-Paare der Approximation mit $0 < x < 2$.

Nachdem wir das Dämpfungsschema (Abb. 3.7) approximiert haben, ist es noch auf die Grenzfrequenz π zu normieren. Ursprünglich sind wir davon ausgegangen, daß der zeitdiskrete Prozeß η durch äquidistante Abtastung eines zeitstetigen Prozesses entsteht. Bezeichnet w_s die dabei verwendete Abtastfrequenz, dann ist η durch Abtastwerte des zeitstetigen Prozesses in den Zeitpunkten $t = 2\pi k/w_s$ gegeben. Nun führen wir die normierte FOURIER-Frequenz v gemäß

$$v := \frac{2\pi}{w_s} w, \qquad -\frac{w_s}{2} \leqslant w \leqslant \frac{w_s}{2} \tag{3.35}$$

ein. Damit gilt $-\pi \leqslant v \leqslant \pi$. Unser Ziel ist es nun, das Dämpfungsschema bezüglich w in ein entsprechendes bezüglich v zu überführen. Zunächst können wir schreiben

$$\int_{-w_s/2}^{w_s/2} e^{iwt} S_\eta(w)\, dw = \int_{-w_s/2}^{w_s/2} e^{iw2\pi k/w_s} S_\eta(w)\, dw = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ivk} \frac{w_s}{2\pi} S_\eta\Big(\frac{w_s v}{2\pi}\Big)\, dv.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Spektraldarstellung gemäß Satz 1.39 muß mit (3.35) daher gelten

$$S_{\eta^*}(v) = \frac{w_s}{2\pi} S_\eta\Big(\frac{w_s v}{2\pi}\Big) = \frac{w_s}{2\pi} S_\eta(w) \qquad (f.s.),$$

wobei η^* den zu η äquivalenten Prozeß mit normierter Grenzfrequenz π beschreibt. Aufgrund von $S_\eta(w) = |H(e^{iw})|^2 S_\xi(w)$ fast sicher bezüglich des LEBESGUE-Maßes gilt darüber hinaus

$$|H^*(e^{iv})|^2 S_{\xi^*}(v) = S_{\eta^*}(v) = \frac{w_s}{2\pi} S_\eta(w) = \frac{w_s}{2\pi} |H(e^{iw})|^2 S_\xi(w) \qquad (f.s.),$$

wobei H^* das Dämpfungsschema von η^* bezeichnet. Setzen wir mittels (3.30)

$$S_{\xi^*} := \frac{w_s}{2\pi} S_\xi = \frac{w_s}{2\pi} K_1 K_2,$$

dann erhalten wir wegen (3.35)

$$|H^*(e^{iv})| = |H(e^{iw})|, \qquad v := \frac{2\pi}{w_s} w, \qquad -\frac{w_s}{2} \leqslant w \leqslant \frac{w_s}{2}.$$

Die normierten FOURIER-Frequenzen der Pol- und Nullstellen sind in Tabelle 3.2 angegeben.

P-N-Paare	1	.	k	.	m
Polstellen v'_k	$\frac{2\pi}{w_s} w'_1$	.	$\frac{2\pi}{w_s} w'_k$	.	$\frac{2\pi}{w_s} w'_m$
Nullstellen v_k	$\frac{2\pi}{w_s} w_1$	.	$\frac{2\pi}{w_s} w_k$	.	$\frac{2\pi}{w_s} w_m$

Tabelle 3.2: FOURIER-Frequenzen der Pol-Nullstellen-Paare des zeitdiskreten Systems.

Zweiter Schritt des Systementwurfs. Nachdem ein Dämpfungsschema für das zeitdiskrete System mit normierter Grenzfrequenz zur Verfügung steht, müssen wir dessen FOURIER-Frequenzen nun auf die gesamte reelle Achse transformieren. Diese Modifikation ist notwendig, um die im vierten Schritt aus der Bilineartransformation resultierende Frequenzverzerrung im voraus zu kompensieren [99, S. 85 ff.], [138, S. 547 ff.]. Die Beträge des Dämpfungsschemas bleiben davon unberührt. Also erhalten wir das im dritten Schritt zu berücksichtigende Dämpfungsschema des zeitstetigen Systems aus dem Zusammenhang

$$|\tilde{H}(iu)| = |H^*(e^{iv})|, \qquad u := \frac{w_s}{\pi}\tan(v/2), \qquad -\pi < v < \pi. \tag{3.36}$$

Die daraus resultierenden FOURIER-Frequenzen können der Tabelle 3.3 entnommen werden.

P-N-Paare	1	.	k	.	m
Polstellen u'_k	$\frac{w_s}{\pi}\tan(v'_1/2)$	.	$\frac{w_s}{\pi}\tan(v'_k/2)$	.	$\frac{w_s}{\pi}\tan(v'_m/2)$
Nullstellen u_k	$\frac{w_s}{\pi}\tan(v_1/2)$	.	$\frac{w_s}{\pi}\tan(v_k/2)$	.	$\frac{w_s}{\pi}\tan(v_m/2)$

Tabelle 3.3: FOURIER-Frequenzen der Pol-Nullstellen-Paare des zeitstetigen Systems.

Dritter Schritt des Systementwurfs. Nun ist es an der Zeit, ein zeitstetiges lineares dynamisches System zu entwerfen, dessen Pol- und Nullstellen den FOURIER-Frequenzen aus Tabelle 3.3 entsprechen. Wie gewöhnlich gehen wir dazu in den Bildbereich der LAPLACE-Transformation bezüglich der komplexen Variablen p über [185, S. 39 ff.]. Nach den bisherigen Vorarbeiten gestaltet sich der Entwurf des zeitstetigen Systems nun besonders einfach. Dafür sind maßgeblich zwei Gründe zu nennen. Zum einen hatten wir von Beginn an das Ziel, ein kaskadenförmiges System zu entwerfen. Andererseits hatte die spezielle Approximation des ersten Schrittes zur Folge, daß die resultierenden FOURIER-Frequenzen der Pol- und Nullstellen sofort den Stufen der Kaskade zugewiesen wurden. Demzufolge muß mit den Bezeichnungen aus Schritt zwei die Übertragungsfunktion der k-ten Kaskadenstufe dem Ausdruck

$$\tilde{H}_k(p) = \frac{1 + p/u_k}{1 + p/u'_k}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m \tag{3.37}$$

entsprechen. Wegen (3.28) und (3.35) sowie Tabelle 3.1 ist demnach nicht nur jede Stufe der Kaskade, sondern auch das gesamte System BIBO-stabil. Gemäß HURWITZ-Kriterium ist diese Aussage offensichtlich [84], [185, S. 184 ff.], denn es gilt $0 < v'_k < \pi/2$ und damit

$$\frac{1}{u'_k} = \frac{\pi}{w_s \tan(v_k/2)} > 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

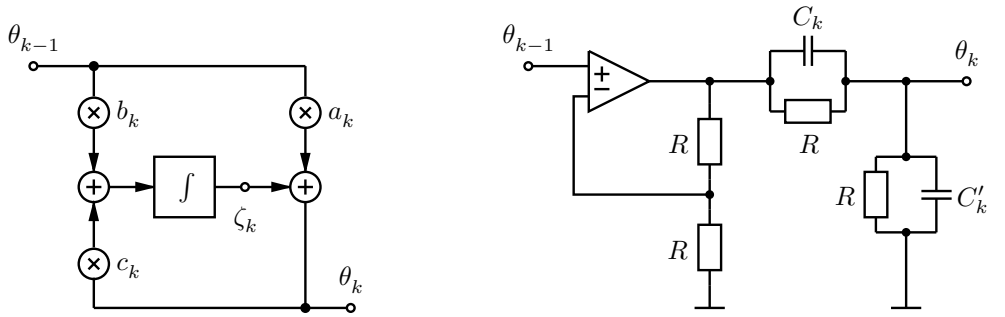
Im Zusammenhang mit dieser Aussage ist besonders wichtig, daß die Polstellen der Übertragungsfunktionen $\tilde{H}_k$ für $1 \leqslant k \leqslant m$ negative Realteile besitzen, und daher die imaginäre Achse zum Konvergenzgebiet des LAPLACE-Umkehrintegrals gehört [185, S. 41 f. und S. 183]. Folglich können wir $p := iu$ setzen, so daß mit den Bezeichnern aus (3.36) und (3.37) gilt

$$\tilde{H}(p) = \prod_{k=1}^{m} \tilde{H}_k(p). \tag{3.38}$$

In der Graphik (Abb. 3.13(a)) ist das Schema einer Stufe der zeitstetigen Kaskade dargestellt. Ferner zeigt (Abb. 3.13(b)) eine Möglichkeit, wie sich $\tilde{H}_k$ gemäß (3.37) durch eine elektrische Schaltung realisieren läßt. Die zugehörige Übertragungsfunktion ist durch den Ausdruck

$$\tilde{H}_k(p) = \frac{1 + pRC'_k}{1 + pR(C_k + C'_k)/2}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m$$

gegeben. Multipliziert man diese Übertragungsfunktion noch mit dem Faktor $1/2$, dann kann im Schaltbild (Abb. 3.13(b)) die Verstärkerbaugruppe entfallen. Wir haben diese der Vollständigkeit halber angegeben, weil wir von einem normierten Dämpfungsschema ausgegangen sind.



(a) Realisierung als Blockschaltung. (b) Realisierung als elektrische Schaltung.

Abb. 3.13: Schema der k-ten Stufe des zeitstetigen Systems.

Vierter Schritt des Systementwurfs. Im vierten und letzten Schritt des Entwurfsverfahrens müssen wir das zeitstetige System gemäß (3.37) und (3.38) noch in ein zeitdiskretes Äquivalent übertragen. Dazu wenden wir die Bilineartransformation an. Diese Transformation wird durch eine Funktion beschrieben,[21] welche die komplexen Variablen $p := iu$ mit $u \in \mathbb{R}$ und $z := e^{iv}$ mit $-\pi < v < \pi$ bijektiv aufeinander abbildet. Mit Hilfe der zugehörigen Inversen erhält man dann die Übertragungsfunktion des zeitdiskreten Systems. Es gilt

$$H^*(z) = \tilde{H}(p), \qquad p = \frac{w_s}{\pi}\,\frac{z-1}{z+1}. \tag{3.39}$$

[21] Diese entsteht, wenn die bestimmende Differentialgleichung des zeitstetigen Systems durch Integration mittels Trapezregel approximativ gelöst wird [99, S. 85 f.].

Ersetzen wir in (3.37) p gemäß (3.39) und verwenden die FOURIER-Frequenzen u'_k und u_k aus Tabelle 3.3, dann erhalten wir durch elementare Umformungen

$$\begin{aligned} H_k^*(z) &= \frac{1 + (z-1)/\big[(z+1)\tan(v_k/2)\big]}{1 + (z-1)/\big[(z+1)\tan(v'_k/2)\big]} \\ &= \frac{\tan(v'_k/2)}{\tan(v_k/2)} \, \frac{\big[\tan(v_k/2)+1\big] + \big[\tan(v_k/2)-1\big]z^{-1}}{\big[\tan(v'_k/2)+1\big] + \big[\tan(v'_k/2)-1\big]z^{-1}}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Beachten wir noch, daß die Übertragungsfunktion des zeitdiskreten Systems durch

$$H^*(z) = \prod_{k=1}^{m} H_k^*(z) = \prod_{k=1}^{m} \frac{a_k + b_k z^{-1}}{1 + c_k z^{-1}} \tag{3.41}$$

gegeben ist, dann liefert ein Vergleich von (3.40) und (3.41) für $1 \leqslant k \leqslant m$ die Koeffizienten

$$a_k = \frac{\tan(v'_k/2)}{\tan(v'_k/2)+1} \, \frac{\tan(v_k/2)+1}{\tan(v_k/2)} \tag{3.42a}$$

$$b_k = \frac{\tan(v'_k/2)}{\tan(v'_k/2)+1} \, \frac{\tan(v_k/2)-1}{\tan(v_k/2)} \tag{3.42b}$$

$$c_k = \frac{\tan(v'_k/2)-1}{\tan(v'_k/2)+1}. \tag{3.42c}$$

Mit diesem Resultat sind wir am Ziel. In vier Arbeitsschritten haben wir gezeigt, wie ein lineares dynamisches System anhand eines technischen Leistungsspektrums zufälliger Frequenz- bzw. Phasenfluktuationen mit geringem relativen Approximationsfehler entworfen werden kann. Ferner haben wir eine konkrete Vorschrift für die Berechnung der zugehörigen Systemkoeffizienten gefunden. Bevor ein solches System jedoch zur Simulation eingesetzt werden kann, ist noch zu überprüfen, ob die damit erzeugten Prozesse die gewünschten Eigenschaften besitzen.

Eigenschaften des entworfenen linearen dynamischen Systems. Als wir in § 2 die Darstellbarkeit der zufälligen Frequenzfluktuationen η als ARMA-Prozeß untersucht haben, sind wir stets von der Stationarität des Prozesses ausgegangen. Umgekehrt stellt sich damit die Frage, ob auch die Ausgabe des linearen dynamischen Systems (Abb. 3.9) mit den Koeffizienten (3.42) diese Eigenschaften besitzt. Um dem Modell der zufälligen Frequenzfluktuationen zu entsprechen, sollte die Ausgabe zudem einen zentrierten GAUßschen Prozeß beschreiben. Mit folgenden Aussagen wollen wir uns Gewißheit über die Eigenschaften des Ausgabeprozesses verschaffen. Aus der Systemtheorie ist bekannt,[22] daß das lineare dynamische System gemäß (Abb. 3.9) mit den Koeffizienten (3.42) durch ein Gleichungssystem der Art

$$\zeta(t+1) = \mathcal{A}\zeta(t) + \mathcal{B}\xi(t) \tag{3.43a}$$

$$\eta(t) = \mathcal{C}\zeta(t) + \mathcal{D}\xi(t) \tag{3.43b}$$

[22] Vergleiche dazu auch [184, S. 145 ff.], [185, S. 191 ff.].

beschrieben werden kann. Die zugehörigen Systemmatrizen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sind in Satz 1.90 gegeben. Ferner beschreibt ζ den Zustand des Systems und η dessen Ausgabe. Bezüglich des linearen dynamischen Systems selbst können wir zunächst folgende Aussagen formulieren.

3.1 Satz. *Sei h die Gewichtsfolge des linearen dynamischen Systems (Abb. 3.9) mit der Übertragungsfunktion* (3.41) *und den Koeffizienten* (3.42)*. Dann gelten folgende Aussagen.*

1.) *Für die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m$ gilt $0 < |c_m| < \cdots < |c_1| < 1$.*

2.) *Es existiert ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\mathcal{A}$ für alle $l > l_0$ der Relation $\|\mathcal{A}^l\| < 1$ genügt.*

3.) *Das lineare dynamische System ist* BIBO*-stabil und es gilt $\sum_{l=0}^{\infty} |h(l)| < \infty$.*

4.) *Für alle $1 \leqslant k, l \leqslant m$ genügen die Koeffizienten a_k, b_k und c_l der Relation $b_k + a_k c_l \neq 0$.*

Beweis. 1.) Da nach Voraussetzung $0 < v_1' < \cdots < v_m' < \pi/2$ für jede natürliche Zahl m gilt, und die Tangensfunktion auf $(0, \pi/4)$ streng monoton wachsend und kleiner als Eins ist, folgt $0 < \tan(v_1'/2) < \cdots < \tan(v_m'/2) < 1$ und wegen (3.42c) ferner

$$-1 < c_1 < \cdots < c_m < 0.$$

2.) Aus Satz 1.90 wissen wir, daß $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$ eine untere Dreiecksmatrix ist, deren Hauptdiagonale die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m$ enthält. Folglich ist $\mathcal{A}$ gemäß Satz 3.1.1 regulär und diagonalähnlich.[23] Also existiert eine reguläre Matrix $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{A} = \mathcal{X}^{-1} \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_m) \mathcal{X},$$

wobei $\operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_m)$ die Eigenwerte von $\mathcal{A}$ enthält [108, S. 36]. Zudem ist diese Matrix symmetrisch, so daß der betragsgrößte Eigenwert c_1 ihre Spektralnorm bestimmt [108, S. 42 f.]. Daher können wir $\|\mathcal{A}^l\|$ für $l \in \mathbb{N}$ mit einer Konstanten $K > 0$ wie folgt abschätzen

$$\|\mathcal{A}^l\| \leqslant K \|\mathcal{A}^l\|_2 = K \|\mathcal{X}^{-1} \operatorname{diag}(c_1^l, \ldots, c_m^l) \mathcal{X}\|_2 \leqslant K \|\mathcal{X}^{-1}\|_2 \|\mathcal{X}\|_2 |c_1|^l.$$

3.) Nach den Sätzen 1.86 und 3.1.2 ist das lineare dynamische System gleichmäßig asymptotisch stabil, so daß wir die BIBO-Stabilität aus Folgerung 1.88 erhalten. Um auch die absolute Summierbarkeit der Gewichtsfolge $h = (h_l)$ zu zeigen, vergewissern wir uns, daß

$$h_l = \begin{cases} \mathcal{D} & \text{für } l = 0 \\ \mathcal{C}\mathcal{A}^{l-1}\mathcal{B} & \text{für } l > 0 \end{cases} \tag{3.44}$$

gilt [185, S. 196]. Mit $l_0 \in \mathbb{N}$ gemäß Satz 3.1.2 setzen wir

$$K := \max_{0 \leqslant l \leqslant l_0} \|\mathcal{A}^l\|$$

[23] D. h. die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte von $\mathcal{A}$ stimmen überein [108, S. 34 und S. 37].
[23] Beachte, daß $\mathcal{A}^l = \mathcal{I}$ für $l = 0$ und somit $K \geqslant 1$ gilt.

und erhalten durch eine Abschätzung mittels geometrischer Reihe die behauptete Aussage

$$\sum_{l=0}^{\infty}|h_l| \leqslant \|\mathcal{D}\| + \|\mathcal{C}\|\left(K\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\|\mathcal{A}^{l-1}\|}{K}\right)\|\mathcal{B}\| \leqslant \|\mathcal{D}\| + \frac{K^2\,\|\mathcal{C}\|\,\|\mathcal{B}\|}{K-\|\mathcal{A}\|} < \infty.$$

4.) Durch formales Einsetzen und elementare Umformungen erhalten wir

$$b_k + a_k c_l = \frac{2\tan(v_k'/2)\big[\tan(v_k/2)\tan(v_l'/2)-1\big]}{\tan(v_k/2)\big[\tan(v_k'/2)+1\big]\big[\tan(v_l'/2)+1\big]} \neq 0,$$

da gemäß Voraussetzung $0 < v_k, v_l' < \pi/2$ für alle $1 \leqslant l, k \leqslant m$ gilt. □

Mit diesem Resultat ist es nun auch möglich, Aussagen zum Verhalten von Zustand ζ und Ausgabe η des linearen dynamischen Systems (Abb. 3.9) zu machen. Gemäß der ursprünglichen Idee zur Simulation der zufälligen Frequenzfluktuationen nehmen wir dazu an, daß die Eingabe ξ ein Gaußsches weißes Rauschen auf $\mathbb{Z}$ beschreibt.

3.2 Satz. *Seien ξ ein weißes Rauschen auf $\mathbb{Z}$ und das lineare dynamische System (Abb. 3.9) mit der Übertragungsfunktion* (3.41) *und den Koeffizienten* (3.42) *gegeben. Dann existiert eine stationäre Lösung des zugehörigen Gleichungssystems* (3.43)*, die für alle $t \in \mathbb{Z}$ durch*

$$\zeta(t) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty}\sum_{l=s}^{t-1}\mathcal{A}^{t-1-l}\mathcal{B}\xi(l) \tag{3.45a}$$

$$\eta(t) = \mathcal{C}\zeta(t) + \mathcal{D}\xi(t) \tag{3.45b}$$

beschrieben wird.

Beweis. Siehe etwa [133, S. 87 f.] und beachte, daß die Ausgabe η mit der Gewichtsfolge (h_l) gemäß (3.44) auch als linearer Prozeß dargestellt werden kann. □

Dieses Resultat ist überaus interessant, denn nicht jede der unendlich vielen möglichen Lösungen von (3.43) ist stationär. Genauer, jede von (3.45) verschiedene Lösung ist instationär [155]. Folglich ist die BIBO-Stabilität des linearen dynamischen Systems für die Stationarität von ζ und η nicht hinreichend. Ein entsprechendes Gegenbeispiel werden wir in Kapitel vier betrachten. Damit bleiben die Verteilungseigenschaften von Zustand und Ausgabe zu zeigen.

3.3 Satz. *Seien ξ ein Gaußsches weißes Rauschen auf $\mathbb{Z}$ und das lineare dynamische System (Abb. 3.9) mit der Übertragungsfunktion* (3.41) *und den Koeffizienten* (3.42) *gegeben. Dann sind ζ und η gemäß* (3.45) *zentrierte Gaußsche Vektorprozesse.*

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz 1.74. □

Nun haben wir unser Ziel erreicht. Offenbar genügt das entworfene lineare dynamische System unseren Ansprüchen, um zufällige Frequenzfluktuationen simulieren zu können. Aus praktischer Sicht stehen wir mit (3.45) allerdings vor einem Dilemma. Wie läßt sich ein Prozeß mit unendlich langer Vorgeschichte simulieren? Im nächsten Kapitel werden wir darauf und zu Fragen der Stabilität eine Antwort geben.

Kapitel 4

Aspekte der Stabilität

Basierend auf den Resultaten des zweiten Kapitels haben wir in Kapitel drei gezeigt, daß zufällige Frequenz- und Phasenfluktuationen mit Hilfe der stationären Ausgabe η eines geeigneten linearen dynamischen Systems beschrieben werden können. Weil wir zur Sicherung der Stationarität aber auf gewisse mathematischen Aussagen zurückgreifen mußten, war es notwendig, η auf der Menge der ganzen Zahlen zu betrachten. Wir haben also angenommen, daß das lineare dynamische System für $t \in \mathbb{Z}$ durch ein Gleichungssystem der Art

$$\begin{aligned} \zeta(t+1) &= \mathcal{A}\zeta(t) + \mathcal{B}\xi(t) \\ \eta(t) &= \mathcal{C}\zeta(t) + \mathcal{D}\xi(t) \end{aligned}$$

mit den Systemmatrizen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und dem weißen Rauschen ξ als Eingabe beschrieben wird und vor unendlich langer Zeit gestartet wurde. Wegen der unendlich langen Vorgeschichte war es erforderlich, das lineare dynamische System als BIBO-stabil vorauszusetzen, d. h. $\|\mathcal{A}^l\| < 1$ für $l > l_0$ zu verlangen. Die Lösung des Gleichungssystems für $t \in \mathbb{Z}$ haben wir gemäß

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s \to -\infty} \sum_{l=s}^{t-1} \mathcal{A}_{t-1-l}\mathcal{B}\xi(l) \\ \eta(t) &= \mathcal{C}\zeta(t) + \mathcal{D}\xi(t) \end{aligned}$$

notiert, wobei wir $\mathcal{A}_l := \mathcal{A}^l$ gesetzt haben. Grundsätzlich wäre an dieser Beschreibung von η nichts zu bemängeln, wenn wir uns ausschließlich für theoretische Resultate interessieren. Wollen wir jedoch den Prozeß η auf einem Computer simulieren, dann ist diese Darstellung gänzlich ungeeignet. Die Ursache dafür liegt im Grenzübergang $s \to -\infty$, denn für jede praktisch durchführbare Simulation ist ein endlicher Startzeitpunkt vorauszusetzen. Damit bleibt, die Frage zu beantworten, auf welche Weise die Darstellungen von ζ und η zu modifizieren sind, so daß ein endlicher Startzeitpunkt gewählt werden kann und die stochastischen Eigenschaften dieser Prozesse dennoch erhalten bleiben.

Seit über sechzig Jahren haben sich Mathematiker und Ingenieure mit dieser Frage auseinandergesetzt und zahlreiche Lösungsvorschläge dazu publiziert. Heute wissen wir, daß eine zielgerichtete zufällige Initialisierung des linearen dynamischen Systems dazu unerläßlich ist [5], [40], [106, S. 558 ff. und S. 592]. Ungeachtet dieser Tatsache werden insbesondere in den Ingenieurwissenschaften aber noch immer Simulationsmethoden eingesetzt, die auf eine solche Initialisierung verzichten. Die wohl häufigste Methode, um dem Initialisierungsproblem zu entgehen, besteht darin, den ersten Teil der simulierten Ausgabe zu verwerfen [79, S. 293]. Dabei hat man sich jedoch stets die Frage zu stellen, wie viele Werte zu entfernen sind, und wieviel Zeit zur Simulation von Daten investiert wurde, welche gar nicht verwendet werden. Als ähnlich unvorteilhaft erweisen sich Methoden, bei denen das lineare dynamische System durch

einen determinierten Wert initialisiert wird. In solch einem Fall nämlich besitzt ζ zur Startzeit die Varianz Null, so daß auch dabei eine gewisse, von Parametern abhängige Einschwingzeit verstreichen muß, um geeignete Werte zu erhalten. Bei der Verwendung von Methoden mit zufälliger Initialisierung lassen sich solche Probleme jedoch vermeiden. Dieser Umstand folgt aus der Verwendung zufälliger Realisierungen der stationären Ausgabe η, um das lineare dynamische System zu initialisieren [35], [130]. Damit besitzen die simulierten Daten vom ersten Wert an die geforderten Eigenschaften, so daß auf die Berücksichtigung der Einschwingzeit verzichtet werden kann.

Sprechen wir von den stochastischen Eigenschaften der Prozesse ζ und η, so sind damit die zugehörigen Erwartungswert- und Kovarianzfunktionen gemeint. Denn haben wir es, wie im Fall der Frequenz- und Phasenfluktuationen, mit Gaußschen Prozessen zu tun, dann sind damit auch deren Verteilungseigenschaften festgelegt. Im allgemeinen Fall jedoch sind die Zusammenhänge komplizierter und stellen einen Gegenstand aktueller Forschungen dar. Für die noch zu diskutierenden Methoden mit zufälliger Initialisierung ist es also erforderlich, die Kovarianzfunktion der stationären Ausgabe η zu bestimmen. Hingegen kann bei linearen dynamischen Systemen ohne Einschränkung auf die Betrachtung der Erwartungswertfunktion verzichtet werden, so daß diese in der Regel als identisch Null vorausgesetzt wird.

§ 1 Berechnung der theoretischen Kovarianzfunktion

Grundsätzlich können die bekannten Verfahren zur Bestimmung der Kovarianzfunktion von η in zwei Klassen unterteilt werden. Einerseits handelt es sich dabei um Verfahren, mit welchen die Kovarianzfunktion aus Beobachtungsreihen physikalischer Vorgänge geschätzt werden kann [51], [140]. Dabei sind unterschiedliche Vorgehensweisen denkbar. So läßt sich die Kovarianzfunktion beispielsweise direkt durch die Verwendung eines geeigneten Schätzers bestimmen [8, S. 71 f.], [144, S. 321 ff.]. Andererseits könnten zunächst aber auch die Parameter des zugrundeliegenden Modells geschätzt und daraus die Kovarianzfunktion berechnet werden [71, S. 215 ff.]. Diese Methode ist auch für die zweite Klasse möglicher Verfahren von Bedeutung. Dabei werden allerdings die Parameter sowie das zugrundeliegende Modell als gegeben vorausgesetzt. Informationen darüber könnten beispielsweise von theoretischen Überlegungen herrühren, so daß auf entsprechende Schätzungen verzichtet werden kann. Daher wird in diesem Zusammenhang häufig auch von der Berechnung der theoretischen Kovarianzfunktion gesprochen [10], [128]. Dazu wollen wir im folgenden drei Verfahren genauer diskutieren.

Verfahren des unendlichen gleitenden Mittels. Aus Kapitel drei wissen wir, daß die Ausgabe η eines BIBO-stabilen linearen dynamischen Systems mit der rationalen Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}, \qquad a_0 \neq 0, \quad b_0 = 1, \quad z \in \mathbb{C}$$

und einem weißen Rauschen ξ als Eingabe auf der Menge der ganzen Zahlen einen stationären ARMA(n, m)-Prozeß beschreibt. Setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise im weiteren

$$a(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m, \qquad b(z) := b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n,$$

so daß $H(z) = a(z^{-1})/b(z^{-1})$ gilt, dann ist η in Form der Differenzengleichnung

$$b(B)\eta(t) = a(B)\xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

darstellbar [144, S. 283 ff.]. Erneut bezeichne darin B den Rückwärtsverschiebungsoperator, d. h.

$$B\eta(t) = \eta(t-1), \qquad B^l\eta(t) = \eta(t-l), \qquad l \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

$b(B)$ den autoregressiven Operator und $a(B)$ den Operator des gleitenden Mittels. Da $b(B)$ aufgrund der geforderten BIBO-Stabilität invertierbar ist, müssen alle Nullstellen des Polynoms $b(z)$ in der komplexen Ebene außerhalb des Einheitskreises liegen [139].[1] Folglich existiert ein zu $a(B)/b(B)$ äquivalenter unendlicher Gleitmitteloperator $h(B)$ mit

$$h(B) := h_0 + h_1 B + h_2 B^2 + \cdots, \qquad h_0 \neq 0,$$

so daß die Koeffizientenfolge $h_0, h_1, \ldots$ quadratisch summierbar ist und der Prozeß η gemäß

$$\eta(t) = h(B)\xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

beschrieben werden kann [79, S. 114 ff.].[2] Weil ξ aber ein weißes Rauschen ist, läßt sich darüber hinaus auch die Kovarianzfunktion von η einfach notieren. Es gilt

$$R_\eta(r) = \sum_{l=0}^{\infty} h_l h_{l+|r|}, \qquad r \in \mathbb{Z},$$

wobei für diese Darstellung die Symmetrie von R_η, also die Stationarität des reellwertigen Prozesses η, auszunutzen ist [8, S. 54 f.]. Für die Berechnung der Kovarianzfunktion genügt es daher, eine Vorschrift zur Bestimmung der Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots$ anzugeben. Eine Möglichkeit dazu steht in engem Zusammenhang mit den sogenannten erzeugenden Funktionen. Bereits im Jahre 1938 hatte sich Wold in [181] mit diesen Funktionen beschäftigt, um die Kovarianzkoeffizienten endlicher Linearkombinationen zufälliger Größen zu berechnen. Als Bartlett um 1946 zudem ein einfaches Kriterium zur Überprüfung der Darstellbarkeit physikalischer Meßreihen in Form autoregressiver Prozesse publizierte [21], wurden bald auch Verfahren zur Verallgemeinerung der Woldschen Methode auf den Fall unendlicher Linearkombinationen vorgeschlagen. Einer der ersten Wissenschaftler, der sich diesem Problem zuwandte, war Quenouille. Nur ein Jahr nach Bartlett diskutierte er die Berechnung der Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots$ am Beispiel eines autoregressiven Prozesses zweiter Ordnung [145]. Er argumentierte, daß dieser Prozeß wegen

$$(1 + b_1 z + b_2 z^2)^{-1} = (1 - 2x\cos v + x^2)^{-1} = 1 + \frac{\sin 2v}{\sin v}x + \frac{\sin 3v}{\sin v}x^2 + \cdots$$

[1] Mit $a(z) := a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m$ und $b(z) := b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n$ gelangt man zur selben Darstellung des ARMA-Prozesses, jedoch müssen für die Invertierbarkeit in diesem Fall die Nullstellen von $b(z)$ im Inneren des Einheitskreises liegen [8, S. 54 und S. 61], [32, S. 195], [185, S. 216].

[2] Vergleiche dazu auch Neumannsche Reihe [177, S. 56 f.].

mit $\cos v = -b_1/\sqrt{4b_2}$ und $x = z\sqrt{b_2}$ auch als gleitendes Mittel mit den Koeffizienten

$$h_l = \frac{\sin lv}{\sin v}\sqrt{b_2^l}$$

für $l \geqslant 1$ darstellbar sei. Beachtet man dabei, daß sich die Quotienten $\sin lv/\sin v$ wegen

$$\frac{\sin lv}{\sin v} = 2\cos v\,\frac{\sin(l-1)v}{\sin v} - \frac{\sin(l-2)v}{\sin v}, \qquad \frac{\sin 2v}{\sin v} = 2\cos v, \qquad \frac{\sin v}{\sin v} = 1$$

in Polynome bezüglich $\cos v$ umformen lassen [190, Abs. 6.1.12 und Abs. 6.1.13], dann können die Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots$ in Abhängigkeit von b_0 und b_1 geschrieben werden. Obwohl die Quenouillesche Darstellung des autoregressiven Prozesses eine praktisch sinnvolle Vorgehensweise offenbarte, war mit ihr auch ein gravierender Nachteil verbunden. Für jede mögliche Ordnung des autoregressiven Prozesses mußte eine neue Reihendarstellung gefunden und eine passende Vorschrift zur Berechnung der Koeffizienten angegeben werden. In der Zeit nach dem Quenouilleschen Artikel entwickelte sich daher bald auch das Verlangen nach einem entsprechenden allgemeinen Verfahren. Es sollte etwa zwanzig Jahre dauern, bis eine Lösung dazu gefunden wurde. Im Jahre 1970 veröffentlichten Box und Jenkins die erste Auflage ihres bahnbrechenden Buches zur Zeitreihenanalyse, in dem sie eine bis heute genutzte Verallgemeinerung der Quenouilleschen Methode präsentierten [32, S. 46 f.]. Die Idee dazu basiert auf einem einfachen Zusammenhang zwischen den Operatoren $a(B)$, $b(B)$ und $h(B)$. Danach gilt

$$b(B)h(B) = a(B),$$

so daß durch einen Vergleich der Koeffizienten beider Seiten geschrieben werden kann

$$b(B)h_l = a_l,$$

wobei B auf den Index $l \geqslant 0$ anzuwenden ist. Wird in diesem Gleichungssystem die Ordnung des Operators $b(B)$ beginnend bei Null schrittweise bis n erhöht, so lassen sich die Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots$ sukzessive aus $a_0, \ldots, a_m$ und $b_0, \ldots, b_n$ gemäß der Vorschrift

$$h_s = a_s - b_1h_{s-1} - b_2h_{s-2} - \cdots - b_sh_0, \qquad 0 \leqslant s < \max\{n, m+1\}$$

sowie

$$h_s = -b_1h_{s-1} - b_2h_{s-2} - \cdots - b_nh_{s-n}, \qquad s \geqslant \max\{n, m+1\}$$

bestimmen. Dabei ist $a_s = 0$ für $s > m$ und $b_s = 0$ für $s > n$ zu setzen. Dieses Resultat war ein Meilenstein auf dem Gebiet der Zeitreihenanalyse, denn damit konnte die Kovarianzfunktion stationärer ARMA-Prozesse beliebiger Ordnung erstmals analytisch berechnet werden [33, S. 91 f.]. Aufgrund der Darstellung der Kovarianzfunktion als unendliche Reihe bezüglich der Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots$ eignete sich das Resultat jedoch nicht für numerische Berechnungen. Bald aber wurde auch diese Einschränkung durch einen einfachen Zusammenhang überwunden, was zu einem weiteren Berechnungsverfahren führte.

Verfahren der endlichen linearen Vorhersage. Bezugnehmend auf das Verfahren des unendlichen gleitenden Mittels hatten Box und Jenkins bereits 1970 darauf hingewiesen, daß die Kovarianzfunktion stationärer ARMA-Prozesse auch ohne die unendliche Reihendarstellung berechenbar sei [32, S. 74 ff.]. Allerdings gaben sie dazu keine allgemeine Berechnungsvorschrift an, sondern beschränkten sich auf die Behandlung ausgewählter Beispiele. Die zugrundeliegende Idee basierte auf der Kausalität des Prozesses η, d. h. darauf, daß η im Zeitpunkt t nur vom weißen Rauschen ξ im Zeitpunkt s mit $s \leqslant t$ abhängig ist. Wird

$$b(B)\eta(t) = a(B)\xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

nämlich auf beiden Seiten mit $\eta(t-r)$ multipliziert, anschließend der Erwartungswert berechnet und auf der rechten Seite die Gleitmitteldarstellung von η verwendet, dann folgt

$$b(B)R_\eta(r) = \sum_{k=0}^{m} a_k E\big[\eta(t-r)\xi(t-k)\big] = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\infty} a_k h_l R_\xi(k-r-l) = \sum_{k=0}^{m} a_k h_{k-r}$$

für $r \geqslant 0$, wobei $h_l = 0$ für $l < 0$ zu setzen ist. Ausführlich geschrieben gilt also

$$R_\eta(r) + b_1 R_\eta(r-1) + \cdots + b_n R_\eta(r-n) = a_0 h_{-r} + a_1 h_{1-r} + \cdots + a_m h_{m-r}$$

für $r \geqslant 0$, so daß R_η durch die Lösung einer inhomogenen linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten unter Verwendung der Ansatzmethode analytisch berechnet werden kann [33, S. 93 ff. und S. 105 ff.]. Ihre außergewöhnliche Bedeutung für die Zeitreihenanalyse erlangte diese Differenzengleichung jedoch erst im Jahre 1975, als McLeod dazu auch einen numerischen Lösungsalgorithmus publizierte [128]. Dabei nutzte er insbesondere aus, daß die rechte Seite der Gleichung identisch Null ist, falls $r \geqslant \max\{n, m+1\}$ gilt. Werden also die Werte $R_\eta(r)$ für $0 \leqslant r < \max\{n, m+1\}$ laut Algorithmus im voraus bestimmt, dann können auch die übrigen Werte der Kovarianzfunktion für $r \geqslant \max\{n, m+1\}$ gemäß der Vorschrift

$$R_\eta(r) = -b_1 R_\eta(r-1) - \cdots - b_n R_\eta(r-n)$$

rekursiv berechnet werden. Die dafür notwendige Berechnung einer endlichen Anzahl von Werten der Kovarianzfunktion im voraus gab diesem Verfahren dann auch seinen Namen. Heute ist bekannt, daß McLeod mit diesem Algorithmus einen wichtigen Beitrag zur Simulation stationärer ARMA-Prozesse geleistet hat. Wenngleich damit unter gewissen Voraussetzungen aber auch numerische Probleme verbunden sein können, wurde in der Vergangenheit vielfach auf diesen Algorithmus zurückgegriffen [35], [79, S. 306 f.].[3] Ein wichtiger Spezialfall resultiert aus dem Umstand, daß die Darstellung des Prozesses η nicht eindeutig ist. Bezeichnet θ etwa einen autoregressiven Prozeß bezüglich $b(B)$, dann folgt unmittelbar

$$b(B)\theta(t) = \xi(t), \qquad \eta(t) = a(B)\theta(t), \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Werden beide Seiten der ersten Gleichung mit $\theta(t-r)$ multipliziert und wird danach der Erwartungswert gebildet, so erhält man daraus die bekannte Yule-Walker-Gleichung

$$R_\theta(r) + b_1 R_\theta(r-1) + \cdots + b_n R_\theta(r-n) = 0$$

[3] Vergleiche dazu auch § 4 in diesem Kapitel.

für $r \geqslant 1$ [8, S. 59], [172], [186].[4] Dabei handelt es sich um eine homogene lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten, die mit Standardmethoden analytisch gelöst werden kann [33, S. 93 ff. und S. 105 ff.]. Zur numerischen Lösung bietet sich neben dem McLeodschen Algorithmus [128] von 1975 eine weitere Methode an. Diese basiert auf der Umkehrung des Durbinschen Algorithmus [52] zur Lösung des Yule-Walker-Problems. Ein erster Hinweis darauf steht im Zusammenhang mit der Simulation autoregressiver Prozesse und ist bei Wilson [180] aus dem Jahre 1979 zu finden. Anscheinend ohne Kenntnis dieses Artikels veröffentlichte auch Kay [104] zwei Jahre später dasselbe Resultat, berief sich dabei aber auf Markel und Gray [126] von 1976. Wurde R_θ mit einer dieser Methoden bestimmt, dann kann nach Satz 1.54 daraus auch die Kovarianzfunktion des Prozesses η gemäß der Vorschrift

$$R_\eta(r) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_i a_j R_\theta(r-i+j), \qquad r \in \mathbb{Z}$$

berechnet werden. Weiterführende Kommentare und entsprechende Beispiele zu diesem Berechnungsverfahren können [8, S. 56 ff.], [144, S. 114 ff.] entnommen werden.

Direkte Berechnungsverfahren. Im Zusammenhang mit dem Verfahren des unendlichen gleitenden Mittels haben wir festgestellt, daß sich die Kovarianzfunktion stationärer ARMA-Prozesse mit Hilfe einer unendlichen Reihendarstellung analytisch berechnen läßt. Bereits im Jahre 1947 hatte Quenouille diese Möglichkeit am Beispiel eines autoregressiven Prozesses diskutiert [145]. Dabei stellte sich jedoch ein wesentlicher Nachteil heraus. Für jede mögliche Ordnung des Prozesses mußte eine neue Reihendarstellung gefunden und eine neue Vorschrift zur Berechnung der Koeffizienten angegeben werden. Motiviert durch den Quenouilleschen Artikel begannen zahlreiche Wissenschaftler nach alternativen Berechnungsmethoden zu suchen. In den Jahren nach 1970 war diese Suche dann auch von Erfolg gekrönt und führte zu den bereits diskutierten Verfahren. Mit den daraus resultierenden Ergebnissen konnten die Wissenschaftler im Zusammenhang mit computergestützten Simulationen jedoch nicht vollständig zufrieden sein. Verantwortlich dafür sind die in numerischen Rechnungen notwendigen Algorithmen, da diese in Grenzfällen zu Instabilitäten führen können. So sind beispielsweise Schwierigkeiten in jenen Fällen zu erwarten, in denen die Nullstellen des autoregressiven Polynoms dem Betrage nach sehr nahe bei Eins liegen [79, S. 100]. Daher erhofften sich alle Beteiligten von Beginn an auch einen geschlossenen Ausdruck zur Berechnung der Kovarianzfunktion. Es waren Miller um 1968 [134] sowie Nerlove, Grether und Carvalho um 1979 [135, S. 78 ff.], denen erstmals eine entsprechende Darstellung durch die Zerlegung der Erzeugendenfunktion unter der Nebenbedingung gelang, daß die Nullstellen des autoregressiven Polynoms paarweise verschieden sind. Auch Pandit und Wu konnten im Jahre 1983 ein vergleichbares Resultat erzielen, indem sie die Woldsche Methode zur Beschreibung von ARMA(n,m)-Prozessen mit $m \leqslant n$ verwendeten [141, S. 105 und S. 129 f.]. Mit Hilfe der Spektraldarstellung konnte Zinde-Walsh einige Jahre später sogar zeigen, daß ein geschlossener Ausdruck für die Kovarianzfunktion auch ohne Einschränkungen in Bezug auf die Ordnung des ARMA-Prozesses und die Vielfachheiten der Nullstellen des autoregressiven Polynoms angegeben werden kann [187], [188]. Offenbar ohne

[4] Ist $R_\theta(r)$ für $r \geqslant 1$ bekannt, dann kann $R_\theta(0) = R_\xi(0) - b_1 R_\theta(1) - \cdots - b_n R_\theta(n)$ berechnet werden.

Kenntnis dieses Resultates gelangte auch KARANASOS im Jahre 1998 zum selben Ergebnis [100], [101]. Danach ist die Kovarianzfunktion stationärer ARMA(n,m)-Prozesse

$$(1-c_1B)(1-c_2B)\cdots(1-c_nB)\eta(t)=a(B)\xi(t),\qquad t\in\mathbb{Z},$$

deren autoregressive Polynome nur einfache Nullstellen $c_1,\ldots,c_n$ besitzen, in der Form

$$R_\eta(r)=\sum_{i=1}^{n}c_i^{r-\min\{r,m\}}\,\frac{\displaystyle\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m-l}\frac{a_ka_{k+l}}{1+\mathbb{1}_{\{0\}}(l)}\left(c_i^{|l+\min\{r,m\}|}+c_i^{|l-\min\{r,m\}|}\right)}{\displaystyle\prod_{l=1}^{n}(1-c_lc_i)\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(1-c_k/c_i)} \tag{4.1}$$

für $r\geqslant 0$ darstellbar. Um allgemeiner auch Mehrfachnullstellen berücksichtigen zu können, ist diese Darstellung den jeweiligen Anforderungen entsprechend zu modifizieren [100], [187]. Aufgrund der in Kapitel drei vorgeschlagenen Kaskadenstruktur des linearen dynamischen Systems kann zum Zweck der Simulation zufälliger Frequenz- bzw. Phasenfluktuationen auf eine solche Modifikation jedoch verzichtet werden.

Alternative Konzepte und neue Verfahren. Grundsätzlich haben wir alle bisher vorgestellten Berechnungsverfahren unter dem Gesichtspunkt betrachtet, die Kovarianzfunktion der Ausgabe η BIBO-stabiler linearer dynamischer Systeme durch die Lösung des Gleichungssystems

$$\zeta(t+1)=\mathcal{A}\zeta(t)+\mathcal{B}\xi(t) \tag{4.2a}$$

$$\eta(t)=\mathcal{C}\zeta(t)+\mathcal{D}\xi(t) \tag{4.2b}$$

für $t\in\mathbb{Z}$ bestimmen zu können. Dann nämlich würde es uns gelingen, das System zufällig zu initialisieren und somit die Stationarität von η mit endlicher Startzeit zu gewährleisten. Nach den bisherigen Diskussionen erscheint diese Herangehensweise jedoch wenig intuitiv, da einzig der Zustandsvektorprozeß ζ einen Bezug zur Vergangenheit impliziert. Daher konzentrieren wir uns also zunächst nur auf ζ und notieren dazu (4.2a) in der Form

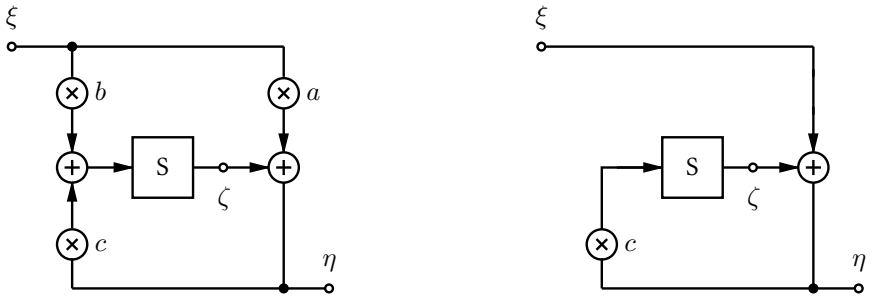
$$\zeta(t+1)-\mathcal{A}\zeta(t)=\mathcal{B}\xi(t),\qquad t\in\mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Nun erkennen wir die Ähnlichkeit zum autoregressiven Prozeß erster Ordnung. Zudem wissen wir aus dem Verfahren der endlichen linearen Vorhersage, daß es für einen stationären autoregressiven Prozeß n-ter Ordnung genügt, $(n-1)$ Werte seiner Kovarianzfunktion im voraus zu kennen, um diese vollständig zu bestimmen. Wäre dieses Resultat auch für (4.3) gültig, dann würde es für die zufällige Initialisierung, d. h. die Stationarität von ζ mit endlicher Startzeit genügen, $R_\zeta(0)$ im voraus zu kennen. Mehr noch, weil ξ als weißes Rauschen vorausgesetzt wurde, die zufälligen Größen $\xi(t)$ und $\xi(s)$ für $t\neq s$ also stochastisch unabhängig sind, wäre dann auch η mit endlicher Startzeit stationär. Wenngleich diese Überlegungen eine anschauliche Lösung des Problems der zufälligen Initialisierung versprechen, so haben wir die Gültigkeit der dabei verwendeten Annahmen bzw. Aussagen noch nicht gezeigt. Im folgenden werden wir uns

daher bemühen, die fehlenden Nachweise zu erbringen und damit zu belegen, daß der soeben diskutierte Ansatz zu einem alternativen Verfahren der Simulation stationärer ARMA-Prozesse führt. Um jedoch die grundlegenden Probleme, resultierenden Ideen, verwendeten Konzepte sowie mögliche Vor- und Nachteile dieser Methode besser zu verstehen, beginnen wir unsere Untersuchungen mit einem einfachen Spezialfall.

§2 Analyse des autoregressiven Prozesses erster Ordnung

Ein bewährtes Prinzip zur Behandlung komplizierter Zusammenhänge besteht darin, mögliche Fragestellungen oder Probleme zunächst an einem überschaubaren Beispiel zu diskutieren und etwaige Resultate anschließend zu verallgemeinern. Im Fall der uns interessierenden stationären ARMA-Prozesse bietet es sich daher an, die Betrachtungen zunächst auf ein lineares dynamisches System erster Ordnung zu beschränken (Abb. 4.1(a)). Weil der durch das System verur-



(a) Allgemeiner Fall. (b) Spezialfall mit $b = 0$ und $a = 1$.

Abb. 4.1: Zeitdiskretes lineares dynamisches System erster Ordnung.

sachte Gleitmittelanteil gemäß Satz 1.54 aber keinen Einfluß auf die Stationarität des Ausgabeprozesses hat, genügt es sogar, nur ein System zur Erzeugung eines autoregressiven Prozesses erster Ordnung zu berücksichtigen. Lesen wir aus der Graphik (Abb. 4.1(b)) die Zustands- und Ausgabegleichung für ein solches System ab, so erhalten wir

$$\zeta(t+1) = c\zeta(t) + c\xi(t) \tag{4.4a}$$

$$\eta(t) = \zeta(t) + \xi(t) \tag{4.4b}$$

für $t \in \mathbb{T}$ und durch Koeffizientenvergleich mit (4.2) ferner $\mathcal{A} = \mathcal{B} = c$ sowie $\mathcal{C} = \mathcal{D} = 1$. Folglich ist dieses System aufgrund der Relation $\|A\| = |c|$ genau dann BIBO-stabil, wenn $|c| < 1$ gilt. Nun wollen wir untersuchen, welche Eigenschaften Zustands- und Ausgabeprozeß dieses Systems mit endlicher Startzeit besitzen. Dazu wird es sich als vorteilhaft erweisen, die Eigenschaften dieser Prozesse mit unendlich langer Vorgeschichte im voraus zu kennen.

Unendliche Vergangenheit und Stationarität. Zu Beginn des Kapitels haben wir die Lösung der Zustands- und Ausgabegleichung für BIBO-stabile lineare dynamische Systeme mit einem

weißen Rauschen als Eingabe notiert. Setzen wir im folgenden ξ also als weißes Rauschen voraus und verlangen $|c| < 1$, dann ist dieses Resultat auch auf das System (Abb. 4.1(b)) übertragbar, so daß die Lösung von (4.4) in der Form

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty} \sum_{i=s}^{t-1} c^{t-i}\xi(i)\\ \eta(t) &= \zeta(t) + \xi(t)\end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden kann. Weiter erhalten wir aus Satz 3.2 die Stationarität von ζ und η. Wird ξ insbesondere als Gaußsches weißes Rauschen vorausgesetzt, dann sind ζ und η nach Satz 3.3 wegen der Linearität des dynamischen Systems zentrierte Gaußsche Prozesse. In diesem Fall werden deren stochastische Eigenschaften also vollständig durch die zugehörigen Kovarianzfunktionen bestimmt. Unter Verwendung von Lemma 1.12 sowie $|r| = r - 2\min\{0, r\}$ erhalten wir die Kovarianzfunktion von ζ für $r \in \mathbb{Z}$ gemäß

$$\begin{aligned}
R_\zeta(r) &= E\left[\left(\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty} \sum_{i=s}^{t+r-1} c^{t+r-i}\xi(i)\right)\left(\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty} \sum_{j=s}^{t-1} c^{t-j}\xi(j)\right)\right]\\
&= \lim_{s\to-\infty} E\left[\left(\sum_{i=s}^{t+r-1} c^{t+r-i}\xi(i)\right)\left(\sum_{j=s}^{t-1} c^{t-j}\xi(j)\right)\right]\\
&= \lim_{s\to-\infty} \sum_{i=s}^{t+r-1}\sum_{j=s}^{t-1} c^{2t+r-i-j} E\big[\xi(i)\xi(j)\big]\\
&= \lim_{s\to-\infty} \sum_{i=s}^{t+\min\{0,r\}-1} c^{2t+r-2i}\\
&= \lim_{s\to-\infty} \sum_{i=s-t-\min\{0,r\}+1}^{0} c^{r-2\min\{0,r\}+2-2i}\\
&= \lim_{s\to-\infty} \sum_{i=t+\min\{0,r\}-1-s}^{0} c^{|r|+2+2i}\\
&= c^{|r|+2} \lim_{s\to-\infty} \sum_{i=0}^{t+\min\{0,r\}-1-s} c^{2i}\\
&= c^{|r|+2} \lim_{s\to-\infty} \frac{1-c^{2(t+\min\{0,r\}-s)}}{1-c^2}\\
&= c^{|r|}\frac{c^2}{1-c^2}\,.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Nutzen wir dieses Resultat sowie die stochastische Unabhängigkeit der zufälligen Größen $\xi(t)$ und $\xi(s)$ für $t \neq s$ aus, so erhalten wir auch die Kovarianzfunktion von η. Für $r \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} R_\eta(r) &= E\big[\eta(t+r)\eta(t)\big] \\ &= R_\zeta(r) + E\big[\zeta(t+r)\xi(t)\big] + E\big[\zeta(t)\xi(t+r)\big] + R_\xi(r) \\ &= R_\zeta(r) + c^r \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r) + c^{-r}\mathbb{1}_{-\mathbb{N}}(r) + \mathbb{1}_{\{0\}}(r) \\ &= R_\zeta(r) + c^{|r|} \\ &= c^{|r|}\frac{c^2}{1-c^2} + c^{|r|} \\ &= \frac{c^{|r|}}{1-c^2}\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Damit verfügen wir über geschlossene Ausdrücke für die Kovarianzfunktionen der Prozesse ζ und η, welche sich später als nützlich erweisen werden. Mehr noch, aus (4.6) können wir nun direkt ablesen, daß allein ζ das Stationaritätsverhalten von η bestimmt. Schließlich können wir aus (4.5) folgern, daß die BIBO-Stabilität des linearen dynamischen Systems (Abb. 4.1(b)) auf der Menge der ganzen Zahlen äquivalent zur Stationarität der Prozesse ζ und η ist. Im Anschluß wird sich zeigen, welche Bedeutung die Wahl des Definitionsbereiches der Prozesse ζ und η für die Äquivalenz dieser Aussagen hat.

Endliche Startzeit und asymptotische Stationarität. Entgegen den bisherigen Voraussetzungen wollen wir nun annehmen, daß das lineare dynamische System vor einer endlich langen Zeit gestartet wurde. Obwohl jede ganze Zahl als Startzeitpunkt gleichberechtigt anzusehen ist, können wir diesen ohne Einschränkung identisch Null wählen. Anderenfalls wäre die Zeitachse im voraus zu verschieben. Weil wir für Prozesse mit endlicher Startzeit im allgemeinen abweichende stochastische Eigenschaften erwarten, werden wir diese Prozesse im folgenden mit einem zusätzlichen Symbol markieren. Statt ζ, η schreiben wir also ζ^*, η^*. Eine Umschreibung von ξ wäre ebenfalls möglich, ist für weitere Rechnungen jedoch ohne Belang. Die Lösung von (4.4) für das System (Abb. 4.1(b)) mit endlicher Startzeit und Anfangswert Null lautet für $t \geqslant 0$

$$\zeta^*(t) = \sum_{i=0}^{t-1} c^{t-i}\xi(i) \tag{4.7a}$$

$$\eta^*(t) = \zeta^*(t) + \xi(t). \tag{4.7b}$$

Es ist klar, daß auch ζ^* und η^* zentriert und darüber hinaus Gaußsche Prozesse sind, falls ξ als Gaußsches weißes Rauschen vorausgesetzt wurde. Mit den Hilfsmitteln, die wir in den Rechnungen (4.5) und (4.6) verwendet haben, können wir nun auch die Kovarianzfunktionen von ζ^* und η^* bestimmen. Allerdings müssen wir dabei beachten, daß wir bisher nichts über die Stationaritätseigenschaften dieser Prozesse wissen. Für $t+r, t \geqslant 0$ erhalten wir

$$R_{\zeta^*}(t+r,t) = c^{|r|+2}\,\frac{1-c^{2t+2\min\{0,r\}}}{1-c^2} = \frac{c^{|r|+2}-c^{2t+r+2}}{1-c^2} \tag{4.8}$$

und somit

$$R_{\eta^*}(t+r,t) = R_{\zeta^*}(t+r,t) + c^{|r|} = \frac{c^{|r|+2} - c^{2t+r+2}}{1-c^2} + c^{|r|} = \frac{c^{|r|} - c^{2t+r+2}}{1-c^2}\,. \qquad (4.9)$$

Diesem Resultat können wir sofort entnehmen, daß ζ^* und damit auch η^* trotz vorausgesetzter BIBO-Stabilität nicht stationär sind. Dies hat zur Folge, daß unsere Aussage über die Äquivalenz zwischen der BIBO-Stabilität eines linearen dynamischen Systems und der Stationarität des zugehörigen ARMA-Prozesses bei endlicher Startzeit im allgemeinen nicht zu halten ist. Gleichwohl kann für das System (Abb. 4.1(b)) aber die Äquivalenz der BIBO-Stabilität zur asymptotischen Stationarität von ζ^* und η^* festgestellt werden, da für diese Prozesse gilt

$$\lim_{t\to\infty} R_{\zeta^*}(t+r,t) = R_\zeta(r), \qquad \lim_{t\to\infty} R_{\eta^*}(t+r,t) = R_\eta(r), \qquad r \in \mathbb{Z}.$$

Später werden wir zeigen, daß sich diese Aussage noch verallgemeinern läßt. Neben der grundsätzlichen Frage nach der Konvergenz der Kovarianzfunktionen von ζ^* und η^* ist für die Simulation stationärer Prozesse noch ein anderer Aspekt von Bedeutung. Obwohl ζ^* und η^* nicht stationär sind, werden diese Prozesse aufgrund der asymptotischen Stationarität nach hinreichend langer Zeit näherungsweise die gleichen Eigenschaften besitzen wie die entsprechenden stationären Prozesse ζ und η. Die Frage ist nun, wann dieser Annäherungs- bzw. Einschwingvorgang in Bezug auf eine vorgegebene Fehlerschranke abgeschlossen ist. Offenbar folgt aus (4.8) und (4.9), daß dieser Zeitpunkt maßgeblich vom Wert des Koeffizienten c beeinflußt wird. Zahlenbeispiele können der Graphik (Abb. 4.2) entnommen werden.

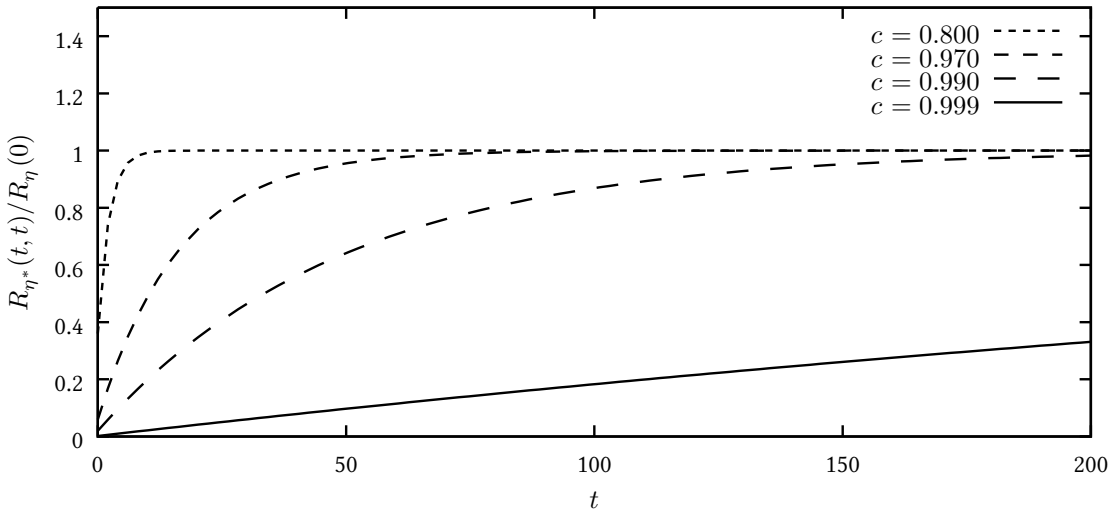


Abb. 4.2: Konvergenzverhalten der normierten Varianz des Prozesses $\eta^*(t)$.

Prinzipiell erkennen wir anhand dieser Kurven, daß der Einschwingvorgang um so mehr Zeit in Anspruch nimmt, je näher der Betrag des Koeffizienten c bei Eins liegt. Im Fall $|c| \leqslant 0.8$ beispielsweise sind für die normierte Varianz des Prozesses η^* schon ab $t = 15$ kaum noch Unterschiede zum stationären Prozeß η zu erkennen. Diese Beobachtung ist auch die Rechtfertigung

für den Einsatz des Simulationsverfahrens ohne Initialisierung. Dabei werden die Ausgabewerte des linearen dynamischen Systems, welche während der Einschwingzeit entstanden sind, einfach verworfen. Das Löschen der ersten Ausgabewerte ist jedoch problematisch, wenn keine verläßliche Angabe über die Dauer der Einschwingzeit zur Verfügung steht oder $0.8 \ll |c| < 1$ gilt. Für $c = 0.999\,999\,999$ zum Beispiel weist die normierte Varianz von η^* selbst nach 10^9 Ausgabewerten noch immer eine zehnprozentige Abweichung von der normierten Varianz des Prozesses η auf. Aus Kapitel drei wissen wir, daß auch bei der Simulation von Frequenz- bzw. Phasenfluktuationen die Beträge der entsprechenden Koeffizienten sehr nahe bei Eins liegen. Folglich ist das Verfahren ohne Initialisierung für diesen Zweck nicht geeignet, und es gilt, nach alternativen Ansätzen zu suchen.

Endliche Startzeit und Stationarität. Obwohl die Lösung der Zustands- und Ausgabegleichung des linearen dynamischen Systems (Abb. 4.1(b)) gemäß (4.7) keine konsistente Methode zur Simulation stationärer Prozesse verspricht, so liefert dieses Resultat dennoch einen wichtigen Hinweis für das weitere Vorgehen. Dabei werden wir zunächst wieder nur den Zustandsprozeß betrachten. Da ζ^* asymptotisch stationär ist, können wir uns Folgendes überlegen. Angenommen wir befinden uns im Zeitpunkt Null und betrachten den Prozeß ζ^*, dessen Startzeitpunkt schrittweise nach minus Unendlich verschoben wird. Nach hinreichend vielen Schritten werden wir keinen Unterschied mehr zum Prozeß ζ erkennen. Genauer, im Grenzfall stimmen ζ^* und ζ überein. Wesentlich für diese Beobachtung ist, daß wir uns fest im Zeitpunkt Null befinden und nicht etwa der Verschiebung des Startzeitpunktes folgen. Zerlegen wir die Darstellung von ζ bezüglich Null in zwei Summanden, so erhalten wir für $t \geqslant 0$

$$\zeta(t) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty} \sum_{i=s}^{t-1} c^{t-i}\xi(i) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty} \sum_{i=s}^{-1} c^{t-i}\xi(i) + \sum_{i=0}^{t-1} c^{t-i}\xi(i) = c^t\zeta(0) + \sum_{i=0}^{t-1} c^{t-i}\xi(i).$$

Ein Vergleich dieser Zerlegung mit (4.7a) zeigt, daß allein die zufällige Größe $\zeta(0)$ genügt, um den Prozeß ζ aus ζ^* zu gewinnen. Zur Sicherung der Stationarität von ζ ist also schon die Angabe der Varianz $R_\zeta(0)$ hinreichend. Im Spezialfall Gaußscher Prozesse sind die Verhältnisse besonders einfach. Wird nämlich ξ als Gaußsches weißes Rauschen vorausgesetzt, dann ist auch ζ ein zentrierter Gaußscher Prozeß, also $\zeta(0)$ eine zentrierte Gaußsche zufällige Größe, die vollständig durch $R_\zeta(0)$ beschrieben wird. Sei $\zeta^*(0)$ nun eine beliebige, von ξ stochastisch unabhängige, zufällige Größe mit dem Erwartungswert Null und der Varianz $R_\zeta(0)$. Dann ist die Lösung von (4.4) mit endlicher Startzeit und dem Anfangswert $\zeta^*(0)$ für $t \geqslant 0$ gemäß

$$\zeta^*(t) = c^t\zeta^*(0) + \sum_{i=0}^{t-1} c^{t-i}\xi(i) \tag{4.10a}$$

$$\eta^*(t) = \zeta^*(t) + \xi(t) \tag{4.10b}$$

darstellbar. Außerdem können wir unter Ausnutzung der Hilfsmittel, die wir in den Rechnungen (4.5) und (4.6) verwendet haben, wieder die Kovarianzfunktionen von ζ^* und η^* bestimmen. Mit

$t+r, t \geqslant 0$ erhalten wir für die Kovarianzfunktion von ζ^* zunächst

$$\begin{aligned} R_{\zeta^*}(t+r,t) &= c^{t+r}c^t E|\zeta^*(0)|^2 + E\left[\left(\sum_{i=0}^{t+r-1} c^{t+r-i}\xi(i)\right)\left(\sum_{j=0}^{t-1} c^{t-j}\xi(j)\right)\right] \\ &= c^{2t+r+2}\,\frac{E|\zeta^*(0)|^2}{c^2} + \frac{c^{|r|+2} - c^{2t+r+2}}{1-c^2} \\ &= \frac{c^{|r|+2}}{1-c^2} + \left(\frac{E|\zeta^*(0)|^2}{c^2} - \frac{1}{1-c^2}\right)c^{2t+r+2}, \end{aligned}$$

und damit auch die Kovarianzfunktion von η^* gemäß

$$R_{\eta^*}(t+r,t) = R_{\zeta^*}(t+r,t) + c^{|r|} = \frac{c^{|r|}}{1-c^2} + \left(\frac{E|\zeta^*(0)|^2}{c^2} - \frac{1}{1-c^2}\right)c^{2t+r+2}.$$

Jetzt ist offensichtlich, daß ζ^* und η^* genau dann stationär sind, wenn $E|\zeta^*(0)|^2 = R_\zeta(0)$ gilt. Ist ferner eine dieser äquivalenten Aussagen richtig, dann erhalten wir die Relationen

$$R_{\zeta^*}(r) = R_\zeta(r), \qquad R_{\eta^*}(r) = R_\eta(r), \qquad r \in \mathbb{Z}.$$

Anderenfalls sind diese Prozesse asymptotisch stationär und die Konvergenzgeschwindigkeit gegen die stationäre Lösung hängt vom Koeffizienten c und der Varianz $E|\zeta^*(0)|^2$ ab.

Zusammenfassend lassen sich für das BIBO-stabile lineare dynamische System (Abb. 4.1(b)) mit einem weißen Rauschen als Eingabe schließlich folgende Aussagen notieren. Das Stationaritätsverhalten des Ausgabeprozesses wird vollständig durch den Zustandsprozeß bestimmt. Zudem sind beide Prozesse mit endlicher Startzeit genau dann stationär, wenn der Zustandsprozeß gemäß (4.10a) durch eine von der Eingabe stochastisch unabhängige, zufällige Größe mit dem Erwartungswert Null und der Varianz entsprechend (4.5) initialisiert wurde. Anderenfalls sind diese Prozesse asymptotisch stationär.

Im Anschluß werden wir versuchen, diese Resultate für beliebige BIBO-stabile lineare dynamische Systeme und deren zugehörige ARMA-Prozesse geeignet verallgemeinern.

§3 Stationäre ARMA-Prozesse mit endlicher Startzeit

Nachdem wir die Eigenschaften BIBO-stabiler linearer dynamischer Systeme mit endlicher Startzeit am Beispiel des autoregressiven Prozesses erster Ordnung eingehend diskutiert haben, kehren wir nun zum allgemeinen Fall der ARMA-Prozesse zurück. Sei das BIBO-stabile lineare dynamische System wieder durch ein Gleichungssystem der Art

$$\zeta(t+1) = \mathcal{A}\zeta(t) + \mathcal{B}\xi(t) \tag{4.11a}$$

$$\eta(t) = \mathcal{C}\zeta(t) + \mathcal{D}\xi(t) \tag{4.11b}$$

für $t \in \mathbb{T}$ mit dem Eingabeprozeß ξ in der Form eines weißen Rauschens gegeben. Aufgrund der geforderten BIBO-Stabilität muß dann gelten $\|\mathcal{A}^l\| < 1$ für $l > l_0$. Nun wollen wir die Resultate

aus §2 auf dieses System übertragen. Dabei wird sich zeigen, welche Annahmen zusätzlich benötigt werden, um die Stationarität des Zustandsvektor- sowie des Ausgabeprozesses mit endlicher Startzeit zu gewährleisten. Zudem wird sich zeigen, welche Eigenschaften ζ und η besitzen, falls diese Annahmen nicht haltbar sind. In Übereinstimmung mit den Erkenntnissen aus §2 ist es hinreichend, wenn wir unsere Untersuchungen auf den Zustandsvektorprozeß beschränken, da unter den gegebenen Voraussetzungen folgende Aussage gilt.

4.1 Satz. *Genau dann ist η ein zentrierter stationärer Prozeß auf $\mathbb{T}$, wenn ζ ein zentrierter stationärer Vektorprozeß auf $\mathbb{T}$ ist.*

Beweis. Da ξ ein weißes Rauschen ist, folgt aus (4.11b) unmittelbar der Zusammenhang

$$E[\eta(t)] = \mathcal{C}E[\zeta(t)], \qquad t \in \mathbb{T},$$

so daß η genau dann zentriert ist, wenn auch ζ diese Eigenschaft besitzt. Weiter erhalten wir die Äquivalenz der Stationarität beider Prozesse durch die Berechnung der Kovarianzfunktion

$$R_\eta(t+r,t) = \mathcal{C}R_\zeta(t+r,t)\mathcal{C}' + \mathcal{C}\mathcal{A}_{r-1}\mathcal{B}\mathcal{D}'\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r) + \mathcal{D}\mathcal{B}'\mathcal{A}'_{-r-1}\mathcal{C}'\mathbb{1}_{-\mathbb{N}}(r) + \mathcal{D}R_\xi(r)\mathcal{D}'$$

für $t+r, t \in \mathbb{T}$. Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen. □

Nun wollen wir die Eigenschaften des Zustandsvektorprozesses diskutieren. Dabei gehen wir schrittweise vor und nehmen zunächst an, daß ζ eine unendlich lange Vorgeschichte besitzt.

Unendliche Vergangenheit und Stationarität. Unter den genannten Voraussetzungen haben wir die Lösung von (4.11a) bereits zu Beginn des Kapitels notiert. Mit $\mathcal{A}_l := \mathcal{A}^l$ lautet sie

$$\zeta(t) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty} \sum_{i=s}^{t-1} \mathcal{A}_{t-1-i}\mathcal{B}\xi(i), \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{4.12}$$

Ferner haben wir mit den Sätzen 3.2 und 3.3 gezeigt, daß ζ zentriert, stationär und darüber hinaus ein Gaußscher Vektorprozeß ist, wenn ξ als Gaußsches weißen Rauschen vorausgesetzt wurde. Ist dies der Fall, dann werden die stochastischen Eigenschaften von ζ vollständig durch die zugehörige Kovarianzmatrixfunktion bestimmt. Dazu läßt sich folgende Aussage formulieren.

4.2 Satz. *ζ ist auf $\mathbb{Z}$ ein zentrierter stationärer Vektorprozeß mit der Kovarianzmatrixfunktion*

$$R_\zeta(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_{i+\max\{0,r\}}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}'_{i-\min\{0,r\}}, \qquad r \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Daß ζ auf $\mathbb{Z}$ ein zentrierter stationärer Vektorprozeß ist, haben wir bereits mit Satz 3.2 gezeigt. Damit bleibt noch die Kovarianzmatrixfunktion zu bestimmen. Durch elementweise An-

wendung von Lemma 1.12 auf ζ und wegen $\max\{0,r\} = r - \min\{0,r\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
E\big[\zeta(t+r)\zeta'(t)\big] &= E\left[\left(\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty}\sum_{i=s}^{t+r-1}\mathcal{A}_{t+r-1-i}\mathcal{B}\xi(i)\right)\left(\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty}\sum_{j=s}^{t-1}\mathcal{A}_{t-1-j}\mathcal{B}\xi(j)\right)'\right]\\
&= \lim_{s\to-\infty} E\left[\left(\sum_{i=s}^{t+r-1}\mathcal{A}_{t+r-1-i}\mathcal{B}\xi(i)\right)\left(\sum_{j=s}^{t-1}\mathcal{A}_{t-1-j}\mathcal{B}\xi(j)\right)'\right]\\
&= \lim_{s\to-\infty}\sum_{i=s}^{t+r-1}\sum_{j=s}^{t-1}\mathcal{A}_{t+r-1-i}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}'_{t-1-j}E\big[\xi(i)\xi(j)\big]\\
&= \lim_{s\to-\infty}\sum_{i=s}^{t+\min\{0,r\}-1}\mathcal{A}_{t+r-1-i}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}'_{t-1-i}\\
&= \lim_{s\to-\infty}\sum_{i=s-t-\min\{0,r\}+1}^{0}\mathcal{A}_{r-\min\{0,r\}-i}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}'_{-\min\{0,r\}-i}\\
&= \lim_{s\to-\infty}\sum_{i=t+\min\{0,r\}-1-s}^{0}\mathcal{A}_{i+\max\{0,r\}}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}'_{i-\min\{0,r\}}\\
&= \lim_{s\to-\infty}\sum_{i=0}^{t+\min\{0,r\}-1-s}\mathcal{A}_{i+\max\{0,r\}}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}'_{i-\min\{0,r\}},
\end{aligned}$$

wobei das Vertauschen der Summanden gemäß den Sätzen 3.1.2 und 3.2 zulässig ist. □

Mit diesem Resultat verfügen wir nun über einen geschlossenen Ausdruck für die Kovarianzmatrixfunktion von ζ, der sich für weitere Aussagen als nützlich erweisen wird. Zudem können wir aus Satz 4.2 schließen, daß die BIBO-Stabilität linearer dynamischer Systeme auf den ganzen Zahlen äquivalent zur Stationarität von ζ ist. Im Anschluß werden wir zeigen, daß diese Äquivalenz unter Umständen auch mit endlicher Startzeit aufrechterhalten werden kann.

Endliche Startzeit und Stationarität. In §2 hat sich gezeigt, daß es zur Lösung von Problemen mitunter von Vorteil ist, die Darstellung eines Prozesses zu modifizieren. Zerlegen wir also ζ gemäß (4.12) bezüglich des Zeitpunktes Null in zwei Summanden, dann erhalten wir für $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &= \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty}\sum_{i=s}^{t-1}\mathcal{A}_{t-1-i}\mathcal{B}\xi(i)\\
&= \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty}\sum_{i=s}^{-1}\mathcal{A}_{t-1-i}\mathcal{B}\xi(i) + \sum_{i=0}^{t-1}\mathcal{A}_{t-1-i}\mathcal{B}\xi(i)\\
&= \mathcal{A}_t\zeta(0) + \sum_{i=0}^{t-1}\mathcal{A}_{t-1-i}\mathcal{B}\xi(i)\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine Darstellung der Lösung von (4.11a) mit endlicher Startzeit zum Anfangswert $\zeta(0)$ gefunden. Weil wir für solche Lösungen gegenüber ζ gemäß (4.12) im allgemeinen aber abweichende stochastische Eigenschaften erwarten, werden wir diese wieder durch ein zusätzliches Symbol markieren. Statt ζ schreiben wir also ζ^*, so daß gilt

$$\zeta^*(t) = \mathcal{A}_t\zeta^*(0) + \sum_{i=0}^{t-1} \mathcal{A}_{t-1-i}\mathcal{B}\xi(i), \qquad t \geqslant 0. \tag{4.13}$$

Aufgrund unser Vorgehensweise ist offensichtlich, daß es zur Sicherung der Stationarität von ζ^* genügt, die Kovarianzmatrixfunktion von ζ im Punkt Null zu bestimmen.

4.3 Satz. *Sei $\zeta^*(0)$ ein von ξ stochastisch unabhängiger, zentrierter Vektor in L_2. Genau dann ist ζ^* ein zentrierter stationärer Vektorprozeß auf $\mathbb{N}_0$, wenn $\zeta^*(0)$ die Kovarianzmatrix $R_\zeta(0)$ besitzt. Ist dies der Fall, so gilt*

$$R_{\zeta^*}(r) = R_\zeta(r), \qquad r \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Da ξ ein weißes Rauschen und $\zeta^*(0)$ ein von ξ stochastisch unabhängiger, zentrierter Vektor ist, gilt wegen der Linearität des Erwartungswertoperators unmittelbar

$$E[\zeta^*(t)] = \mathcal{A}_t E[\zeta^*(0)] + \sum_{i=0}^{t-1} \mathcal{A}_{t-1-i}\mathcal{B}E[\xi(i)] = 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Die Äquivalenz bezüglich der Stationarität erhalten wir, indem wir die Kovarianzmatrixfunktion des stationären Vektorprozesses ζ im Punkt Null geeignet manipulieren. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{t+r}R_\zeta(0)\mathcal{A}_t' &= \mathcal{A}_{t+r}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}_i'\right)\mathcal{A}_t' \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_{t+r+i}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}_{t+i}' \\
&= \sum_{i=t+\min\{0,r\}}^{\infty} \mathcal{A}_{i+r-\min\{0,r\}}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}_{i-\min\{0,r\}}' \\
&= \sum_{i=t+\min\{0,r\}}^{\infty} \mathcal{A}_{i+\max\{0,r\}}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}_{i-\min\{0,r\}}'.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Analog zur Rechnung im Beweis von Satz 4.2 und unter Berücksichtigung der stochastischen Unabhängigkeit von $\zeta^*(0)$ und ξ erhalten wir für $t + r, t \geqslant 0$ die Relation

$$R_{\zeta^*}(t+r,t) = \mathcal{A}_{t+r}R_{\zeta^*}(0,0)\mathcal{A}_t' + \sum_{i=0}^{t+\min\{0,r\}-1} \mathcal{A}_{i+\max\{0,r\}}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}_{i-\min\{0,r\}}'. \tag{4.15}$$

Also folgt wegen (4.14) die Aussage des Satzes genau dann, wenn $R_{\zeta^*}(0,0) = R_\zeta(0)$ gilt. □

Mit diesem Resultat haben wir nun eine alternative Beschreibung der zentralen Aussage zur Hand, um stationäre Prozesse überhaupt simulieren zu können.[5] Sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, dann können wir ζ^* und ζ in L_2 für nichtnegative Zeiten nicht mehr unterscheiden. Damit bleibt noch die Kovarianzmatrixfunktion von ζ im Punkt Null zu bestimmen. Allerdings erweist sich deren Darstellung gemäß Satz 4.2 dazu als vollkommen ungeeignet, so daß es gilt, nach alternativen Berechnungsmethoden zu suchen.

Endliche Startzeit und asymptotische Stationarität. Eine Möglichkeit zur Berechnung von $R_\zeta(0)$ könnte beispielsweise in einem sukzessiven Verfahren bestehen, wie es in Anhang B verwendet wird. Dazu benötigen wir jedoch eine weitere Aussage, um das Verhalten von R_{ζ^*} beschreiben zu können, falls $R_{\zeta^*}(0,0) \neq R_\zeta(0)$ gilt. Es ergibt sich folgender Zusammenhang.

4.4 Satz. *Sei $\zeta^*(0)$ ein von ξ stochastisch unabhängiger, zentrierter Vektor in L_2. Besitzt $\zeta^*(0)$ nicht die Kovarianzmatrix $R_\zeta(0)$, dann ist ζ^* ein zentrierter asymptotisch stationärer Vektorprozeß, für dessen Kovarianzmatrixfunktion gilt*

$$\lim_{t\to\infty} R_{\zeta^*}(t+r,t) = R_\zeta(r), \qquad r \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Satz 4.3 folgt, daß ζ^* ein zentrierter Vektorprozeß ist. Ferner erhalten wir aus (4.15) für $t \to \infty$ sowie der Abschätzung

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathcal{A}_{t+r} R_{\zeta^*}(0,0)\mathcal{A}_t'\| \leqslant \lim_{t\to\infty} \|R_{\zeta^*}(0,0)\| \, \|\mathcal{A}\|^{2t+r} = 0$$

die Aussage des Satzes. □

Zusammenfassend können wir allgemein für BIBO-stabile lineare dynamische Systeme mit einem weißen Rauschen als Eingabe nun Folgendes sagen: Wegen Satz 4.1 wird das Stationaritätsverhalten des Ausgabeprozesses vollständig durch den Zustandsvektorprozeß bestimmt. Zudem sind beide Prozesse mit endlicher Startzeit nach Satz 4.3 genau dann stationär, wenn der Zustandsvektorprozeß gemäß (4.13) durch einen von der Eingabe stochastisch unabhängigen, zentrierten zufälligen Vektor mit der Kovarianzmatrixfunktion aus Satz 4.2 im Punkt Null initialisiert wurde. Anderenfalls sind diese Prozesse gemäß Satz 4.4 asymptotisch stationär. Mit diesen Resultaten haben wir nun alle Hilfsmittel zur Hand, um die verschiedenen Konzepte zur Simulation stationärer ARMA-Prozesse diskutieren zu können.

§4 Konzepte der zufälligen Initialisierung

Für das weitere Vorgehen rufen wir uns noch einmal die Überlegungen zur Simulation zentrierter stationärer Prozesse vom Beginn des Kapitels in Erinnerung. Dort hatten wir festgestellt, daß grundsätzlich mehrere Methoden dafür in Frage kommen. Aufgrund von Problemen mit dem parameterabhängigen Einschwingverhalten gelangten wir letztlich jedoch zu dem Schluß, daß einzig Methoden mit zufälliger Initialisierung in der Lage sind, verläßliche Simulationsergebnisse

[5] Vergleiche dazu auch §1 in diesem Kapitel.

zu liefern. Die Umsetzung der Initialisierung sollte auf der Verwendung zufälliger Realisierungen des stationären Prozesses basieren, der selbst erst zu simulieren ist. Trotz dieser scheinbaren Rekursion ist diese Vorgehensweise nicht paradox, da bereits endlich viele Werte der zufälligen Realisierungen dafür genügen. Die notwendige Anzahl von Werten korrespondiert dabei mit der Ordnung des betrachteten Prozesses. Ist die Initialisierung erst einmal erfolgt, dann lassen sich beliebig viele Werte simulieren.

Dabei ist jedoch eine Besonderheit zu beachten. Werden für eine Simulationsstudie mit k Experimenten jeweils Realisierungen der Länge l benötigt, dann sollte deren Generierung nicht durch die Teilung einer einzigen Realisierung der Länge kl erfolgen. Für jedes der k Experimente ist die Initialisierung stochastisch unabhängig zu wiederholen [79, S. 294].

Für die praktische Umsetzung der Initialisierung bleibt damit zu zeigen, auf welche Weise Ausschnitte der zufälligen Realisierungen zu erzeugen sind. Schon zu Beginn des Kapitels haben wir argumentiert, daß dazu, im Sinne der L_2-Theorie, die Kovarianzfunktionen der zentrierten stationären Prozesse hinlänglich sind. Haben wir es, wie im Fall der Frequenz- bzw. Phasenfluktuationen, mit Gaußschen Prozessen zu tun, dann sind die Verhältnisse besonders einfach. Auf der Grundlage der im vorliegenden Kapitel sowie in Anhang B vorgestellten Resultate wollen wir im folgenden verschiedene Konzepte der zufälligen Initialisierung und der daraus resultierenden Simulationsmethoden diskutieren.

Methode der approximierten gleitenden Mittel. Den Aussagen aus §1 folgend kann η, die stationäre Ausgabe eines BIBO-stabilen linearen dynamischen Systems mit einem weißen Rauschen ξ als Eingabe, auf verschiedene Weise dargestellt werden. Neben der kanonischen Form

$$b(B)\eta(t) = a(B)\xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{4.16}$$

ist für theoretische Resultate insbesondere die Darstellung als unendliches gleitendes Mittel

$$\eta(t) = h(B)\xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{4.17}$$

mit dem Operator

$$h(B) = h_0 + h_1 B + h_2 B^2 + \cdots, \qquad h_0 \neq 0$$

von Bedeutung. Obwohl diese Darstellung für die numerische Berechnung der theoretischen Kovarianzfunktion nicht geeignet ist, bestand bis in die 1980er Jahre der Wunsch, damit die zufällige Initialisierung umsetzen zu können. Ursache dafür waren damals nur in geringem Maße verfügbare Rechenkapazitäten sowie eine sehr einfache Vorschrift zur Berechnung der Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots$, welche von Box und Jenkins entwickelte wurde. Schließlich resultierte aus diesem Wunsch eine Methode mittels Approximation. Basierend auf der Annahme, die Folge $h_0, h_1, \ldots$ konvergiere hinreichend schnell gegen Null, folgerte man, es existiere eine natürliche Zahl m', so daß $h(B)$ näherungsweise als Polynom endlicher Ordnung notiert werden könne

$$h(B) \approx h_0 + h_1 B + h_2 B^2 + \cdots + h_{m'} B^{m'}.$$

Erstmals angewandt hat diese Methode um 1960 Levin, indem er m' beliebig fest wählte [121]. Weil dabei die Güte der Näherung aber von den Werten der Koeffizienten abhängig ist, stellte

sich bald die Frage, ob es keine geeignete Vorschrift für die Wahl von m' gibt. Eine mögliche Antwort darauf gaben HIPEL und MCLEOD im Jahre 1978 [130]. Sie argumentierten, daß die Abweichung der normierten Varianz ein geeignetes Maß dafür wäre. Bezeichnet $x > 0$ den zulässigen relativen Fehler der Approximation, dann ist m' so zu wählen, daß die Relation

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} h_i^2 - \sum_{i=0}^{m'} h_i^2}{\sum_{i=0}^{\infty} h_i^2} < x$$

gilt. Die theoretische Varianz, d. h. der Wert der unendlichen Reihe, kann beispielsweise mit dem Algorithmus von MCLEOD ermittelt werden [128]. Ein Jahr nach HIPEL und MCLEOD publizierte ANDERSON eine weitere Lösung [5]. Er hatte das Problem umfassend analysiert und stellte m' letztlich auch in Abhängigkeit von der Anzahl der zu simulierenden Werte dar. Aufgrund seiner komplexen Struktur erreichte dieser Ansatz jedoch keine praktische Relevanz. Die Methode zur Simulation stationärer ARMA(n, m)-Prozesse anhand des approximierten gleitenden Mittels läßt sich wie folgt notieren.

1.) Setze $m' := \max\{n, m\}$ und wähle den zulässigen relativen Approximationsfehler $x > 0$.

2.) Berechne die theoretische Varianz $R_\eta(0)$ von η mit der Formel von ZINDE-WALSH [187].

3.) Berechne die Koeffizienten $h_1, \ldots, h_{m'}$ mit der Methode von BOX und JENKINS [32, S. 46 f.]

$$b(B)h_k = a_k$$

für alle $k \geqslant 1$, wobei $h_k = 0$ für $k < 0$ und $a_k = 0$ für $k > m$ zu setzen ist.

4.) Überprüfe, ob m' hinreichend groß gewählt wurde und damit der Relation

$$\frac{R_\eta(0) - \sum_{i=0}^{m'} h_i^2}{R_\eta(0)} < x$$

genügt. Wenn ja, so fahre mit 5. fort, sonst setzte $m' := m' + 1$ und kehre zu 3. zurück.

5.) Setze $s := \max\{n, m\}$ und berechne die Näherung $\tilde{\eta}(t)$ von $\eta(t)$ für $0 \leqslant t \leqslant s$ gemäß

$$\tilde{\eta}(t) := h_0\xi(t) + h_1\xi(t-1) + h_2\xi(t-2) + \cdots + h_{m'}\xi(t-m').$$

6.) Berechne die Näherung $\tilde{\eta}(t)$ von $\eta(t)$ für $t > s$ gemäß

$$\tilde{\eta}(t) := -b_1\tilde{\eta}(t-1) - \cdots - b_n\tilde{\eta}(t-n) + a_0\xi(t) + a_1\xi(t-1) + \cdots + a_m\xi(t-m).$$

7.) Wird eine weitere Realisierung von η benötigt, so kehre zu 5. zurück.

Die Vorteile dieser Methode sind offensichtlich. Nicht nur die Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots$, sondern auch die Ausgabewerte lassen sich damit sehr einfach berechnen. Demgegenüber erweist es sich als Nachteil, daß die simulierten Realisierungen aufgrund der Approximation einen systematischen Fehler enthalten. Wird der zulässige relative Fehler $x > 0$ jedoch hinreichend klein gewählt, dann sind diese Abweichungen tolerierbar. Weitere Kommentare zu dieser Methode sind den Arbeiten von BURN [35] sowie HIPEL und MCLEOD [130] zu entnehmen.

Methode der endlichen linearen Vorhersage. Unter Verwendung der Darstellung von η als unendlicher Gleitmittelprozeß (4.17) hatte sich in §1 eine Möglichkeit gezeigt, die theoretische Kovarianzfunktion numerisch berechnen zu können. Es war McLeod [128], der um 1975 nach Vorarbeiten von Box und Jenkins durch eine Modifikation der kanonischen Darstellung (4.16) zu dieser Erkenntnis gelangte. Nur wenige Jahre später entwickelten auch Kay [104] und Wilson [180] unabhängig voneinander ein Verfahren, um dieses Ziel zu erreichen. Die Idee dazu basierte auf der Zerlegung von (4.16) in einen autoregressiven Prozeß θ bezüglich $b(B)$, der durch anschließende Anwendung des Gleitmitteloperators $a(B)$ gemäß

$$b(B)\theta(t) = \xi(t), \qquad \eta(t) = a(B)\theta(t), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{4.18}$$

zu einer weiteren Darstellung von η führte. Wesentlich dafür war ein Resultat von Yule und Walker aus der Zeit um 1930, das einen einfachen Zusammenhang der Koeffizienten von $b(B)$ mit der Kovarianzfunktion von θ offenbarte. Darauf bezugnehmend entwickelte Durbin im Jahre 1960 einen Algorithmus zur Berechnung dieser Koeffizienten [52]. Wird der Algorithmus nun vom Ende zum Anfang gelesen, dann ergibt sich ein inverses Verfahren, mit dem die Kovarianzfunktion von θ aus den Koeffizienten numerisch berechenbar ist [126]. Die Kovarianzfunktion von η erhält man schließlich aus Satz 1.54. Neben diesen algorithmischen Verfahren konnten Zinde-Walsh im Jahre 1988 [187], [188] und Karanasos im Jahre 1998 [100], [101] sogar zeigen, daß die Kovarianzfunktion von η direkt berechenbar ist.

Stehen ein Verfahren und ausreichende Ressourcen zur computergestützten Berechnung der Kovarianzfunktion stationärer ARMA(n, m)-Prozesse zur Verfügung, so lassen sich diese simulieren. Die grundlegende Idee der zufälligen Initialisierung im Spezialfall Gaußscher Prozesse lautet dann wie folgt: Sind ξ ein zentrierter Gaußscher Vektor mit stochastisch unabhängigen Komponenten der Varianz Eins, $\mathcal{L}$ eine quadratische Matrix und wird $\eta := \mathcal{L}\xi$ gesetzt, dann ist η nach Satz 1.69 ein zentrierter Gaußscher Vektor mit der Kovarianzmatrix

$$R_\eta = \mathcal{L} R_\xi \mathcal{L}' = \mathcal{L}\mathcal{L}'.$$

Läßt sich auch umgekehrt $\mathcal{L}$ aus R_η berechnen, dann ist η mit dieser Methode stets sehr einfach zu generieren. Daß eine solche Matrix existiert, haben wir in Satz 1.70 gezeigt. Ein mögliches Verfahren zur Berechnung von $\mathcal{L}$ werden wir in §5 diskutieren. Betrachten wir speziell die Darstellung (4.18), dann können wir eine weitere Methode zur Simulation des stationären ARMA(n, m)-Prozesses η wie folgt notieren.

1.) Berechne die theoretische Kovarianzfunktion $R_\theta(r)$ für $0 \leqslant r < n$ mit dem Verfahren von Kay [105], McLeod [128], Wilson [180] oder Zinde-Walsh [187] und erzeuge die Matrix

$$R_\theta^* := \big[R_\theta(i-j)\big]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

2.) Berechne die Faktorisierung von R_θ^* mit dem Cholesky-Verfahren [108, S. 188], so daß

$$R_\theta^* = \mathcal{L}\mathcal{L}'.$$

3.) Setze $s := \max\{n, m\}$ und berechne die Werte $\theta(t)$ für $-m \leqslant t \leqslant n - m - 1$ gemäß

$$\big[\theta(n-m-1), \ldots, \theta(-m)\big]' := \mathfrak{L}\big[\xi(n-m-1), \ldots, \xi(-m)\big]'.$$

4.) Berechne die Werte $\theta(t)$ für $n - m \leqslant t \leqslant s$ gemäß

$$\theta(t) := -b_1\theta(t-1) - \cdots - b_n\theta(t-n) + \xi(t).$$

5.) Berechne die Werte $\eta(t)$ für $0 \leqslant t \leqslant s$ gemäß

$$\eta(t) := a_0\theta(t) + a_1\theta(t-1) + \cdots + a_m\theta(t-m).$$

6.) Berechne die Werte $\eta(t)$ für $t > s$ gemäß

$$\eta(t) := -b_1\eta(t-1) - \cdots - b_n\eta(t-n) + a_0\xi(t) + a_1\xi(t-1) + \cdots + a_m\xi(t-m).$$

7.) Wird eine weitere Realisierung von η benötigt, so kehre zu 3. zurück.

Im Vergleich zur Methode der approximierten gleitenden Mittel zeichnet sich dieses Verfahren vor allem dadurch aus, daß die simulierte Ausgabe keine systematischen Fehler enthält. Erkauft wird dieser Vorteil mit einer größeren Anzahl benötigter Rechenschritte zur Bestimmung der Kovarianzmatrix R_θ^* und ihrer Faktorisierung. Weil viele Rechenschritte aber potentiell zur Fortpflanzung möglicher Fehler führen, besteht mit dieser Methode die Gefahr numerischer Instabilitäten. Ob solche tatsächlich auftreten, und wie man darauf reagiert, werden wir in § 5 diskutieren. Weitere Formen zur Anwendung der Methode der endlichen linearen Vorhersage können den Arbeiten von Burn [35], Kay [104] sowie Hipel und McLeod [130] entnommen werden. Ferner sind verschiedene Implementationen dieser Methode in der numerischen Bibliothek NAG [136, S. g05pac.1 ff.] und im Paket LTSA des Statistikprogramms GNU/R [131] zu finden.

Methode der asymptotischen Stationarität. Aus der Herleitung der vorgestellten Methoden ist bereits klar, daß unterschiedliche Darstellungen von η zu verschiedenen Verfahren der Initialisierung und damit zu alternativen Ansätzen der Simulation dieses Prozesses führen. Ist kein Verfahren bekannt, das auch den numerischen Anforderungen genügt, dann ist es sinnvoll, nach weiteren Alternativen zu suchen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist ein solches Verfahren unter Ausnutzung der asymptotischen Stabilität von η mit endlicher Startzeit entstanden.

Aus der Analysis ist bekannt, daß sich lineare Differenzengleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in lineare Differenzengleichungssysteme erster Ordnung umformen lassen [1, S. 3], [185, S. 202 ff.]. Betrachten wir den für die Simulation zufälliger Frequenz- bzw. Phasenfluktuationen einzig interessierenden Sonderfall $n = m$, dann können wir η gemäß (4.16) für $t \in \mathbb{Z}$ durch ein m-stufiges Differenzengleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} b_1(B)\theta_1(t) &= a_1(B)\xi(t) \\ b_2(B)\theta_2(t) &= a_2(B)\theta_1(t) \\ &\vdots \\ b_m(B)\eta(t) &= a_m(B)\theta_{m-1}(t) \end{aligned} \tag{4.19}$$

mit geeigneten Prozessen $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ und den Operatoren

$$a_k(B) := a_{k,0} + a_{k,1}B, \qquad b_k(B) := b_{k,0} + b_{k,1}B, \qquad a_{k,0} \neq 0, \qquad b_{k,0} = 1$$

für $1 \leqslant k \leqslant m$ beschreiben. Vereinbaren wir zur Vereinfachung der Notation ferner

$$a_k := a_{k,0}, \qquad b_k := a_{k,1}, \qquad c_k := -b_{k,1}, \qquad \theta_0(t) := \xi(t), \qquad \theta_m(t) := \eta(t)$$

für $1 \leqslant k \leqslant m$ und $t \in \mathbb{Z}$, dann können wir auch (4.19) als Gleichungssystem in der Form

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \zeta_1(t) + a_1\theta_0(t) & \zeta_1(t+1) &= c_1\theta_1(t) + b_1\theta_0(t) \\ \theta_2(t) &= \zeta_2(t) + a_2\theta_1(t) & \zeta_2(t+1) &= c_2\theta_2(t) + b_2\theta_1(t) \\ &\vdots & &\vdots \\ \theta_m(t) &= \zeta_m(t) + a_m\theta_{m-1}(t) & \zeta_m(t+1) &= c_m\theta_m(t) + b_m\theta_{m-1}(t) \end{aligned} \tag{4.20}$$

für $t \in \mathbb{Z}$ notieren. Dabei handelt es sich gemäß Satz 1.90 aber um nichts anderes als die Beschreibung des kaskadenförmigen linearen dynamischen Systems aus Kapitel drei (Abb. 4.3).

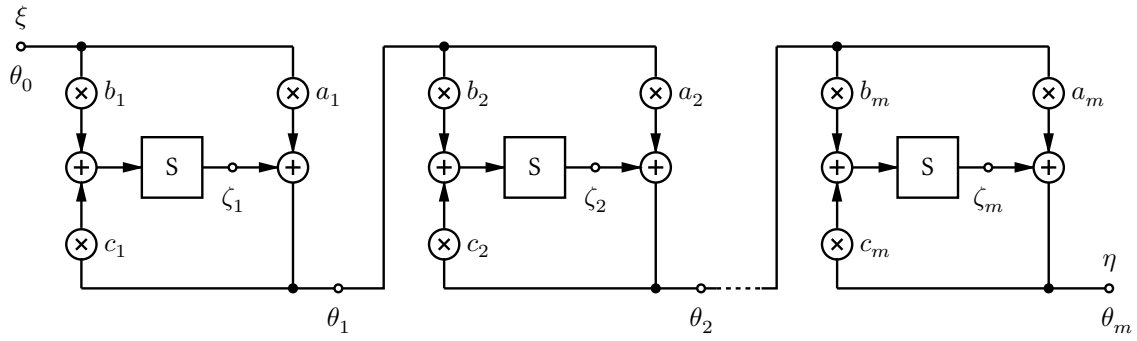


Abb. 4.3: Zeitdiskretes lineares dynamisches System in Kaskadenform.

Den zugehörigen Zustandsvektorprozeß $\zeta := (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)'$ haben wir in §3 ausführlich studiert. Aufgrund der vorausgesetzten BIBO-Stabilität haben sich dabei zwei für die Simulation wichtige Eigenschaften gezeigt. Erstens ist ζ mit endlicher Startzeit wegen Satz 4.3 genau dann stationär, wenn der zufällige Anfangswertvektor $\zeta(0)$ die Kovarianzmatrix $R_\zeta(0)$ besitzt. Eine entsprechende Bildungsvorschrift dafür haben wir in Satz 4.2 gewonnen. Allerdings ist diese für die Berechnung von $R_\zeta(0)$ praktisch nicht relevant. Eine Alternative dazu ergibt sich jedoch aus der zweiten wichtigen Eigenschaft. Nach Satz 4.4 ist ζ mit endlicher Startzeit asymptotisch stationär, unabhängig vom Wert der Kovarianzmatrixfunktion im Punkt Null. Demnach können wir uns eine Methode zur schrittweisen zufälligen Initialisierung wie folgt überlegen. Zunächst setzen wir $\zeta(0) = 0$ und berechnen die Varianz von $\zeta_1(0)$, wobei wir die Stationarität der Eingabe beachten. Damit sind wir in der Lage, Stufe eins der Kaskade (Abb. 4.3) zufällig zu initialisieren, so daß ζ_1 und wegen Satz 4.1 auch θ_1 stationär ist. Unter Berücksichtigung dieser Eigenschaft können wir im zweiten Schritt auch die Kovarianzmatrix von $[\zeta_1(0), \zeta_2(0)]'$ bestimmen. Dann initialisieren wir die Stufen eins und zwei der Kaskade, so daß sowohl der

Vektorprozeß $(\zeta_1, \zeta_2)'$ und wegen Satz 4.1 auch θ_2 stationär sind. Durch Wiederholen dieses Vorgehens für die übrigen Stufen erhalten wir schließlich $R_\zeta(0)$ und können so das gesamte lineare dynamische System zufällig initialisieren. Zur praktischen Umsetzung dieser Idee ist es jedoch vorteilhaft, $R_\zeta(0)$ nicht direkt, sondern mit einem Zwischenschritt zu bestimmen. Setzen wir dazu $\theta := (\theta_0, \ldots, \theta_m)'$, dann können wir der linken Seite von (4.20) die Relation

$$\zeta(t) = \mathcal{M}\theta(t), \qquad \mathcal{M} := \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & -a_m & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{4.21}$$

entnehmen. Berechnen wir zunächst $R_\theta(0)$ mit dem in Anhang B geschilderten Verfahren, dann ist daraus $\theta(0)$ und mittels $\mathcal{M}$ auch $\zeta(0)$ sehr einfach zu bestimmen. Aufgrund dieser Idee erhalten wir schließlich eine weitere Methode für die zufällige Initialisierung und die Simulation des stationären ARMA(m, m)-Prozesses $\eta = \theta_m$.

1.) Berechne die Kovarianzmatrix $R_\theta(0)$ nach den Sätzen B.8, B.15 gemäß

$$R_\theta(0) := \left(\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i \prod_{j=k+1}^{l} \mathcal{Q}_{j,k} e_1 \right)_{0 \leqslant l,k \leqslant m}.$$

2.) Berechne die Faktorisierung von $R_\theta(0)$ mit dem Cholesky-Verfahren [108, S. 188], so daß

$$R_\theta(0) := \mathcal{L}\mathcal{L}'.$$

3.) Berechne den Zustandsvektor $\zeta(t)$ für $t = 0$ gemäß

$$\zeta(0) := \mathcal{M}\mathcal{L}\left[\theta_0(-1), \ldots, \theta_0(-m)\right]'.$$

4.) Berechne die Ausgaben $\theta_k(t)$ und die Zustände $\zeta_k(t+1)$ für $t \geqslant 0$ und $1 \leqslant k \leqslant m$ gemäß

$$\theta_k(t) := \zeta_k(t) + a_k\theta_{k-1}(t), \qquad \zeta_k(t+1) := c_k\theta_k(t) + b_k\theta_{k-1}(t).$$

5.) Wird eine weitere Realisierung des Prozesses $\eta = \theta_m$ benötigt, so kehre zu 3. zurück.

Weil mit Satz B.15 ein geschlossener Ausdruck für die Berechnung von $R_\theta(0)$ vorliegt, ist die Methode der asymptotischen Stationarität zu jener der endlichen linearen Vorhersage, unter Verwendung des Resultates von Zinde-Walsh, äquivalent. Allerdings zeichnet sich erstere durch eine Besonderheit aus. Mit ihr ist es prinzipiell möglich, stationäre Vektor-ARMA-Prozesse zu simulieren, weil sich auch mehrdimensionale lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten in die Darstellung (4.19) umformen lassen. Ferner bleibt zu erwähnen, daß es aufgrund der einfachen Struktur nunmehr möglich erscheint, die Faktorisierung von $R_\theta(0)$ mit dem Cholesky-Verfahren analytisch zu berechnen. Entsprechende Resultate sind bisher nicht verfügbar, würden aber mögliche numerische Probleme reduzieren. Daß potentiell jede der hier vorgestellten Methoden in Grenzfällen zu numerischen Schwächen neigt, wollen wir im Anschluß diskutieren. Ferner wollen wir zeigen, welche Lösungen in solch einem Fall existieren.

§5 Numerische Gesichtspunkte der zufälligen Initialisierung

Im Vorfeld haben wir mehrfach darauf hingewiesen, daß während der zufälligen Initialisierung linearer dynamischer Systeme in Grenzfällen numerische Instabilitäten auftreten können. Nun wollen wir solche Grenzfälle sowie mögliche Gegenmaßnahmen in Bezug auf die Simulation zufälliger Frequenz- bzw. Phasenfluktuationen diskutieren. Dazu rufen wir uns zunächst noch einmal die Resultate aus Kapitel drei ins Gedächtnis. Dort haben wir gezeigt, daß die Beträge der Nullstellen des autoregressiven Polynoms grundsätzlich sehr nahe bei Eins liegen. Weil ARMA-Prozesse mit dieser Eigenschaft aber im Grenzbereich der Stationarität operieren, können Berechnungen mit Computerarithmetik auch numerische Probleme nach sich ziehen. Bevor wir die Initialisierungsmethoden aus §4 daraufhin untersuchen, wollen wir die Ursachen dieser Probleme kurz benennen.

Im Gegensatz zu theoretischen Überlegungen können bei Berechnungen auf Computern nur Zahlen mit endlicher Stellenanzahl verwendet werden. Daher entstehen bei der Darstellung beliebiger reeller Werte und der Ausführung arithmetischer Operationen im allgemeinen Fehler durch Rundungen. Sind beispielsweise mit einem Computer sehr verschieden große[6] oder sehr viele Zahlen unterschiedlichen Vorzeichens zu addieren, dann kann die Summe je nach Reihenfolge der Summanden erheblich variieren [31, S. 9 f.], [108, S. 74 ff.]. Im ungünstigsten Fall werden kleine Zahlen gar keinen Beitrag zur Summe leisten. Genauer läßt sich sagen, daß bei Berechnungen mit Computerzahlen im allgemeinen die Assoziativität der Addition sowie die Distributivität verlorengehen [31, S. 9 f.], [108, S. 72]. Ein weiteres Problem kann sich ergeben, wenn zwei fast identische Zahlen zu subtrahieren sind. Dabei kommt es zur Stellenauslöschung, die ebenfalls erhebliche Fehler verursachen kann [108, S. 70 f.].

Zur Methode des approximierten gleitenden Mittels. Bei der Methode des approximierten gleitenden Mittels erwies es sich als vorteilhaft, daß auf die Berechnung der theoretischen Kovarianzfunktion verzichtet werden kann. Nachteilig hingegen ist der durch die Approximation zu erwartende systematische Fehler der Initialisierung. Um diesen Fehler hinreichend zu verkleinern, genügt es jedoch, die Anzahl m' der verwendeten Koeffizienten von $h(B)$ ausreichend groß zu wählen. Liegen aber die Koeffizienten von $b(B)$ dem Betrage nach sehr nahe bei Eins, dann hat auch eine Vergrößerung von m' keinen Sinn. Die Ursache dafür wollen wir am Beispiel eines autoregressiven Prozesses zweiter Ordnung betrachten. Sei η durch

$$b(B)\eta(t) = \xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

mit einem autoregressiven Operator in Produktform wie folgt gegeben

$$b(B) := (1 + b_1^* B)(1 + b_2^* B), \qquad b_1^* := -0.9, \qquad b_2^* := 0.99. \tag{4.22}$$

Bevor wir mit der Transformation von $b(B)$ in einen äquivalenten Gleitmitteloperator $h(B)$ beginnen, müssen wir zunächst zeigen, daß dieser auch existiert. Dazu genügt es, die Nullstellen

[6] Die Eigenschaft *groß* ist stets im Kontext der jeweiligen Maschinengenauigkeit zu sehen.

von $b(z)$ in der komplexen Ebene zu bestimmen. Aufgrund der Darstellung von $b(z)$ gilt

$$b(z) = (1 + b_1^* z)(1 + b_2^* z) = 0, \qquad z_1 = -1/b_1^* \approx 1.1111, \qquad z_2 = -1/b_2^* \approx -1.0101.$$

Da die Nullstellen z_1, z_2 außerhalb des Einheitskreises liegen, ist $b(B)$ invertierbar, so daß wir $h(B)$ berechnen können. Dazu müssen wir $b(B)$ aber noch in die Summendarstellung bringen. Durch Ausmultiplizieren und einen Koeffizientenvergleich erhalten wir aus (4.22)

$$b(B) = 1 + b_1 B + b_2 B^2, \qquad b_1 = b_1^* + b_2^* = 0.09, \qquad b_2 = b_1^* b_2^* = -0.891.$$

Beachten wir noch, daß in diesem Beispiel $a(B) = 1$, also $a_0 = 1$ und $a_k = 0$ für $k \geqslant 1$ gilt, dann lassen sich die Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots$ von $h(B)$ gemäß §1 nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} h_0 &= a_0 = 1 \\ h_1 &= a_1 - b_1 h_0 = -b_1 = -0.09 \\ h_2 &= a_2 - b_1 h_1 - b_2 h_0 = b_1^2 - b_1 b_2 = 0.8991 \\ h_k &= -b_1 h_{k-1} - b_2 h_{k-2}, \qquad k \geqslant 3 \end{aligned}$$

bestimmen. Um schließlich die Güte der Approximation einschätzen zu können, ermitteln wir noch die theoretische Varianz mit der Formel von Zinde-Walsh (4.1). Es gilt

$$R_\eta(0) = \frac{1}{(1 - b_1 b_2)(b_1 - b_2)} \left(\frac{b_1}{1 - b_1^2} - \frac{b_2}{1 - b_2^2} \right) \approx 15.245.$$

Zur graphischen Veranschaulichung sind die berechneten Koeffizienten sowie die resultierende approximierte normierte Varianz in (Abb. 4.4) gegeben. Mit diesem Ergebnis wird ein Problem der Methode des approximierten gleitenden Mittels offensichtlich. Liegen die Nullstellen von $b(B)$

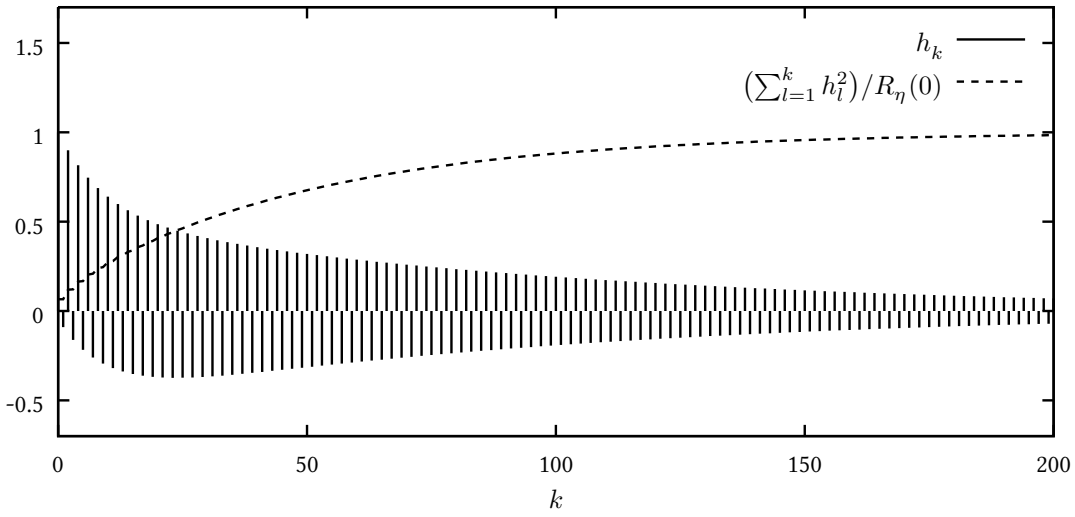


Abb. 4.4: Koeffizienten und approximierte normierte Varianz bezüglich $h(B) = 1/b(B)$.

dem Betrage nach sehr nahe bei Eins,[7] dann sind bei der Initialisierung sehr viele Koeffizienten von $h(B)$ zu berücksichtigen. Ist im Beispiel etwa ein relativer Approximationsfehler von 10^{-3} zu gewährleisten, dann werden schon 338 Koeffizienten benötigt. Hätten wir statt $b_2^* := 0.99$ aber $b_2^* := 0.999$ gewählt, dann wäre ihre Anzahl auf 3446 gestiegen. Gemäß dem fünften Schritt der Methode sind während der Initialisierung für m' Koeffizienten aber m' Summen und Produkte für jeden der m' Näherungswerte $\tilde{\eta}$ von η zu berechnen. Damit ist nicht nur der Initialisierungsaufwand sehr groß, sondern wegen wechselnder Vorzeichen der Summanden $h_i\xi(t-i)$ auch der mögliche numerische Fehler. Um diesen Fehler zu verringern, wäre es daher ratsam, die Summanden vor der Addition ihrem Vorzeichen nach zu sortieren. Damit steigt der Aufwand aber weiter, so daß die Eignung dieser Methode zum Zweck der Simulation zufälliger Frequenz- bzw. Phasenfluktuationen grundsätzlich zu hinterfragen ist.

Zur Methode der endlichen linearen Vorhersage. Gegenüber der Methode des approximierten gleitenden Mittels können bei der endlichen linearen Vorhersage keine systematischen Fehler entstehen. Ferner haben die Werte der Koeffizienten von $b(B)$ keinen Einfluß auf die notwendige Anzahl der arithmetischen Operationen. Deren Anzahl wird von der Ordnung des zu simulierenden Prozesses sowie vom zur Initialisierung gewählten Berechnungsverfahren bestimmt. Grundsätzlich ist es möglich, daß bei der zufälligen Initialisierung mittels endlicher linearer Vorhersage in den Schritten eins und zwei der Methode numerische Probleme entstehen.

Zunächst aber wollen wir diskutieren, welche numerischen Eigenschaften die genannten Verfahren zur Berechnung der theoretischen Kovarianzfunktion besitzen. Dazu setzen wir

$$b(B) := (1 + b_1^* B)(1 + b_2^* B) \cdots (1 + b_n^* B)$$

und bemerken, daß die Beträge der Nullstellen von $b(B)$ genau dann nahe bei Eins liegen, wenn dies auch für b_k^* mit $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Einerseits haben wir es mit den numerischen Algorithmen von Kay [104], McLeod [128] und Wilson [180] zu tun. Weil diese Algorithmen die Berechnung von Termen der Form

$$b_i^*(b_i^* + b_j^*) - b_k^*(b_k^* + b_l^*), \qquad \frac{b_i^* + b_j^* b_k^*}{(1 - b_j^*)(1 + b_j^*)}, \qquad 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$$

verlangen, wird es dabei wegen $|b_k^*| \approx 1$ für $1 \leqslant k \leqslant n$ stets zur Stellenauslöschung kommen. Zudem werden sich die entstandenen Fehler in nachfolgenden Rechenschritten vergrößern. Bei der zweiten Möglichkeit zur Berechnung der theoretischen Kovarianzfunktion mittels direkter Methoden kann eine solche Fehlerfortpflanzung nicht entstehen. Allerdings kommt es auch bei der Verwendung des Resultates (4.1) von Karanasos [100] und Zinde-Walsh [187] zum Stellenauslöschungsproblem. Aufgrund der speziellen Darstellung der Koeffizienten mittels Tangensfunktion aus Kapitel drei, läßt sich dieses Problem durch geschickte Umformungen mit Hilfe von Additionstheoremen jedoch umgehen [108, S. 71].

Neben Problemen bei der Berechnung der theoretischen Kovarianzfunktion könnten sich auch im zweiten Schritt der Methode Fehler durch numerische Rechnungen ergeben. Ist nämlich die Kovarianzmatrix R_θ^* nicht positiv definit, dann versagt das Cholesky-Verfahren bei der

[7] Es genügt, daß eine der Nullstellen von $b(B)$ dem Betrage nach sehr nahe bei Eins liegt.

Faktorisierung. Daß dieser Fall jedoch nicht eintreten kann, hat PAGANO bereits 1973 gezeigt [139], indem er ein entsprechendes Resultat von SCHUR [160], [161] verwendete. Sollte die Faktorisierung aufgrund einer schlechten Konditionierung von R_θ^* dennoch scheitern, dann ist das CHOLESKY-Verfahren geeignet zu modifizieren [108, S. 189].

Zusammenfassend können wir für die Methode der endlichen linearen Vorhersage feststellen, daß diese durch Anwendung von (4.1) und entsprechenden Additionstheoremen zur Simulation zufälliger Frequenz- bzw. Phasenfluktuationen geeignet ist.

Zur Methode der asymptotischen Stationarität. Analog zu den Resultaten aus §4 können wir auch die Aussagen zum numerischen Verhalten der endlichen linearen Vorhersage mit der Formel von ZINDE-WALSH fast vollständig auf die Methode der asymptotischen Stationarität übertragen. Allein die Durchführbarkeit der Faktorisierung von $R_\theta(0)$ nach dem CHOLESKY-Verfahren bleibt noch zu zeigen. Dazu können wir folgende Aussagen formulieren.

4.5 Satz. *Genau dann ist $R_\theta(0)$ positiv definit, wenn $R_\zeta(0)$ positiv definit ist.*

Beweis. Zunächst halten wir fest, daß beide $R_\theta(0)$ und $R_\zeta(0)$ als Kovarianzmatrix stets symmetrisch und nichtnegativ definit sind. Damit bleibt zu zeigen, daß $R_\theta(0)$ genau dann keinen Eigenwert identisch Null besitzt, wenn dies für $R_\zeta(0)$ gilt. Ergänzen wir nun die linke Seite von (4.20) um die Gleichung $\zeta_0 = \theta_0$ und setzen $\zeta^* := (\zeta_0, \zeta')'$, dann gilt

$$\zeta^*(t) = \mathcal{N}\theta(t), \qquad \mathcal{N} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a_m & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Damit und wegen der stochastischen Unabhängigkeit von $\zeta_0(t)$ und $\zeta(t)$ erhalten wir ferner

$$R_{\zeta^*}(0) = \mathcal{N} R_\theta(0) \mathcal{N}', \qquad R_{\zeta^*}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\zeta(0) \end{pmatrix},$$

so daß wir schreiben können

$$\det\big[R_\zeta(0)\big] = \det\big[R_{\zeta^*}(0)\big] = \det(\mathcal{N}) \det\big[R_\theta(0)\big] \det(\mathcal{N}') = \det\big[R_\theta(0)\big].$$

Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen. □

4.6 Satz. *Gilt $0 < |c_m| < |c_{m-1}| < \dots < |c_1| < 1$, dann ist $R_\zeta(0)$ positiv definit.*

Beweis. Gemäß Satz 4.2 müssen wir für die positive Definitheit von $R_\zeta(0)$ zeigen, daß

$$u' R_\zeta(0) u = \sum_{i=0}^{\infty} u' \mathcal{A}_i \mathcal{B} \mathcal{B}' \mathcal{A}_i' u = \sum_{i=0}^{\infty} \big(u' \mathcal{A}_i \mathcal{B}\big)^2 > 0$$

oder äquivalent dazu $u'\mathcal{A}_i\mathcal{B} \neq 0$ für $i \in \mathbb{N}$ und alle $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u \neq 0$ gilt. Berücksichtigen wir dazu die Voraussetzung, so erhalten wir aus Satz 1.90 zunächst, daß $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$ eine reguläre untere Dreiecksmatrix mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $c_1, \ldots, c_m$ ist. Folglich ist $\mathcal{A}$ diagonalähnlich, und es existiert eine reguläre Matrix $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit der Eigenschaft[8]

$$\mathcal{A} = \mathcal{X}^{-1} \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_m)\mathcal{X}. \tag{4.23}$$

Nun wollen wir eine Darstellung für $\mathcal{X}$ angeben. Dazu seien f, g wie folgt gegeben

$$f(i,j) := b_i + a_i c_j, \qquad g(i,j) := c_i - c_j, \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant m.$$

Dann gilt für $1 \leqslant i,j \leqslant m$ wegen Satz 3.1 die Relation $f(i,j) \neq 0$ und gemäß Voraussetzung für $i \neq j$ ferner $g(i,j) \neq 0$. Damit erhalten wir $\mathcal{X}$ aus $\mathcal{X}\mathcal{A} - \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_m)\mathcal{X} = 0$. Es gilt

$$\mathcal{X} := \big(x_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant m}, \qquad x_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{für } i > j, \\ 1 & \text{für } i = j, \\ \prod_{k=j}^{i-1} \frac{f(k+1,i)}{g(i,k)} & \text{für } i < j. \end{cases}$$

Vereinbaren wir nun $w := \mathcal{X}\mathcal{B}$, so können wir für die k-te Komponente des Vektors schreiben

$$w_k = e_k'\mathcal{X}\mathcal{B} = f(k,k) \prod_{l=1}^{k-1} \frac{f(l,k)}{g(k,l)} \neq 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Setzen wir ferner $v' := u'\mathcal{X}^{-1}$, dann gilt gemäß (4.23) und wegen $\mathcal{X}\mathcal{X}^{-1} = \mathcal{I}$ die Relation

$$u'\mathcal{A}_i\mathcal{B} = u'\mathcal{X}^{-1} \operatorname{diag}(c_1^i, \ldots, c_m^i)\mathcal{X}\mathcal{B} = v \operatorname{diag}(c_1^i, \ldots, c_m^i)\, w = \sum_{k=1}^{m} v_k c_k^i w_k, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Gemäß Voraussetzung kann also $u'\mathcal{A}_i\mathcal{B} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ nur im Fall $u = 0$ gelten. Genauer, für $i = 1$ müssen wir eine Komponente von v, sagen wir $v_1 := v_1^*$, in Abhängigkeit der übrigen $(m-1)$ freien Komponenten $v_2, \ldots, v_m$ wählen. Für $i = 2$ ist ferner $v_2 := v_2^*$ aufgrund der Werte $v_1^*, v_3, \ldots, v_m$ zu fixieren. Führen wir diese Iteration bis $i = m$ fort, dann müssen wir $v_m := v_m^*$ anhand der festen Komponenten $v_1^*, \ldots, v_{m-1}^*$ bestimmen. Also können wir $u'\mathcal{A}_i\mathcal{B} = 0$ für $i = m+1$ nur mittels $v = 0$ erfüllen. Wählen wir jedoch $v = 0$, dann muß auch $u = 0$ gelten. Folglich ist $R_\zeta(0)$ positiv definit und die Aussage bewiesen. □

Damit ist aus numerischer Sicht auch die Methode der asymptotischen Stationarität zum Zweck der Simulation zufälliger Frequenz- bzw. Phasenfluktuationen geeignet, wenn die spezielle Darstellung der Koeffizienten von $b(B)$ mittels Tangensfunktion berücksichtigt wird.

[8] Vergleiche dazu auch [108, S. 36 f.] und beachte, daß die Wahl von $\mathcal{X}$ nicht eindeutig ist. Bezeichnet nämlich $\mathcal{U}$ eine beliebige reguläre Diagonalmatrix, dann genügt auch $\mathcal{U}\mathcal{X}$ dieser Relation.

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, ein geeignetes Verfahren zur Simulation der in Oszillatoren zu beobachtenden zufälligen Phasenfluktuationen mit kurzem Gedächtnis zu entwickeln. Inhaltlich erfolgte die Bearbeitung in drei Schritten, die in den Kapiteln zwei bis vier beschrieben sind. Darüber hinaus enthalten Kapitel eins sowie die Anhänge A und B benötigte Grundlagen und ergänzende Berechnungen.

Die Aufgabe des ersten Schrittes bestand darin, ein zeitstetiges Modell der zufälligen Phasenfluktuationen zu gewinnen. Die Grundlage dafür bildeten ein historischer Rückblick sowie eine Übersicht zum Stand der aktuellen Forschung. Danach läßt sich die Ausgabe eines Oszillators im eingeschwungenen Zustand mit Hilfe einer harmonischen Funktion beschreiben, deren Amplitude und Phase durch zufällige Fluktuationen überlagert werden. Für die Modellierung war nun entscheidend, wie die zufälligen Phasenfluktuationen anhand von Differentialgleichungen zu beschreiben sind. Da eine allgemeingültige Beantwortung dieser Frage nicht möglich ist, wurde das Problem ausgehend von der Van der Polschen Gleichung diskutiert. Ziel der Diskussion war es, zugehörige Lösungen im Sinne der L_2-Theorie auf ihr Verhalten in Fällen mit und ohne Störungen zu untersuchen. Dabei wurden deterministische von zufälligen Störungen unterschieden. Letztlich haben die Untersuchungen gezeigt, daß zufällige Phasenfluktuationen von Oszillatoren im eingeschwungenen Zustand durch ein stochastisches Riemann-Integral gemäß

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \eta(s)\, ds, \qquad t \geqslant t_0$$

darstellbar sind. Darin bezeichnet φ_0 eine zentrierte Gaußsche zufällige Größe, die den Zustand der Phase zur Startzeit t_0 charakterisiert. Ferner ist η als Prozeß zufälliger Frequenzfluktuationen zu interpretieren, der selbst durch einen bandbegrenzten zentrierten stationären Gaußschen Prozeß mit kurzem Gedächtnis beschrieben wird. Gemäß Definition hat das kurze Gedächtnis zur Folge, daß dieser Prozeß eine absolut summierbare Kovarianzfunktion und somit eine beschränkte Spektraldichte besitzt. Mit dieser Beschreibung der zufälligen Phasenfluktuationen war das erste Ziel erreicht.

Unter Verwendung dieses Resultates sollte im zweiten Schritt ein zeitdiskretes Modell zur Simulation der zufälligen Phasenfluktuationen entstehen. Speziell bestand dabei der Wunsch, Datenblattangaben realer Oszillatoren auf das Simulationsmodell zu übertragen. Für die Umsetzung dieser Aufgabe hat sich die Darstellung des Prozesses φ als vorteilhaft erwiesen. Zunächst wurde das Integral durch eine Summe ersetzt. Anschließend mußte η durch einen geeigneten stationären Prozeß mit diskreter Zeit beschrieben werden. Aufgrund physikalischer Ursachen und schaltungstechnischer Notwendigkeiten, welche sich in der Beschränkung der Spektraldichte von η niederschlagen, ließ sich dessen Darstellbarkeit als ARMA-Prozeß zeigen. Weil ARMA-Prozesse aber auf natürliche Weise durch die Färbung eines weißen Rauschens mittels linearer dynamischer Systeme entstehen, konnten zur Beschreibung von η systemtheoretische

Methoden verwendet werden. Das Problem bestand nun darin, die Datenblattangaben realer Oszillatoren auf die Koeffizienten linearer dynamischer Systeme abzubilden. Um eine solche Abbildungsvorschrift zu erhalten, waren zwei Dinge erforderlich. Zunächst galt es, einen Zusammenhang zwischen den «Spektraldichten» von φ und η herzuleiten, weil Datenblätter realer Oszillatoren für gewöhnlich nur Angaben über zufällige Phasenfluktuationen enthalten. Dabei war zu beachten, daß φ instationär ist und somit im eigentlichen Sinne keine Spektraldichte besitzt. Anschließend mußte die gewonnene Spektraldichte von η approximiert werden, um eine Berechnungsvorschrift für die Koeffizienten zu erhalten. Dazu wurde ein Verfahren mittels Bilineartransformation eingesetzt. Schließlich resultierte daraus ein BIBO-stabiles lineares dynamisches System mit den Matrizen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie dem Zustand ζ und der Eingabe ξ, dessen stationäre Lösung eindeutig durch

$$\zeta(t) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{s\to-\infty} \sum_{l=s}^{t-1} \mathcal{A}^{t-1-l}\mathcal{B}\xi(l), \qquad \eta(t) = \mathcal{C}\zeta(t) + \mathcal{D}\xi(t), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

beschrieben wird. Obwohl dieses Resultat die Aufgabe des zweiten Schrittes erfüllt, eignet es sich nicht zur praktischen Anwendung. Ursache dafür ist der Grenzübergang $s \to -\infty$, also die Notwendigkeit eines Startzeitpunktes in der unendlichen Vergangenheit. Bedeutsam ist diese Erkenntnis vor allem, weil sie zeigt, daß die BIBO-Stabilität linearer dynamischer Systeme mit einem weißen Rauschen als Eingabe nicht hinreichend für die Stationarität ihrer Ausgabe ist.

Somit war es Aufgabe des dritten Schrittes, nach einer äquivalenten Darstellung für die stationäre Lösung unter Berücksichtigung einer endlichen Startzeit zu suchen und geeignete Vorgehensweisen zu deren praktischer Berechnung zu präsentieren. Insbesondere sollten dabei Aspekte der numerischen Stabilität berücksichtigt werden. Zunächst wurde diskutiert, daß

$$\zeta^*(t) = \mathcal{A}^t\zeta^*(0) + \sum_{l=0}^{t-1} \mathcal{A}^{t-1-l}\mathcal{B}\xi(l), \qquad \eta^*(t) = \mathcal{C}\zeta^*(t) + \mathcal{D}\xi(t), \qquad t \in \mathbb{N}_0$$

genau dann der Lösung (ζ, η) entspricht, wenn die Kovarianzmatrix von $\zeta^*(0)$ mit der Kovarianzmatrixfunktion von ζ im Punkt Null identisch ist. Anschließend kamen drei Verfahren zur Sprache, mit welchen sich die Ausgabe η in den Stationaritätszustand versetzen läßt. Zwei davon sind bereits aus der Literatur bekannt. Ein weiteres wurde unabhängig davon im Rahmen dieser Arbeit entwickelt. Alle Verfahren haben gemeinsam, daß dafür die Kovarianzfunktion der Ausgabe zu berechnen ist. Aus numerischer Sicht ist dies bedeutend, da mindestens eine Polstelle des linearen dynamischen Systems dem Betrage nach sehr nahe bei Eins liegt. Schließlich hat sich gezeigt, daß sowohl das neue als auch eines der bekannten Verfahren zur Simulation zufälliger Frequenz- und Phasenfluktuationen geeignet sind.

In der vorliegenden Arbeit wurden zufällige Frequenz- und Phasenfluktuationen mit kurzem Gedächtnis betrachtet, wie sie für die Nachrichtentechnik von Bedeutung sind. Für andere Fachgebiete kann eine Verallgemeinerung notwendig sein. Dann sind die zufälligen Frequenz- und Phasenfluktuationen durch ein langes Gedächtnis zu charakterisieren. Dazu sind fraktionale Prozesse zu verwenden, welche grundlegend in [9], [62], [64], [66], [82], [125], [183] vorgestellt werden. Die Herleitung eines Simulationsmodells ist aufgrund unbeschränkter Spektraldichten jedoch komplizierter und für die praktische Anwendung noch immer ein offenes Problem. Mögliche Ansätze für die Simulation werden in [102], [103] beschrieben.

Anhang A

Mathematische Hilfsmittel

§1 Die Indikatorfunktion

A.1 Definition. Sei X eine beliebige Menge. Für $A \subset X$ heißt die Funktion $\mathbb{1}_A$ auf X

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus A \end{cases}$$

Indikatorfunktion von A.

A.2 Lemma. *Seien X eine beliebige Menge und $A, B \subset X$. Dann gilt*

1.) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$,

2.) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cup B} + \mathbb{1}_{A\cap B}$,

3.) $\mathbb{1}_{X\setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A$,

4.) $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$.

Beweis. Siehe etwa [75, S. 119]. □

A.3 Lemma. *Seien X eine beliebige Menge und $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$. Ferner seien f, g reellwertige Funktionen auf X. Dann gilt*

$$f\mathbb{1}_A + g\mathbb{1}_B = (f - g)\mathbb{1}_A + g\mathbb{1}_{A\cup B}.$$

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Lemma A.2.2, denn wegen $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$\mathbb{1}_B = -\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = -\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A\cup B}$$

und daher

$$f\mathbb{1}_A + g\mathbb{1}_B = f\mathbb{1}_A + g(-\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A\cup B}) = (f - g)\mathbb{1}_A + g\mathbb{1}_{A\cup B},$$

was der Behauptung entspricht. □

Gelegentlich werden wir auf Funktionen zurückgreifen, die als gewichtete Summen von Indikatoren darstellbar sind. Ein wichtiges Beispiel wollen wir gleich notieren.

A.4 Definition. Sei $X \subset \mathbb{R}$ beliebig. Dann heißt

$$\operatorname{sgn}(x) := \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) - \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x), \quad x \in X$$

Signum-Funktion, die das Vorzeichen von $x \in X$ liefert.

§2 Summen von Exponentialfunktionen

A.5 Lemma. *Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$*

$$x^{|n+1|} + x^{|n-1|} = 2x\mathbb{1}_{\{0\}}(n) + (x + x^{-1})x^{|n|}\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(n).$$

Beweis. Wir setzen $y_n(x) := x^{|n+1|} + x^{|n-1|}$ und unterscheiden folgende drei Fälle:

$$\begin{aligned} n < 0: &\quad y_n(x) = x^{-n-1} + x^{-n+1} = (x^{-1} + x)x^{-n}, \\ n = 0: &\quad y_n(x) = x + x, \\ n > 0: &\quad y_n(x) = x^{n+1} + x^{n-1} = (x + x^{-1})x^n. \end{aligned}$$

Fassen wir die Fälle mit $|n| > 0$ zusammen, so erhalten wir die Aussage des Lemmas. □

§3 Einige Reihen und ihre Grenzwerte

A.6 Lemma. *Seien $x, y \in (-1, 0)\cup(0, 1)$ und $Z \subseteq \mathbb{Z}$ beliebig. Dann ist die Doppelfolge $(S_{m,n})$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ gemäß*

$$S_{m,n} := \sum_{i=0}^{m} x^i y^{|m-n-i|}\mathbb{1}_Z(m - n - i)$$

für $m, n \to \infty$ absolut konvergent.

Beweis. Wegen $|y| < 1$ und $\mathbb{1}_Z(k) \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(k) = 1$ für $k \in \mathbb{Z}$ gilt mittels geometrischer Reihe

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} |x|^i |y|^{|m-n-i|}\mathbb{1}_Z(m - n - i) < \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} |x|^i < \infty,$$

was die Behauptung des Lemmas beweist. □

A.7 Satz. *Seien $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ und $j \in \mathbb{Z}$ beliebig fest. Dann ist die Doppelfolge $(S_{m,n})$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ gemäß*

$$S_{m,n} := \sum_{i=0}^{m} x^i \mathbb{1}_{\{j\}}(m - n - i)$$

für $m, n \to \infty$ mit $|m - n| < \infty$ absolut konvergent, und es gilt

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = x^{m-n-j}\mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(m - n - j).$$

Beweis. Offenbar folgt die absolute Konvergenz von $(S_{m,n})$ aus Lemma A.6. Nun bestimmen wir die Glieder der Doppelfolge und unterscheiden dazu folgende zwei Fälle:

(i) Für $m < n + j$ und $m - n - i = j$ haben wir $i = m - n - j < 0$, so daß gilt

$$S_{m,n} = 0.$$

(ii) Für $m \geqslant n + j$ und $m - n - i = j$ haben wir $0 \leqslant m - n - j = i$, so daß gilt

$$S_{m,n} = x^{m-n-j}.$$

Da $S_{m,n}$ aber nur von $m - n$ abhängig ist, gilt für $m, n \to \infty$ mit $|m - n| < \infty$

$$\begin{aligned} m < n + j: &\quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = 0, \\ m \geqslant n + j: &\quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = x^{m-n-j} \end{aligned}$$

und durch Zusammenfassen dieser Resultate schließlich die Behauptung des Satzes. □

A.8 Satz. *Seien $x, y \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ beliebig. Dann ist die Doppelfolge $(S_{m,n})$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ gemäß*

$$S_{m,n} := \sum_{i=0}^{m} x^i y^{|m-n-i|} \mathbb{1}_{-\mathbb{N}}(m - n - i)$$

für $m, n \to \infty$ mit $|m - n| < \infty$ absolut konvergent, und es gilt

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \frac{xy}{1 - xy}\, x^{m-n} \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(m - n) + \frac{1}{1 - xy}\, y^{-(m-n)} \mathbb{1}_{-\mathbb{N}}(m - n).$$

Beweis. Offenbar folgt die absolute Konvergenz von $(S_{m,n})$ aus Lemma A.6. Nun bestimmen wir die Glieder der Doppelfolge und unterscheiden dazu folgende zwei Fälle:

(i) Für $m < n$ und $m - n - i < 0$ haben wir $m - n < 0 \leqslant i \leqslant m$, so daß gilt

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} x^i y^{n-m+i} = y^{n-m} \sum_{i=0}^{m} (xy)^i.$$

(ii) Für $m \geqslant n$ und $m - n - i < 0$ haben wir $0 \leqslant m - n < i \leqslant m$, so daß gilt

$$S_{m,n} = \sum_{i=m-n+1}^{m} x^i y^{n-m+i} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{i+m-n+1} y^{i+1} = y x^{m-n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (xy)^i.$$

Bilden wir jetzt den Grenzübergang $m, n \to \infty$ mit $|m - n| < \infty$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} m < n: &\quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = y^{n-m} \frac{1}{1 - xy}, \\ m \geqslant n: &\quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = x^{m-n} \frac{xy}{1 - xy} \end{aligned}$$

und durch Zusammenfassen dieser Resultate schließlich die Behauptung des Satzes. □

A.9 Satz. *Seien $x, y \in (-1,0)\cup(0,1)$ mit $|x/y| < 1$ beliebig. Dann ist die Doppelfolge $(S_{m,n})$, $m,n \in \mathbb{N}_0$ gemäß*

$$S_{m,n} := \sum_{i=0}^{m} x^i y^{|m-n-i|} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(m-n-i)$$

für $m,n \to \infty$ mit $|m-n| < \infty$ absolut konvergent, und es gilt

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \frac{y^{m-n} - x^{m-n}}{1-x/y} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(m-n).$$

Beweis. Offenbar folgt die absolute Konvergenz von $(S_{m,n})$ aus Lemma A.6. Nun bestimmen wir die Glieder der Doppelfolge und unterscheiden dazu folgende zwei Fälle:

(i) Für $m \leqslant n$ und $m-n-i > 0$ haben wir $i < m-n \leqslant 0$, so daß gilt

$$S_{m,n} = 0.$$

(ii) Für $m > n$ und $m-n-i > 0$ haben wir $0 \leqslant i < m-n < m$, so daß gilt

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^{m-n-1} x^i y^{m-n-i} = y^{m-n} \sum_{i=0}^{m-n-1} (x/y)^i = y^{m-n} \frac{1-(x/y)^{m-n}}{1-x/y}.$$

Da $S_{m,n}$ aber nur von $m-n$ abhängig ist, gilt für $m,n \to \infty$ mit $|m-n| < \infty$

$$\begin{aligned} m \leqslant n: &\quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = 0, \\ m > n: &\quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \frac{y^{m-n} - x^{m-n}}{1-x/y} \end{aligned}$$

und durch Zusammenfassen dieser Resultate schließlich die Behauptung des Satzes. □

A.10 Lemma. *Seien $x, y \in (-1,0)\cup(0,1)$ mit $|x/y| < 1$ beliebig. Dann ist die Folge (S_n), $n \in \mathbb{N}_0$ gemäß*

$$S_n := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} x^i y^j$$

absolut konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß (S_n) absolut konvergiert. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}|x|^i|y|^j \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}|x|^i\sum_{j=0}^{n}|y|^j = \frac{1}{(1-|x|)(1-|y|)} < \infty.$$

Nun wollen wir den Grenzwert der Folge bestimmen. Dazu setzen wir

$$S_n := \sum_{i=0}^{n} x^i z_{n-i} \quad \text{mit} \quad z_{n-i} := \sum_{j=0}^{n-i} y^j,$$

so daß die Differenz aufeinanderfolgender Glieder von (z_{n-k}) für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ durch

$$z_{n-k} - z_{n-k+1} = -y^{n-k+1} = -\frac{y^{n+1}}{y^k}$$

gegeben ist. Notieren wir ferner die Summen S_n, xS_n, so haben wir

$$\begin{aligned} S_n &= z_n + z_{n-1}x + z_{n-2}x^2 + \cdots + z_1x^{n-1} + z_0x^n \\ xS_n &= z_nx + z_{n-1}x^2 + z_{n-2}x^3 + \cdots + z_1x^n + z_0x^{n+1} \end{aligned}$$

und können mittels endlicher geometrischer Reihe $(1-x)S_n$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} (1-x)S_n &= S_n - xS_n \\ &= z_n + (z_{n-1}-z_n)x + \cdots + (z_0-z_1)x^n - z_0x^{n+1} \\ &= \frac{1-y^{n+1}}{1-y} - \frac{y^{n+1}}{y}\,x - \cdots - \frac{y^{n+1}}{y^n}\,x^n - \frac{y^{n+1}}{y^{n+1}}x^{n+1} \\ &= \frac{1-y^{n+1}}{1-y} - \frac{xy^{n+1}}{y}\left[1 + \frac{x}{y} + \cdots + \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{y}\right)^n\right] \\ &= \frac{1-y^{n+1}}{1-y} - \frac{xy^{n+1}}{y}\left[\frac{1-(x/y)^{n+1}}{1-x/y}\right] \\ &= \frac{1-y^{n+1}}{1-y} - x\,\frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{y-x} \\ &= \frac{1}{1-y} - \frac{y^{n+2}-xy^{n+1}}{(1-y)(y-x)} - \frac{xy^{n+1}-xy^{n+2}}{(1-y)(y-x)} + \frac{x^{n+2}}{(y-x)} \\ &= \frac{1}{1-y} + \frac{(1-x)y^{n+2}}{(1-y)(x-y)} - \frac{x^{n+2}}{(x-y)}. \end{aligned}$$

Folglich liefert die Division beider Seiten durch $(1-x)$ und der anschließende Grenzübergang $n \to \infty$ die Behauptung des Lemmas. □

A.11 Lemma. *Seien $x, y \in (-1,0) \cup (0,1)$ und $Z \subseteq \mathbb{Z}$ beliebig. Dann ist die Doppelfolge $(S_{m,n})$, $m,n \in \mathbb{N}_0$ gemäß*

$$S_{m,n} := \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x^{i+j} y^{|m-n-i+j|} \mathbb{1}_Z(m-n-i+j)$$

für $m,n \to \infty$ absolut konvergent.

Beweis. Wegen $|y| < 1$ und $\mathbb{1}_Z(k) \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(k) = 1$ für $k \in \mathbb{Z}$ gilt mittels geometrischer Reihe

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} |x|^{i+j} |y|^{|m-n-i+j|} \mathbb{1}_Z(m-n-i+j) < \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} |x|^i \sum_{j=0}^{n} |x|^j < \infty,$$

was die Behauptung des Lemmas beweist. □

A.12 Satz. *Sei $x \in (-1,0) \cup (0,1)$ beliebig. Dann ist die Doppelfolge $(S_{m,n})$, $m,n \in \mathbb{N}_0$ gemäß*

$$S_{m,n} := \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x^{i+j} \mathbb{1}_{\{0\}}(m-n-i+j)$$

für $m,n \to \infty$ mit $|m-n| < \infty$ absolut konvergent, und es gilt

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \frac{1}{1-x^2}\, x^{|m-n|}.$$

Beweis. Offenbar folgt die absolute Konvergenz von $(S_{m,n})$ aus Lemma A.11. Nun bestimmen wir die Glieder der Doppelfolge und unterscheiden dazu folgende drei Fälle:

(i) Für $m < n$ und $m-n-i+j = 0$ haben wir $0 \leqslant j = n-m+i \leqslant n$, so daß gilt $j \in \{n-m, \ldots, n\}$ für $i \in \{0, \ldots, m\}$ und folglich

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} x^{i+n-m+i} = x^{n-m} \sum_{i=0}^{m} (x^2)^i.$$

(ii) Für $m = n$ und $m-n-i+j = 0$ haben wir $0 \leqslant i = j \leqslant m$, so daß gilt $i \in \{0, \ldots, m\}$ für $j \in \{0, \ldots, n\}$ und folglich

$$S_{m,n} = \sum_{j=0}^{n} x^{j+j} = \sum_{j=0}^{n} (x^2)^j.$$

(iii) Für $m > n$ und $m-n-i+j = 0$ haben wir $0 \leqslant i = m-n+j \leqslant m$, so daß gilt $i \in \{m-n, \ldots, m\}$ für $j \in \{0, \ldots, n\}$ und folglich

$$S_{m,n} = \sum_{j=0}^{n} x^{m-n+j+j} = x^{m-n} \sum_{j=0}^{n} (x^2)^j.$$

Bilden wir jetzt den Grenzübergang $m, n \to \infty$ mit $|m-n| < \infty$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} m < n: &\quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = x^{n-m}\,\frac{1}{1-x^2}, \\ m = n: &\quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \frac{1}{1-x^2}, \\ m > n: &\quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = x^{m-n}\,\frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

und durch Zusammenfassen dieser Resultate schließlich die Behauptung des Satzes. □

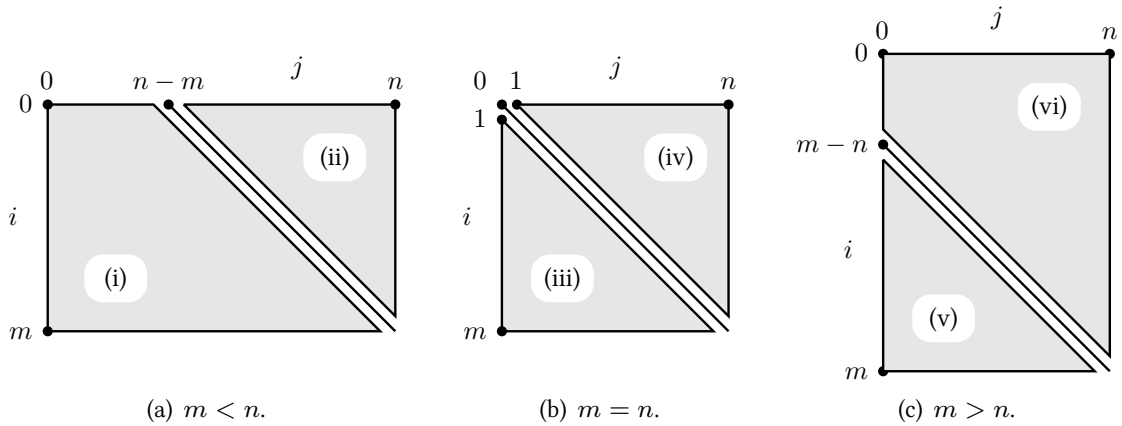
A.13 Satz. *Seien $x, y \in (-1,0) \cup (0,1)$ mit $|x/y| < 1$ beliebig. Dann ist die Doppelfolge $(S_{m,n})$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ gemäß*

$$S_{m,n} := \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} x^{i+j} y^{|m-n-i+j|} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(m-n-i+j)$$

für $m, n \to \infty$ mit $|m-n| < \infty$ absolut konvergent, und es gilt

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{xy}{1-xy} - \frac{1}{1-x/y}\right] x^{|m-n|} + \frac{1}{(1-xy)(1-x/y)}\, y^{|m-n|}.$$

Beweis. Offenbar folgt die absolute Konvergenz von $(S_{m,n})$ aus Lemma A.11. Nun bestimmen wir die Glieder der Doppelfolge und unterscheiden dazu folgende sechs Fälle:



(a) $m < n$. (b) $m = n$. (c) $m > n$.

Abb. A.1: Darstellung der Definitionsbereiche der sechs verschiedenen Fälle.

(i) Für $m < n$ und $m - n - i + j < 0$ haben wir $0 \leqslant j < n - m + i \leqslant n$, so daß gilt

$i \in \{0,\dots,m\}$, $j \in \{0,\dots,n-m-1+i\}$ und folglich

$$\begin{aligned}
S_{m,n} &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n-m-1+i} x^{i+j} y^{n-m+i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x^{i+j} y^{n-m+i-j} - \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=n-m+i}^{n} x^{i+j} y^{n-m+i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x^{i+j} y^{n-m+i-j} - \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} x^{i+n-m+i+j} y^{-j} \\
&= y^{n-m} \sum_{i=0}^{m} (xy)^i \sum_{j=0}^{n} (x/y)^j - x^{n-m} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (x^2)^i (x/y)^j.
\end{aligned}$$

(ii) Für $m < n$ und $m-n-i+j > 0$ haben wir $0 < n-m+i < j \leqslant n$, so daß gilt $i \in \{0,\dots,m-1\}$, $j \in \{n-m+1+i,\dots,n\}$ und folglich

$$\begin{aligned}
S_{m,n} &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=n-m+1+i}^{n} x^{i+j} y^{m-n-i+j} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1-i} x^{i+j+n-m+1+i} y^{j+1} \\
&= x^{n-m}\, xy \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1-i} (x^2)^i (xy)^j.
\end{aligned}$$

(iii) Für $m = n$ und $m-n-i+j < 0$ haben wir $0 \leqslant j < i \leqslant m$, so daß gilt $j \in \{0,\dots,m-1\}$, $i \in \{1+j,\dots,m\}$ und folglich

$$S_{m,n} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1+j}^{m} x^{i+j} y^{i-j} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1-j} x^{i+j+1+j} y^{i+1} = xy \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1-j} (x^2)^j (xy)^i.$$

(iv) Für $m = n$ und $m-n-i+j > 0$ haben wir $0 \leqslant i < j \leqslant n$, so daß gilt $i \in \{0,\dots,n-1\}$, $j \in \{1+i,\dots,n\}$ und folglich

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1+i}^{n} x^{i+j} y^{-i+j} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-i} x^{i+j+1+i} y^{j+1} = xy \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-i} (x^2)^i (xy)^j.$$

(v) Für $m > n$ und $m - n - i + j < 0$ haben wir $0 < m - n + j < i \leqslant m$, so daß gilt $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $i \in \{m-n+1+j, \dots, m\}$ und folglich

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=m-n+1+j}^{m} x^{i+j} y^{n-m+i-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1-j} x^{i+j+m-n+1+j} y^{i+1} \\ &= x^{m-n}\, xy \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1-j} (x^2)^j (xy)^i. \end{aligned}$$

(vi) Für $m > n$ und $m - n - i + j > 0$ haben wir $0 \leqslant i < m - n + j \leqslant m$, so daß gilt $j \in \{0, \dots, n\}$, $i \in \{0, \dots, m-n-1+j\}$ und folglich

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m-n-1+j} x^{i+j} y^{m-n-i+j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} x^{i+j} y^{m-n-i+j} - \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=m-n+j}^{m} x^{i+j} y^{m-n-i+j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} x^{i+j} y^{m-n-i+j} - \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} x^{m-n+j+i+j} y^{-i} \\ &= y^{m-n} \sum_{j=0}^{n} (xy)^j \sum_{i=0}^{m} (x/y)^i - x^{m-n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} (x^2)^j (x/y)^i. \end{aligned}$$

Fassen wir jetzt die Fälle (i)/(ii) bzw. (iii)/(iv) bzw. (v)/(vi) zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
m<n: \quad S_{m,n} &= y^{n-m}\left[\sum_{i=0}^{m}(xy)^i\sum_{j=0}^{n}(x/y)^j\right] \\
&\quad + x^{n-m}\left[xy\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1-i}(x^2)^i(xy)^j - \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}(x^2)^i(x/y)^j\right], \\
m=n: \quad S_{m,n} &= 2xy\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-1-j}(x^2)^j(xy)^i, \\
m>n: \quad S_{m,n} &= y^{m-n}\left[\sum_{j=0}^{n}(xy)^j\sum_{i=0}^{m}(x/y)^i\right] \\
&\quad + x^{m-n}\left[xy\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1-j}(x^2)^j(xy)^i - \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j}(x^2)^j(x/y)^i\right]
\end{aligned}$$

und durch den Grenzübergang $m,n\to\infty$ mit $|m-n|<\infty$ gemäß Lemma A.10 ferner

$$\begin{aligned}
m<n: \quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} &= y^{n-m}\frac{1}{(1-xy)(1-x/y)} \\
&\quad + x^{n-m}\left[\frac{xy}{(1-x^2)(1-xy)} - \frac{1}{(1-x^2)(1-x/y)}\right], \\
m=n: \quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} &= 2xy\,\frac{1}{(1-x^2)(1-xy)}, \\
m>n: \quad \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} &= y^{m-n}\frac{1}{(1-xy)(1-x/y)} \\
&\quad + x^{m-n}\left[\frac{xy}{(1-x^2)(1-xy)} - \frac{1}{(1-x^2)(1-x/y)}\right].
\end{aligned}$$

Schließlich liefert das Zusammenfassen dieser drei Terme wegen

$$\frac{1}{(1-xy)(1-x/y)} + \frac{xy}{(1-x^2)(1-xy)} - \frac{1}{(1-x^2)(1-x/y)} = \frac{2xy}{(1-x^2)(1-xy)}$$

die Behauptung des Satzes. □

§4 Fourieranalyse

Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zunächst eine beliebige 2π-periodische Funktion, d. h. es gelte $y(t) = y(t + 2\pi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für einen Moment wollen wir annehmen, daß jede solche Funktion als FOURIER-Reihe darstellbar ist. Dann dürfen wir schreiben

$$y(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt). \tag{A.1}$$

Multiplikation beider Seiten mit $\cos(nt)$ und anschließende Integration über $(-\pi, \pi]$ liefert eine dazu äquivalente Beziehung. Unter der Annahme, daß die rechte Seite gliedweise integriert werden darf, erhalten wir wegen der Orthogonalitätseigenschaften von Sinus und Cosinus den Zusammenhang

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos(nt)\, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)\, dt = a_n \pi$$

und damit

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos(nt)\, dt, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{A.2}$$

Analoges Vorgehen, jedoch durch Multiplikation mit $\sin(nt)$ statt $\cos(nt)$, liefert ferner

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(nt)\, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\, dt = b_n \pi,$$

und somit

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(nt)\, dt, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{A.3}$$

Damit stehen Berechnungsvorschriften für die Koeffizienten (a_n) und (b_n) aus (A.1) zur Verfügung. Allerdings haben wir noch nicht gezeigt, daß eine solche Darstellung für y überhaupt existiert und die oben verwendete gliedweise Integration zulässig ist. Tatsächlich erweist sich der Beweis dieser Annahmen als schwierig. Anders verhält es sich jedoch, wenn man (A.2) und (A.3) als Definitionsgleichungen für (a_n) und (b_n) ansieht und nachweist, daß die rechte Seite aus (A.1) eine Darstellung von y ist. Dieser Nachweis gelingt, indem man folgende Fragen beantwortet.

A.14 Frage. Liefern die Integrale (A.2) und (A.3) stets endliche Werte für a_n und b_n?

A.15 Frage. Falls Frage A.14 positiv beantwortet werden kann, konvergiert die unendliche Reihe aus (A.1) für alle $t \in (-\pi, \pi]$?

A.16 Frage. Falls Frage A.15 positiv beantwortet werden kann, konvergiert die rechte Seite von (A.1) gegen $y(t)$ für alle $t \in (-\pi, \pi]$?

Die Beantwortung der Frage A.14 bereitet keine Probleme, wenn man $y \in L_1[-\pi, \pi]$ verlangt, denn in diesem Fall gilt unmittelbar

$$|a_n| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |y(t)\cos(nt)|\,dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |y(t)|\,dt < \infty$$

und analog $|b_n| < \infty$. Andererseits gestaltet sich die Beantwortung der Fragen A.15 und A.16 als nicht ganz einfach. Es ist beispielsweise zu berücksichtigen, daß y Unstetigkeitsstellen besitzen kann, die rechte Seite von (A.1) aber als Summe stetiger Funktionen selbst stetig ist. Dieser Umstand erweist sich jedoch nicht als hinderlich. Er führt dazu, daß die FOURIER-Reihe aus (A.1) in einer Unstetigkeitsstelle von y unter gewissen Voraussetzungen gegen das arithmetische Mittel aus linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert konvergiert. Natürlich muß die Existenz dieser Grenzwerte durch die Voraussetzungen gesichert sein. Es zeigt sich, daß der Raum der Funktionen von beschränkter Variation hinreichende Eigenschaften zur positiven Beantwortung der Fragen A.15 und A.16 besitzt.[1]

A.17 Lemma. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig. Ist $y \in BV[a, b]$, so hat y höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen und besitzt in jedem Punkt $t \in [a, b]$ einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Grenzwert.*

Beweis. Siehe etwa [56, S. 278 f. Aufgabe 1.10 Teil f]. □

A.18 Satz (DIRICHLET). *Sei $y \in L_1[-\pi, \pi] \cap BV[-\pi, \pi]$ eine 2π-periodische Funktion. Sind die Glieder der Folgen (a_n) und (b_n) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\cos(nt)\,dt \quad \textit{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\sin(nt)\,dt$$

gegeben, dann gilt

$$\frac{y(t+) + y(t-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt), \quad t \in (-\pi, \pi],$$

wobei $y(t+)$ bzw. $y(t-)$ den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert von y im Punkt t bezeichnet.

Beweis. Siehe etwa [166, S. 13 f. Theorem 3]. □

A.19 Folgerung. *Sei $y \in C[-\pi, \pi] \cap BV[-\pi, \pi]$ beliebig. Dann gilt*

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt), \quad t \in (-\pi, \pi].$$

[1] Ziel der Einschränkung auf Funktionen von beschränkter Variation ist es, die Konvergenz der FOURIER-Reihe (A.1) in allen Stetigkeitspunkten von y sicherzustellen [112, S. 327]. Dabei handelt es sich um eine hinreichende, nicht aber notwendige Bedingung. Die Angabe schwächerer Bedingungen ist im allgemeinen ein schwieriges Problem.

Beweis. Wegen $y \in C[-\pi,\pi]$ ist $y(t) = y(t+) = y(t-)$ für alle $t \in [-\pi,\pi]$ und es gilt $y \in L_1[-\pi,\pi]$.[2] Also folgt die Behauptung aus Satz A.18. □

Mit Satz A.18 und Folgerung A.19 ist nun die FOURIER-Reihendarstellung 2π-periodischer Funktionen unter gewissen Voraussetzungen gesichert. Es ist klar, daß sich diese Aussagen für periodische Funktionen mit beliebigen endlichen Perioden verallgemeinern lassen.

A.20 Folgerung. *Seien $T > 0$ beliebig fest und $y \in L_1[-T,T] \cap BV[-T,T]$ eine $2T$-periodische Funktion. Sind die Glieder der Folgen (a_n) und (b_n) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch*

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} y(t)\cos(n\pi t/T)\,dt \quad \textit{und} \quad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} y(t)\sin(n\pi t/T)\,dt$$

gegeben, dann gilt

$$\frac{y(t+)+y(t-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi t/T) + b_n\sin(n\pi t/T), \quad t \in (-T,T],$$

wobei $y(t+)$ bzw. $y(t-)$ den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert von y im Punkt t bezeichnet. Ist darüber hinaus $y \in C[-T,T]$, so gilt

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi t/T) + b_n\sin(n\pi t/T), \quad t \in (-T,T].$$

Beweis. Wir definieren zunächst die Funktion $x(t) := y(t\pi/T)$ für alle $t \in (-T,T]$. Dann ist x periodisch mit der Periode 2π und es gilt $x \in L_1[-\pi,\pi] \cap BV[-\pi,\pi]$. Mittels Substitution $s := t\pi/T$ erhalten wir $x(t) = y(s)$ und können unter Anwendung von (A.2) schreiben

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(s)\cos(ns)\,ds = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x(t)\cos(n\pi t/T)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Analoges gilt für b_n. Damit ist die Darstellung der Koeffizientenfolgen (a_n) und (b_n) gezeigt, so daß Satz A.18 und Folgerung A.19 wegen $x(t) = y(t\pi/T)$ die behauptete Aussage liefern. □

In Anlehnung an die FOURIER-Reihendarstellung (A.1) können wir unter gewissen Voraussetzungen für $2T$-periodische Funktionen nun allgemeiner schreiben

$$y(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi t/T) + b_n\sin(n\pi t/T), \quad t \in (-T,T].$$

Neben dieser Darstellung erweist sich die dazu äquivalente komplexe FOURIER-Reihe häufig als vorteilhaft. Läßt sich also eine $2T$-periodische Funktion y in eine reelle FOURIER-Reihe mit den Koeffizientenfolgen (a_n) und (b_n) entwickeln, so ist sie auch in der Form

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/T}, \quad t \in (-T,T]$$

[2] Vergleiche dazu auch [56, S. 133 Satz 3.11].

mit den komplexen Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2}\big[a_{|n|} - i\ \mathrm{sgn}(n) b_{|n|}\big] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t)\, e^{-in\pi t/T}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

darstellbar. Damit wollen wir den Fall der periodischen Funktionen abschließen und zum Fall nichtperiodischer Funktionen übergehen.

Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige nichtperiodische Funktion. Es ist klar, daß wir aufgrund der fehlenden Periodizität y nicht durch eine FOURIER-Reihe darstellen können. Daher wollen wir vorübergehend nur ein Ausschnitt y_T von y über dem endlichen Teilintervall $(-T, T]$ betrachten und annehmen, daß sich die Funktion außerhalb davon periodisch fortsetzt. Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$y_T(t + 2kT) := y(t), \quad t \in (-T, T].$$

Genügt y_T den Voraussetzungen von Folgerung A.20, so ist diese Funktion in eine komplexe FOURIER-Reihe entwickelbar. Mit $w_n := n\pi/T$, $\Delta w_n := w_n - w_{n-1} = \pi/T$ gilt also

$$y(t) = y_T(t) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T} y(t)\, e^{-iw_n t}\, dt\right] e^{iw_n t}\Delta w_n, \quad t \in (-T, T].$$

Nehmen wir weiter an, daß der Grenzübergang $T \to \infty$ zulässig ist, dann geht die Summe in ein Integral bezüglich w über und wir erhalten

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(w) e^{iwt}\, dw, \quad t \in \mathbb{R} \tag{A.4}$$

mit

$$\hat{y}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-iwt}\, dt, \quad w \in \mathbb{R}. \tag{A.5}$$

Auch wenn die obigen Betrachtungen eine anschauliche Herleitung des FOURIER-Integrals liefern, so sind sie aufgrund der unbewiesenen Annahmen vage. Folglich ist es sinnvoll, wie im Fall der FOURIER-Reihen vorzugehen. Zu diesem Zweck definiert man zunächst das FOURIER-Integral gemäß (A.5) und fordert dessen Existenz für alle $w \in \mathbb{R}$. Dies gelingt offenbar für alle $y \in L_1(\mathbb{R})$, denn für diese Funktionen gilt

$$|\hat{y}(w)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)\, e^{-iwt}|\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|\, dt < \infty.$$

Damit wird ein wesentlicher Unterschied zu den FOURIER-Reihen sichtbar. Während dort lediglich über ein endliches Intervall der Form $[-T, T]$ integriert werden mußte, so liegt dem FOURIER-Integral das unendliche Integrationsintervall $\mathbb{R}$ zugrunde. Dabei handelt es sich um eine starke Restriktion, denn für alle $y \in L_1(\mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{-T} |y(t)|\, dt = \lim_{T\to\infty}\int_{T}^{\infty} |y(t)|\, dt = 0,$$

d. h. y muß im Unendlichen verschwinden. Im Fall der FOURIER-Reihe wurde jedoch keine vergleichbare Forderung an das asymptotische Verhalten der betrachteten Funktion gestellt.

Nachdem wir nun ein Kriterium zur Existenz von (A.5) bereitgestellt haben, bleibt offen, ob die rechte Seite von (A.4) konvergiert, und falls ja, ob der Grenzwert auf $\mathbb{R}$ in Relation zu y steht. Es zeigt sich, daß dies unter gewissen Voraussetzungen tatsächlich gilt.

A.21 Satz. *Sei $y \in L_1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. Ist $\hat{y}$ durch*

$$\hat{y}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-iwt}\, dt, \quad w \in \mathbb{R}$$

gegeben, dann gilt

$$\frac{y(t+) - y(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(w) e^{iwt}\, dw, \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei $y(t+)$ bzw. $y(t-)$ den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert von y im Punkt t bezeichnet. Ist darüber hinaus $y \in C(\mathbb{R})$, dann gilt

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(w) e^{iwt}\, dw, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Siehe etwa [166, S. 13 f.]. □

Anhang B

Die Kovarianzmatrix des Ausgabevektors

Wir betrachten ein kausales, zeitdiskretes, lineares dynamisches System (Abb. B.1) mit dem Eingabeprozeß ξ, dem Ausgabevektorprozeß θ und dem Zustandsvektorprozeß ζ mit

$$\theta := (\theta_0, \ldots, \theta_m)', \quad \zeta := (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)', \quad m \in \mathbb{N}.$$

Speziell setzen wir das dynamische System als stabil und derart geordnet voraus, daß die Relation

$$0 < |c_m| < |c_{m-1}| < \cdots < |c_1| < 1 \tag{B.1}$$

gilt. Auch wollen wir annehmen, daß ξ ein zentriertes weißes Rauschen ist und das dynamische System zum Zeitpunkt Null gestartet wird. Aufgrund dieser Annahme sind die Vektorprozesse θ, ζ also auf $\mathbb{N}_0$ definiert und können nach den Sätzen 4.1, 4.3 nur dann stationär sein, wenn $\zeta(0)$ durch einen zentrierten, zufälligen Vektor mit der Kovarianzmatrix $R_\zeta(0)$ initialisiert wurde. Anderenfalls sind θ, ζ asymptotisch stationär. Weil uns aber nur die stationären Versionen dieser Vektorprozesse interessieren, ist die Berechnung der Kovarianzmatrix $R_\zeta(0)$ ein wesentliches Ziel. Um dieses zu erreichen, ist es wegen (4.21) hinreichend, die Kovarianzmatrix $R_\theta(0)$ zu bestimmen, da mit einer gewissen Matrix $\mathcal{M}$ der Zusammenhang

$$R_\zeta(t) = \mathcal{M} R_\theta(t) \mathcal{M}', \qquad t \in \mathbb{Z}$$

gilt. Betrachten wir zur Berechnung von $R_\theta(0)$ das lineare dynamische System (Abb. B.1) einmal genauer und überlegen uns die Signalflüsse, so stellen wir eine wesentliche Tatsache fest. Aufgrund der darin enthaltenen Speicherelemente ist der Ausgabeprozeß θ_k der k-ten Stufe eine Linearkombination der Ausgaben θ_i mit $0 \leqslant i \leqslant k$ aus verschiedenen vorausgegangenen Zeitpunkten. Im allgemeinen ist daher auch die Kovarianzfunktion des Prozesses θ_k von den Kovarianz- und Kreuzkovarianzfunktionen der davorliegenden Ausgabeprozesse abhängig. Um $R_\theta(0)$ zu erhalten, ist es also notwending, die Kovarianzmatrixfunktion R_θ des stationären Vektorprozesses θ auf ganz $\mathbb{Z}$ zu bestimmen. Bevor wir damit beginnen, führen wir folgende Bezeichnung ein.

B.1 Bezeichnung. Ist R_θ die Kovarianzmatrixfunktion des Ausgabevektorprozesses θ, dann bezeichnen wir deren Elemente, d. h. die Kovarianz- bzw. Kreuzkovarianzfunktionen von θ_l, θ_k, mit $R_{l,k}$ für alle $0 \leqslant k, l \leqslant m$.

Zur Berechnung von R_θ überlegen wir uns nun ein rekursives Verfahren und gehen dabei von $\zeta(0) = 0$ aus, also vom asymptotisch stationären Prozeß θ mit dem Anfangswert

$$\theta(0) = \xi(0)\left(1, a_1, a_1 a_2, \ldots, \prod_{i=1}^{m} a_i\right).$$

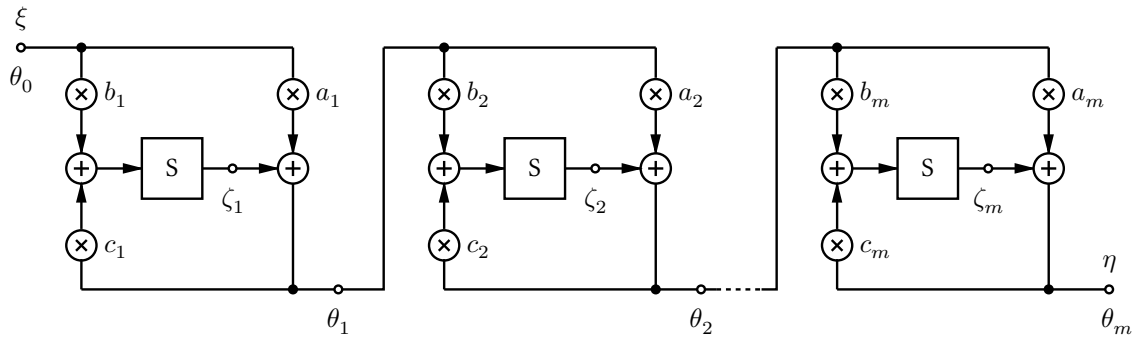


Abb. B.1: Zeitdiskretes lineares dynamisches System in Kaskadenform.

Es gibt, wie sich später zeigen wird, aufgrund der Linearität des dynamischen Systems sowie der Voraussetzung bezüglich θ lineare Operatoren F, G, die die Elemente von R_θ für $r \in \mathbb{Z}$ gemäß

$$R_{k,k}(r) = \lim_{n\to\infty} R_{k,k}(n+r,n) = (FR_{k-1,k-1})(r), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m$$
$$R_{l,k}(r) = \lim_{n\to\infty} R_{l,k}(n+r,n) = (GR_{l-1,k})(r), \qquad 0 \leqslant k < l \leqslant m$$

aufeinander abbilden. Betrachten wir in einem ersten Schritt nur die Elemente der Hauptdiagonale von R_θ, so stellt sich folgende einfache Vorschrift zu deren Berechnung heraus. Da wir $\theta_0 = \xi$ als weißes Rauschen vorausgesetzt haben, ist dessen Kovarianzfunktion $R_{0,0}$ bekannt, so daß wir $R_{1,1}$ mittels F daraus bestimmen können. Durch rekursives Anwenden von F auf $R_{k-1,k-1}$ erhalten wir schließlich auch $R_{k,k}$ für $2 \leqslant k \leqslant m$. Basierend auf diesem Resultat können wir in einem zweiten Schritt mittels G dann auch die Elemente der Nebendiagonalen von R_θ berechnen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß G nur zur Berechnung der unteren Nebendiagonalen geeignet ist. Für unseren Zweck stellt dies aber keine Einschränkung dar, weil R_θ gemäß Satz 1.63 im Punkt Null symmetrisch ist. Demnach genügt es also, zunächst nur die unteren Nebendiagonalen auf $\mathbb{Z}$ zu bestimmen, deren Wert im Punkt Null zu berechnen und anschließend die oberen Nebendiagonalen symmetrisch zu ergänzen. Um dieses Verfahren jedoch anwenden zu können, benötigen wir zuvor die genannten Operatoren F, G. Zu deren Herleitung wird es sich als vorteilhaft erweisen, eine rekursive Darstellung der Ausgabeprozesse θ_k zu notieren. Dazu lesen wir die Zustands- sowie Ausgabegleichung der k-ten Stufe

$$\zeta_k(n+1) = b_k\theta_{k-1}(n) + c_k\theta_k(n) \tag{B.2a}$$
$$\theta_k(n) = a_k\theta_{k-1}(n) + \zeta_k(n) \tag{B.2b}$$

aus (Abb. B.1) für $n \in \mathbb{N}_0$ ab und formulieren folgende Aussage.

B.2 Lemma. *Für $1 \leqslant k \leqslant m$ ist der Ausgabeprozeß θ_k durch den Ausgabeprozeß θ_{k-1} gemäß*

$$\theta_k(n) = a_k \sum_{i=0}^{n} c_k^i \theta_{k-1}(n-i) + b_k \sum_{i=0}^{n-1} c_k^i \theta_{k-1}(n-1-i), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

darstellbar.

Beweis. Nach Einsetzen von (B.2a) in (B.2b) erhalten wir zunächst die Relation

$$\theta_k(n) = a_k\theta_{k-1}(n) + b_k\theta_{k-1}(n-1) + c_k\theta_k(n-1), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Daraus folgt wegen $\theta_k(n) = 0$ für $n < 0$ durch rekursives Ersetzen von $\theta_k(n-i)$ für $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\begin{aligned}
\theta_k(n) &= a_k \sum_{i=0}^{0} c_k^i \theta_{k-1}(n-i) + b_k \sum_{i=0}^{0} c_k^i \theta_{k-1}(n-1-i) + c_k\theta_k(n-1) \\
&= a_k \sum_{i=0}^{1} c_k^i \theta_{k-1}(n-i) + b_k \sum_{i=0}^{1} c_k^i \theta_{k-1}(n-1-i) + c_k^2\theta_k(n-2) \\
&= \dots \\
&= a_k \sum_{i=0}^{n-1} c_k^i \theta_{k-1}(n-i) + b_k \sum_{i=0}^{n-1} c_k^i \theta_{k-1}(n-1-i) + c_k^n\theta_k(0) \\
&= a_k \sum_{i=0}^{n} c_k^i \theta_{k-1}(n-i) + b_k \sum_{i=0}^{n-1} c_k^i \theta_{k-1}(n-1-i),
\end{aligned}$$

was der behaupteten Aussage entspricht. □

Mit Lemma B.2 haben wir nun alle Hilfsmittel zur Hand, um $R_\theta(0)$ bestimmen zu können. Gemäß den Vorüberlegungen gehen wir dabei schrittweise vor, beginnen mit der Berechnung der zugehörigen Hauptdiagonale und schließen mit der Berechnung der Nebendiagonalen ab.

§1 Die Elemente der Hauptdiagonale

Bevor wir mit der Berechnung der Elemente $R_{k,k}$ von R_θ beginnen, müssen wir den Operator F definieren und zeigen, daß dieser $R_{k,k}$ auch erzeugt. Im Anschluß an dieses Resultat werden wir die eigentliche Berechnung in zwei Schritten vollziehen. Zunächst werden wir die Struktur der Kovarianzfunktionen $R_{k,k}$ anhand von F untersuchen und daraus schließlich eine einfache Vorschrift zur Berechnung ihrer Werte im Punkt Null gewinnen.

B.3 Definition. Für $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ mit $|c_k| < 1$. Dann heißt der auf l_∞ durch

$$\begin{aligned}
(F_k f)(r) := &\lim_{n\to\infty} \left[a_k^2 \sum_{i=0}^{n+r} \sum_{j=0}^{n} c_k^{i+j} f(r-i+j) + b_k^2 \sum_{i=0}^{n+r-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_k^{i+j} f(r-i+j) \right] \\
&+ \lim_{n\to\infty} a_k b_k \left[\sum_{i=0}^{n+r} \sum_{j=0}^{n-1} c_k^{i+j} f(r+1-i+j) + \sum_{i=0}^{n+r-1} \sum_{j=0}^{n} c_k^{i+j} f(r-1-i+j) \right]
\end{aligned}$$

definierte lineare Operator F_k der *Hauptdiagonaloperator bezüglich* f.

B.4 Satz. *Für $1 \leqslant k \leqslant m$ beliebig fest sei der Ausgabeprozeß θ_{k-1} stationär. Dann ist der Ausgabeprozeß θ_k asymptotisch stationär, und für dessen Kovarianzfunktion gilt*

$$R_{k,k}(r) = \lim_{n\to\infty} R_{k,k}(n+r,n) = \big(F_k R_{k-1,k-1}\big)(r), \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Die asymptotische Stationarität von θ_k haben wir wegen (4.21) bereits in Satz 4.4 gezeigt, so daß die linke Gleichung auf triviale Weise gilt. Um auch die rechte Gleichung zu zeigen, notieren wir $R_{k,k}(n+r,n)$ laut Definition und nutzen die Darstellung von θ_k gemäß Lemma B.2 aus. Dann erhalten wir für alle $r \in \mathbb{Z}$ zunächst

$$\begin{aligned}
E\big[\theta_k(n+r)\theta_k(n)\big] &= a_k^2 \sum_{i=0}^{n+r}\sum_{j=0}^{n} c_k^{i+j} E\big[\theta_{k-1}(n+r-i)\theta_{k-1}(n-j)\big] \\
&\quad + b_k^2 \sum_{i=0}^{n+r-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_k^{i+j} E\big[\theta_{k-1}(n+r-1-i)\theta_{k-1}(n-1-j)\big] \\
&\quad + a_k b_k \sum_{i=0}^{n+r}\sum_{j=0}^{n-1} c_k^{i+j} E\big[\theta_{k-1}(n+r-i)\theta_{k-1}(n-1-j)\big] \\
&\quad + a_k b_k \sum_{i=0}^{n+r-1}\sum_{j=0}^{n} c_k^{i+j} E\big[\theta_{k-1}(n+r-1-i)\theta_{k-1}(n-j)\big]
\end{aligned}$$

und wegen der Stationarität von θ_{k-1} für $n \to \infty$ schließlich die Aussage des Satzes. □

Gemäß Satz B.4 haben wir nun aus der asymptotischen Stationarität von θ einen Zusammenhang zwischen den Kovarianzfunktionen der Ausgabeprozesse θ_{k-1} und θ_k hergestellt. Beachten wir noch, daß θ_0 als weißes Rauschen, also insbesondere als stationär, vorausgesetzt wurde, so können wir auf einfache Weise eine rekursive Vorschrift zur Berechnung der Hauptdiagonale von R_θ formulieren. Mittels F läßt sich aus $R_{0,0}$ auch $R_{1,1}$ und daraus wiederum $R_{2,2}$ bestimmen usw., bis wir nach m-maliger Anwendung von F schließlich $R_{m,m}$ erhalten.

Der aufmerksame Leser könnte an dieser Stelle jedoch fragen, warum die m-fache Anwendung von F, also die wiederholte Grenzwertbildung $n \to \infty$, zulässig ist. Die Rechtfertigung dafür ist abermals in der asymptotischen Stationarität von θ begründet, da $R_\theta(n+r,n)$ nach Satz 4.4 für $n \to \infty$ unabhängig von $\theta(0)$ den selben Grenzwert $R_\theta(r)$ mit $r \in \mathbb{Z}$ besitzt. Für die Berechnung von $R_{1,1}$ gehen wir daher von $\zeta(0) = 0$ aus, d. h. wir nehmen an, daß alle Stufen des dynamischen Systems mit Null initialisiert wurden. Dann ist nur der Ausgabeprozeß θ_0 stationär. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert jedoch R_θ und damit $R_{k,k}$ für alle $1 \leqslant k \leqslant m$. Weil wir zu diesem Zeitpunkt aber erst $R_{0,0}$ kennen, ist es nur möglich, $R_{1,1}$ mit Hilfe von F zu bestimmen. Unter Verwendung von $R_{1,1}$ können wir anschließend aber die erste Stufe des dynamischen Systems zufällig initialisieren. Dann sind bereits θ_0, θ_1 stationär, so daß wir mittels F auch $R_{2,2}$ erhalten. Durch die schrittweise, zufällige Initialisierung der ersten $k-1$ Stufen läßt sich dann auch $R_{k,k}$ für $3 \leqslant k \leqslant m$ bestimmen.

Dennoch könnte sich dieses rekursive Vorgehen als praktisch nicht durchführbar erweisen, wenn nämlich die unendlichen Doppelreihen in F für ein $R_{k,k}$ nicht explizit berechenbar sind.

Um derartigen Problemen aus dem Weg zu gehen, wollen wir die Abbildungseigenschaften von F daher zunächst genauer studieren.

Die Struktur der Hauptdiagonale. Intuitiv ist klar, daß sich die kaskadenförmige Struktur des dynamischen Systems in den mittels F berechneten Resultaten widerspiegeln muß. Allerdings ist uns die Beschaffenheit dieser Resultate noch nicht bekannt. Für die Berechnung von R_θ ist es daher wünschenswert, über eine gewisse Menge von Aufbaufunktionen zu verfügen, die bezüglich F in sich abgeschlossen ist. Später werden wir sehen, daß die Menge der Funktionen

$$f_0(r) := \mathbb{1}_{\{0\}}(r), \quad f_k(r) := c_k^{|r|}\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(r), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}$$

diesem Anspruch genügt. Insbesondere wird sich herausstellen, daß jedes Element der Hauptdiagonale von R_θ als Linearkombination dieser Funktionen darstellbar ist. Um diese Aussage zu zeigen, wenden wir F zunächst auf jede der Aufbaufunktionen an und fassen die Resultate schließlich zusammen. Dazu werden sich folgende Koeffizienten als nützlich erweisen.

B.5 Bezeichnung. Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien a_k, b_k, $c_k \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c_k| < 1$ und $|c_k/c_i| < 1$ für alle $i < k$. Dann setzen wir

$$p'_{i,k} := \frac{a_k^2 + b_k^2 + 2a_k b_k c_i}{1 - c_k^2}, \quad p''_{i,k} := \frac{a_k^2 + b_k^2 + a_k b_k\big(c_i + c_i^{-1}\big)}{1 - c_k^2}$$

und darüber hinaus

$$u_{i,k} := \frac{c_k c_i}{1 - c_k c_i} - \frac{1}{1 - c_k/c_i}, \quad v_{i,k} := \frac{1 - c_k^2}{(1 - c_k c_i)(1 - c_k/c_i)}, \quad w_{i,k} := \frac{2c_k c_i}{1 - c_k c_i}.$$

Durch elementare Umformungen läßt sich zeigen, daß diese Koeffizienten den Gleichungen

$$w_{i,k} = u_{i,k} + v_{i,k} = \frac{2(c_k u_{i,k} + c_i v_{i,k})}{c_k + c_k^{-1}}, \quad w_{i,k}p''_{k,k} = u_{i,k}p'_{k,k} + v_{i,k}p'_{i,k} \tag{B.3}$$

genügen.

B.6 Satz. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c_k| < 1$. Dann gilt*

$$F_k f_0 = p'_{k,k} f_0 + p''_{k,k} f_k.$$

Beweis. Durch Anwenden von Satz A.12 sowie Lemma A.5 erhalten wir

$$\begin{aligned}
(F_k f_0)(r) &= a_k^2 \frac{c_k^{|r|}}{1 - c_k^2} + b_k^2 \frac{c_k^{|r|}}{1 - c_k^2} + a_k b_k \frac{c_k^{|r+1|}}{1 - c_k^2} + a_k b_k \frac{c_k^{|r-1|}}{1 - c_k^2} \\
&= \frac{a_k^2 + b_k^2}{1 - c_k^2}\, c_k^{|r|} + \frac{a_k b_k}{1 - c_k^2}\big(c_k^{|r+1|} + c_k^{|r-1|}\big) \\
&= \frac{a_k^2 + b_k^2}{1 - c_k^2}\, c_k^{|r|} + \frac{a_k b_k}{1 - c_k^2}\big[2c_k \mathbb{1}_{\{0\}}(r) + \big(c_k + c_k^{-1}\big)c_k^{|r|}\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(r)\big] \\
&= \frac{a_k^2 + b_k^2 + 2a_k b_k c_k}{1 - c_k^2}\, \mathbb{1}_{\{0\}}(r) + \frac{a_k^2 + b_k^2 + a_k b_k\big(c_k + c_k^{-1}\big)}{1 - c_k^2}\, c_k^{|r|}\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(r),
\end{aligned}$$

was der Behauptung des Satzes entspricht. □

B.7 Satz. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c_k| < 1$ und $|c_k/c_i| < 1$ für alle $i < k$. Dann gilt*

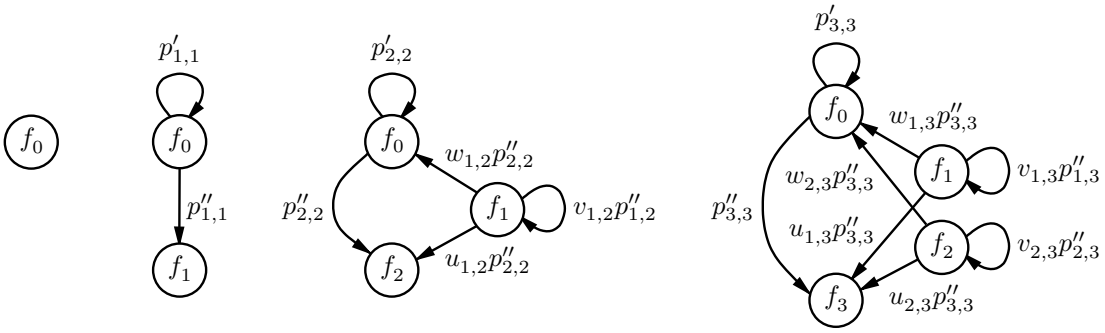
$$F_k f_i = w_{i,k} p''_{k,k} f_0 + v_{i,k} p''_{i,k} f_i + u_{i,k} p''_{k,k} f_k.$$

Beweis. Durch Anwenden von Satz A.13, Lemma A.5 und (B.3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
(F_k f_i)(r) &= a_k^2 \frac{u_{i,k} c_k^{|r|} + v_{i,k} c_i^{|r|}}{1 - c_k^2} + b_k^2 \frac{u_{i,k} c_k^{|r|} + v_{i,k} c_i^{|r|}}{1 - c_k^2} \\
&\quad + a_k b_k \frac{u_{i,k} c_k^{|r+1|} + v_{i,k} c_i^{|r+1|}}{1 - c_k^2} + a_k b_k \frac{u_{i,k} c_k^{|r-1|} + v_{i,k} c_i^{|r-1|}}{1 - c_k^2} \\
&= u_{i,k} \left[\frac{a_k^2 + b_k^2}{1 - c_k^2} \, c_k^{|r|} + \frac{a_k b_k}{1 - c_k^2} \left(c_k^{|r+1|} + c_k^{|r-1|} \right) \right] \\
&\quad + v_{i,k} \left[\frac{a_k^2 + b_k^2}{1 - c_k^2} \, c_i^{|r|} + \frac{a_k b_k}{1 - c_k^2} \left(c_i^{|r+1|} + c_i^{|r-1|} \right) \right] \\
&= u_{i,k} \left[p'_{k,k} f_0(r) + p''_{k,k} f_k(r) \right] + v_{i,k} \left[p'_{i,k} f_0(r) + p''_{i,k} f_i(r) \right] \\
&= (u_{i,k} p'_{k,k} + v_{i,k} p'_{i,k}) f_0(r) + v_{i,k} p''_{i,k} f_i(r) + u_{i,k} p''_{k,k} f_k(r),
\end{aligned}$$

was der Behauptung des Satzes entspricht. □

Mit den Sätzen B.6, B.7 kommen wir nun an einen Punkt, an dem sich die Struktur der Hauptdiagonale von R_θ vollständig offenbart. Wir wollen uns diese Struktur veranschaulichen, indem wir die schrittweise Berechnung der Elemente $R_{k,k}$ gedanklich und mittels (Abb. B.2) auch graphisch verfolgen. Zunächst ist klar, daß $R_{0,0} = f_0$ gilt, da der Ausgabeprozeß θ_0 gemäß Voraussetzung ein weißes Rauschen ist. Durch Anwendung von F_1 auf f_0 erhalten wir gemäß Satz B.4 also die Kovarianzfunktion $R_{1,1}$, die sich nach Satz B.6 als Linearkombination der Aufbaufunktionen f_0, f_1 darstellen läßt. Daraus folgt aber, daß zur Berechnung von $R_{2,2}$



(a) $k = 0$. (b) $k = 1$. (c) $k = 2$. (d) $k \geqslant 3$.

Abb. B.2: Schema zur Abbildung der Funktionen f_i durch den Operator F_k auf sich selbst.

der Operator F_2 auch auf jede dieser Funktionen anzuwenden ist. Nach den Sätzen B.6, B.7 können wir $R_{2,2}$ folglich als Linearkombination der Funktionen f_i für $0 \leqslant i \leqslant 2$ schreiben. Nutzen wir die Sätze B.6, B.7 ferner zur Berechnung von $R_{3,3}$, so zeigt sich erneut die gleiche Struktur. Genauer, alle $R_{k,k}$, $k \in \mathbb{N}$ können als Linearkombination der Funktionen f_i für $0 \leqslant i \leqslant k$ dargestellt werden. Mit diesem Resultat haben wir also gezeigt, daß die Menge der Aufbaufunktionen bezüglich F in sich abgeschlossen ist.

Nach den bisherigen Ausführungen ist uns die Struktur der Hauptdiagonale von R_θ nun bekannt. Demnach verfügen wir über alle notwendigen Hilfsmittel, um die Elemente $R_{k,k}(0)$ auf einfache Weise berechnen zu können.

Berechnung der Hauptdiagonale im Punkt Null. Fassen wir unsere bisherigen Überlegungen noch einmal mathematisch zusammen und berücksichtigen die Eigenschaften der Funktionen f_k für $0 \leqslant k \leqslant m$ im Punkt Null, dann können wir folgendes Resultat formulieren.

B.8 Satz. *Seien der Vektor $e_1 := (1, 0, \ldots, 0)'$ und die Matrizen $\mathcal{P}_i$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ gemäß*

$$\mathcal{P}_i := \begin{pmatrix} p'_{i,i} & 0 & 0 & \ldots & 0 & p''_{i,i} \\ w_{1,i}\, p''_{i,i} & v_{1,i}\, p''_{1,i} & 0 & \ldots & 0 & u_{1,i}\, p''_{i,i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{i-1,i}\, p''_{i,i} & 0 & \ldots & 0 & v_{i-1,i}\, p''_{i-1,i} & u_{i-1,i}\, p''_{i,i} \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann sind die Kovarianzfunktionen der Ausgabeprozesse θ_k im Punkt Null gemäß

$$R_{0,0}(0) = 1, \quad R_{k,k}(0) = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i e_1, \quad 1 \leqslant k \leqslant m$$

darstellbar.

Beweis. Zunächst halten wir fest, daß $R_{0,0}(0) = f_0(0) = 1$ gemäß Voraussetzung gilt. Nun fahren wir mit den Fällen $1 \leqslant k \leqslant m$ fort und zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Für $k = 1$ erhalten wir aus Satz B.6 unmittelbar

$$R_{1,1}(0) = (F_1 R_{0,0})(0) = (F_1 f_0)(0) = p'_{1,1}\, f_0(0) + p''_{1,1}\, f_1(0) = \mathcal{P}_1 e_1.$$

Um die Behauptung schließlich für $2 \leqslant k \leqslant m$ beliebig zu zeigen, vereinbaren wir

$$u_k := \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i \quad \text{und} \quad v_k := (f_0, \ldots, f_k)'$$

und setzen die Gültigkeit der Aussage für $k-1$ voraus. Dann können wir nach den Sätzen B.6, B.7 durch Anwendung von F_k auf die Elemente von v_{k-1} schreiben

$$R_{k,k}(0) = \big(F_k R_{k-1,k-1}\big)(0) = \big(F_k u_{k-1} v_{k-1}\big)(0) = u_{k-1}\big(F_k v_{k-1}\big)(0) = u_{k-1}\mathcal{P}_k v_k(0).$$

Wegen $v_k(0) = e_1$ ist die Aussage des Satzes somit bewiesen. □

§2 Die Elemente der Nebendiagonalen

Zur Bestimmung der Elemente der Nebendiagonalen $R_{l,k}$ von R_θ gehen wir wie in §1 vor. Wir beginnen also mit der Definition des Operators G und vollziehen die Berechnung erneut in zwei Schritten. Zunächst untersuchen wir die Struktur der Kreuzkovarianzfunktionen $R_{l,k}$ mit Hilfe von G und leiten anschließend eine Vorschrift für deren Berechnung im Punkt Null daraus ab. Weil die Kovarianzmatrixfunktion R_θ des stationären Prozesses θ in Null aber symmetrisch ist, genügt es, wenn wir uns dabei auf den Fall $0 \leqslant k < l \leqslant m$ beschränken.

B.9 Definition. Für $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ mit $|c_k| < 1$. Dann heißt der auf l_∞ durch

$$(G_l g)(r) := \lim_{n\to\infty} a_l \sum_{i=0}^{n+r} c_l^i g(r-i) + \lim_{n\to\infty} b_l \sum_{i=0}^{n+r-1} c_l^i g(r-1-i)$$

definierte lineare Operator G_l der *Nebendiagonalenoperator bezüglich* g.

B.10 Satz. *Für $1 \leqslant k < l \leqslant m$ beliebig fest seien die Ausgabeprozesse θ_{l-1}, θ_k gemeinsam stationär. Dann sind die Ausgabeprozesse θ_l, θ_k gemeinsam asymptotisch stationär, und für deren Kreuzkovarianzfunktion gilt*

$$R_{l,k}(r) = \lim_{n\to\infty} R_{l,k}(n+r,n) = \big(G_l R_{l-1,k}\big)(r), \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Die gemeinsame asymptotische Stationarität von θ_l, θ_k haben wir wegen (4.21) bereits in Satz 4.4 gezeigt, so daß die linke Gleichung auf triviale Weise gilt. Um auch die rechte Gleichung zu zeigen, notieren wir $R_{l,k}(n+r,n)$ laut Definition und nutzen die Darstellung von θ_l gemäß Lemma B.2 aus. Dann erhalten wir für alle $r \in \mathbb{Z}$ zunächst

$$\begin{aligned} E\big[\theta_l(n+r)\theta_k(n)\big] &= a_l \sum_{i=0}^{n+r} c_l^i E\big[\theta_{l-1}(n+r-i)\theta_k(n)\big] \\ &\quad + b_l \sum_{i=0}^{n+r-1} c_l^i E\big[\theta_{l-1}(n+r-1-i)\theta_k(n)\big] \end{aligned}$$

und wegen der gemeinsamen Stationarität von θ_{l-1}, θ_k für $n \to \infty$ auch die Behauptung. □

Mit Satz B.10 verfügen wir aufgrund der asymptotischen Stationarität von θ nun über einen Zusammenhang zwischen den Kreuzkovarianzfunktionen der Ausgabeprozesse θ_{l-1}, θ_k und θ_l, θ_k. Folglich lassen sich unter Verwendung von G die Elemente $R_{l,k}$ von R_θ auf einfache Weise rekursiv berechnen. Allerdings müssen wir die Abbildungseigenschaften des Operators G zuvor noch untersuchen.

Die Struktur der Nebendiagonalen. Weil wir die Struktur der Kreuzkovarianzfunktionen $R_{l,k}$ noch nicht kennen, ist es auch zur Berechnung der Nebendiagonalen von R_θ wünschenswert, über eine Menge von Aufbaufunktionen zu verfügen, die bezüglich G in sich abgeschlossen ist. Aufgrund von Asymmetrien sind die Funktionen f_k, $k \in \mathbb{N}$ aus §1 für diesen Zweck aber

nicht geeignet. Werden diese jedoch mit gewissen Indikatoren gewichtet, so gelangt man zum gewünschten Resultat. Genauer wird sich zeigen, daß die Menge der Funktionen

$$g_0(r) := f_0(r), \quad g_k^-(r) := f_k(r)\mathbb{1}_{-\mathbb{N}}(r), \quad g_k^+(r) := f_k(r)\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}$$

dem Anspruch der Abgeschlossenheit bezüglich G genügt. Insbesondere läßt sich zeigen, daß jedes Element der Nebendiagonalen von R_θ als Linearkombination dieser Funktionen darstellbar ist. Weil wir uns aber nur für den Wert von R_θ im Punkt Null interessieren, können wir auf ein entsprechendes Resultat verzichten. Die Ursache dafür ist in der genannten Asymmetrie begründet. Wir werden später sehen, daß allein die Funktionen g_0, g_k^- einen Beitrag zum Wert $R_\theta(0)$ leisten. Zunächst wollen wir jedoch den Einfluß von G bezüglich jeder der Aufbaufunktionen untersuchen. Dazu werden sich folgende Koeffizienten als nützlich erweisen.

B.11 Bezeichnung. Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c_k| < 1$ und $|c_l/c_k| < 1$ für alle $k < l$. Dann setzen wir

$$q_{l,l} := a_l, \quad q'_{l,k} := \frac{a_l c_l c_k + b_l c_k}{1 - c_l c_k}, \quad q''_{l,k} := \frac{a_l + b_l c_k}{1 - c_l c_k}$$

und darüber hinaus

$$q^*_{l,l} := a_l + b_l/c_l, \quad q^{**}_{l,k} := \frac{a_l + b_l/c_k}{1 - c_l/c_k}, \quad q^{***}_{l,k} := \frac{a_l + b_l/c_l}{1 - c_l/c_k}.$$

B.12 Satz. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c_k| < 1$. Dann gilt*

$$G_l g_0 = q_{l,l} g_0 + q^*_{l,l} g_l^+.$$

Beweis. Durch Anwenden von Satz A.7 sowie Lemma A.2.2 erhalten wir

$$(G_l g_0)(r) = a_l c_l^r \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(r) + b_l c_l^{r-1} \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(r-1) = a_l \mathbb{1}_{\{0\}}(r) + \big(a_l + b_l/c_l\big) c_l^r \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r),$$

was der Aussage des Satzes entspricht. □

B.13 Satz. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c_k| < 1$. Dann gilt*

$$G_l g_k^- = q'_{l,k} g_0 + q''_{l,k} g_k^- + q'_{l,k} g_l^+.$$

Beweis. Durch Anwenden von Satz A.8 sowie Lemma A.2.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}
(G_l g_k^-)(r) &= \frac{a_l c_l c_k}{1 - c_l c_k}\, c_l^r \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(r) + \frac{a_l}{1 - c_l c_k}\, c_k^{-r} \mathbb{1}_{-\mathbb{N}}(r) \\
&\quad + \frac{b_l c_l c_k}{1 - c_l c_k}\, c_l^{r-1} \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(r-1) + \frac{b_l}{1 - c_l c_k}\, c_k^{-(r-1)} \mathbb{1}_{-\mathbb{N}}(r-1) \\
&= \frac{a_l}{1 - c_l c_k} \big[c_l c_k c_l^r \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r) + c_l c_k \mathbb{1}_{\{0\}}(r) + c_k^{|r|} \mathbb{1}_{-\mathbb{N}}(r) \big] \\
&\quad + \frac{b_l c_k}{1 - c_l c_k} \big[c_l^r \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r) + \mathbb{1}_{\{0\}}(r) + c_k^{|r|} \mathbb{1}_{-\mathbb{N}}(r) \big] \\
&= \frac{a_l c_l + b_l}{1 - c_l c_k}\, c_k \big[\mathbb{1}_{\{0\}}(r) + c_l^r \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r) \big] + \frac{a_l + b_l c_k}{1 - c_l c_k}\, c_k^{|r|} \mathbb{1}_{-\mathbb{N}}(r),
\end{aligned}$$

was der Aussage des Satzes entspricht. □

B.14 Satz. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ mit $0 < |c_k| < 1$ und $|c_l/c_k| < 1$ für alle $k < l$. Dann gilt*

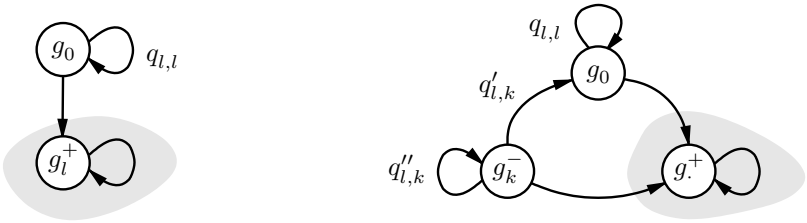
$$G_l g_k^+ = q_{l,k}^{**}\, g_k^+ - q_{l,k}^{***}\, g_l^+.$$

Beweis. Durch Anwenden von Satz A.9 sowie Lemma A.2.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}(G_l g_k^+)(r) &= a_l \frac{c_k^r - c_l^r}{1 - c_l/c_k} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r) + b_l \frac{c_k^{r-1} - c_l^{r-1}}{1 - c_l/c_k} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r-1) \\ &= a_l \frac{c_k^r - c_l^r}{1 - c_l/c_k} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r) + b_l \frac{c_k^{r-1} - c_l^{r-1}}{1 - c_l/c_k} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r) \\ &= \frac{a_l + b_l/c_k}{1 - c_l/c_k} c_k^r \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r) - \frac{a_l + b_l/c_l}{1 - c_l/c_k} c_l^r \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(r),\end{aligned}$$

was der Aussage des Satzes entspricht. □

Mit den Sätzen B.12, B.13, B.14 haben wir einen Punkt erreicht, an dem sich die Struktur der Nebendiagonalen von R_θ vollständig offenbart. Wir wollen uns diese Struktur veranschaulichen, indem wir die schrittweise Berechnung der Elemente $R_{l,k}$ gedanklich und mittels (Abb. B.3) auch graphisch verfolgen. Wir beginnen mit dem Fall $l > k = 0$. Nach den Ausführungen in §1 gilt zunächst $R_{0,0} = g_0$. Durch rekursive Anwendung der Sätze B.12, B.14 wissen wir ferner, daß $R_{l,0}$, $l \geqslant 1$ eine Funktion nur von g_0, g_k^+ ist. Nun betrachten wir den Fall $l > k \geqslant 1$. Offenbar ist $R_{k+1,k}$ gemäß den Sätzen B.12, B.13, B.14 als Linearkombination der Funktionen g_0, g_k^-, g_k^+ darstellbar. Darüber hinaus zeigt sich, daß diese Aussage auch für $R_{l,k}$ für beliebige $l > k$ richtig ist. Somit ist klar, daß die Menge der Aufbaufunktionen g_0, g_k^-, g_k^+ für $k \in \mathbb{N}$ bezüglich G in sich abgeschlossen ist. Ferner können wir den grau hinterlegten Bereichen in (Abb. B.3) entnehmen, daß G die Funktionen g_k^+ nur so aufeinander abbildet, daß diese keinen Beitrag zu g_0 und damit zu $R_\theta(0)$ leisten. Folglich sind die Nebendiagonalenelemente dieser



(a) $l > k = 0$. (b) $l > k \geqslant 1$.

Abb. B.3: Abbildung der Funktionen g_0, g_k^-, g_k^+ durch den Operator G_l auf sich selbst.

Matrix vollständig durch Linearkombinationen von g_0, g_k^- bestimmt. Bezeichnen wir $\tilde{R}_{l,k}$ als den Anteil der Kovarianzfunktion $R_{l,k}$, der durch g_0, g_k^- gebildet wird, dann gilt

$$\tilde{R}_{l,k}(0) = R_{l,k}(0). \tag{B.4}$$

Nach den bisherigen Ausführungen ist uns die Struktur der Nebendiagonalen bekannt. Somit verfügen wir über alle notwendigen Hilfsmittel, um die Elemente $R_{l,k}(0)$ auf einfache Weise berechnen zu können.

Berechnung der Nebendiagonalen im Punkt Null. Fassen wir die bisherigen Überlegungen noch einmal mathematisch zusammen und berücksichtigen die Eigenschaften der Funktionen g_0, g_k^- im Punkt Null, dann können wir folgendes Resultat formulieren.

B.15 Satz. *Für $0 \leqslant i \leqslant k < j \leqslant m$ seien e_1, $\mathcal{P}_i$ wie in Satz B.8 und die Matrizen $\mathcal{Q}_{j,k}$ durch*

$$\mathcal{Q}_{j,k} := \begin{pmatrix} q_{j,j} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q'_{j,1} & q''_{j,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q'_{j,k} & 0 & 0 & \dots & 0 & q''_{j,k} \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann sind die Kreuzkovarianzfunktionen der Ausgabeprozesse θ_l, θ_k im Punkt Null gemäß

$$R_{l,k}(0) = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i \prod_{j=k+1}^{l} \mathcal{Q}_{j,k}\, e_1, \quad 0 \leqslant k < l \leqslant m$$

darstellbar.

Beweis. Wegen (B.4) genügt es offenbar, die Aussage für $\tilde{R}_{l,k}(0)$ zu zeigen. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion bezüglich l und setzen dazu

$$u_{l,k} := \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i \prod_{j=k+1}^{l} \mathcal{Q}_{j,k} \quad \text{und} \quad v_k := (g_0, g_1^-, \dots, g_k^-)'.$$

Zunächst sei $l = k+1$. Dann können wir nach den Sätzen B.12, B.13 durch Anwendung von G_{k+1} auf die Elemente von v_k schreiben

$$\tilde{R}_{k+1,k}(0) = \big(G_{k+1} R_{k,k}\big)(0) = \big(G_{k+1} u_{k,k} v_k\big)(0) = u_{k,k}\big(G_{k+1} v_k\big)(0) = u_{k,k} \mathcal{Q}_{k+1,k} v(0).$$

Um die Behauptung nun auch für beliebige $l > k+1$ zu zeigen, setzen wir die Gültigkeit der Aussage für $l-1$ voraus. Dann erhalten wir gemäß den Sätzen B.12, B.13 erneut durch gliedweise Anwendung von G_{k+1} auf v_k den Zusammenhang

$$\tilde{R}_{l,k}(0) = \big(G_l \tilde{R}_{l-1,k}\big)(0) = \big(G_l u_{l-1,k} v_k\big)(0) = u_{l-1,k}\big(G_l v_k\big)(0) = u_{l-1,k} \mathcal{Q}_{l,k} v_k(0),$$

der die Aussage des Satzes wegen $v_k(0) = e_1$ schließlich beweist. □

Literaturverzeichnis

[1] Agarwal, Ravi P.: *Difference Equations and Inequalities*. Dekker, 2000.

[2] Allan, David W.: *Statistics of atomic frequency standards*. Proceedings of the IEEE, 54(2):221–230, 1966.

[3] Allan, David W. and James A. Barnes: *A modified "Allan variance" with increased oscillator characterization ability*. In *Proceedings of the IEEE International Frequency Control Symposium*, pages 470–475, 1981.

[4] Anderson, Brian D. O.: *Input-output properties of certain stable systems*. Proceedings of the IEEE, 56(5):896–870, 1968.

[5] Anderson, Oliver Duncan: *On warming-up time series simulations generated by Box-Jenkins models*. Journal of the Operational Research Society, 30(6):587–589, 1979.

[6] Andronow, Alexander Alexandrowitsch: *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations autoentretenues*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 189 :559–561, 1929.

[7] Andronow, Alexander Alexandrowitsch: *Poincaré limit cycles and the theory of self-sustaining oscillations*. Information & Communication Technologies, 2006. see also [6].

[8] Anděl, Jiří: *Statistische Analyse von Zeitreihen*. Akademie-Verlag, 1984.

[9] Anděl, Jiří: *Long memory time series modells*. Kybernetika, 22(2):105–123, 1986.

[10] Ansley, Craig F.: *Computation of the theoretical autocovariance function for a vector ARMA process*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 12(1):15–24, 1980.

[11] Appleton, Edward Victor and Balthasar van der Pol: *On the form of free triode vibrations*. Philosophical Magazine Series 6, 42(248):201–220, 1921.

[12] Appleton, Edward Victor and Balthasar van der Pol: *On a type of oscillation-hysteresis in a simple triode generator*. Philosophical Magazine Series 6, 43(253):177–193, 1922.

[13] Arnold, Ludwig: *Stochastische Differentialgleichungen*. Oldenbourg, 1973.

[14] Ash, Robert B. and Melvin F. Gardner: *Topics in Stochastic Processes*. Academic Press, 1975.

[15] Ash, Robert B. and W. Phil Novinger: *Complex Variables*. Web Edition, 2004.

[16] Baghdady, Elie J., Richard N. Lincoln, and Bert D. Nelin: *Short-term frequency stability: Characterization, theory, and measurement.* Proceedings of the IEEE, 53(7):704–722, 1965.

[17] Balakrishnan, Narayanaswamy and Valery B. Nevzorov: *A Primer on Statistical Distributions.* Wiley, 2003.

[18] Barkhausen, Heinrich Georg: *Das Problem der Schwingungserzeugung mit besonderer Berücksichtigung schneller elektrischer Schwingungen.* Promotion, Universität Göttingen, 1907.

[19] Barnes, James A., Andrew R. Chi, Leonard S. Cutler, Daniel J. Healey, David B. Leeson, Thomas E. McGunigal, James A. Mullen, Warren L. Smith, Richard L. Sydnor, Robert Vessot, and Gernot M. R. Winkler: *NBS Technical Note 394*, 1970.

[20] Barnes, James A., Andrew R. Chi, Leonard S. Cutler, Daniel J. Healey, David B. Leeson, Thomas E. McGunigal, James A. Mullen, Warren L. Smith, Richard L. Sydnor, Robert F. C. Vessot, and Gernot M. R. Winkler: *Characterization of frequency stability.* IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 20(2):105–120, 1971.

[21] Bartlett, Maurice Stevenson: *On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time-series.* Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society, 8(1):27–41, 1946.

[22] Bauer, Heinz: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* de Gruyter, 2002.

[23] Baugh, Richard A.: *Frequency modulation analysis with the Hadamard variance.* In *Proceedings of the IEEE Annual Symposium on Frequency Control*, pages 222–225, 1971.

[24] Behnen, Konrad und Georg Neuhaus: *Grundkurs Stochastik.* PD-Verlag, 2003.

[25] Benedetto, John J.: *Generalized harmonic analysis and Gabor and wavelet systems.* In *Proceedings of the AMS Symposia in Applied Mathematics*, 1991.

[26] Bensoussan, Alain and Jacques Louis Lions: *Analysis and Optimization of Systems.* Springer, 1984.

[27] Birkhoff, George David: *Proof of the ergodic theorem.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 17(12):656–660, 1931.

[28] Bobrowski, Adam: *Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes.* Cambridge University Press, 2005.

[29] Boileau, Étienne and Bernard Picinbono: *Statistical study of phase fluctuations and oscillator stability.* IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 25(1):66–75, 1976.

[30] Borovkov, Aleksandr Alekseevich: *Ergodicity and Stability of Stochastic Processes.* Wiley, 1998.

[31] Borzì, Alfio: *Numerische Mathematik für LAK*. Universität Graz, 2005.

[32] Box, George Edward Pelham and Gwilym Meirion Jenkins: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, 1970.

[33] Brockwell, Peter J. and Richard A. Davis: *Time Series: Theory and Methods*. Springer, 1991.

[34] Bunke, Helga: *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern*. Akademie-Verlag, 1972.

[35] Burn, David A.: *Simulation of stationary time series*. In *Proceedings of the Winter Simulation Conference*, pages 289–294, 1987.

[36] Carleson, Lennard: *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*. Acta Mathematica, 116:135–157, 1966.

[37] Chintchine, Alexander Jakowlewitsch: *Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse*. Mathematische Annalen, 109:604–615, 1934.

[38] Cohen, Leon: *The history of noise—on the 100th anniversary of its birth*. IEEE Signal Processing Magazine, pages 20–45, 2005.

[39] Collatz, Lothar: *Differentialgleichungen*. Teubner, 1967.

[40] Copas, John B.: *Monte carlo results for estimation in a stable Markov time series*. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 129(1):110–116, 1966.

[41] Coram, Geoffrey J.: *A simple 2-d oscillator to determine the correct decomposition of perturbations into amplitude and phase noise*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 48(7):896–898, 2001.

[42] Cramér, Harald and M. Ross Leadbetter: *Stationary and Related Stochastic Processes*. Wiley, 1967.

[43] Cutler, Leonard S. and Campbell L. Searle: *Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuations in frequency standards*. Proceedings of the IEEE, 54(2):136–154, 1966.

[44] de Reyna, Juan Arias: *Pointwise Convergence of Fourier Series*. Springer, 2002.

[45] Demir, Alper: *Floquet theory and non-linear perturbation analysis for oscillators with differential-algebraic equations*. International Journal of Circuit Theory and Applications, 28(2):163–185, 2000.

[46] Demir, Alper: *Phase noise and timing jitter in oscillators with colored-noise sources*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 49(12):1782–1791, 2002.

[47] Demir, Alper, Amit Mehrotra, and Jaijeet Roychowdhury: *Phase noise in oscillators: A unifying theory and numerical methods for characterization.* IEEE Transactions on Circuits and Systems, 47(5):655–674, 2000.

[48] Doob, Joseph Leo: *The Brownian movement and stochastic equations.* Annals of Mathematics, 43(2):351–369, 1942.

[49] Doob, Joseph Leo: *Stochastic Processes.* Wiley, 1990.

[50] Dörfel, Günter und Dieter Hoffmann: *Von Albert Einstein bis Norbert Wiener – frühe Ansichten und späte Einsichten zum Phänomen des elektronischen Rauschens.* Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, 2005.

[51] Durbin, James: *Efficient estimation of parameters in moving-average models.* Biometrika, 46(3-4):306–316, 1959.

[52] Durbin, James: *The fitting of time-series models.* Revue de l'Institut International de Statistique, 28(3):233–243, 1960.

[53] Edson, William A.: *Noise in oscillators.* Proceedings of the IRE, 48(8):1454–1466, 1960.

[54] Einstein, Albert: *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.* Annalen der Physik, 17:549–560, 1905.

[55] Einstein, Albert: *Eine Methode zur statistischen Verwertung von Beobachtungen scheinbar unregelmässig quasiperiodisch verlaufender Vorgänge.* The collected Papers of Albert Einstein, 1914.

[56] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer, 2002.

[57] Farkas, Miklós: *Periodic motions.* Springer, 1994.

[58] Flandrin, Patrick: *On the spectrum of fractional Brownian motions.* IEEE Transactions on Information Theory, 35(1):197–199, 1989.

[59] Flandrin, Patrick and Wolfgang Martin: *Analysis and Optimization of Systems*, chapter 2, A general class of estimators for the Wigner-Ville spectrum of non-stationary processes. Springer, 1984. see also [26].

[60] Fougère, Paul F.: *On the accuracy of spectrum analysis of red noise processes using maximum entropy and periodogram methods: Simulation studies and application to geophysical data.* Journal of Geophysical Research, 90(A5):4355–4366, 1984.

[61] Gerber, Eduard A. and Arthur Ballato (editors): *Precision Frequency Control.* Academic Press, 1985.

[62] Geweke, John and Susan Porter-Hudak: *The estimation and application of long memory time series models*. Journal of Time Series Analysis, 4(4):221–238, 1983.

[63] Gillespie, Daniel T.: *Exact numerical simulation of the Ornstein-Uhlenbeck process and its integral*. Physical Review, 54(2):2084–2091, 1996.

[64] Giraitis, Liudas and Remigijus Leipus: *A generalized fractionally differencing approach in long-memory modeling*. Lithuanian Mathematical Journal, 35(1):53–65, 1995.

[65] Granger, Clive William John and Michio Hatanaka: *Spectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton University Press, 1964.

[66] Gray, Henry L., Nien Fan Zhang, and Wayne A. Woodward: *On generalized fractional processes*. Journal of Time Series Analysis, 10(3):233–257, 1989.

[67] Greenhall, Charles A.: *Does Allan variance determine the spectrum?* In *Proceedings of the IEEE International Frequency Control Symposium*, pages 358–365, 1997.

[68] Hafner, Erich: *The effects of noise in oscillators*. Proceedings of the IEEE, 54(2):179–198, 1966.

[69] Hajimiri, Ali and Thomas H. Lee: *A general theory of phase noise in electrical oscillators*. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 33(2):179–194, 1998.

[70] Hale, Jack K. and Hüseyin Koçak: *Dynamics and Bifurcations*. Springer, 1991.

[71] Hamilton, James Douglas: *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 1994.

[72] Hertz, Heinrich Rudolf: *Ueber sehr schnelle electrische Schwingungen*. Annalen der Physik, 267(7):421–448, 1887.

[73] Hertz, Heinrich Rudolf: *Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen*. Annalen der Physik, 270(7):551–569, 1888.

[74] Heuser, Harro: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner, 1991.

[75] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. Teubner, 2001.

[76] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teubner, 2002.

[77] Heuser, Harro: *Funktionalanalysis*. Teubner, 2006.

[78] Hewlett Packard: *Technical Data of Hyperabrupt Varactor-Tuned Oscillators—VTO-9000 Series*, 1997.

[79] Hipel, Keith William and Angus Ian McLeod: *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems*. Elsevier Science B. V., 1994.

[80] Hoffmann, Rüdiger: *Signalanalyse und -erkennung – Eine Einführung für Informationstechniker*. Springer, 1998.

[81] Hopf, Eberhard: *Ergodentheorie*. Springer, 1937.

[82] Hosking, Jonathan R. M.: *Fractional differencing*. Biometrika, 68(1):165–176, 1981.

[83] Howe, David A.: *The total deviation approach to long-term characterization of frequency stability*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 47(5):1102–1110, 2000.

[84] Hurwitz, Adolf: *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt*. Mathematische Annalen, 46(2):273–284, 1895.

[85] IEEE Standards Coordinating Committee 27: *Standard Definitions of Physical Quantities for Fundamental Frequency and Time Metrology—Random Instabilities, IEEE Std 1139-1988*, 1988.

[86] IEEE Standards Coordinating Committee 27: *Guide for Measurement of Environmental Sensitivities of Standard Frequency Generators, IEEE Std 1193-1994*, 1994.

[87] IEEE Standards Coordinating Committee 27: *Standard Definitions of Physical Quantities for Fundamental Frequency and Time Metrology—Random Instabilities, IEEE Std 1139-1999*, 1999.

[88] IEEE Standards Coordinating Committee 27: *Guide for Measurement of Environmental Sensitivities of Standard Frequency Generators, IEEE Std 1193-2003*, 2004.

[89] Israel, Giorgio: *Technological Concepts and Mathematical Models in the Evolution of Modern Engineering Systems*, chapter 3, Technological Innovation and New Mathematics: van der Pol and the Birth of Non-Linear Dynamics. Birkhäuser, 2004. see also [123].

[90] Itô, Kiyosi: *Stochastic integral*. Proceedings of the Japan Academy, 20(8):519–524, 1944.

[91] Jarrow, Robert and Philip Protter: *A short history of stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880–1970*. Lecture Notes Monograph of the Institute of Mathematical Statistics, 45:1–17, 2004.

[92] Jazwinski, Andrew H.: *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, 1970.

[93] Johnson, John Bertrand: *Bemerkung zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt*. Annalen der Physik, 372(2):154–156, 1922.

[94] Johnson, John Bertrand: *The schottky effect in low frequency circuits*. Physical Review, 26(1):71–85, 1925.

[95] Johnson, John Bertrand: *Thermal agitation of electricity in conductors*. Physical Review, 32(1):97–109, 1928.

[96] Jordan, Dominic William and Peter Smith: *Nonlinear Ordinary Differential Equations: An Introduction to Dynamical Systems*. Oxford University Press, 1999.

[97] Kaertner, Franz X.: *Determination of the correlation spectrum of oscillators with low noise*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 37(1):90–101, 1989.

[98] Kaertner, Franz X.: *Analysis of white and $f^{-\alpha}$ noise in oscillators*. International Journal of Circuit Theory and Applications, 18(5):485–519, 1990.

[99] Kammeyer, Karl Dirk und Kristian Kroschel: *Digitale Signalverarbeitung – Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB-Übungen*. Teubner, 2002.

[100] Karanasos, Menelaos: *A new method for obtaining the autocovariance of an ARMA model: An exact form solution*. Econometric Theory, 14(5):622–640, 1998.

[101] Karanasos, Menelaos: *A new method for obtaining the autocovariance of an ARMA model: An exact form solution—acknowledgment of priority and correction note*. Econometric Theory, 16(2):280–282, 2000.

[102] Kasdin, N. Jeremy: *Discrete simulation of colored noise and stochastic processes and $1/f^{\alpha}$ power law noise generation*. Proceedings of the IEEE, 83(5):802–827, 1995.

[103] Kasdin, N. Jeremy and Todd Walter: *Discrete simulation of power law noise*. In *Proceedings of the IEEE Frequency Control Symposium*, pages 274–283, 1992.

[104] Kay, Steven M.: *Efficient generation of colored noise*. Proceedings of the IEEE, 69(4):480–481, 1981.

[105] Kay, Steven M.: *Generation of the autocorrelation sequence of an ARMA process*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 33(3):733–734, 1985.

[106] Kay, Steven M.: *Intuitive Probability and Random Processes Using MATLAB*. Springer, 2006.

[107] Keshner, Marvin S.: *$1/f$ noise*. Proceedings of the IEEE, 70(3):212–218, 1982.

[108] Kiełbasiński, Andrzej und Hubert Schwetlick: *Numerische lineare Algebra*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1988.

[109] Klimovitch, Gleb V.: *Near-carrier oscillator spectrum due to flicker and white noise*. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages 703–706, 2000.

[110] Klimovitch, Gleb V.: *A nonlinear theory of near-carrier phase noise in free-running oscillators*. In *Proceedings of the IEEE International Caracas Conference on Devices, Circuits and Systems*, pages T80/1–T80/6, 2000.

[111] Königsberger, Konrad: *Analysis 1*. Springer, 2001.

[112] Königsberger, Konrad: *Analysis 2*. Springer, 2002.

[113] Köstner, Ronald und Albrecht Möschwitzer: *Elektronische Schaltungstechnik*. Verlag Technik, 1978.

[114] Krylov, Nikolai Vladimirovich: *Introduction to the Theory of Random Processes*. American Mathematical Society, 2002.

[115] Kuznetsov, Peter I., Ruslan L. Stratonovich, and Vladimir I. Tikhonov: *Non-Linear Transformations of Stochastic Processes*. Pergamon Press, 1965.

[116] Lamb, Willis E.: *Theory of an optical maser*. Physical Review, 134-A:1429–1450, 1964.

[117] Langevin, Paul: *Sur la théorie du mouvement brownien*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 146 :530–533, 1908.

[118] Lee, Thomas H. and Ali Hajimiri: *Oscillator phase noise: A tutorial*. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 35(3):326–336, 2000.

[119] Leeson, David B.: *A simple model of feedback oscillator noise spectrum*. Proceedings of the IEEE, 54(2):329–330, 1966.

[120] Lemons, Don S. and Anthony Gythiel: *Paul Langevin's 1908 paper "on the theory of Brownian motion"*. American Journal of Physics, 65(11):1079–1081, 1997. see also [117].

[121] Levin, Morris J.: *Generation of a sampled Gaussian time series having a specified correlation function*. IRE Transactions on Information Theory, 6(5):545–548, 1960.

[122] Lindsey, William C. and Chak Ming Chie: *Theory of oscillator instability based upon structure functions*. Proceedings of the IEEE, 64(12):1652–1666, 1976.

[123] Lucertini, Mario, Ana Millán Gasca, and Fernando Nicolò (editors): *Technological Concepts and Mathematical Models in the Evolution of Modern Engineering Systems*. Birkhäuser, 2004.

[124] Mandelbrot, Benoît B.: *Some noises with $1/f$ spectrum, a bridge between direct current and white noise*. IEEE Transactions on Information Theory, 13(2):289–298, 1967.

[125] Mandelbrot, Benoît B. and John W. Van Ness: *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*. SIAM Review, 10(4):422–437, 1968.

[126] Markel, John E. and Augustine H. Gray: *Linear Prediction of Speech*. Springer, 1976.

[127] Martin, Wolfgang and Patrick Flandrin: *Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 33(6):1461–1470, 1985.

[128] McLeod, Angus Ian: *Derivation of the theoretical autocovariance function of autoregressive-moving average time series*. Applied Statistics, 24(2):255–256, 1975.

[129] McLeod, Angus Ian and Keith William Hipel: *Preservation of the rescaled adjusted range 1: A reassessment of the Hurst phenomenon.* Water Resources Research, 14(3):491–508, 1978.

[130] McLeod, Angus Ian and Keith William Hipel: *Simulation procedures for Box-Jenkins models.* Water Resources Research, 14(5):969–975, 1978.

[131] McLeod, Angus Ian, Hao Yu, and Zinovi L. Krougly: *Algorithms for linear time series analysis: With R package.* Journal of Statistical Software, 23(5):1–26, 2007.

[132] Merziger, Gerhard und Thomas Wirth: *Repetitorium der Höheren Mathematik.* Binomi, 1993.

[133] Miller, Kenneth S.: *Linear Difference Equations.* Benjamin, 1968.

[134] Miller, Kenneth S.: *A note on stochastic difference equations.* The Annals of Mathematical Statistics, 39(1):270–271, 1968.

[135] Nerlove, Marc, David M. Grether, and José L. Carvalho: *Analysis of Economic Time Series—A Synthesis.* Academic Press, 1979.

[136] Numerical Algorithms Group: *NAG C Library Manual*, mark 8 edition, 2005.

[137] Nyquist, Harry: *Thermal agitation of electric charge in conductors.* Physical Review, 32(1):110–113, 1928.

[138] Oppenheim, Alan V., Ronald W. Schafer und John R. Buck: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung.* Pearson, 2004.

[139] Pagano, Marcello: *When is an autoregressive scheme stationary?* Communications in Statistics—Simulation and Computation, 1(6):533–544, 1973.

[140] Pagano, Marcello: *Estimation of models of autoregressive signal plus white noise.* The Annals of Statistics, 2(1):99–108, 1974.

[141] Pandit, Sudhakar M. and Samuel Miao Sin Wu: *Time Series and System Analysis With Applications.* Wiley, 1983.

[142] Percival, Donald B.: *Characterization of frequency stability: Frequency-domain estimation of stability measures.* Proceedings of the IEEE, 79(7):961–972, 1991.

[143] Polyanin, Andrei D. and Valentin F. Zaitsev: *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations.* Chapman & Hall, 2003.

[144] Priestley, Maurice Bertram: *Spectral Analysis and Time Series.* Academic Press, 1996.

[145] Quenouille, Maurice Henry: *Notes on the calculation of autocorrelations of linear autoregressive schemes.* Biometrika, 34(3-4):365–367, 1947.

[146] Rice, Stephen O.: *Mathematical analysis of random noise.* The Bell Systems Technical Journal, 23:282–332, 1944.

[147] Rice, Stephen O.: *Mathematical analysis of random noise.* The Bell Systems Technical Journal, 24:46–156, 1945.

[148] Risken, Hannes: *The Fokker-Planck Equation.* Springer, 1989.

[149] Rosanow, Juri A.: *Stochastische Prozesse.* Akademie-Verlag, 1975.

[150] Rutman, Jacques: *Oscillator specification: A review of classical and new ideas.* In *Proceedings of the IEEE Annual Symposium on Frequency Control*, pages 291–301, 1977.

[151] Rutman, Jacques: *Characterization of phase and frequency instabilities in precision frequency sources: Fifteen years of progress.* Proceedings of the IEEE, 66(9):1048–1075, 1978.

[152] Rutman, Jacques and Fred L. Walls: *Characterization of frequency stability in precision frequency sources.* Proceedings of the IEEE, 79(7):952–960, 1991.

[153] Ryder, John Douglas and Donald Glen Fink: *Engineers and Electrons: A Century of Electrical Progress.* IEEE Press, 1984.

[154] Saletti, Roberto: *A comparison between two methods to generate* $1/f^{\gamma}$ *noise.* Proceedings of the IEEE, 74(11):1595–1596, 1986.

[155] Sasvári, Zoltán: *Vorlesungen über stationäre Prozesse.* Technische Universität Dresden, 2008.

[156] Sauvage, Gérard: *Phase noise in oscillators: A mathematical analysis of Leeson's model.* IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 26(4):408–410, 1977.

[157] Schottky, Walter: *Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern.* Annalen der Physik, 362(23):541–567, 1918.

[158] Schottky, Walter: *Zur Berechnung und Beurteilung des Schroteffektes.* Annalen der Physik, 373(10):157–176, 1922.

[159] Schottky, Walter: *Small-shot effect and flicker effect.* Physical Review, 28(1):74–103, 1926.

[160] Schur, Issai: *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 147(4):205–232, 1917.

[161] Schur, Issai: *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 148(3/4):122–145, 1918.

[162] Seifart, Manfred: *Analoge Schaltungen.* Verlag Technik, 1996.

[163] Shih, Shagi Di: *On periodic orbits of relaxation oscillations.* Taiwanese Journal of Mathematics, 6(2):205–234, 2002.

[164] Stein, Samuel R.: *Precision Frequency Control*, chapter 12, Frequency and Time—Their Measurement and Characterization. Academic Press, 1985. see also [61].

[165] Širjaev, Albert N.: *Wahrscheinlichkeit*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1988.

[166] Titchmarsh, Edward Charles: *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford University Press, 1948.

[167] Uhlenbeck, George Eugène and Leonard Salomon Ornstein: *On the theory of the Brownian motion*. Physical Review, 36(5):823–841, 1930.

[168] van der Pol, Balthasar: *On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom*. Philosophical Magazine Series 6, 43(256):700–719, 1922.

[169] van der Pol, Balthasar: *On "relaxation-oscillations"*. Philosophical Magazine Series 7, 2(11):978–992, 1926.

[170] van der Pol, Balthasar: *The nonlinear theory of electric oscillations*. Proceedings of the IRE, 22(9):1051–1086, 1934.

[171] von Neumann, John: *Proof of the quasi-ergodic hypothesis*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 18(1):70–82, 1932.

[172] Walker, Gilbert: *On periodicity in series of related terms*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 131(818):518–532, 1931.

[173] Walls, Fred L. and David W. Allan: *Measurements of frequency stability*. Proceedings of the IEEE, 74(1):162–168, 1986.

[174] Wang, Ming Chen and George Eugène Uhlenbeck: *On the theory of the Brownian motion ii*. Reviews of Modern Physics, 17(2-3):323–342, 1945.

[175] Weissmantel, Christian, Richard Lenk, Wolfgang Forker, Rudolf Ludloff und Johannes Hoppe: *Atom – Struktur der Materie*. Bibliographisches Institut, 1970.

[176] Wentzell, Alexander D.: *Theorie zufälliger Prozesse*. Akademie-Verlag, 1979.

[177] Werner, Dirk: *Funktionalanalysis*. Springer, 2002.

[178] Wiener, Norbert: *Differential-space*. Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology, 2(3):131–174, 1923.

[179] Wiener, Norbert: *Generalized harmonic analysis*. Acta Mathematica, 55(1):117–258, 1930.

[180] Wilson, Granville Tunnicliffe: *Some efficient computational procedures for high order ARMA models*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 8(3-4):301–309, 1979.

[181] Wold, Herman Ole Andreas: *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*. Almqvist & Wiksells, 1938.

[182] Wong, Eugene and Bruce Hajek: *Stochastic processes in engineering systems*. Springer, 1985.

[183] Woodward, Wayne A., Qin C. Cheng, and Henry L. Gray: *A k-factor GARMA long-memory model*. Journal of Time Series Analysis, 19(4):485–504, 1998.

[184] Wunsch, Gerhard und Helmut Schreiber: *Stochastische Systeme*. Springer, 1992.

[185] Wunsch, Gerhard und Helmut Schreiber: *Analoge Systeme*. Springer, 1993.

[186] Yule, George Udny: *On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 226:267–298, 1927.

[187] Zinde-Walsh, Victoria: *Some exact formulae for autoregressive moving average processes*. Econometric Theory, 4(3):384–402, 1988.

[188] Zinde-Walsh, Victoria: *Errata—some exact formulae for autoregressive moving average processes*. Econometric Theory, 6(2):293, 1990.

[189] Zund, Joseph D.: *George David Birkhoff and John von Neumann: A question of priority and the ergodic theorems, 1931–1932*. Historia Mathematica, (29):138–156, 2002.

[190] Zwillinger, Daniel: *Standard Mathematical Tables and Formulae*. Chapman & Hall, 2003.