

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN  
FAKULTÄT VERKEHRSWISSENSCHAFTEN „FRIEDRICH LIST“

Dissertation

**Ein Beitrag zur spurtreuen Führung  
n-gliedriger mehrachsgelenkter Fahrzeuge**

zur Erlangung des akademischen Grades  
**Doktor der Ingenieurwissenschaften**  
(Dr.-Ing.)

eingereicht von  
**Diplom-Ingenieur Sebastian Wagner**

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Bernard Bäker  
Institut für Automobiltechnik Dresden  
Technische Universität Dresden

Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Michael Beitelschmidt  
Institut für Bahnfahrzeuge und Bahntechnik  
Technische Universität Dresden

Eingereicht am: 09. April 2009  
Tag der Verteidigung: 02. Februar 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Stand der Technik</b>	<b>9</b>
1.1	Entwicklungsstand automatischer Lenkungen . . . . .	10
1.1.1	Spurführung . . . . .	12
1.1.2	Nachführung . . . . .	14
1.1.3	Regelungstechnische Ansätze . . . . .	16
1.2	Ziel und Aufbau der Arbeit . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Modellbildung von Fahrzeugen</b>	<b>23</b>
2.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	24
2.1.1	Kinematik des freien starren Körpers . . . . .	24
2.1.2	Kinematik der Mehrkörpersysteme . . . . .	28
2.1.3	Dynamik der Mehrkörpersysteme . . . . .	33
2.2	Modellierung n-gliedriger, allrad-gelenkter Fahrzeuge . . . . .	37
2.2.1	Fahrzeugmodell . . . . .	38
2.2.2	Reifenmodell . . . . .	51
2.2.3	Simulationsbasierte und experimentelle Validierung . . . . .	54
2.3	Zusammenfassung . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Entwurf der automatischen Lenkungen</b>	<b>65</b>
3.1	Automatische Spurführung . . . . .	66
3.1.1	Modellbasierte Vorsteuerung . . . . .	67
3.1.2	Rückführregelung . . . . .	80
3.2	Nachführregelung . . . . .	87
3.3	Zusammenfassung . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Erprobung der automatischen Lenkungen</b>	<b>95</b>
4.1	Simulation . . . . .	96
4.1.1	Simulationsergebnisse der automatischen Spurführung . . . . .	98
4.1.2	Simulationsergebnisse der Nachführregelung . . . . .	104
4.2	Experimentelle Erprobung . . . . .	108

4.3 Zusammenfassung . . . . .	116
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>119</b>
<b>A Literaturverzeichnis</b>	<b>123</b>
<b>B Fahrzeugparameter</b>	<b>137</b>
B.1 Achslastmessung und Schwerpunktberechnung . . . . .	137
B.2 Stellregelkreise der Lenkachsen . . . . .	138
<b>C Ergebnisse der Modellvalidierung</b>	<b>143</b>
C.1 Simulationsbasierte Validierung . . . . .	143
C.2 Experimentelle Validierung . . . . .	151
<b>D Versuchsergebnisse</b>	<b>155</b>
<b>E Mathematische Anhänge</b>	<b>157</b>
E.1 Ergänzungen zur Sollgeschwindigkeits- und -beschleunigungsberechnung . . .	157
E.2 Ergänzungen zur Sollseitenkraftberechnung . . . . .	164

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Doppelgelenkbus VanHool AGG 300 (Quelle: VanHool NV)	9
1.2	Unterteilung spurtreuer automatischer Lenkungen	11
1.3	Dreigliedriges Gelenkfahrzeug in einer S-Kurve	19
2.1	Definition von Koordinatensystemen am freien starren Körper	26
2.2	Einspurmodell des n-gliedrigen Fahrzeugs	39
2.3	Kräfte an der Achse $A_i$	44
2.4	Reifenaufstandspunkte	45
2.5	Querkkräfte am Einspurmodell	47
2.6	Reifenkräfte und Geschwindigkeitsvektor an der Achse $A_i$	52
2.7	Reifenkennlinien des Simulationsmodells bei 20 – 30 kN Normalkraft $z_{f_{A_i/A_i}}$	53
2.8	Simulationsmodell eines dreigliedrigen Fahrzeugs	55
2.9	Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell, $\tilde{\gamma}_1(t_1) = 10^\circ$ , $v_x = 10$ m/s	58
2.10	Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell, $\tilde{\gamma}_0(t_1) = 5^\circ$ , $v_x = 20$ m/s	59
2.11	Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell anhand der Teststrecke	60
2.12	Vergleich des Entwurfsmodells mit dem Versuchsfahrzeug	63
3.1	Struktur der automatischen Spurführung mit zwei Freiheitsgraden	67
3.2	Konzept der Vorsteuerung am Beispiel eines dreigliedrigen Gelenkfahrzeugs	69
3.3	Initialisierung von $A_{S0}$ im Kreuzungsbereich	74
3.4	Struktur der automatischen Spurführung mit nichtlinearem Mehrgrößenregler	81
3.5	Struktur der automatischen Spurführung mit linearen Eingrößenreglern	83
3.6	Regelabweichungen der linearen Rückführregler	86
3.7	Struktur der Nachführregelung	88
4.1	Teststrecke für die Erprobung der automatischen Lenkungen	95
4.2	Verteilung der Zuladung $\Delta m$ im $i$ -ten Fahrzeugmodul	97
4.3	Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte, Mehrgrößenregler, $\mu = 0.9$	100
4.4	Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte, Eingrößenregler, $\mu = 0.9$	100
4.5	Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte, Mehrgrößenregler, $\mu = 0.3$	101

4.6	Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte, Eingrößenregler, $\mu = 0.3$	101
4.7	Simulationsergebnisse für $v_x = 7 \text{ m/s}$ , $\Delta m = 5000 \text{ kg}$ , $\mu = 0.3$	102
4.8	Simulationsergebnis bei seitlicher Störung	103
4.9	Maximaler Spurversatz der Achsmittelpunkte $A_2$ und $A_3$ , $\mu = 0.9$	105
4.10	Maximaler Spurversatz der Achsmittelpunkte $A_2$ und $A_3$ , $\mu = 0.3$	105
4.11	Simulationsergebnisse der Nachführregelung, $v_x = 8 \text{ m/s}$ , $\Delta m = 0 \text{ kg}$ , $\mu = 0.9$	106
4.12	Bildsequenz eines 24 m langen Fahrzeugs im BOKraft-Kreis	107
4.13	Das zweigliedrige, allrad-gelenkte Versuchsfahrzeug AutoTram	108
4.14	MSR-Technik für die Spurführung der AutoTram	109
4.15	Fahrversuch auf der Teststrecke mit $v_x = 4 \text{ m/s}$	113
4.16	Fahrversuch auf der Teststrecke mit $v_x = 8 \text{ m/s}$	114
4.17	Kurvenbremsung von $v_x = 8 \text{ m/s}$ auf $0 \text{ m/s}$ in einer $R25$ -Kurve	115
B.1	Struktur der Stellregelkreise	138
B.2	Ein-/ Ausgangsverhalten der elektrohydraulischen Lenkung	139
B.3	Sprungantworten der geregelten elektrohydraulischen Lenkung	141
C.1	Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell, $\tilde{\gamma}_0(t_1) = 40^\circ$ , $v_x = 2 \text{ m/s}$	144
C.2	Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell, $\tilde{\gamma}_3(t_1) = 40^\circ$ , $v_x = 4 \text{ m/s}$	145
C.3	Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell, $\tilde{\gamma}_0(t_1) = 20^\circ$ , $v_x = 6 \text{ m/s}$	146
C.4	Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell, $\tilde{\gamma}_2(t_1) = 20^\circ$ , $v_x = 8 \text{ m/s}$	147
C.5	Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell, $\tilde{\gamma}_1(t_1) = 2^\circ$ , $v_x = 20 \text{ m/s}$	148
C.6	Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell anhand der Teststrecke	149
C.7	Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell anhand der Teststrecke	150
C.8	Vergleich des Entwurfsmodells mit dem Versuchsfahrzeug	151
C.9	Vergleich des Entwurfsmodells mit dem Versuchsfahrzeug	152
C.10	Vergleich des Entwurfsmodells mit dem Versuchsfahrzeug	153
D.1	Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte, Eingrößenregler, $\mu = 0.6$	155
D.2	Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte, Mehrgrößenregler, $\mu = 0.6$	156
D.3	Maximaler Spurversatz der Achsmittelpunkte $A_2$ und $A_3$ , $\mu = 0.6$	156
E.1	Winkel zwischen dem Vektor $\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}}$ und der Längsachse eines Fahrzeugmoduls	157
E.2	Determinante von $\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1}$ in Abhängigkeit vom Knickwinkel $\Delta\psi_1$	165
E.3	Determinante von $\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1}$ in Abhängigkeit von den Knickwinkeln $\Delta\psi_1$ und $\Delta\psi_2$	166

# Symbolverzeichnis

In der vorliegenden Arbeit sind skalare Größen durch kursive Kleinbuchstaben ( $a$ ), Vektoren durch fette Kleinbuchstaben ( $\mathbf{a}$ ), Matrizen durch fette Großbuchstaben ( $\mathbf{A}$ ), Punkte durch kursive Großbuchstaben ( $A$ ) und Koordinatensysteme durch kalligraphische Großbuchstaben ( $\mathcal{A}$ ) gekennzeichnet. Selten benutzte oder abweichende Bedeutungen werden im Text erläutert.

## Symbole

$\alpha_{\mathcal{AB}/\mathcal{C}}$	Winkelbeschleunigung des Koordinatensystems $\mathcal{B}$ gegenüber $\mathcal{A}$ dargestellt in $\mathcal{C}$
$\dot{a}$	Zeitableitung $da/dt$
$\mathbf{a}_{\mathcal{AB}/\mathcal{C}}$	Beschleunigung des Punktes $B$ gegenüber dem Punkt $A$ dargestellt im Koordinatensystem $\mathcal{C}$
$A_i$	Mittelpunkt der $i$ -ten Achse
$\mathbf{A}_{\mathcal{AB}}$	Drehmatrix; Orientierung des Koordinatensystems $\mathcal{B}$ gegenüber $\mathcal{A}$
$\beta_i$	Schwimmwinkel der $i$ -ten Achse
$c_i$	Seitenkraftbeiwert
$\mathbf{e}$	Regelabweichung
$E_{Kin}$	kinetische Energie
${}^x f_{A_i/A_i}$	Antriebskraft an einem Reifen der Achse $A_i$
${}^y f_{A_i/A_i}$	Seitenkraft an einem Reifen der Achse $A_i$
$\mathbf{f}_w$	seitlich auf die Fahrzeugmodule wirkende Störkräfte
$\mathbf{f}_{A_i}$	Reifenkraft an einem Reifen der Achse $A_i$
$\mathbf{f}_{cr}$	Seitenkräfte (Reifenkräfte quer zu den Fahrzeugmodulen)
$\mathbf{f}_{dr}$	Längskräfte (Reifenkräfte quer zu den Fahrzeugmodulen)
$\mathbf{f}_{W_i}$	Störkraft am $i$ -ten Fahrzeugmodul
$\varphi_i$	Schräglaufwinkel der $i$ -ten Achse
$\gamma_S$	Solllenkwinkel
$\gamma_i$	Lenkwinkel der $i$ -ten Achse
$\mathbf{g}$	Vektor der Coriolis- und Zentrifugalkräfte
$\mathbf{h}$	Querabweichungen
$\mathbf{I}_{K_i}$	Trägheitstensor des $i$ -ten Fahrzeugmoduls

$\mathcal{I}$	inertiales Koordinatensystem
$\mathbf{J}$	Jacobi-Matrix
$\mathbf{J}_\omega$	Jacobi-Drehmatrix
$\kappa$	Krümmung
$\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1$	Diagonalmatrizen der Reglerparameter
$\mathcal{K}_i$	Koordinatensystem im Schwerpunkt des $i$ -ten Fahrzeugmoduls
$K_i$	Schwerpunkt des $i$ -ten Fahrzeugmoduls
$\mathbf{L}_{\dots}$	Koeffizientenmatrix zur Positionsberechnung
$l_{\dots}$	Fahrzeuggeometrieparameter
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$m_i$	Masse des $i$ -ten Fahrzeugmoduls
$n$	Anzahl der Fahrzeugmodule
$n_f$	Anzahl der Freiheitsgrade
$n_h$	Anzahl der holonomen Bindungen
$\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{A}\mathcal{B}/\mathcal{C}}$	Tensor der Winkelgeschwindigkeiten des Koordinatensystems $\mathcal{B}$ gegenüber $\mathcal{A}$ dargestellt in $\mathcal{C}$
$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}\mathcal{B}/\mathcal{C}}$	Vektor der Winkelgeschwindigkeiten des Koordinatensystems $\mathcal{B}$ gegenüber $\mathcal{A}$ dargestellt in $\mathcal{C}$
$\psi_i$	Gierwinkel des $i$ -ten Fahrzeugmoduls
$\mathbf{q}$	verallgemeinerte eingeprägte Kräfte
$\mathbf{q}_A$	verallgemeinerte Reifenkräfte
$\mathbf{q}_W$	verallgemeinerte Störkräfte
$\mathbf{r}_{\mathcal{A}\mathcal{B}/\mathcal{C}}$	Vektor vom Punkt $A$ zum Punkt $B$ dargestellt im Koordinatensystem $\mathcal{C}$ ; sind die Punkte $A$ und $B$ Ursprünge der Koordinatensysteme $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ , wird auch $\mathbf{r}_{\mathcal{A}\mathcal{B}/\mathcal{C}}$ geschrieben
$\mathbf{s}(\lambda)$	Sollweg
$\mathbf{T}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_1}$	Transformationsmatrix
$t$	Zeit
$\mathbf{u}$	Reglerausgangsgröße
$\mathbf{v}_{\mathcal{A}\mathcal{B}/\mathcal{C}}$	Geschwindigkeit des Punktes $B$ gegenüber $A$ dargestellt im Koordinatensystem $\mathcal{C}$
$v_x$	Geschwindigkeit in Längsrichtung des ersten Fahrzeugmoduls
$x$	$x$ -Koordinate von $K_1$ im inertialen Koordinatensystem $\mathcal{I}$
$y$	$y$ -Koordinate von $K_1$ im inertialen Koordinatensystem $\mathcal{I}$
$\mathbf{z}$	Minimalkoordinaten

## Abkürzungen

(D)GPS	(Differential) Global Positioning System
DOF	Degree of Freedom
ESP	Elektronisches Stabilitätsprogramm
FEM	Finite Elemente Methode
FTS	Fahrerloses Transportsystem
INS	Inertial Navigation System
MKS	Mehrkörpersystem
ÖPNV	Öffentlicher Personennahverkehr
PT <sub>1</sub> , PT <sub>2</sub>	Verzögerungsglied 1. und 2. Ordnung
SNS	Satellitennavigationssystem



# Kapitel 1

## Einleitung und Stand der Technik

Der stetig wachsende Verkehr und die begrenzten Ressourcen erfordern neue, effiziente Lösungen für den Personen- und Güterverkehr. Die leistungsfähigen konventionellen Schienenfahrzeuge bieten zwar eine hohe Transportkapazität, weisen aber auch hohe Infrastruktur- und Betriebskosten, eine geringe Flexibilität sowie einen erheblichen Flächenbedarf auf.

Analog zu Schienenfahrzeugen sollen Transportaufgaben im Straßenverkehr zukünftig effizienter erfüllt werden, indem lange mehrgliedrige Fahrzeuge mit hoher Transportkapazität bzw. Zuladung eingesetzt werden (Bild 1.1). Bestimmte Güter werden bereits mit bis zu 70 m langen Schwerlastfahrzeugen transportiert [52].



**Bild 1.1:** Doppelgelenkbus VanHool AGG 300 (Quelle: VanHool NV)

Bei langen mehrgliedrigen Straßenfahrzeugen besteht die Herausforderung vor allem darin, sie in einem breiten Geschwindigkeitsbereich und in beiden Fahrtrichtungen gut und sicher manövrierbar zu gestalten. Ein Fahrer ist beispielsweise ohne unterstützende Systeme nicht mehr in der Lage, Fahrzeuge mit mehr als zwei Gelenken, dazu gehören Doppelgelenkbus-

se oder Lkw mit zwei Anhängern, in der Rückwärtsfahrt sicher zu beherrschen [88]. In der Vorwärtsfahrt ist ein sicheres Manövrieren langer Fahrzeuge insbesondere auf engen und kurvigen Straßen schwierig und ermüdend, weil die Hinterräder bei der Kurvenfahrt eine so genannte Schleppkurve beschreiben. Diese Schleppkurve weicht mit zunehmendem Achsabstand und abnehmendem Kurvenradius immer stärker vom Spurverlauf der Vorderachse ab. Es entsteht ein signifikanter seitlicher Versatz der Hinterräder, der in dieser Arbeit als Spurversatz bezeichnet wird. Der Spurversatz stellt besonders in engen Kurven ein erhebliches Gefahrenpotential dar und beschränkt den Einsatz langer Fahrzeuge bisher auf Strecken mit großen Kurvenradien und Spurbreiten. In [11] wird die Kinematik mehrgliedriger Fahrzeuge ausführlich analysiert.

Dennoch lassen sich lange und mehrgliedrige Fahrzeuge gut handhaben, wenn sie mit automatischen Lenkungen ausgestattet werden, die eine *hochgradig spurtreue* Fahrzeugführung ermöglichen. Hochgradig spurtreu bedeutet, dass die Achsen wie bei Schienenfahrzeugen keinen Spurversatz zueinander aufweisen.

In der vorliegenden Arbeit werden neuartige automatische Lenkungen konzipiert, entwickelt und erprobt, die eine solche hochgradig spurtreue Führung mehrachsgelenkter Gelenkfahrzeuge erlauben. Diese hochgradig spurtreue Fahrzeugführung soll

1. bei automatischer Fahrt entlang eines festen Sollwegs und auch
2. bei einer durch einen Fahrer gelenkten Vorderachse gelingen.

Als Grundlage für die Lösung dieser Aufgabenstellung wird nachfolgend der Stand der Technik beschrieben und anschließend die Teilziele und der Aufbau der Arbeit abgeleitet.

## 1.1 Entwicklungsstand automatischer Lenkungen

In der Literatur werden Begriffe wie *automatische Spurführung* und *automatische Lenkung* unterschiedlich aufgefasst, sodass zunächst eine kurze Begriffsbestimmung erfolgt.

Der Begriff *automatische Lenkung* bezeichnet in der vorliegenden Arbeit alle Systeme, bei denen die Räder einer oder mehrerer Fahrzeugachsen selbsttätig gelenkt werden. Der Zweck einer automatischen Lenkung, auch *Steuerungsziel* genannt, ist ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal, das die technische Umsetzung grundlegend beeinflusst. Daher ist es zweckmäßig, automatische Lenkungen ihrem Steuerungsziel entsprechend in

1. Automatische Spurführungen,
2. Automatische Nachführung und

## 3. Automatische Fahrdynamikregelungen

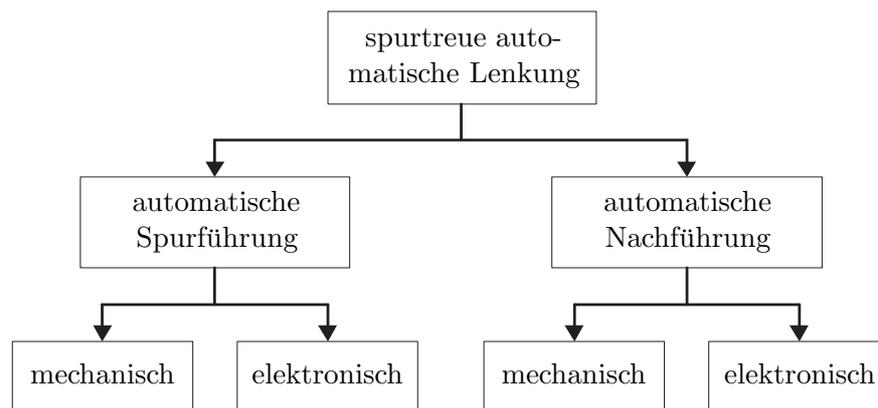
einzuteilen.

Automatische Fahrdynamikregelungen verbessern durch Lenkeingriffe primär die Fahrstabilität sowie den Fahrkomfort [7, 80, 108, 115, 137, 152] und sind deshalb nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Das Steuerungsziel einer automatischen Spurführung (kurz: Spurführung) ist es, ein Fahrzeug durch automatische Lenkeingriffe ohne Querabweichungen auf einem *vorgegebenen* Sollweg zu führen. Der Sollweg, der in der Literatur auch als Sollspur, -bahn oder -trajektorie bezeichnet wird, ist rückwärtig und zumindest in einem gewissen Bereich *vor* dem Fahrzeug bekannt. Die *Querabweichung* ist der Abstand eines geführten meist fahrzeugfesten Punktes vom Sollweg.

Im Gegensatz dazu ist der Sollweg bei einer automatischen Nachführung (kurz: Nachführung) *nicht* vorab bekannt. Das Steuerungsziel besteht darin, mit einem Fahrzeug automatisch einem unabhängigen Führungsfahrzeug zu folgen.

Seit dem Ende der 1980er Jahre werden die Prinzipien der Spurführung und der Nachführung verstärkt auf automatisierte Fahrzeugkolonnen angewendet [22, 23, 33, 48, 76, 95, 116, 117, 125, 128]. So wird bei den Spurführungen jedes Fahrzeug der Kolonne individuell entlang eines vorgegebenen Sollwegs geführt. Bei den Nachführungen wurden im Wesentlichen zwei Varianten untersucht, die sich in der Wahl des Führungsfahrzeugs unterscheiden: Entweder ist das erste Fahrzeug der Kolonne das Führungsfahrzeug für *alle* weiteren Fahrzeuge oder das jeweils voraus fahrende Fahrzeug wird als Führungsfahrzeug festgelegt. Der Abstand der Fahrzeuge zueinander wird i. d. R. durch eine zusätzliche Längsführung kontrolliert.



**Bild 1.2:** Unterteilung spurtreuer automatischer Lenkungen

Die von automatisierten Fahrzeugkolonnen bekannten Ansätze zur Spurführung und zur Nachführung lassen sich auch auf die hochgradig spurtreue Führung mehrachsigen Gelenkter Ge-

lenkfahrzeuge übertragen, wobei die Längsführung durch die mechanisch verbundenen Fahrzeugmodule entfällt. Eine hochgradig spurtreue Spurführung liegt vor, wenn alle Lenkachsmittelpunkte eines allradgelenkten Gelenkfahrzeugs ohne Querabweichungen auf einem vorab bekannten Sollweg geführt werden. Folgen alle Lenkachsmittelpunkte exakt dem Bewegungsverlauf der willkürlich gelenkten Vorderachse, wird von einer hochgradig spurtreuen Nachführung gesprochen.

Einen Überblick über die vorgeschlagene Einteilung spurtreuer automatischer Lenkungen zeigt Bild 1.2, wobei jeweils mechanische und elektronische Ausprägungen bekannt sind, die in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden.

### 1.1.1 Spurführung

Mechanische Spurführungssysteme wurden schon im frühen 16. Jahrhundert bei auf Holzschienen fahrenden Loren im Bergbau eingesetzt, aus denen sich bis zum Ende des 18. Jahrhunderts das heute für Eisen- und Straßenbahnen verwendete System aus spurkranzgeführten Stahlrädern auf Schienen entwickelte [141]. Bereits 1929 wurde in Genua der *Guidovia*, ein gummibereiftes Fahrzeug mit mechanischer Spurführung vorgestellt [144]. Mitte der 1950er Jahre wurden von der Fa. Michelin gummibereifte U-Bahnen entwickelt, die seither in der Pariser Metro eingesetzt werden. Die Spurführung dieser Fahrzeuge ist mit so genannten Spurführungsrollen und seitlichen Führungsschienen realisiert [145]. Dieses Prinzip wurde Ende der 1970er Jahre von der Fa. Mercedes-Benz mit dem *Spurbus* aufgegriffen und für Busse im öffentlichen Verkehrsraum adaptiert<sup>1</sup>. Die neuesten Entwicklungen auf diesem Gebiet sind der *GLT/TVR* (Fa. Bombardier) und der *Translohr* (Fa. Lohr Industrie), die mechanisch entlang einer mittig in die Fahrbahn eingelassenen Stahlschiene geführt werden. Diese Stahlschienen sind barrierefrei in den öffentlichen Verkehrsraum integrierbar. Eine detaillierte Beschreibung dieser Systeme ist u. a. in [6, 131, 143, 146] zu finden.

Mechanische Spurführungssysteme zeichnen sich vor allem durch ihre hohe Spurtreue und Ausfallsicherheit aus, die i. d. R. durch die mechanische Auslegung gewährleistet wird. Nachteilig sind die Infrastruktur- und Betriebskosten, der hohe Flächenbedarf sowie eine geringe Flexibilität. So kann bei Hindernissen (Unfälle, Baumaßnahmen usw.) meist nicht durch ein Ausweichmanöver reagiert werden. Leider lassen sich gerade die sehr sicheren Systeme wie der Spurbus nicht barrierefrei in den öffentlichen Verkehrsraum integrieren. Die barrierefrei geführten Fahrzeuge GLT/TVR und Translohr sind mehrfach entgleist [140, 147].

Parallel zur mechanischen Spurführung werden seit den frühen 1950er Jahren auch elektronische Systeme entwickelt. Erste praktische Versuche wurden 1957 in den USA mit Fahr-

---

<sup>1</sup>Der Spurbus wird in der Literatur auch als *O-Bahn* bezeichnet.

zeugen durchgeführt, die automatisch entlang eines Leitdrahts fahren [45]. Dieser, mit einer Wechselspannung gespeiste Leitdraht, befand sich auf oder in der Fahrbahn. Das erzeugte elektromagnetische Feld wurde mit geeigneten Antennen erfasst und die Querabweichung vom Sollweg aus den Messgrößen berechnet. Auf Leitdrähten basierende fahrerlose Transportsysteme (FTS) werden seit längerem erfolgreich für innerbetriebliche Transportaufgaben eingesetzt und haben seither ihre Zuverlässigkeit und Sicherheit bei Geschwindigkeiten bis ca. 1 m/s bewiesen [54]. In [70] wird eine Leitdrahtführung für Omnibusse vorgestellt, die in einem Geschwindigkeitsbereich von 0 – 15 m/s praktisch erprobt wurde. In dieser Arbeit werden auch die im Sevice-Tunnel des Eurotunnels eingesetzten leitdrahtgeführten Fahrzeuge beschrieben, die auf gerader Strecke mit Geschwindigkeiten von bis zu 22 m/s fahren.

In [37, 64, 66, 120] wird der in den Niederlanden entwickelte *Phileas* vorgestellt, der in zwei- und dreigliedriger Ausführung versuchsweise im Linienbetrieb eingesetzt wird. Der *Phileas* ist mit einer elektrohydraulischen Allradlenkung ausgestattet. Der Sollweg ist durch Magnete markiert, die im Abstand von vier Metern in die Fahrbahn eingelassen sind. Zur Spurführung werden Lenkvorgänge aus einem Speicher abgerufen. Die seitlichen Abweichungen vom Sollweg werden an jeder Achse ermittelt und durch stabilisierende Rückführregler ausgeglichen. Das Grundprinzip der in die Fahrbahn eingelassenen Magnete wird auch bei dem von Toyota entwickelten *IMTS* eingesetzt [126]. Statt der Magnete werden auch RFID-Chips zur Markierung des Sollwegs verwendet [54].

Die bisher beschriebenen elektronischen Spurführungssysteme benötigen eine spezielle fahrwegseitige Infrastruktur, sodass die Flexibilität mit der schienengebundener Fahrzeuge vergleichbar ist. Ein weiterer Nachteil ist die hohe Genauigkeit, mit der die Magnete, RFID-Chips oder Leitdrähte verlegt werden müssen, um einen hohen Fahrkomfort zu gewährleisten [70]. Vorteilhaft sind hingegen die Sicherheit und die Zuverlässigkeit speziell von Leitdrahtführungen und eine barrierefrei in den Verkehrsraum integrierbare Infrastruktur.

Ebenfalls barrierefrei sind Spurführungssysteme, die optische Spurmarkierungen über eine oder mehrere Kameras und eine digitale Bildverarbeitung erkennen. Diese Systeme stellen nur geringe Anforderungen an die Infrastruktur und werden u. a. in [25, 26, 51, 53, 76, 124, 127] beschrieben. In [21, 131, 146] wird das Gelenkfahrzeug *Civis* (Fa.: Irisbus) vorgestellt, das entlang einer auf der Fahrbahn aufgetragenen Doppellinie geführt wird. Befinden sich Hindernisse auf dem Sollweg, kann der Fahrer die Steuerung übernehmen, dem Hindernis ausweichen und anschließend wieder auf den markierten Sollweg aufspüren. Dieser hohen Flexibilität steht die begrenzte Einsetzbarkeit optischer Systeme im Straßenverkehr gegenüber, weil Störungen wie Spiegelungen bei Nässe oder Schnee keine zuverlässige Spurerkennung zulassen. Dennoch werden optische Systeme zur Spurerkennung u. a. in kommerziell erhältlichen Spurhalteassistenten eingesetzt [30, 93].

In [73, 119, 121] werden Satellitennavigationssysteme (SNS) wie GPS zur Spurführung von Pkws betrachtet. Einen Bus, der mittels SNS automatisch auf dem Standstreifen einer Autobahn geführt wird, beschreibt [5]. Die notwendige Genauigkeit der SNS wird durch differentielle Verfahren erreicht. Zusätzlich werden inertielle Navigationssysteme (INS) oder Odometer verwendet, um praktisch nicht vermeidbare Signalaussetzer des SNS zu überbrücken. In [49] wird ein Messsystem vorgestellt, bei dem ein INS mit einem differentiellen GPS (DGPS) kombiniert wird und so eine Positionsgenauigkeit von  $\leq 0.02$  m erreicht. Die Eigenschaften von SNS einschließlich Untersuchungen zur Genauigkeit und Verfügbarkeit in urbanen Gebieten sind in [32] ausführlich beschrieben.

Die wesentlichen Vorteile SNS-basierter Spurführungen sind die geringen Infrastrukturkosten und der flexibel umplanbare Sollweg. Nachteilig sind hingegen Verfügbarkeit, Zuverlässigkeit und Sicherheit zu bewerten, weil prinzipbedingt eine direkte Sichtverbindung zu mindestens vier Satelliten bestehen muss. Insbesondere in urbanen Gebieten mit Häuserschluchten und Tunneln oder in Gebirgstälern ist die Verfügbarkeit eingeschränkt. Durch die militärische Kontrolle der verfügbaren SNS ist die alleinige Nutzung im öffentlichen Verkehr praktisch ausgeschlossen.

Wie bei allen elektronischen Spurführungen lässt sich die erforderliche Sicherheit SNS-basierter Spurführungen nur durch zusätzliche Maßnahmen und Strategien erreichen, die den sicheren Betrieb auch bei Störungen wie Sensor- und Aktorfehlern gewährleisten oder das System in einen sicheren Zustand überführen. In der Literatur werden meist redundante Systeme und verschiedene Formen der Diversität (physikalisch, funktionell) vorgeschlagen. So wird in [51, 69, 130] ein optisches Messsystem mit einem DGPS kombiniert.

Aus der Literatur sind weitere Verfahren und Ansätze zur automatischen Spurführung bekannt, auf die hier nicht näher eingegangen wird. Die derzeit wichtigsten Systeme werden in den Arbeiten [38, 131] umfassend beschrieben und im Hinblick auf deren Verwendbarkeit im öffentlichen Personennahverkehr (ÖPNV) bewertet.

### 1.1.2 Nachführung

Der Entwicklungsstand der Nachführung ist hauptsächlich in Patenten dargelegt und wird meist implizit unter dem Begriff der Mehrachslenkung diskutiert. Dabei wird die Lenkung der hinteren Achsen so ausgelegt, dass das Fahrzeug den BO-Kraftkreis<sup>2</sup> durchfahren kann. Für die Ansteuerung der Lenkachsen werden primär geometrische Zusammenhänge genutzt. Die ermittelten Lenkwinkel werden sowohl konventionell mechanisch als auch elektrohydraulisch

---

<sup>2</sup>Der *BO-Kraftkreis* ist ein Ring mit 12.5 m Außen- und 5.30 m Innenkreisradius, der bei einer Kreisfahrt von 360° nicht verlassen werden darf [20]. Das Durchfahren des BO-Kraftkreises ist eine Zulassungsvoraussetzung für Straßenfahrzeuge.

eingestellt.

Eine seit langem bekannte mechanische Nachführung ist die Schwenkachslenkung, die bei mehrachsigen Anhängern eingesetzt wird. Die starre Vorderachse des Anhängers ist drehbar gelagert und über eine Deichsel mit dem Zugfahrzeug verbunden, sodass der Lenkwinkel direkt vom Knickwinkel zwischen Zugfahrzeug und Anhänger abhängt. Eine weitere technische Lösung ist eine Achsschenkellenkung, bei der das Prinzip der Schwenkachslenkung mittels Drehkranz nachgebildet wird [42].

Die Patente [31, 148] beschreiben Nachführungen für lange eingliedrige Fahrzeuge, bei denen die Schleppkurven verringert werden, indem die Hinterräder gegensinnig zu den Vorderrädern auslenken. In [4, 16, 29, 129] werden Nachführungen für mehrgliedrige Straßenfahrzeuge mit Knickgelenk vorgestellt, wobei die Lenkwinkel der Nachlaufachsen von den jeweils vorgelagerten Knickwinkeln des Fahrzeugs abhängen. Mit derartigen Lenkungen sind der *AGG 300* (Fa. VanHool) und die *Lighttram 3* (Fa. Hess) ausgestattet, die den aktuellen Stand der Technik bei Bussen repräsentieren. Diese ca. 25 m langen, dreigliedrigen Fahrzeuge durchfahren den BO-Kraftkreis mit einem Spurversatz von ca. 4 m [88].

Die Vorteile der mechanischen Nachführung sind der einfache, kostengünstige Aufbau und die hohe Zuverlässigkeit, die bei elektrohydraulischen Systemen nur mit zusätzlichem Aufwand erreichbar sind. Ein wesentlicher Nachteil besteht darin, dass die Lenkwinkelverhältnisse mechanisch festgelegt sind und nicht von fahrdynamischen Einflussgrößen wie Zentripetalbeschleunigung, Geschwindigkeit oder Zuladung abhängen. Da sich die Reaktion eines Fahrzeugs auf Lenkbefehle in Abhängigkeit von der Fahrzeuggeschwindigkeit stark verändert, lässt sich immer nur ein Kompromiss zwischen Spurtreue und Wendigkeit einerseits und einer sicheren Fahrzeugbeherrschung und einer hohen Fahrstabilität andererseits erreichen. Die Auslegung der Lenkung ist daher ein iterativer Prozess, der ein hohes Maß an Erfahrung erfordert.

Um die Fahrsicherheit zu erhöhen, werden die geometrischen Zusammenhänge in elektrohydraulischen Systemen heuristisch an die Geschwindigkeit angepasst. In [82] wird vorgeschlagen, die Steuerwirkung der Vorderlenkachse auf die Hinterlenkachsen mit steigender Fahrzeuggeschwindigkeit zu vermindern, oder wie in [87] empfohlen wird, völlig aufzuheben. Das Patent [111] beschreibt eine Zweiachslenkung, die in Abhängigkeit von der Fahrzeuggeschwindigkeit oder anderen fahrdynamischen Größen automatisch zwischen gleich- und gegensinniger Lenkachskopplung umschaltet, wobei die gleichsinnige Lenkachskopplung bei höherer Fahrzeuggeschwindigkeit vorteilhaft bezüglich der Fahrstabilität ist.

Die Erfahrung zeigt, dass die Spurtreue der bekannten mehrachsgelenkten Gelenkfahrzeuge gering ist. Insbesondere bei unterschiedlichen Fahrzeuggeschwindigkeiten gelingt es selbst bei einfachen Manövern wie einer stationären Kreisfahrt nicht, lange Fahrzeuge hochgradig spurtreu zu führen. Anspruchsvollere Fahrmanöver wie Ausweichmanöver, S-Kurven oder

Fahrspurwechsel sind stets mit einem deutlichen Spurversatz verbunden. Auch das Abfahren mehrachsgeleiteter Busse von Haltestellen wird i. d. R. nicht ohne ein mehr oder weniger deutliches Ausschwenken des Fahrzeughecks bewältigt [88]. Diese Mängel verschärfen sich mit zunehmender Fahrzeuglänge und Anzahl der Glieder, sodass ein sicherer Betrieb im öffentlichen Straßenverkehr bisher nur mit maximal ca. 25 m langen Fahrzeugen möglich ist.

Elektronische Systeme, bei denen das Prinzip der Nachführung direkt auf mehrachsgeleitete Gelenkfahrzeuge angewendet wird, sind kaum bekannt. Nur im Bereich der Robotik wurden langsam fahrende Fahrzeuge untersucht, die u. a. Servicearbeiten in Kernkraftwerken ausführen sollen [24, 63].

### 1.1.3 Regelungstechnische Ansätze

Bei elektronischen Spur- und Nachführungen werden Regelgrößen wie die Querabweichung vom Sollweg gemessen und mittels regelungstechnischer Methoden die Lenkwinkel bestimmt, die die Regelabweichung minimieren. Besonders bei der automatischen Spurführung werden in der Literatur unterschiedliche regelungstechnische Ansätze und Methoden untersucht, die in diesem Abschnitt vorgestellt und bewertet werden sollen.

In [79, 96] wird die nichtlineare Dynamik von zweiachsigen Straßenfahrzeugen analytisch beschrieben und als wesentliche Einflussgrößen Straßen- und Reifeneigenschaften sowie die Fahrzeuggeschwindigkeit benannt. Aufgrund der nichtlinearen Fahrzeugdynamik lassen sich automatische Lenkungen nur in einem kleinen Arbeitsbereich mit linearen Rückführreglern realisieren. In mehreren Arbeiten zur automatischen Spurführung einachsgeleiteter Fahrzeuge wird angenommen, dass die Längsgeschwindigkeit des Fahrzeugs nahezu *konstant*, die Lenk-, Schräglaufl- und Schwimmwinkel sowie die Krümmung der Fahrbahn klein und die Terme höherer Ordnung des mathematischen Fahrzeugmodells vernachlässigbar sind [27, 62, 80, 91, 105, 139]. Die Bedingung der konstanten Geschwindigkeit wird u. a. in [35, 60, 70, 118] teilweise aufgehoben, indem robuste Regler eingesetzt werden, die die Geschwindigkeit als unsicheren Parameter berücksichtigen. In weiteren Arbeiten werden die Rückführregler an die Fahrzeuggeschwindigkeit angepasst, indem meist die Reglerverstärkung mit zunehmender Geschwindigkeit verringert oder zwischen verschiedenen Reglerparametersätzen umgeschaltet wird [5, 28, 70, 98, 118].

Wird hingegen die Spurführung von Fahrzeugen in einem großen Geschwindigkeitsbereich und entlang von stark gekrümmten Fahrbahnen betrachtet, werden vielfach Vorsteuerungen eingesetzt. Der Vorteil dieser Vorsteuerungen ist, dass sie im Gegensatz zu reinen Rückführreglern nicht erst auf Regelabweichungen reagieren. So wird in [5, 73, 75, 106] die aktuelle Fahrbahnkrümmung ermittelt und mit einem modellbasierten Ansatz der Solllenkwinkel berechnet, der bei der aktuellen Geschwindigkeit theoretisch zur Verfolgung des Soll-

weges führt. Zusätzlich werden die seitlichen Abweichungen vom Sollweg gemessen und mit einem Rückführregler minimiert. Durch diese Steuerungsstruktur muss der Rückführregler hauptsächlich Modellungenauigkeiten und nicht gemessene Störungen wie Seitenwind ausregeln und lässt sich vergleichsweise träge einstellen. Dadurch ist der Rückführregler in einem größeren Geschwindigkeitsbereich stabil.

In [13, 62, 77, 78, 90, 114, 118] wird eine exakte Linearisierung der nichtlinearen Fahrzeugdynamik erreicht, indem der Istzustand des Fahrzeugs modellbasiert zurückgeführt wird<sup>3</sup>. Das exakt linearisierte System kann anschließend mit den Methoden der linearen Regelungstheorie behandelt werden. Dieses Verfahren setzt jedoch die Erfassung des aktuellen Fahrzeugzustandes voraus. Da dies meist nicht ohne Weiteres möglich ist, werden vielfach Zustandsbeobachter eingesetzt [76, 83, 118].

Zur automatischen Spurführung von allradgelenkten Gelenkfahrzeugen sind nur wenige Arbeiten bekannt. In [35] wird ein robuster Regler auf Grundlage eines linearen Fahrzeugmodells entworfen. Für das linearisierte Fahrzeugmodell gelten die bereits genannten Annahmen, sodass der Arbeitsbereich des Reglers stark einschränkt ist. In [34, 36] wird daher die exakte Linearisierung mit einem Backstepping-Entwurf kombiniert. Bei dieser fortschrittlichen Entwurfsmethode ergibt sich das Regelgesetz rekursiv aus Lyapunov-Funktionen, sodass das geregelte System nachweisbar stabil ist. Geeignete Lyapunov-Funktionen lassen sich jedoch nicht ohne Weiteres in geschlossener Form angeben. Diese Einschränkung ist auch die größte Herausforderung des Backstepping-Entwurfs. Folglich gelingt eine derartige Reglersynthese nur für die Fehlerdifferentialgleichungen des bereits exakt linearisierten Systems [34].

Neben den genannten Methoden werden vereinzelt modellprädiktive Regler [43, 77], Fuzzy-Regler [27, 71, 92] und Neuronale Netze [47, 56] zur automatischen Spurführung von Straßenfahrzeugen eingesetzt. In [78] wird gezeigt, dass speziell die modellprädiktiven Regler, die ein nichtlineares Optimierungsproblem in Echtzeit lösen, gute Ergebnisse liefern. Nachteilig sind hingegen der hohe Rechenaufwand und die Vielzahl heuristisch festzulegender Parameter, sodass in [78] für die experimentelle Erprobung eine exakte Linearisierung bevorzugt wird.

Dem Ziel dieser Arbeit am nächsten kommt das in [34] entworfene Spurführungssystem, mit dem sich n-gliedrige, allradgelenkte Fahrzeuge theoretisch spurtreu entlang eines bekannten, mit Magnetenägeln markierten Sollwegs führen lassen. Die Spurführung basiert auf der Methode der exakten Linearisierung. Aus diesem Ansatz, dem verwendeten Entwurfsmodell und dem vorgeschlagenen Sensorkonzept ergeben sich folgende Einschränkungen:

- Für die exakte Linearisierung muss der Istzustand des Entwurfsmodells vollständig verfügbar sein. Dies gelingt nur durch einen hohen sensorischen Aufwand und den Einsatz

---

<sup>3</sup>Eine umfassende Beschreibung der exakten Linearisierung ist in [68, 81] zu finden.

eines erweiterten Kalman-Filters.

- Das Messrauschen der Istzustandsmessung wird bei der exakten Linearisierung ungedämpft auf die Lenkung übertragen.
- Das Entwurfsmodell ist so vereinfacht, dass die Lenkwinkel affine Systemeingänge darstellen. Diese Vereinfachung ist nur für Lenkwinkelbeträge zulässig, bei denen die Näherungen  $\sin(x) \simeq x$  und  $\cos(x) \simeq 1$  gelten. Bei der  $\cos$ -Funktion gilt diese Näherung nur bis ca.  $10^\circ$ .
- Die spurtreue Fahrzeugführung gelingt nur auf vorab bekannten und mit Magneten markierten Sollwegen, sodass die Flexibilität der Spurführung eingeschränkt ist.

Die Spurführung wird simulativ mit einem 25 m langen, dreigliedrigen Fahrzeugmodell erprobt. Anhand von Kurvenein- und Ausfahrten wird gezeigt, dass eine spurtreue Fahrzeugführung für Zentripetalbeschleunigungen bis ca.  $1.5 \text{ m/s}^2$  und Geschwindigkeiten bis  $20 \text{ m/s}$  gelingt. Bei der Einfahrt in eine R20-Kurve mit  $5 \text{ m/s}$  weichen die Achsen bis zu  $0.04 \text{ m}$  vom Sollweg ab<sup>4</sup>.

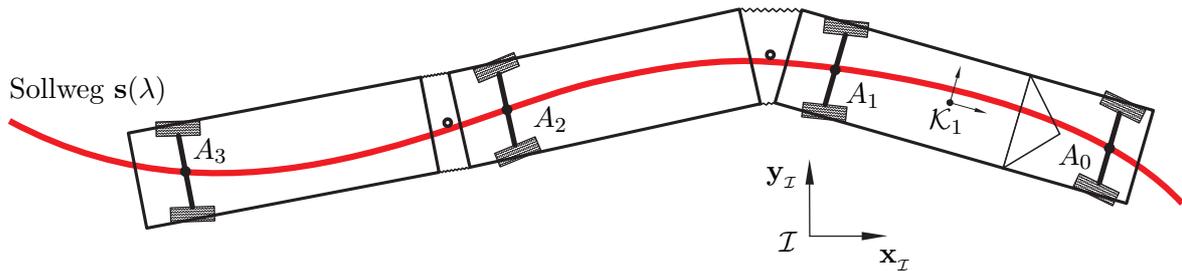
Bemerkenswert ist, dass bei den Simulationen sehr schnelle Lenkaktormodelle mit  $PT_1$ -Übertragungsverhalten und  $5 \text{ Hz}$  Bandbreiten eingesetzt werden, die die Dynamik der Lenkaktoren faktisch vernachlässigen. In [3, 1] wird gezeigt, dass die Dynamik der Lenkaktoren einen großen Einfluss auf die Güte automatischer Lenkungen haben und eine maximale Bandbreite von  $1.2 \text{ Hz}$  angegeben. Die Simulationsergebnisse in [34] sind somit nur bedingt auf die Praxis übertragbar. Eine experimentelle Verifikation der Simulationsergebnisse fehlt.

## 1.2 Ziel und Aufbau der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung von automatischen Lenkungen, die die von Schienenfahrzeugen bekannte Spurtreue auf  $n$ -gliedrige, mehrachsgelenkte Straßenfahrzeuge übertragen. Spurtreu heißt, dass die Lenkachsmittelpunkte keinen Spurversatz zueinander aufweisen (vgl. Bild 1.3). Für diese Form der hochgradigen Spurtreue soll sowohl eine *automatische Spurführung* als auch ein Verfahren zur *automatischen Nachführung* systematisch konzipiert, entworfen und erprobt werden. Die Nachführung wird in dieser Arbeit als *automatische Nachführregelung* bezeichnet. Mit der Nachführregelung soll erstmals eine sichere, flexible und spurtreue Führung langer Gelenkfahrzeuge ermöglicht werden, die nicht auf vorab bekannte Sollwege angewiesen ist.

---

<sup>4</sup>Der Übergang zwischen der Geraden und dem Kreissegment ( $R=20 \text{ m}$ ) wurde so gestaltet, dass der Krümmungsverlauf des Sollwegs stetig ist.



**Bild 1.3:** Dreigliedriges Gelenkfahrzeug in einer S-Kurve

Bild 1.3 zeigt die dieser Arbeit zu Grunde gelegte Fahrzeugstruktur. Das Fahrzeug besteht aus einem zweiachsigen Primärmodul, an das  $n - 1$  einachsige Nachlaufmodule angehängt sind. Diese Struktur weisen viele im Straßenverkehr eingesetzte Fahrzeuge auf.

Damit sich die automatischen Lenkungen möglichst ohne Einschränkungen einsetzen lassen, sollen sowohl die Spurführung als auch die Nachführregelung:

- ein sicheres und komfortables Fahrverhalten aufweisen,
- in einem Geschwindigkeitsbereich von 0 bis 25 m/s und bei Zentripetalbeschleunigungen bis ca.  $2.0 \text{ m/s}^2$  stabil und robust gegenüber Störungen wie Seitenwind oder variierendem Reibbeiwert der Fahrbahn sein<sup>5</sup>,
- für mindestens ca.  $45^\circ$  Lenkwinkel und ca.  $60^\circ$  Knickwinkel ausgelegt sein, sodass sich mit den aus [65, 88, 142] bekannten Gelenk- und Doppelgelenkfahrzeugen Kurvenradien von wenigstens 10 m spurtreu durchfahren lassen und
- zur Erhöhung der Flexibilität unabhängig von der Art der Längsführung sein, sodass die Fahrzeuggeschwindigkeit sowohl automatisch als auch willkürlich durch einen Fahrer vorgegeben werden kann.

Zusätzlich soll der Sollweg der automatischen Spurführung automatisch erstellbar und komfortabel umplanbar sein, sodass ohne Weiteres verschiedene Fahrmanöver vorgegeben und untersucht werden können. Die Entwicklung zulassungsfähiger automatischer Lenkungen ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Aspekte wie die Ausfallsicherheit elektronischer Lenkaktoren werden daher nicht betrachtet.

Mit diesen Randbedingungen ist eine hohe Spurtreue nur erreichbar, wenn Informationen über den Sollweg und die Fahrzeugdynamik systematisch beim Reglerentwurf genutzt werden. Dies soll durch eine Steuerungsstruktur gelingen, die sich u. a. in [75] bei der Spurführung von Pkws bewährt hat und aus einer modellbasierten Vorsteuerung und einer Rückführregelung

<sup>5</sup>Für den öffentlichen Personennahverkehr wird in [131] eine maximale Zentripetalbeschleunigung von  $1.3 \text{ m/s}^2$  empfohlen.

besteht. Für die Entwicklung und Erprobung der automatischen Lenkungen sind folgende Teilaufgaben zu lösen:

- Konzeption eines automatischen Spurführungssystems, das Informationen über den Sollweg und die Fahrzeugdynamik verarbeitet und theoretisch für n-gliedrige allradgelenkte Fahrzeuge geeignet ist,
- Herleitung eines zweckmäßigen regelungstechnischen Entwurfsmodells für n-gliedrige allradgelenkte Fahrzeuge,
- Trennen des Entwurfsmodells in ein Fahrzeug- und ein Reifenmodell, sodass das Fahrzeugmodell und das Reifenmodell ggf. voneinander unabhängig modifiziert werden können,
- Modellparametrierung und -verifikation durch Vergleich mit einem zweigliedrigen allradgelenkten Versuchsfahrzeug und einem detaillierten dreigliedrigen Mehrkörpermodell, dem so genannten Simulationsmodell,
- Konzeption eines flexibel vorgebbaren, mathematisch beschriebenen Sollwegs,
- Entwicklung eines Algorithmus, der automatisch einen Sollweg mit möglichst wenigen Stützstellen aus Positionsmessdaten erzeugt und einen vorgegebenen Abstand von diesen Positionsmessdaten nicht überschreitet,
- Entwurf einer Vorsteuerung, in der die Informationen über den Sollweg und die Fahrzeugdynamik konsequent verarbeitet werden,
- Entwurf robuster Rückführregler,
- Entwurf einer Nachführregelung, die konzeptionell auf der automatischen Spurführung aufbaut und nur wenige gut messbare Größen benötigt,
- echtzeitfähige Implementation der Algorithmen,
- Erprobung der automatischen Lenkungen mit einem dreigliedrigen Simulationsmodell,
- Erprobung der automatischen Lenkungen mit dem zweigliedrigen Versuchsfahrzeug AutoTram und
- Nachweis, dass die automatischen Lenkungen robust gegenüber Störungen wie Seitenwind, variierendem Reibbeiwert und veränderter Zuladung sind.

Aus den genannten Aufgaben leitet sich der Aufbau der Arbeit ab. In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen zur Modellierung von Mehrkörpersystemen (MKS) vorgestellt und anschließend ein Entwurfsmodell für n-gliedrige allradgelenkte Fahrzeuge hergeleitet. Da dieses Entwurfsmodell für die Güte der Vorsteuerung entscheidend ist, wird unter Berücksichtigung der in [34] gewonnenen Erkenntnisse ein nichtlineares *kinetisches* Einspurmodell genutzt. Die Modellparametrierung und -verifikation erfolgt durch Fahrversuche und ergänzende Simulationen.

In Kapitel 3 wird zunächst das automatische Spurführungssystem entworfen. Die Vorsteuerung wird so ausgelegt, dass die Solllenkwinkel aller Lenkachsen nur anhand des analytisch beschriebenen Sollwegs, der gemessenen Istposition des Primärmoduls und der gemessenen Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_x$  sowie  $\dot{v}_x$  berechenbar sind. Mit diesen Solllenkwinkeln lässt sich der Sollweg theoretisch spurtreu verfolgen. Zum Ausgleich von praktisch nicht vermeidbaren Modellunbestimmtheiten und nicht gemessenen Störungen werden ein nichtlinearer Mehrgrößenregler und achs-individuelle lineare Eingrößenregler entworfen und miteinander verglichen. Abschließend wird das Verfahren modifiziert, sodass auch eine spurtreue Nachführregelung gelingt.

Die Ergebnisse der simulativen und der experimentellen Erprobung werden in Kapitel 4 vorgestellt. Die Simulationen werden mit einem ca. 27 m langen, dreigliedrigen Simulationsmodell und die Experimente mit einem 18 m langen zweigliedrigen Versuchsfahrzeug durchgeführt, bei dem die notwendigen Messdaten mit einem DGPS-gestützten inertialen Navigationssystem ermittelt werden. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in Kapitel 5.



# Kapitel 2

## Modellbildung von Fahrzeugen

Die Eigenschaften technischer Systeme lassen sich mit idealisierten Modellen nachbilden und analysieren. Wird der Begriff *System* nach [61] definiert, so bezeichnet er eine Menge von Elementen<sup>1</sup>, die

- sich gegenseitig beeinflussen (Wechselwirkung),
- äußeren Einflüssen ausgesetzt sind (Eingänge) und
- auf ihre Umgebung rückwirken (Ausgänge).

Zu den wichtigsten Eigenschaften eines Systems gehört die Veränderlichkeit unter der Wirkung der Eingänge. Der Zusammenhang zwischen den äußeren Einflüssen und den Änderungen des Systems wird als *Systemdynamik* bezeichnet.

Die Modellierung der Systemdynamik erfolgt derzeit mit verschiedenen Verfahren, die an die jeweilige Fachrichtung angepasst sind. Bei der Beschreibung von *mechanischen* Systemen kommen im Wesentlichen vier Modellierungsarten zum Einsatz [41]:

- Modellierung durch kontinuierliche Systeme (KOS),
- Methode der finiten Elemente (FEM),
- Randelemente-Methode (BEM) und
- Methode der Mehrkörpersysteme (MKS).

Diese Verfahren unterscheiden sich in der Art der Modellierung, dem Aufwand, der Genauigkeit und dem gültigen Frequenzbereich. Das Ergebnis aller Methoden sind Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems.

Die Systemdynamik mechanischer Systeme, die aus mehreren Körpern bestehen, wird vorwiegend über die Methode der Mehrkörpersysteme hergeleitet. Diese Methode eignet sich besonders zur Modellierung mechanischer Systeme, bei denen

---

<sup>1</sup>Teile, Komponenten

- die einzelnen Körper große, nichtlineare Bewegungen relativ zueinander ausführen,
- die Verformung der Körper vernachlässigbar ist,
- die Körpermassen in diskreten Punkten zusammengefasst werden können und
- die Wechselwirkung zwischen den Körpern an diskreten, materiellen Punkten erfolgt.

Diese Eigenschaften sind für viele technische Bereiche wie der Robotik, der Biomechanik, der Fahrzeugtechnik und auch der Fahrzeugdynamik charakteristisch.

Kapitel 2 ist in zwei Hauptabschnitte unterteilt. In Abschn. 2.1 werden die theoretischen Grundlagen zur Modellierung mechanischer Mehrkörpersysteme vorgestellt. Es wird kurz auf die Kinematik des freien starren Körpers eingegangen und die Erweiterung zur Kinematik von Mehrkörpersystemen beschrieben. Anschließend erfolgt der Übergang zur Dynamik, indem wirkenden Kräfte und Momente einbezogen werden. Die Einführung orientiert sich vornehmlich an [17, 40, 61, 109, 149].

Aufbauend auf diesen Grundlagen werden in Abschn. 2.2 die Bewegungsgleichungen eines n-gliedrigen allrad-gelenkten Fahrzeugs hergeleitet. Dazu wird das an sich bekannte Einspurmodell eines zweiachsigen Fahrzeugs erweitert, das u. a. in [79, 96, 104, 107] beschrieben ist. Abschließend zeigen die Ergebnisse einer simulativen und experimentellen Modellverifikation, dass sich das Fahrzeugmodell als *Entwurfmodell* für automatische Lenkungen eignet.

## 2.1 Theoretische Grundlagen

### 2.1.1 Kinematik des freien starren Körpers

In der technischen Dynamik wird zwischen *freien* und *gebundenen* Systemen unterschieden. Freie Systeme bewegen sich uneingeschränkt im Raum. Im Gegensatz dazu können sich die Elemente gebundener Systeme nur eingeschränkt untereinander und gegenüber der Umgebung bewegen. In gebunden Systemen werden die möglichen Bewegungen durch Bindungen vorgegeben. Ein Beispiel für ein freies System ist ein fliegendes Flugzeug, das sich an einem beliebigen Ort in beliebiger Orientierung befinden kann. Dem gegenüber ist ein Stabpendel in seiner Bewegungsfreiheit eingeschränkt und demzufolge ein gebundenes System. Es ist offensichtlich, dass Mehrkörpersysteme im Allgemeinen gebundene Systeme sind.

Die Kinematik des freien starren Körpers ist der Ausgangspunkt für die Modellbildung von Systemen starrer Körper, den Mehrkörpersystemen. Sie lässt sich relativ einfach beschreiben, da die Bewegung keinen Einschränkungen unterliegt und allein durch den Ort, die Orientierung, die translatorischen und die rotatorischen Geschwindigkeiten sowie Beschleunigungen des Körpers gegeben ist.

Der *starre Körper* ist ein einfaches Modell der Kontinuumsmechanik. Das Besondere bei starren Körpern ist, dass der Abstand aller materiellen Punkte zueinander konstant ist. Somit besitzen starre Körper neben einer Massenträgheit auch eine feste räumliche Ausdehnung. Weitere wesentliche Merkmale des starren Körpers sind sein Schwerpunkt  $C$  und eine endliche Anzahl von materiellen Knotenpunkten, an denen Kräfte und Momente angreifen. Die Trägheitseigenschaften eines starren Körpers werden durch den Ort des Schwerpunktes  $\mathbf{r}_{\mathcal{K}C}$ , durch seine Masse  $m$  und durch den Trägheitstensor  $\mathbf{I}$  bestimmt. Der Ort des Schwerpunktes, die Knotenpunkte und der Trägheitstensor werden zweckmäßiger Weise auf ein *körperfestes Koordinatensystem*  $\mathcal{K}$  bezogen, da diese Größen dann konstante Werte annehmen. Eine weitere Vereinfachung entsteht, wenn  $\mathcal{K}$  im Schwerpunkt des starren Körpers liegt und die Achsen entlang der Trägheitshauptachsen ausgerichtet sind. In diesem Fall ist der Trägheitstensor nur auf der Hauptdiagonalen besetzt und die Deviationsmomente verschwinden. Sofern nichts anderes vereinbart wird, liegen im Rahmen dieser Arbeit alle körperfesten Koordinatensysteme  $\mathcal{K}_i$  im Schwerpunkt  $C_i$  des Körpers  $K_i$  und sind entlang der Trägheitshauptachsen ausgerichtet. Ein Sonderfall des starren Körpers ist der Massenpunkt, bei dem alle materiellen Knoten im Schwerpunkt zusammenfallen, die Massenträgheitsmomente verschwinden und die Orientierung vernachlässigbar ist.

Ein Körper bewegt sich durch einen definierten Raum, in dem die Newtonsche und die Eulersche Fundamentalgleichung<sup>2</sup> gilt und dessen Ursprung ein Koordinatensystem  $\mathcal{I}$  ist. Dieses Koordinatensystem wird als *Inertialsystem* bezeichnet und kennzeichnet den Bezugspunkt für die eindeutige Beschreibung von Ort und Orientierung jedes Körpers im Raum. Dafür werden jeweils drei translatorische und drei rotatorische Koordinaten eingeführt. Ist  $\mathcal{I}$  ein kartesisches Koordinatensystem, so lässt sich der Ort eines Körpers  $K$  durch den Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{\mathcal{I}K/\mathcal{I}} = \left( x_{\mathcal{I}K/\mathcal{I}} \quad y_{\mathcal{I}K/\mathcal{I}} \quad z_{\mathcal{I}K/\mathcal{I}} \right)^{\top} \quad (2.1)$$

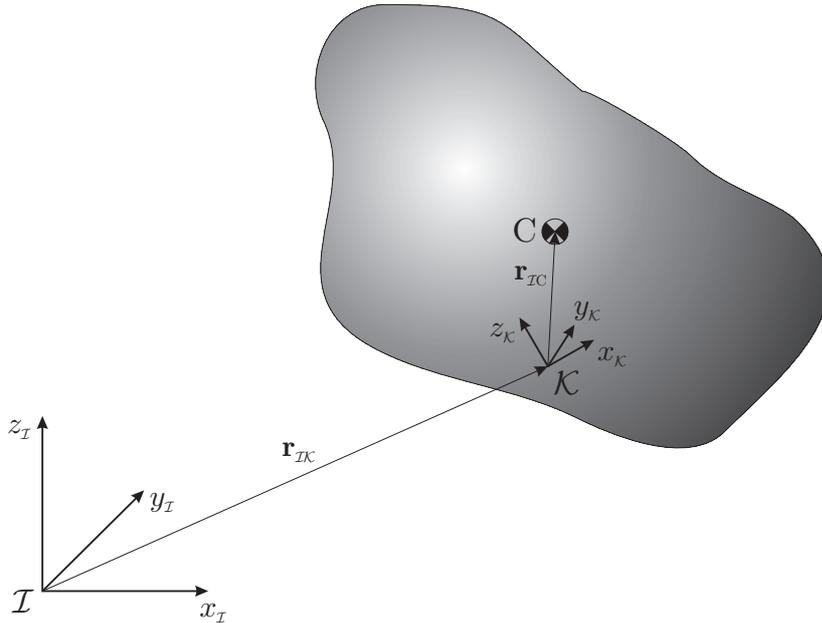
beschreiben, der entsprechend Bild 2.1 vom Ursprung des Inertialsystems  $\mathcal{I}$  zum Ursprung des körperfesten Koordinatensystems  $\mathcal{K}$  zeigt. Der Index hinter dem Schrägstrich gibt an, in welchem Koordinatensystem der Vektor dargestellt ist.

Die Orientierung des Körpers  $K$  gegenüber dem Inertialsystem wird durch die Drehmatrix  $\mathbf{A}_{\mathcal{I}K} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  eindeutig bestimmt. Sie lässt sich z. B. als Funktion von drei rotatorischen Größen, z.B. den *Euler-* oder den *Kardan-Winkeln* darstellen und aus drei Elementardrehungen<sup>3</sup> aufbauen. Bei Kardanwinkeln erfolgt die Drehung nacheinander um die  $x$ -,  $y$ - und die  $z$ -Achse mit den korrespondierenden Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . In dieser Arbeit werden aus-

---

<sup>2</sup>Impuls- und Drallsatz

<sup>3</sup>d.h. Drehungen um jeweils eine Koordinatenachse



**Bild 2.1:** Definition von Koordinatensystemen am freien starren Körper

schließlich Eulerwinkel mit der Drehreihenfolge  $z, x, z$  und den Drehwinkeln  $\psi_{IK}$ ,  $\vartheta_{IK}$  und  $\phi_{IK}$  verwendet. In diesem Fall lautet die Drehmatrix mit den Abkürzungen  $\sin \psi_{IK} = s\psi$ ,  $\cos \psi_{IK} = c\psi$  usw.:

$$\mathbf{A}_{IK}(t) = \begin{pmatrix} c\psi c\phi - s\psi c\vartheta s\phi & -c\psi s\phi - s\psi c\vartheta c\phi & s\psi s\vartheta \\ s\psi c\phi + c\psi c\vartheta s\phi & -s\psi s\phi + c\psi c\vartheta c\phi & -c\psi c\vartheta \\ s\vartheta s\phi & s\vartheta c\phi & c\vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Eine wesentliche Eigenschaft der Drehmatrix ist die Abbildung eines Vektors in ein anderes Koordinatensystem. Dementsprechend können die Spalten der Drehmatrix  $\mathbf{A}_{IK}$  als Einheitsvektoren des Koordinatensystems  $\mathcal{K}$  dargestellt im Koordinatensystem  $\mathcal{I}$  interpretiert werden. Damit ergibt sich die Transformation eines Vektors  $\mathbf{r}_{IK/\mathcal{K}}$  von der Darstellung im körperfesten Koordinatensystem  $\mathcal{K}$  in das Inertialsystem  $\mathcal{I}$  wie folgt:

$$\mathbf{r}_{IK/\mathcal{I}} = \mathbf{A}_{IK} \mathbf{r}_{IK/\mathcal{K}}. \quad (2.3)$$

Dieses Transformationsgesetz kann auf beliebige zueinander verdrehte orthonormierte Koordinatensysteme angewendet werden, wobei die relativen Eulerwinkel in Gl. (2.2) einzusetzen sind. Alternativ können auch Kardanwinkel und eine entsprechend angepasste Darstellung der Gl. (2.2) verwendet werden [79]. Aufgrund der Orthogonalität der Drehmatrizen gilt

zusätzlich:

$$\mathbf{A}_{KI} = \mathbf{A}_{IK}^{-1} = \mathbf{A}_{IK}^{\top}. \quad (2.4)$$

Der Ortsvektor (2.1) und die Drehmatrix (2.2) beschreiben den Ort und die Orientierung des körperfesten Koordinatensystems und folglich auch den Ort und die Orientierung des starren Körpers bezogen auf das Inertialsystem  $\mathcal{I}$  eindeutig.

Die translatorische Geschwindigkeit wird durch die Differentiation des Ortsvektors (2.1) nach der Zeit  $t$  berechnet:

$$\mathbf{v}_{IK/I} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{IK/I} = \dot{\mathbf{r}}_{IK/I} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{IK/I} & \dot{y}_{IK/I} & \dot{z}_{IK/I} \end{pmatrix}^{\top}. \quad (2.5)$$

Die explizite Abhängigkeit der Vektorelemente von der Zeit wird zur Vereinfachung weggelassen. Soll die Geschwindigkeit in einem beliebigen Koordinatensystem  $\tilde{\mathcal{K}}$  dargestellt werden, das gegenüber dem Inertialsystem um die Eulerwinkel  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\vartheta}$  und  $\tilde{\phi}$  verdreht ist, gilt mit der Drehmatrix (2.2):

$$\mathbf{v}_{IK/\tilde{\mathcal{K}}} = \mathbf{A}_{\tilde{\mathcal{K}}I} \mathbf{v}_{IK/I}. \quad (2.6)$$

Der Tensor  $\boldsymbol{\Omega}_{IK} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  der Winkelgeschwindigkeiten des Koordinatensystems  $\mathcal{K}$  gegenüber  $\mathcal{I}$  ist ebenfalls mit der Drehmatrix berechenbar. Für die Darstellung im Inertialsystem gilt:

$$\boldsymbol{\Omega}_{IK/I} = \frac{d\mathbf{A}_{IK}}{dt} \mathbf{A}_{IK}^{\top} = \dot{\mathbf{A}}_{IK} \mathbf{A}_{KI} \quad (2.7)$$

und im System  $\mathcal{K}$ :

$$\boldsymbol{\Omega}_{IK/K} = \mathbf{A}_{KI} \dot{\mathbf{A}}_{IK}. \quad (2.8)$$

Aus diesen schiefsymmetrischen Tensoren kann der korrespondierende Vektor der Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}_{IK}$  direkt abgelesen werden:

$$\boldsymbol{\Omega}_{IK/i} = \begin{pmatrix} 0 & -z\omega_{IK/i} & y\omega_{IK/i} \\ z\omega_{IK/i} & 0 & -x\omega_{IK/i} \\ -y\omega_{IK/i} & x\omega_{IK/i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{IK/i} = \begin{pmatrix} x\omega_{IK/i} & y\omega_{IK/i} & z\omega_{IK/i} \end{pmatrix}^{\top}. \quad (2.10)$$

Alternativ lässt sich  $\boldsymbol{\omega}_{IK}$  auch aus Elementardrehungen aufbauen, bei denen die Drehreihenfolge zu beachten ist. Für die bereits eingeführten Eulerwinkel  $\psi_{IK}$ ,  $\vartheta_{IK}$  und  $\phi_{IK}$  gilt bei

Darstellung im Inertialsystem:

$$\boldsymbol{\omega}_{IK/I} = \begin{pmatrix} 0 & c\psi & s\psi c\vartheta \\ 0 & s\psi & -c\psi s\vartheta \\ 1 & 0 & c\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_{IK} \\ \dot{\vartheta}_{IK} \\ \dot{\phi}_{IK} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Somit ist  $\boldsymbol{\omega}_{IK/I}$  auch mit einer JACOBI-Drehmatrix  $\mathbf{J}_{\omega_{IK/I}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und den Zeitableitungen der Drehwinkel darstellbar:

$$\boldsymbol{\omega}_{IK/I} = \mathbf{J}_{\omega_{IK/I}} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_{IK} \\ \dot{\vartheta}_{IK} \\ \dot{\phi}_{IK} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Die Abhängigkeit der JACOBI-Drehmatrix von den Winkeln  $\psi_{IK}$ ,  $\vartheta_{IK}$  und  $\phi_{IK}$  ist zur Vereinfachung weggelassen.

Die translatorische Beschleunigung  $\mathbf{a}_{IK}$  des Körpers  $K$  ergibt sich durch die Zeitableitung von (2.5):

$$\mathbf{a}_{IK/I} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_{IK/I} = \ddot{\mathbf{r}}_{IK/I} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{IK/I} & \ddot{y}_{IK/I} & \ddot{z}_{IK/I} \end{pmatrix}^T. \quad (2.13)$$

Die Winkelbeschleunigung ist in gleicher Weise berechenbar:

$$\boldsymbol{\alpha}_{IK/I} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}_{IK/I} = \begin{pmatrix} {}^x\dot{\omega}_{IK/I} & {}^y\dot{\omega}_{IK/I} & {}^z\dot{\omega}_{IK/I} \end{pmatrix}^T. \quad (2.14)$$

Der Ortsvektor  $\mathbf{r}_{IK}$ , die Drehmatrix  $\mathbf{A}_{IK}$ , die translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_{IK}$  und  $\boldsymbol{\omega}_{IK}$  sowie die Beschleunigungen  $\mathbf{a}_{IK}$  und  $\boldsymbol{\alpha}_{IK}$  beschreiben die Kinematik des starren Körpers  $K$ .

### 2.1.2 Kinematik der Mehrkörpersysteme

Ein Mehrkörpersystem besteht aus einer beliebigen aber festen Anzahl von massebehafteten Körpern, auf die an einer endlichen Anzahl von materiellen Punkten Kräfte und Momente einwirken. Diese Kräfte und Momente entstehen einerseits durch beschleunigte Bewegungen und andererseits durch Federn, Dämpfer, Stellglieder und Gelenke, die sowohl die Wechselwirkungen zwischen den Körpern als auch zwischen dem Mehrkörpersystem und der Umwelt beschreiben.

Das Prinzip der Mehrkörpersysteme besteht darin, die Eigenschaften Trägheit, Elastizität, Viskosität und Kraft einzelnen diskreten Elementen zuzuordnen. Unter Berücksichtigung der Lagerung entsteht aus diesen lokal beschriebenen Elementen das Gesamtsystem. Durch diese

Diskretisierung lassen sich vergleichsweise einfach globale Bewegungsgleichungen aufstellen, die das mechanische System beschreiben.

### Wechselwirkungen in Mehrkörpersystemen

Neben den im Abschnitt 2.1.1 beschriebenen starren Körpern, dem Inertialsystem und den körperfesten Koordinatensystemen, werden zur Modellierung der Wechselwirkungen weitere Elemente benötigt, auf die nachfolgend näher eingegangen wird.

**Bindungen** Bindungen beschränken die freie Bewegung zwischen den Körpern eines Systems, indem sie für den Ort, die Orientierung oder für die Geschwindigkeiten feste Zusammenhänge vorgeben. Zu den Bindungen gehören zum Beispiel Stäbe, Lagestellglieder und Gelenke, die im Mehrkörpersystem *Reaktionskräfte* hervorrufen. In technischen Systemen auftretende Bindungen sind

- geometrisch oder kinematisch,
- zweiseitig oder einseitig,
- skleronom oder rheonom sowie
- holonom oder nichtholonom.

In Anwendungsfällen treten meist Kombinationen dieser Eigenschaften auf.

*Geometrische Bindungen* beschränken den Ort und die Orientierung eines Systems. Ist diese Beschränkung *einseitig*, so kann das System die Bindung verlassen. Als Beispiel sei ein Fadenpendel genannt, bei dem das Pendel eine freie Bewegung in der durch die Fadenlänge definierten Kugel ausführt, aber nicht in den Raum außerhalb der Kugelschale gelangen kann. Eine *zweiseitige* Bindung entsteht, wenn der Faden durch einen Stab ersetzt wird. In diesem Fall kann die Bindung nicht mehr verlassen werden.

*Kinematische Bindungen* beschränken die Geschwindigkeit eines Systems. Ein Beispiel für eine gebundene Geschwindigkeit ist ein gleitfrei rollendes Rad auf einer Schiene, bei dem die Geschwindigkeiten  $\dot{x}_C$  des Schwerpunktes  $C$  entlang der Schiene durch den Raddurchmesser  $r$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bestimmt sind:

$$\dot{x}_C = r\omega. \quad (2.15)$$

In diesem Beispiel kann die kinematische Bindung durch Integration als *rheonome*, also zeitabhängige, geometrische Bindung dargestellt werden:

$$x_C = r\omega t. \quad (2.16)$$

Dem gegenüber werden Bindungen, die nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängen, als *skleronom* bezeichnet.

Für die Auswahl des Modellbildungsformalismus ist die Klassifikation in *holonome* und *nichtholonome* Systeme von Bedeutung. In die erste Gruppe fallen Systeme, die ausschließlich geometrische und integrierbare kinematische Bindungen besitzen. Die zweite Gruppe fasst die Systeme zusammen, die mindestens eine nicht integrierbare kinematische, also *nichtholonome* Bindung aufweisen. Ein Beispiel hierfür ist ein *gleitfrei* auf der Ebene rollender Reifen. In diesem Fall ist die absolute Geschwindigkeit des Reifens mit der Drehrate über den Reifendurchmesser verknüpft. Wie sich diese Geschwindigkeit auf  $\dot{x}_C$  und  $\dot{y}_C$  aufteilt, hängt jedoch von der Ausrichtung  $\psi$  des Reifens in der Ebene ab. Somit entstehen zwei nicht integrierbare kinematische Bindungen:

$$\dot{x}_C = r\omega \sin \psi, \quad (2.17a)$$

$$\dot{y}_C = r\omega \cos \psi. \quad (2.17b)$$

Bindungen werden durch Bindungsgleichungen ausgedrückt, anhand derer die oben eingeführte Klassifikation durchführbar ist. So werden geometrische Bindungen durch Gleichungen der Form

$$f(\mathbf{r}_{IK_1}, \dots, \mathbf{r}_{IK_n}, \mathbf{A}_{IK_1}, \dots, \mathbf{A}_{IK_n}, t) = 0 \quad (\text{zweiseitige Bindung}), \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{r}_{IK_1}, \dots, \mathbf{r}_{IK_n}, \mathbf{A}_{IK_1}, \dots, \mathbf{A}_{IK_n}, t) &\leq 0 \\ f(\mathbf{r}_{IK_1}, \dots, \mathbf{r}_{IK_n}, \mathbf{A}_{IK_1}, \dots, \mathbf{A}_{IK_n}, t) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{einseitige Bindung}) \quad (2.19)$$

mathematisch beschrieben, wobei  $n$  die Anzahl der Körper ist, aus denen das Mehrkörpersystem besteht. Kinematische Bindungen sind zusätzlich von den Ableitungen der Lagekoordinaten (Ort und Orientierung) abhängig. Entfällt in den oben genannten Gleichungen die explizite Abhängigkeit von der Zeit  $t$ , sind die Bindungen skleronom.

Zur weiteren Abstraktion werden *ideale* Bindungen eingeführt. An idealen Bindungen treten die entstehenden Reaktionskräfte immer paarweise und in entgegengesetzter Wirkrichtung auf. Dadurch kompensieren sie sich und verrichten keine Arbeit. Bindungen bei starren Körpern sind *immer* ideal. Sofern zusätzlich Reibung auftritt, werden die Reibungskräfte als neue eingeprägte Kräfte behandelt, für die weitere Zusammenhänge formuliert werden müssen.

Abschließend sei gesagt, dass eine geometrische Bindung eine (integrierbare) kinematische Bindung nach sich zieht, die aus der formalen Ableitung der Bindungsgleichung entsteht. Eine kinematische Bindung hingegen schränkt den Ort und die Orientierung eines starren

Körpers im Allgemeinen nicht ein. So kann ein gleitfrei rollender Reifen in der Ebene aus jeder Position in jede andere überführt werden, ohne die kinematischen Bindungen (2.17) zu verletzen.

**Kopplungen** Mit Koppelementen werden die Wechselwirkungen zwischen Körpern eines Mehrkörpersystems modelliert, die nicht durch Bindungen entstehen. Zu ihnen zählen Federn, Dämpfer und Kraftstellglieder. Die Kräfte, die diese Elemente hervorrufen, werden als *eingeprägte Kräfte* bezeichnet. Analog zu den Bindungen bestehen Kopplungen einerseits zwischen Körpern und andererseits zur Umwelt. Die entstehenden Kräfte berechnen sich aus den Relativgrößen (Ort, Orientierung, Geschwindigkeiten) der beteiligten Körper und gegebenenfalls weiteren Systemvariablen. Aktive Koppelemente können darüber hinaus eine eigene Dynamik besitzen, die neben den Bewegungsgleichungen des Mehrkörpersystems zu berücksichtigen ist. Beispielhaft seien die Stellregelkreise des Versuchsfahrzeugs AutoTram (Abschn. B.2, S. 138) genannt.

### Kinematik

Der Ort und die Orientierung eines einzelnen freien Körpers  $K_i$  im Raum wird durch sechs verallgemeinerte Koordinaten entsprechend seinen sechs Freiheitsgraden eindeutig bestimmt. Diese werden zu einem verallgemeinerten Positionsvektor  $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  zusammengefasst. Mit den Ortskoordinaten (2.1) und den Eulerwinkeln (2.2) gilt:

$$\bar{\mathbf{z}}_{K_i} = \left( x_{IK_i} \quad y_{IK_i} \quad z_{IK_i} \quad \psi_{IK_i} \quad \vartheta_{IK_i} \quad \phi_{IK_i} \right)^\top, \quad (2.20)$$

sodass der Ortsvektor und die Drehmatrix jedes Körpers als Funktionen von  $\bar{\mathbf{z}}_{K_i}$  darstellbar sind:

$$\mathbf{r}_{IK_i/I} = \mathbf{r}_{IK_i}(\bar{\mathbf{z}}_{K_i}), \quad (2.21)$$

$$\mathbf{A}_{IK_i} = \mathbf{A}_{IK_i}(\bar{\mathbf{z}}_{K_i}). \quad (2.22)$$

Die Geschwindigkeit des körperfesten Koordinatensystems  $\mathcal{K}_i$  gegenüber dem Inertialsystem  $\mathcal{I}$  dargestellt im System  $\mathcal{I}$  ergibt sich aus der Zeitableitung von Gl. (2.21):

$$\mathbf{v}_{IK_i/I} = \frac{d\mathbf{r}_{IK_i/I}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_{IK_i/I}}{\partial \bar{\mathbf{z}}_{K_i}^\top} \frac{d\bar{\mathbf{z}}_{K_i}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_{IK_i/I}}{\partial \bar{\mathbf{z}}_{K_i}^\top} \dot{\bar{\mathbf{z}}}_{K_i}. \quad (2.23)$$

Die partielle Ableitung in dieser Gleichung wird durch die JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_{K_i/I} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$

ersetzt:

$$\mathbf{v}_{\mathcal{IK}_i/\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{K_i} = \mathbf{J}_{K_i/\mathcal{I}} \dot{\mathbf{z}}_{K_i}. \quad (2.24)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Körpers  $K_i$  gegenüber dem Inertialsystem  $\mathcal{I}$  lässt sich in gleicher Weise durch eine JACOBI-Drehmatrix  $\mathbf{J}_{\omega K_i/\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  angeben. Ausgehend von der Winkelgeschwindigkeit (2.11) gilt dann:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{IK}_i/\mathcal{I}} = \mathbf{J}_{\omega K_i/\mathcal{I}} \dot{\mathbf{z}}_{K_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c\psi_{\mathcal{IK}_i} & s\psi_{\mathcal{IK}_i} c\vartheta_{\mathcal{IK}_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s\psi_{\mathcal{IK}_i} & -c\psi_{\mathcal{IK}_i} s\vartheta_{\mathcal{IK}_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c\vartheta_{\mathcal{IK}_i} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{K_i}. \quad (2.25)$$

Ein aus  $n$  Körpern bestehendes *freies* Mehrkörpersystem besitzt  $\bar{n}_f = 6n$  Freiheitsgrade. Häufig wird jedoch die Bewegungsfreiheit des Gesamtsystems durch Bindungen eingeschränkt, die sich mit algebraischen Gleichungen mathematisch beschreiben lassen, s. a. Gln. (2.18) und (2.19). Treten in einem MKS  $n_h$  *holonome* Bindungen auf, so reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf die Anzahl der voneinander unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten:

$$n_f = 6n - n_h. \quad (2.26)$$

Eine Auswahl  $n_f$  voneinander unabhängiger Koordinaten wird Minimalkoordinaten genannt. Mit diesen Koordinaten ist die Kinematik des Mehrkörpersystems vollständig beschreibbar. Es ist daher zweckmäßig, einen neuen verallgemeinerten Positionsvektor  $\mathbf{z}$  einzuführen, der sich aus den Minimalkoordinaten zusammensetzt:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_{n_f} \end{pmatrix}^\top. \quad (2.27)$$

Die Ortsvektoren und die Drehmatrizen der zum Mehrkörpersystem gehörenden Körper lassen sich folglich als Funktionen von  $\mathbf{z}$  angeben:

$$\mathbf{r}_{\mathcal{IK}_i/\mathcal{I}} = \mathbf{r}_{\mathcal{IK}_i}(\mathbf{z}, t), \quad (2.28)$$

$$\mathbf{A}_{\mathcal{IK}_i} = \mathbf{A}_{\mathcal{IK}_i}(\mathbf{z}, t). \quad (2.29)$$

Die explizite Abhängigkeit von der Zeit tritt auf, wenn im Mehrkörpersystem rheonome Bindungen vorkommen.

Die Geschwindigkeiten ergeben sich wiederum durch formale Zeitableitung und die Drehraten mit den Gln. (2.7) bis (2.10). Werden analog zu den Gln. (2.24) und (2.25) JACOBI-

Matrizen eingeführt, gilt für die Geschwindigkeit und die Drehrate des körperfesten Koordinatensystems  $\mathcal{K}_i$ :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{IK}_i/\mathcal{I}} = \mathbf{J}_{K_i/\mathcal{I}}(\mathbf{z}, t) \dot{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{IK}_i/\mathcal{I}}(\mathbf{z}, t), \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{IK}_i/\mathcal{I}} = \mathbf{J}_{\omega K_i/\mathcal{I}}(\mathbf{z}, t) \dot{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{IK}_i/\mathcal{I}}(\mathbf{z}, t). \quad (2.31)$$

Die erneute Zeitableitung führt auf die verallgemeinerten Beschleunigungen. Da die Modellbildung in der vorliegenden Arbeit mit der LAGRANGESchen Gleichung 2. Art erfolgt, werden die verallgemeinerten Beschleunigungen nicht benötigt. Die entsprechenden Beziehungen sind u. a. in [61, 109, 149] angegeben.

### 2.1.3 Dynamik der Mehrkörpersysteme

Die Modellierung von Mehrkörpersystemen ist in der Literatur umfassend beschrieben. Dabei wird im Wesentlichen zwischen der NEWTON-EULERSchen und der LAGRANGESchen Methode unterschieden [61, 86, 109, 149].

Beim NEWTON-EULER-Formalismus werden die Bewegungsgleichungen für alle  $6n$  Lagekoordinaten der  $n$  Körper des Systems mit Hilfe des Impuls- und Drallsatzes sowie des Schnittprinzips aufgestellt und die vorhandenen algebraischen Zwangsbedingungen mitgeführt. Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass die Kinematik und die geometrische Anordnung des Systems ohne wesentliche Aufbereitungen verwendbar sind. Die Einbindung der holonomen Zwangsbedingungen erfolgt über deren Ableitungen nach den Lagekoordinaten mit LAGRANGESchen Multiplikatoren und führt auf ein System von LAGRANGESchen Gleichungen erster Art. Für die Simulation muss in diesem Fall ein Differential-Algebraisches Gleichungssystem (DAE) gelöst werden, was einen erhöhten Rechenaufwand bedeutet und je nach Art der Zwangsbedingungen auch numerische Probleme mit sich bringen kann.

Beim LAGRANGE-Formalismus wird die Dynamik des Mehrkörpersystems unmittelbar für die  $n_f$  Minimalkoordinaten ausgehend von Energieausdrücken hergeleitet. Der Rechenaufwand zur Lösung des reinen DGL-Systems ist vergleichsweise gering, weil die Systemordnung minimal ist und keine algebraischen Gleichungen mitgeführt werden. Allerdings müssen die notwendigen kinematischen Größen vorab als Funktionen der Minimalkoordinaten angegeben werden. Das resultierende Gleichungssystem des LAGRANGE-Formalismus ist an kein spezifisches Koordinatensystem gebunden und erwartungsgemäß zur vollständigen symbolischen Auflösung aller NEWTON-EULER-Gleichungen äquivalent.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Modellbildung nach LAGRANGE durchgeführt, da alle Bindungen holonom und die Zwangskräfte in den Gelenken für die regelungstechnische Aufga-

benstellung dieser Arbeit unbedeutend sind. Unter diesen Randbedingungen ist die LAGRANGESche Gleichung 2. Art eine effektive Methode zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen.

### Lagrangesche Gleichung 2. Art

Die Dynamik eines aus  $n$  Körpern bestehenden Mehrkörpersystems mit ausschließlich holonomen Bindungen lässt sich mit der LAGRANGESchen Gleichung 2. Art wie folgt beschreiben:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right)^\top - \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}} \right)^\top = \mathbf{q}, \quad (2.32)$$

wobei  $\mathbf{z}$  die verallgemeinerten Minimalkoordinaten und  $\mathbf{q}$  die verallgemeinerten eingepprägten Kräfte zusammenfassen. Die Energie des Systems  $L$  setzt sich aus der kinetischen Energie  $E_{kin}$  und der potentiellen Energie  $V$  zusammen:

$$L = E_{kin} - V. \quad (2.33)$$

Da in dieser Arbeit die Fahrzeugbewegung in der Ebene betrachtet wird, ist die potentielle Energie konstant und kann bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen vernachlässigt werden. Werden die Geschwindigkeiten und Drehraten der Körperschwerpunkte verwendet, gilt für die kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{v}_{IK_i}^\top m_{K_i} \mathbf{v}_{IK_i} + \boldsymbol{\omega}_{IK_i}^\top \mathbf{I}_{K_i} \boldsymbol{\omega}_{IK_i} \right). \quad (2.34)$$

Sie setzt sich aus der translatorischen und der rotatorischen Energie zusammen. Die physikalischen Größen können in beliebigen Koordinatensystemen angegeben werden, weil sich mit der Drehmatrix  $\mathbf{A}_{K_1 K_2}$  leicht

$$\mathbf{v}_{IK_i/K_1}^\top m_{K_i} \mathbf{v}_{IK_i/K_1} = \mathbf{v}_{IK_i/K_2}^\top m_{K_i} \mathbf{v}_{IK_i/K_2} \quad \text{und} \quad (2.35)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{IK_i/K_1}^\top \mathbf{I}_{K_i/K_1} \boldsymbol{\omega}_{IK_i/K_1} = \boldsymbol{\omega}_{IK_i/K_2}^\top \mathbf{I}_{K_i/K_2} \boldsymbol{\omega}_{IK_i/K_2} \quad (2.36)$$

zeigen lässt. Bei der Transformation (2.36) ist das Transformationsgesetz für Tensoren 2. Stufe anzuwenden:

$$\mathbf{I}_{K_i/K_2} = \mathbf{A}_{K_2 K_1} \mathbf{I}_{K_i/K_1} \mathbf{A}_{K_1 K_2}. \quad (2.37)$$

Diese Transformation verdeutlicht, dass der Trägheitstensor  $\mathbf{I}_{K_i}$  eines starren Körpers konstant ist, wenn er in einem körperfesten Koordinatensystem dargestellt wird. Andernfalls

entstehen über die Drehmatrizen meist Abhängigkeiten von den Minimalkoordinaten.

Werden die verallgemeinerten Geschwindigkeiten (2.30) und (2.31) in Gl. (2.34) eingesetzt, gilt:

$$\begin{aligned} E_{Kin} = & \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( (\dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{J}_{K_i}^T + \tilde{\mathbf{v}}_{TK_i}^T) m_{K_i} (\mathbf{J}_{K_i} \dot{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{v}}_{TK_i}) + (\dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{J}_{\omega K_i}^T + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{TK_i}^T) \mathbf{I}_{K_i} (\mathbf{J}_{\omega K_i} \dot{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{TK_i}) \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Wird diese Gleichung wiederum in (2.32) eingesetzt, entsteht nach längerer Rechnung ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen (DGL), das die Dynamik des MKS beschreibt. Dieses DGL-System wird meist in die implizite Form

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}, t) \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{g}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}, t) \quad (2.39)$$

überführt.

Die symmetrische, positiv definite Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{z}, t) \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$  beschreibt die Trägheitseffekte des Systems und ist mit den Gln. (2.38) und (2.32) berechenbar:

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}, t) = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{J}_{K_i}^T m_{K_i} \mathbf{J}_{K_i} + \mathbf{J}_{\omega K_i}^T \mathbf{I}_{K_i} \mathbf{J}_{\omega K_i} \right) \quad (2.40)$$

Der Vektor  $\mathbf{g}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t)$  modelliert die verallgemeinerten Coriolis- und Zentrifugalkräfte.

Die verallgemeinerten Kräfte  $\mathbf{q}$  beschreiben die äußeren Kräfte  $\mathbf{f}_{K_i} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  und Momente  $\mathbf{m}_{K_i} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , die an jedem Körper  $K_i$  bezüglich des Schwerpunktes  $C_i$  angreifen. Mit den korrespondierenden JACOBI-Matrizen gilt:

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{J}_{K_i}^T \mathbf{f}_{K_i} + \mathbf{J}_{\omega K_i}^T \mathbf{m}_{K_i} \right). \quad (2.41)$$

In der geometrischen Deutung bewirkt Gl. (2.41) die Projektion der Kräfte und Momente in Richtung der Minimalkoordinaten. Analog zur Gl. (2.34) sei darauf verwiesen, dass die JACOBI-Matrizen und die zugehörigen verallgemeinerten Kräfte  $\mathbf{f}_{K_i}$  und  $\mathbf{m}_{K_i}$  termweise im selben Koordinatensystem darzustellen sind.

Die auf die Körper wirkenden Kräfte und Momente lassen sich in verallgemeinerte eingepägte Kräfte  $\mathbf{f}_{K_i}^e$  und  $\mathbf{m}_{K_i}^e$  sowie in verallgemeinerte Reaktionskräfte  $\mathbf{f}_{K_i}^r$  und  $\mathbf{m}_{K_i}^r$  zerlegen:

$$\mathbf{f}_{K_i} = \mathbf{f}_{K_i}^e + \mathbf{f}_{K_i}^r, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{m}_{K_i} = \mathbf{m}_{K_i}^e + \mathbf{m}_{K_i}^r. \quad (2.43)$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit hebt sich die Wirkung der verallgemeinerten Reaktionskräfte auf, da diese immer paarweise mit entgegengesetzter Wirkrichtung auftreten und nicht gegeneinander verschoben werden. In Gl. (2.41) müssen folglich nur die eingepprägten Kräfte berücksichtigt werden, die beispielsweise von den Minimalkoordinaten, deren Zeitableitung, der Zeit  $t$ , von Störungen  $\zeta$  und von den Eingängen aktiver Elemente  $\mathbf{u}$  abhängen können:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \zeta, \mathbf{u}, t). \quad (2.44)$$

Dabei kann die Wirkung von  $\mathbf{u}$  direkt oder durch weitere Differentialgleichungen im Vektor  $\mathbf{q}$  auftreten.

Die verallgemeinerten Kräfte  $\mathbf{q}$  lassen sich auch aus der gesamten von den eingepprägten Kräften und Momenten geleisteten *virtuellen Arbeit*  $\delta W_e$  ableiten. Die Kräfte und Momente greifen dabei an  $n_e$  materiellen Knotenpunkten  $P_i$  des Systems an. Für alle  $P_i$  werden virtuelle Bewegungen eingeführt, die eine infinitesimal kleine und mit den Bindungen verträgliche Lageänderung der Knotenpunkte zu *festen* Zeiten darstellen. Rheonome Bindungen werden im betrachteten Zeitpunkt als erstarrt angesehen. Der Operator  $\delta$  der virtuellen Bewegung hat folgende Eigenschaften:

$$\delta \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \quad \delta t \equiv 0. \quad (2.45)$$

Bei mathematischen Operationen entspricht der Operator  $\delta$  einem Differential, sodass gilt:

$$\delta(c\mathbf{r}) = c\delta\mathbf{r}, \quad \delta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \delta\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_2, \quad \delta\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^\top} \delta\mathbf{x}. \quad (2.46)$$

Daraus folgt für die virtuelle Bewegung eines materiellen Punktes  $P_i$ :

$$\delta \mathbf{r}_{IP_i} = \mathbf{J}_{P_i} \delta \mathbf{z}, \quad \delta \mathbf{s}_{IP_i} = \mathbf{J}_{\omega P_i} \delta \mathbf{z}. \quad (2.47)$$

Die virtuelle Arbeit ist mit den virtuellen Bewegungen der  $n_e$  materiellen Knotenpunkte wie folgt berechenbar:

$$\delta W_e = \sum_{i=1}^{n_e} (\mathbf{f}_{P_i}^{e\top} \delta \mathbf{r}_{IP_i} + \mathbf{m}_{P_i}^{e\top} \delta \mathbf{s}_{IP_i}) = \mathbf{q}^\top \delta \mathbf{z}. \quad (2.48)$$

Aufbauend auf den dargestellten Grundlagen wird im folgenden Abschnitt das Modell eines n-gliedrigen, allrad-gelenkten Fahrzeugs hergeleitet. Die Herleitung basiert auf der LAGRAN-GEschen Gleichung 2. Art und dem Prinzip der virtuellen Arbeit.

## 2.2 Modellierung n-gliedriger, allrad-gelenkter Fahrzeuge

Die simulationsgestützte Entwicklung und Erprobung der automatischen Lenkungen erfolgt mit einem *Simulationsmodell*, das alle für die Querdynamik wesentlichen Eigenschaften wie die Fahrzeuggeometrie, die nichtlinearen Reifenkennlinien, das Fahrwerk und die Luftfederung der AutoTram berücksichtigt. Das Simulationsmodell wurde in Simpack<sup>®</sup> erstellt und die Parameter durch Fahrversuche mit dem Versuchsfahrzeug AutoTram abgeglichen und validiert.

Aufgrund der Komplexität des Simulationsmodells wird für den Steuerungsentwurf ein weiter vereinfachtes *regelungstechnisches Entwurfsmodell* (kurz: Entwurfsmodell) benötigt, das an die konkrete regelungstechnische Aufgabenstellung angepasst ist. Dieses Entwurfsmodell ist besonders bei modellbasierten Steuerungen von großer Bedeutung, da die Modellgenauigkeit direkt deren Güte beeinflusst. Daher sind, unter Berücksichtigung der in [34] gewonnenen Erkenntnisse, die in [8, 14, 110] genutzten kinematischen Fahrzeugmodelle nur für kleine Zentripetalbeschleunigungen geeignet und werden in der vorliegenden Arbeit nicht verwendet.

Die Entwurfsgrundlage der modellbasierten automatischen Lenkungen ist ein nichtlineares Einspurmodell, das die Fahrzeugdynamik in der Ebene beschreibt und in der Literatur überwiegend zur Spurführung von Fahrzeugen eingesetzt wird [70, 73, 78, 79, 123]. Dabei werden die Räder einer Achse durch ein Einzelrad ersetzt<sup>4</sup> und folgende Prämissen angenommen:

- Das Fahrzeug bewegt sich in der Ebene.
- Nick- und Wankbewegungen sind vernachlässigbar.
- Die Reifenkräfte greifen in der Latschmitte an.
- Die Massen und Trägheitsmomente der Räder werden in der Fahrzeugmasse berücksichtigt und die durch die Relativbewegung zum Fahrzeug entstehenden Masseneffekte sind vernachlässigbar.

Durch diese Annahmen sind die Radlasten auch dann konstant, wenn Momente um die Längsachse eines Fahrzeugmoduls wirken. In der Praxis hingegen ändern sich die Radlasten während der Fahrt. In Kurven erfolgt ein Lastwechsel von den kurveninneren auf die kurvenäußeren Reifen. In [150] wird jedoch gezeigt, dass die Auswirkungen insbesondere bei Nutzfahrzeugen vernachlässigbar gering sind.

---

<sup>4</sup>Die im allg. unterschiedlichen Lenkwinkel der Räder an einer Achse bei der heute üblichen Lenkungsgeometrie nach Ackermann werden folglich zu einem mittleren Lenkwinkel zusammengefasst, der die gleiche Wirkung erzielt.

Einspurmodelle für gewöhnliche Pkw werden u. a. in [79, 96, 107] beschrieben. Zwar werden in [34, 35, 36] auch Einspurmodelle von allrad-gelenkten Gelenkfahrzeugen verwendet, die ihnen zu Grunde liegenden Annahmen und Vereinfachungen aber teilweise nicht genannt bzw. begründet. Ein weiterer Nachteil ist, dass diese Modelle theoretisch auf Lenkwinkel  $\leq 10^\circ$  beschränkt sind. Mit den hier entwickelten automatischen Lenkungen sollen auch enge Kurven mit  $R \simeq 10$  m durchfahren werden, bei denen deutlich größere Lenkwinkel auftreten. In der vorliegenden Arbeit wird daher ein erweitertes Einspurmodell eines  $n$ -gliedrigen Fahrzeugs hergeleitet, das im Kapitel 3 als *Entwurfsmodell* verwendet wird. Einen Überblick über die Herleitung dieses Entwurfsmodells gibt [135].

Für die regelungstechnische Aufgabenstellung ist es zweckmäßig, das Entwurfsmodell in ein Fahrzeugmodell und ein Reifenmodell zu zerlegen. Das Fahrzeugmodell beschreibt den Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Beschleunigungen, dem Fahrzeugzustand  $\mathbf{z}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}$  sowie den eingprägten Kräften, die sich aus den Reifenkräften  $\mathbf{f}_A$  und den Störungen  $\mathbf{f}_W$  zusammensetzen:

$$\ddot{\mathbf{z}} = f_1(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{f}_A, \mathbf{f}_W). \quad (2.49)$$

Die Reifenkräfte werden als Eingang des Fahrzeugmodells festgelegt und durch ein zusätzliches Reifenmodell beschrieben, das wiederum vom Fahrzeugzustand sowie von den Antriebskräften  $\mathbf{f}_M$  und den Lenkwinkeln  $\gamma$  abhängt:

$$\mathbf{f}_A = f_2(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{f}_M, \gamma). \quad (2.50)$$

Die Zerlegung des Entwurfsmodells ist für die im Abschn. 3.1.1 beschriebene modellbasierte Vorsteuerung vorteilhaft, da so das Fahrzeugmodell linear in den Eingängen  $\mathbf{f}_A$  ist. Außerdem lassen sich durch den modularen Modellaufbau in einfacher Weise verschiedene Reifenmodelle untersuchen.

### 2.2.1 Fahrzeugmodell

Das Einspurmodell eines  $n$ -gliedrigen allrad-gelenkten Fahrzeugs zeigt Bild 2.2. Das in Fahrtrichtung erste Modul verfügt über zwei Lenkachsen und wird als Primärmodul bezeichnet. An dieses Primärmodul sind  $n - 1$  Nachlaufmodule durch je ein Gelenk  $G_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gekoppelt. Diese Gelenke schränken die Bewegungsfreiheit der Fahrzeugmodule zueinander auf jeweils einen Freiheitsgrad ein, sodass das MKS mit den genannten Prämissen  $n_h = 5n - 2$

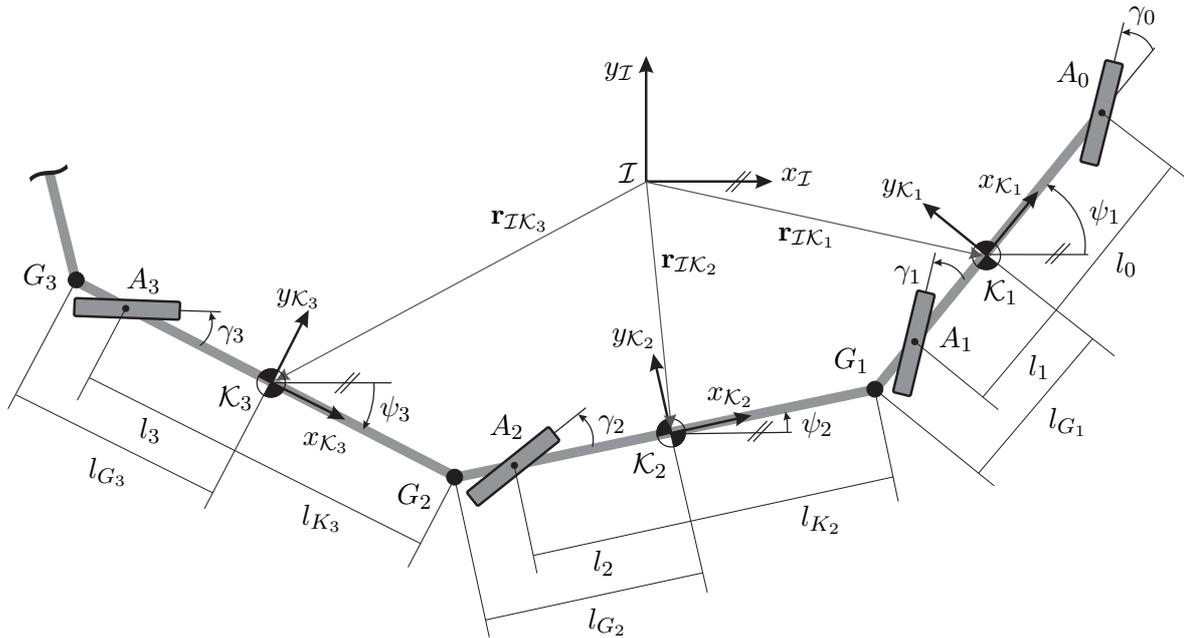


Bild 2.2: Einspurmodell des n-gliedrigen Fahrzeugs

holonome Bindungen besitzt:

$$z_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{nur ebene Bewegung}), \quad (2.51)$$

$$\phi_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{Wanken vernachlässigt}), \quad (2.52)$$

$$\vartheta_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{Nicken vernachlässigt}), \quad (2.53)$$

$$\begin{pmatrix} x_{IK_i} \\ y_{IK_i} \end{pmatrix} - \mathbf{f}_i(x_1, y_1, \psi_1, \dots, \psi_n) = \mathbf{0} \quad (i = 2, \dots, n) \quad (\text{Gelenkbindungen}). \quad (2.54)$$

Mit Gl. (2.26) folgt für die Anzahl der Freiheitsgrade:

$$n_f = 6n - n_h = n + 2. \quad (2.55)$$

Die  $n_f$  Minimalkoordinaten für das  $n$ -gliedrige Fahrzeug werden wie folgt gewählt:

$$\mathbf{z} = \left( x \quad y \quad \psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_n \right)^T. \quad (2.56)$$

Diese Wahl ermöglicht eine übersichtliche und gut nachvollziehbare Herleitung des Fahrzeugmodells. Die Koordinaten  $x$  und  $y$  kennzeichnen den Ursprung des im Schwerpunkt des

Primärmoduls liegenden Koordinatensystems  $\mathcal{K}_1$ :

$$\mathbf{r}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_1/\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^{\top}, \quad (2.57)$$

die Winkel  $\psi_i$  ( $i = 1 \dots, n$ ) beschreiben die Orientierung der Koordinatensysteme  $\mathcal{K}_i$  gegenüber dem Inertialsystem  $\mathcal{I}$ . Mit den Minimalkoordinaten (2.56) werden der Ort und die Orientierung des Fahrzeugs in der  $x_{\mathcal{I}}\text{-}y_{\mathcal{I}}$ -Ebene eindeutig festgelegt. Zur Vereinfachung wird im weiteren Verlauf der Arbeit die Kennzeichnung der im Koordinatensystem  $\mathcal{I}$  dargestellten Größen weggelassen.

Die Ortsvektoren der körperfesten Koordinatensysteme  $\mathcal{K}_i$

$$\mathbf{r}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_i} = \begin{pmatrix} x_i & y_i \end{pmatrix}^{\top} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.58)$$

lassen sich mit der Fahrzeuggeometrie nach Bild 2.2 und den Minimalkoordinaten (2.56) berechnen. Dazu werden zunächst alle  $x_i$  und  $y_i$  zusammengefasst:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\top}, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\top}. \quad (2.60)$$

Mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{L}_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & 0 \\ 1 & l_{G_1} & l_{K_2} & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & l_{G_1} & l_{K_2} + l_{G_2} & l_{K_3} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & l_{G_1} & l_{K_2} + l_{G_2} & l_{K_3} + l_{G_3} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & l_{G_1} & l_{K_2} + l_{G_2} & l_{K_3} + l_{G_3} & \dots & l_{K_{n-1}} + l_{G_{n-1}} & l_{K_n} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

gilt dann:

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}_K \begin{pmatrix} x & -\cos \psi_1 & -\cos \psi_2 & \dots & -\cos \psi_n \end{pmatrix}^{\top} = \mathbf{L}_K \boldsymbol{\eta}_x, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}_K \begin{pmatrix} y & -\sin \psi_1 & -\sin \psi_2 & \dots & -\sin \psi_n \end{pmatrix}^{\top} = \mathbf{L}_K \boldsymbol{\eta}_y. \quad (2.63)$$

Die Orientierung der Fahrzeugmodule bezüglich des Inertialsystems wird durch je eine

Drehmatrix

$$\mathbf{A}_{\mathcal{IK}_i} = \begin{pmatrix} \cos \psi_i & -\sin \psi_i & 0 \\ \sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.64)$$

beschrieben, die sich mit den Bindungsgleichungen (2.52) bis (2.54) aus Gl. (2.2) ergibt.

Die Ableitung der Gln. (2.62) und (2.63) nach der Zeit  $t$  führt auf

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}_K \frac{\partial \eta_x}{\partial \mathbf{z}^\top} \dot{\mathbf{z}}, \quad (2.65)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}_K \frac{\partial \eta_y}{\partial \mathbf{z}^\top} \dot{\mathbf{z}}, \quad (2.66)$$

sodass für die  $i$ -te Komponente von (2.65) und (2.66) gilt:

$$\dot{x}_i = {}^i\mathbf{L}_K \frac{\partial \eta_x}{\partial \mathbf{z}^\top} \dot{\mathbf{z}} = {}^1\mathbf{J}_{K_i} \dot{\mathbf{z}} \quad \text{bzw.} \quad (2.67)$$

$$\dot{y}_i = {}^i\mathbf{L}_K \frac{\partial \eta_y}{\partial \mathbf{z}^\top} \dot{\mathbf{z}} = {}^2\mathbf{J}_{K_i} \dot{\mathbf{z}}. \quad (2.68)$$

Dabei ist  ${}^i\mathbf{L}_K$  die  $i$ -te Zeile von  $\mathbf{L}_K$ . Werden die Gln. (2.67) und (2.68) zu dem Geschwindigkeitsvektor des  $i$ -ten Fahrzeugmoduls

$$\mathbf{v}_{\mathcal{IK}_i} = \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{IK}_i} = \begin{pmatrix} \dot{x}_i & \dot{y}_i \end{pmatrix}^\top = \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathcal{IK}_i}}{\partial \mathbf{z}^\top} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{J}_{K_i} \dot{\mathbf{z}} \quad (2.69)$$

zusammengefasst, gilt für die JACOBI-Matrix:

$$\mathbf{J}_{K_i} = \begin{pmatrix} {}^1\mathbf{J}_{K_i} \\ {}^2\mathbf{J}_{K_i} \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Die Vektoren der Winkelgeschwindigkeiten werden über die Beziehungen (2.7) bis (2.10) berechnet. Mit den Bindungsgleichungen (2.52) und (2.53) gilt dann:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{IK}_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\psi}_i \end{pmatrix}^\top. \quad (2.71)$$

Die Transformation der Winkelgeschwindigkeiten in das jeweils körperfeste Koordinatensystem  $\mathcal{K}_i$  zeigt erwartungsgemäß, dass beide Darstellungen äquivalent sind:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{IK}_i/\mathcal{K}_i} = \mathbf{A}_{\mathcal{K}_i\mathcal{I}} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{IK}_i} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{IK}_i}. \quad (2.72)$$

Analog zu den Geschwindigkeiten (2.69) sind die Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{IK}_i}$  als Ma-

trixprodukt einer JACOBI-Drehmatrix mit den Minimalkoordinaten  $\mathbf{z}$  berechenbar:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{IK}_i} = \mathbf{J}_{\omega K_i} \dot{\mathbf{z}}. \quad (2.73)$$

Aus dieser Gleichung folgt mit (2.71) für die JACOBI-Drehmatrix

$$\mathbf{J}_{\omega K_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \dots & \delta_{ni} \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

wobei  $\delta_{ij}$  das KRONECKER-Symbol ist, für das

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.75)$$

gilt. Vereinfachend wird eine reduzierte JACOBI-Matrix

$${}^r\mathbf{J}_{\omega K_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \dots & \delta_{ni} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

eingeführt, sodass für die Drehraten um die  $z_{\mathcal{I}}$  Achse

$${}^z\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{IK}_i} = \dot{\psi}_i = {}^r\mathbf{J}_{\omega K_i} \dot{\mathbf{z}} \quad (2.77)$$

geschrieben wird.

Der Trägheitstensor  $\mathbf{I}_{K_i}$  eines starren Körpers ist konstant, wenn er in einem körperfesten Koordinatensystem  $\mathcal{K}_i$  dargestellt wird. Werden die Achsen dieses Koordinatensystems entlang der Trägheitshauptachsen ausgerichtet, verschwinden die Deviationsmomente und der Trägheitstensor ist nur auf der Diagonalen besetzt:

$$\mathbf{I}_{K_i/\mathcal{K}_i} = \begin{pmatrix} {}^x I_{K_i/\mathcal{K}_i} & 0 & 0 \\ 0 & {}^y I_{K_i/\mathcal{K}_i} & 0 \\ 0 & 0 & {}^z I_{K_i/\mathcal{K}_i} \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Werden die Gln. (2.69), (2.73) und (2.78) unter Anwendung der Transformationen (2.37) und (2.72) in Gl. (2.34) eingesetzt, so ist die kinetische Energie des Gesamtfahrzeugs mit der Masse des  $i$ -ten Fahrzeugmoduls  $m_i$  wie folgt berechenbar:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \dot{\mathbf{z}}^{\top} \mathbf{J}_{K_i/\mathcal{I}}^{\top} m_i \mathbf{J}_{K_i/\mathcal{I}} \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{z}}^{\top} \mathbf{J}_{\omega K_i/\mathcal{K}_i}^{\top} \mathbf{I}_{K_i/\mathcal{K}_i} \mathbf{J}_{\omega K_i/\mathcal{K}_i} \dot{\mathbf{z}} \right). \quad (2.79)$$

Der erste Term dieser Summe beschreibt die Translationsenergie, der zweite Term die Rotationsenergie des  $i$ -ten Fahrzeugmoduls. Da sich die Fahrzeugmodule ausschließlich um die  $z_{\mathcal{I}}$ -Achse drehen, gilt mit den Gln. (2.77) und (2.40):

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{z}}^T \left( \mathbf{J}_{K_i/\mathcal{I}}^T m_i \mathbf{J}_{K_i/\mathcal{I}} + {}^r\mathbf{J}_{\omega_{K_i/\mathcal{K}_i}}^T {}^z\mathbf{I}_{K_i/\mathcal{K}_i} {}^r\mathbf{J}_{\omega_{K_i/\mathcal{K}_i}} \right) \dot{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{M}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}}. \quad (2.80)$$

Wird die kinetische Energie in die linke Seite der LAGRANGESchen Gleichung 2. Art (2.32) eingesetzt, ergibt sich nach längerer Rechnung ein Ausdruck, der die Fahrzeugdynamik ohne die Wirkung der eingepprägten Kräfte beschreibt und sich stets in die Form der Gl. (2.39) überführen lässt. Mit der verallgemeinerten Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{z})$  aus Gl. (2.80) lässt sich der Vektor  $\mathbf{g}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$  berechnen und in das Matrixprodukt

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \mathbf{G}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \dot{\mathbf{z}} \quad (2.81)$$

überführen. Für das Fahrzeugmodell gilt dann:

$$\mathbf{M}(\mathbf{z})\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{G}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{q}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}, t). \quad (2.82)$$

In dieser Gleichung beschreibt  $\mathbf{M}(\mathbf{z})\ddot{\mathbf{z}}$  die Trägheitseffekte, die durch Massen und Trägheitsmomente hervorgerufen werden,  $\mathbf{G}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})\dot{\mathbf{z}}$  repräsentiert die Coriolis- und Zentripetalkräfte.

In der rechten Seite der Gl. (2.82) sind die eingepprägten Kräfte zusammengefasst, die sich in dieser Arbeit aus den Reifenkräften  $\mathbf{f}_{A_i}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) und den Störkräften  $\mathbf{f}_{W_j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) zusammensetzen.

### Reifenkräfte

In den Radaufstandspunkten  $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) des Einspurmodells wirken die Reifenkräfte  $\mathbf{f}_{A_i}$ , die unter anderem durch Lenkbewegungen und Antriebsmomente hervorgerufen werden. Die auf die Minimalkoordinaten bezogene Wirkung dieser Reifenkräfte wird zum Vektor der verallgemeinerten Reifenkräfte  $\mathbf{q}_A$  zusammengefasst und nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit (2.48) berechnet. Weil ausschließlich Kräfte in den materiellen Knotenpunkten angreifen, vereinfacht sich Gl. (2.48) mit der virtuellen Verschiebung  $\delta \mathbf{r}_{\mathcal{I}P_i} = \delta \mathbf{r}_{\mathcal{I}A_i}$  und den Gln. (2.46) zu:

$$\mathbf{q}_A = 2 \sum_{i=0}^n \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathcal{I}A_i}}{\partial \mathbf{z}^T} \right)^T \mathbf{f}_{A_i}. \quad (2.83)$$

Durch die Methode der virtuellen Verschiebung werden die Momente implizit berücksichtigt, die die im Punkt  $A_i$  angreifenden Kräfte  $\mathbf{f}_{A_i} = \begin{pmatrix} x f_{A_i} & y f_{A_i} \end{pmatrix}^T$  bezogen auf den zu-

gehörigen Körperschwerpunkt hervorrufen. Es ist zu beachten, dass sowohl der Ortsvektor  $\mathbf{r}_{\mathcal{I}A_i}$  als auch die Kraft  $\mathbf{f}_{A_i}$  im selben Koordinatensystem, aber nicht zwingend in  $\mathcal{I}$  anzugeben sind. Zur besseren Interpretierbarkeit wird in Gl. (2.83) der Faktor 2 vor der Summe eingeführt, sodass  $\mathbf{f}_{A_i}$  der auf *einen* Reifen der Achse  $A_i$  wirkende Kraftvektor ist.

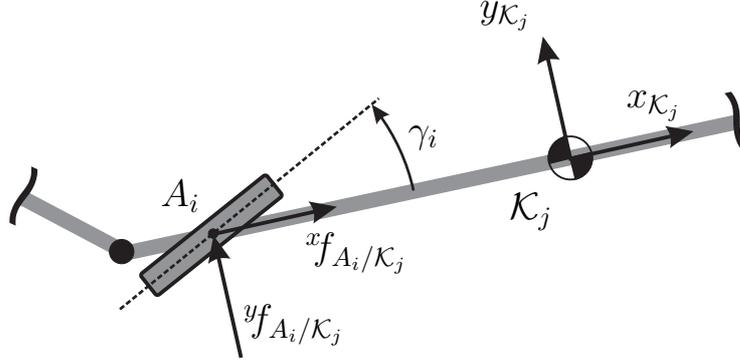


Bild 2.3: Kräfte an der Achse  $A_i$

Für die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_{\mathcal{I}A_i}$  ist die Angabe im Inertialsystem zweckmäßig. Die Kräfte  $\mathbf{f}_{A_i}$  werden hingegen im zugehörigen körperfesten Koordinatensystem  $\mathcal{K}_j$  dargestellt:

$$\mathbf{f}_{A_i/\mathcal{K}_j} = \begin{pmatrix} x f_{A_i/\mathcal{K}_j} & y f_{A_i/\mathcal{K}_j} \end{pmatrix}^T \quad \text{mit } j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, \\ i & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.84)$$

Die Komponenten  $x f_{A_i/\mathcal{K}_j}$  und  $y f_{A_i/\mathcal{K}_j}$  beschreiben dann die in Längs- bzw. Querrichtung des zugehörigen Fahrzeugmoduls wirkenden Kräfte, die als Eingangsgrößen des Fahrzeugmodells gewählt werden (Bild 2.3). Gegenüber [74, 90] hat dies den Vorteil, dass längs- und querdynamisch wirkende Eingänge separiert sind und die Lenkwinkel  $\gamma_i$  nur im Reifenmodell auftreten<sup>5</sup>. Die Transformation erfolgt durch die obere linke Untermatrix von Gl. (2.64)  ${}^r\mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_j} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ :

$$\mathbf{q}_A = 2 \sum_{i=0}^n \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathcal{I}A_i}}{\partial \mathbf{z}^T} \right)^T {}^r\mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_j} \mathbf{f}_{A_i/\mathcal{K}_j} \quad \text{mit } j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, \\ i & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.85)$$

Die Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_{\mathcal{I}A_i} = \begin{pmatrix} x_{A_i} & y_{A_i} \end{pmatrix}^T \quad (2.86)$$

<sup>5</sup>Die Wahl der Fahrzeugmodelleingänge nach [74, 90] führt dazu, dass die in  $A_i$  dargestellten Reifenkräfte  $\mathbf{f}_{A_i/A_i}$  mit den Lenkwinkeln  $\gamma_i$  zunächst in das zugehörige Koordinatensystem  $\mathcal{K}_j$  transformiert werden müssen, sodass  $\gamma_i$  im Fahrzeugmodell *und* im Reifenmodell auftritt.

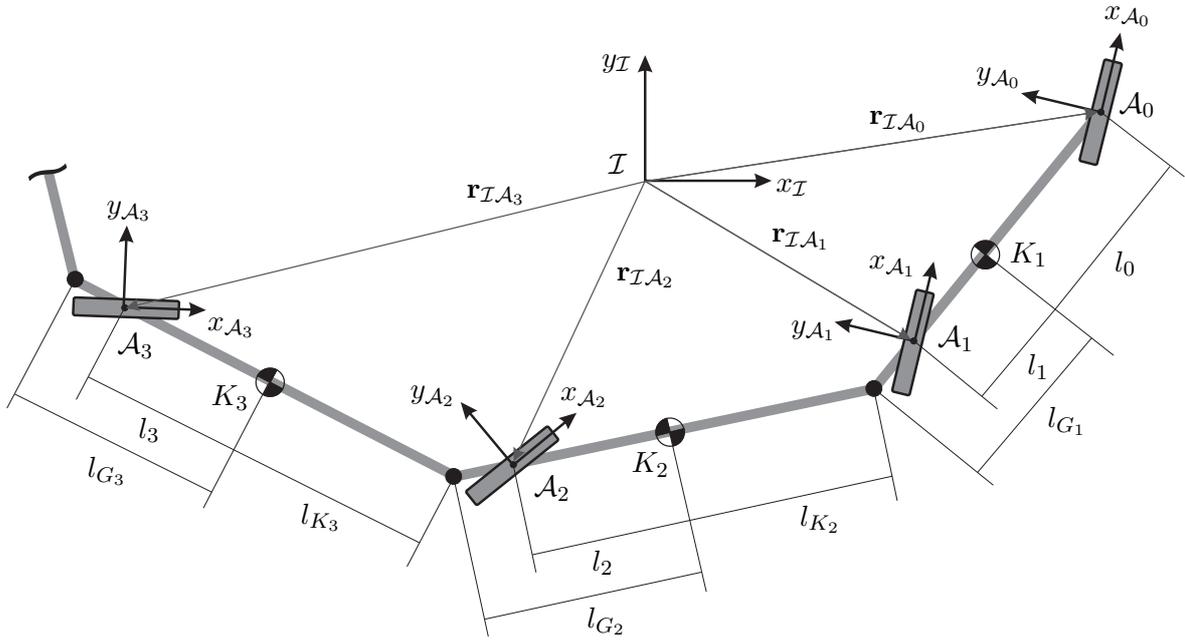


Bild 2.4: Reifenaufstandspunkte

in Gl. (2.85) ergeben sich analog zu den Ortsvektoren der Fahrzeugmodulschwerpunkte (2.59) und (2.60) zu:

$$\mathbf{x}_A = \begin{pmatrix} x_{A0} & x_{A1} & \dots & x_{An} \end{pmatrix}^T, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{y}_A = \begin{pmatrix} y_{A0} & y_{A1} & \dots & y_{An} \end{pmatrix}^T. \quad (2.88)$$

Die Koeffizientenmatrix mit den geometrischen Parametern in Bild 2.4 lautet dann:

$$\mathbf{L}_A = \begin{pmatrix} 1 & -l_0 & 0 & \dots & & & 0 \\ 1 & l_1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 1 & l_{G_1} & l_{K_2} + l_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & l_{G_1} & l_{K_2} + l_{G_2} & l_{K_3} + l_3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & l_{G_1} & l_{K_2} + l_{G_2} & l_{K_3} + l_{G_3} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & l_{G_1} & l_{K_2} + l_{G_2} & l_{K_3} + l_{G_3} & \dots & l_{K_{n-1}} + l_{G_{n-1}} & l_{K_n} + l_n \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

und es gilt:

$$\mathbf{x}_A = \mathbf{L}_A \boldsymbol{\eta}_x, \quad (2.90)$$

$$\mathbf{y}_A = \mathbf{L}_A \boldsymbol{\eta}_y. \quad (2.91)$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\mathcal{I}A_i}}{\partial \mathbf{z}^\top} = \begin{pmatrix} {}^{(i+1):}\mathbf{L}_A \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_x}{\partial \mathbf{z}^\top} \\ {}^{(i+1):}\mathbf{L}_A \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_y}{\partial \mathbf{z}^\top} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{A_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (2.92)$$

werden in Gl. (2.85) eingesetzt:

$$\mathbf{q}_A = 2 \sum_{i=0}^n \mathbf{J}_{A_i}^\top {}^r\mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_j} \mathbf{f}_{A_i/\mathcal{K}_j}. \quad (2.93)$$

Wird nun

$$\mathbf{J}_{A_i}^\top {}^r\mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_j} = ({}^r\mathbf{A}_{\mathcal{K}_j\mathcal{I}} \mathbf{J}_{A_i})^\top = \mathbf{J}_{A_i/\mathcal{K}_j}^\top \quad (2.94)$$

gesetzt, gilt für die verallgemeinerten Reifenkräfte:

$$\mathbf{q}_A = 2 \sum_{i=0}^n \mathbf{J}_{A_i/\mathcal{K}_j}^\top \mathbf{f}_{A_i/\mathcal{K}_j}. \quad (2.95)$$

Nachdem die Reifenkräfte  $\mathbf{f}_{A_i/\mathcal{K}_j}$  in die Längskräfte  ${}^{dr}f_{A_i}$  und die Querkräfte  ${}^{cr}f_{A_i}$  zerlegt sind:

$$\mathbf{f}_{A_i/\mathcal{K}_j} = \begin{pmatrix} {}^{xf}_{A_i/\mathcal{K}_j} \\ {}^{yf}_{A_i/\mathcal{K}_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{dr}f_{A_i} \\ {}^{cr}f_{A_i} \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

lässt sich Gl. (2.95) wie folgt umstellen:

$$\mathbf{q}_A = 2 \sum_{i=0}^n \mathbf{J}_{A_i/\mathcal{K}_j}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} {}^{dr}f_{A_i} + 2 \sum_{i=0}^n \mathbf{J}_{A_i/\mathcal{K}_j}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} {}^{cr}f_{A_i}. \quad (2.97)$$

Die Summen dieser Gleichung werden abschließend mit

$$\mathbf{f}_{dr} = \begin{pmatrix} drf_{A_0} & drf_{A_1} & \dots & drf_{A_n} \end{pmatrix}^T \quad \text{und} \quad (2.98)$$

$$\mathbf{f}_{cr} = \begin{pmatrix} crf_{A_0} & crf_{A_1} & \dots & crf_{A_n} \end{pmatrix}^T \quad (2.99)$$

sowie mit

$$\mathbf{J}_{dr} = \begin{pmatrix} {}^1\mathbf{J}_{A_0/\mathcal{K}_1}^T & {}^1\mathbf{J}_{A_1/\mathcal{K}_1}^T & \dots & {}^1\mathbf{J}_{A_n/\mathcal{K}_n}^T \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (2.100)$$

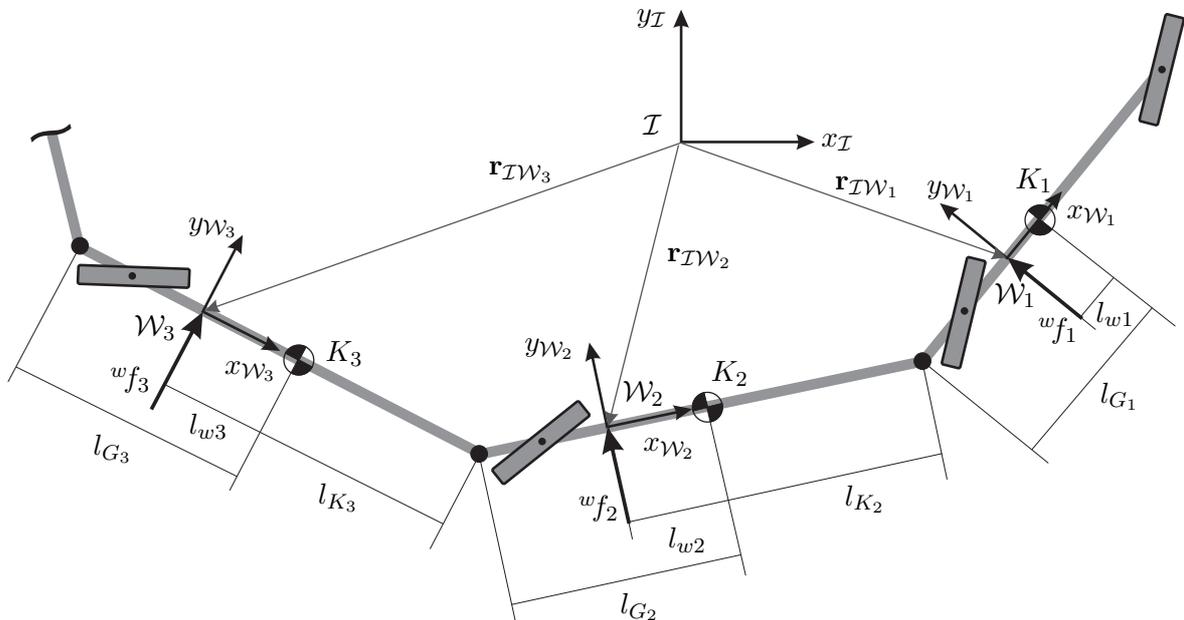
$$\mathbf{J}_{cr} = \begin{pmatrix} {}^2\mathbf{J}_{A_0/\mathcal{K}_1}^T & {}^2\mathbf{J}_{A_1/\mathcal{K}_1}^T & \dots & {}^2\mathbf{J}_{A_n/\mathcal{K}_n}^T \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

zusammengefasst zu:

$$\mathbf{q}_A = 2\mathbf{J}_{dr}\mathbf{f}_{dr} + 2\mathbf{J}_{cr}\mathbf{f}_{cr}. \quad (2.102)$$

### Seitenkräfte

Das Bild 2.5 zeigt die Seitenkräfte  $wf_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), die quer zur jeweiligen Fahrzeugmodul-längsrichtung wirken. Sie werden als nicht messbare Störungen aufgefasst und genutzt, um beispielsweise die Wirkung von Seitenwind zu simulieren.



**Bild 2.5:** Querkräfte am Einspurmodell

Die Wirkung der Seitenkräfte bezüglich  $\mathbf{z}$  lässt sich analog zu den Reifenkräften (2.83)

berechnen:

$$\mathbf{q}_W = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathcal{W}i}}{\partial \mathbf{z}^\top} \right)^\top \mathbf{f}_{W_i}. \quad (2.103)$$

Die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_{\mathcal{W}i}$  werden komponentenweise zusammengefasst:

$$\mathbf{x}_W = \begin{pmatrix} x_{W1} & x_{W2} & \dots & x_{Wn} \end{pmatrix}^\top, \quad (2.104)$$

$$\mathbf{y}_W = \begin{pmatrix} y_{W1} & y_{W2} & \dots & y_{Wn} \end{pmatrix}^\top, \quad (2.105)$$

sodass mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{L}_W = \begin{pmatrix} 1 & l_{w1} & 0 & \dots & & & 0 \\ 1 & l_{G1} & l_{K2} + l_{w2} & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & l_{G1} & l_{K2} + l_{G2} & l_{K3} + l_{w3} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & l_{G1} & l_{K2} + l_{G2} & l_{K3} + l_{G3} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & l_{G1} & l_{K2} + l_{G2} & l_{K3} + l_{G3} & \dots & l_{K_{n-1}} + l_{G_{n-1}} & l_{K_n} + l_{wn} \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

gilt:

$$\mathbf{x}_W = \mathbf{L}_W \boldsymbol{\eta}_x, \quad (2.107)$$

$$\mathbf{y}_W = \mathbf{L}_W \boldsymbol{\eta}_y. \quad (2.108)$$

Die partiellen Ableitungen in Gl. (2.103) lassen sich daher wie folgt berechnen:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\mathcal{W}i}}{\partial \mathbf{z}^\top} = \begin{pmatrix} {}^i\mathbf{L}_W \frac{\partial \eta_x}{\partial \mathbf{z}^\top} \\ {}^i\mathbf{L}_W \frac{\partial \eta_y}{\partial \mathbf{z}^\top} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{W_i} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.109)$$

Die JACOBI-Matrizen  $\mathbf{J}_{W_i}$  und die im Koordinatensystem  $\mathcal{K}_i$  dargestellten Seitenkräfte  $\mathbf{f}_{W_i}$  werden in Gl. (2.103) eingesetzt. Mit der Drehmatrix  ${}^r\mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_i}$  gilt dann:

$$\mathbf{q}_W = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_{W_i}^\top {}^r\mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_i} \mathbf{f}_{W_i/\mathcal{K}_i}. \quad (2.110)$$

Dieser Ausdruck lässt sich weiter vereinfachen, da  $\mathbf{f}_{W_i/\mathcal{K}_i} = \begin{pmatrix} 0 & {}^w f_i \end{pmatrix}^\top$  ist, also ausschließlich

Querkräfte auftreten:

$$\mathbf{q}_W = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_{W_i}^\top {}^w \mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_i} {}^w \mathbf{f}_i. \quad (2.111)$$

Dabei ist  ${}^w \mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_i}$  die zweite Spalte von  ${}^r \mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_i}$ . Abschließend wird

$$\mathbf{J}_{W_i}^\top {}^w \mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_i} = ({}^w \mathbf{A}_{\mathcal{K}_i \mathcal{I}} \mathbf{J}_{W_i})^\top = \mathbf{J}_{W_i/\mathcal{K}_i}^\top \quad (2.112)$$

gesetzt und die Summe mit

$$\mathbf{f}_w = \begin{pmatrix} {}^w f_1 & {}^w f_2 & \dots & {}^w f_n \end{pmatrix}^\top \quad (2.113)$$

und

$$\mathbf{J}_w = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{W_1/\mathcal{K}_1}^\top & \mathbf{J}_{W_2/\mathcal{K}_2}^\top & \dots & \mathbf{J}_{W_n/\mathcal{K}_n}^\top \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

in ein Matrixprodukt umgeformt:

$$\mathbf{q}_W = \mathbf{J}_w \mathbf{f}_w. \quad (2.115)$$

### Transformation in fahrzeugfeste Koordinaten

Werden die Reifenkräfte (2.102) und die Seitenkräfte (2.115) in Gl. (2.82) eingesetzt, so lautet die Gleichung für die Fahrzeugdynamik im Inertialsystem:

$$\mathbf{M}(\mathbf{z})\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{G}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})\dot{\mathbf{z}} = 2\mathbf{J}_{dr}(\mathbf{z})\mathbf{f}_{dr} + 2\mathbf{J}_{cr}(\mathbf{z})\mathbf{f}_{cr} + \mathbf{J}_w(\mathbf{z})\mathbf{f}_w. \quad (2.116)$$

Für die weiterführenden Untersuchungen ist es zweckmäßig, diese Gleichung in das fahrzeugfeste Koordinatensystem  $\mathcal{K}_1$  zu transformieren. Das Zusammenfassen der fahrzeugfesten Geschwindigkeit des Primärmoduls

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_1/\mathcal{K}_1} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{\mathcal{K}_1} & \dot{y}_{\mathcal{K}_1} \end{pmatrix}^\top = {}^r \mathbf{A}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{I}} \dot{\mathbf{x}}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_1/\mathcal{I}} \quad (2.117)$$

und der sowohl in  $\mathcal{I}$  als auch in  $\mathcal{K}_1$  identischen Drehraten zum verallgemeinerten fahrzeugfesten Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} = (\dot{x}_{\mathcal{K}_1} \quad \dot{y}_{\mathcal{K}_1} \quad \dot{\psi}_1 \quad \dots \quad \dot{\psi}_n)^\top$  führt nach der Rücktransformation der Gl. (2.117) auf:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} {}^r \mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} = \mathbf{T}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_1} \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}. \quad (2.118)$$

Wird Gl. (2.118) nach der Zeit abgeleitet, ergeben sich die verallgemeinerten Beschleunigungen:

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} \ddot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} + \dot{\mathbf{T}}_{\mathcal{IK}_1} \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}. \quad (2.119)$$

Nach dem Einsetzen der Gln. (2.118) und (2.119) in Gl. (2.116) und anschließender linksseitiger Multiplikation mit  $\mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1}^\top$  gilt für die Fahrzeugdynamik im fahrzeugfesten Koordinatensystem  $\mathcal{K}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathcal{K}_1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}) \ddot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} + \mathbf{G}_{\mathcal{K}_1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}, \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}) \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} = \\ 2 \mathbf{J}_{dr/\mathcal{K}_1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}) \mathbf{f}_{dr} + 2 \mathbf{J}_{cr/\mathcal{K}_1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}) \mathbf{f}_{cr} + \mathbf{J}_{w/\mathcal{K}_1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}) \mathbf{f}_w \end{aligned} \quad (2.120)$$

mit

$$\mathbf{M}_{\mathcal{K}_1} = \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1}^\top \mathbf{M} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1}, \quad (2.121)$$

$$\mathbf{G}_{\mathcal{K}_1} = \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1}^\top \left( \mathbf{M} \dot{\mathbf{T}}_{\mathcal{IK}_1} + \mathbf{G} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} \right), \quad (2.122)$$

$$\mathbf{J}_{dr/\mathcal{K}_1} = \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1}^\top \mathbf{J}_{dr}, \quad (2.123)$$

$$\mathbf{J}_{cr/\mathcal{K}_1} = \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1}^\top \mathbf{J}_{cr} \text{ und} \quad (2.124)$$

$$\mathbf{J}_{w/\mathcal{K}_1} = \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1}^\top \mathbf{J}_w. \quad (2.125)$$

Die ursprüngliche Symmetrie und positive Definitheit von  $\mathbf{M}$  bleibt durch die Kongruenztransformation (2.121) erhalten.

Für die Aufgabenstellung dieser Arbeit ist es zweckmäßig, das Fahrzeugmodell (2.120) in die Längs- und die Querdynamik zu zerlegen. Dazu wird Gl. (2.120) unter Ausnutzung der Invertierbarkeit von  $\mathbf{M}_{\mathcal{K}_1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1})$  linksseitig mit  $\mathbf{M}_{\mathcal{K}_1}^{-1}$  multipliziert und nach  $\ddot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}$  umgestellt:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} = \mathbf{M}_{\mathcal{K}_1}^{-1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}) \left( 2 \mathbf{J}_{dr/\mathcal{K}_1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}) \mathbf{f}_{dr} + 2 \mathbf{J}_{cr/\mathcal{K}_1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}) \mathbf{f}_{cr} + \mathbf{J}_{w/\mathcal{K}_1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}) \mathbf{f}_w \right. \\ \left. - \mathbf{G}_{\mathcal{K}_1}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}, \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}) \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} \right). \end{aligned} \quad (2.126)$$

In dieser Form beschreibt die erste Zeile des Differentialgleichungssystems die Längsdynamik in Richtung  $x_{\mathcal{K}_1}$  und die weiteren  $n + 1$  Differentialgleichungen die Querdynamik des Fahrzeugs.

### 2.2.2 Reifenmodell

Der Reifen überträgt Kräfte und Momente über die Reifenaufstandsfläche vom Fahrzeug auf die Fahrbahn und bestimmt durch seine Eigenschaften maßgeblich die Fahrzeugdynamik. Die Modellierung der Reifeneigenschaften ist daher von großer Bedeutung und wird in der Literatur ausführlich beschrieben. Grundsätzlich wird zwischen physikalischen Reifenmodellen [12, 50, 99, 103, 112] und mathematischen Reifenmodellen unterschieden [10, 89, 101, 102, 113, 153].

Physikalische Reifenmodelle bilden die Bauweise und die Materialeigenschaften des Reifens nach, sodass komplexe Differentialgleichungssysteme entstehen. Derartige Modelle sind auch bei hochfrequenten Anregungen bis zu 150 Hz gültig und werden vorwiegend bei der Analyse des Fahrkomforts auf unebener Fahrbahn eingesetzt. Einen Überblick über die bedeutendsten physikalischen Modelle gibt [85].

Die mathematischen Reifenmodelle sind hingegen weniger komplex. Ihr Ansatz besteht darin, die Ähnlichkeit der experimentell ermittelten nichtlinearen Kennfelder zu nutzen und diese durch Funktionen zu approximieren. Derartige Modelle sind bis zu 10 Hz gültig und eignen sich daher besonders zur Analyse von Fahrmanövern. Ein weit verbreitetes Modell dieser Art ist die Mitte der achtziger Jahre veröffentlichte *Magic Tyre Formula*, die in den Folgejahren stetig weiterentwickelt wurde [9, 67, 84, 97, 100, 122].

Bei der mathematischen Modellierung wird zwischen den Reifeneigenschaften in Umfangsrichtung, in vertikaler und in seitlicher Richtung unterschieden [59, 96, 100]. In einem ersten Schritt werden die Modellgleichungen für die einzelnen Richtungen unabhängig entwickelt und anschließend Terme ergänzt, die die Wechselwirkungen zwischen den Richtungen nachbilden. Dieser Ansatz wird u. a. bei der Magic Tyre Formula konsequent umgesetzt, sodass dieses Reifenmodell auch für Fahrsituationen mit kombiniertem Längs- und Querschlepp geeignet ist<sup>6</sup>. Mit diesem Modell sind Reifeneigenschaften des Simulationsmodells nachgebildet.

Die Reifeneigenschaften regelungstechnischer Entwurfsmodelle werden in der Literatur meist durch lineare Zusammenhänge beschrieben [35, 36, 115, 151], die für kleine Schräglaufwinkel und Zentripetalbeschleunigung bis ca.  $4 \text{ m/s}^2$  geeignet sind [7, 96, 134, 136]. Wird die automatische Lenkung auch im querdynamischen Grenzbereich betrieben, sind wie in [77, 78] genauere Reifenmodelle einzusetzen.

Einen Anhaltspunkt für die notwendige Genauigkeit des Reifenmodells gibt [58]. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass Pkw-Fahrer nur selten Zentripetalbeschleunigungen von  $5 \text{ m/s}^2$  erreichen. Bei Nutzfahrzeugen wurden bisher maximal ca.  $4.5 \text{ m/s}^2$  Zentripetalbeschleunigung gemessen [96]. Für die Personenbeförderung werden sogar nur Beschleunigungen von maximal

---

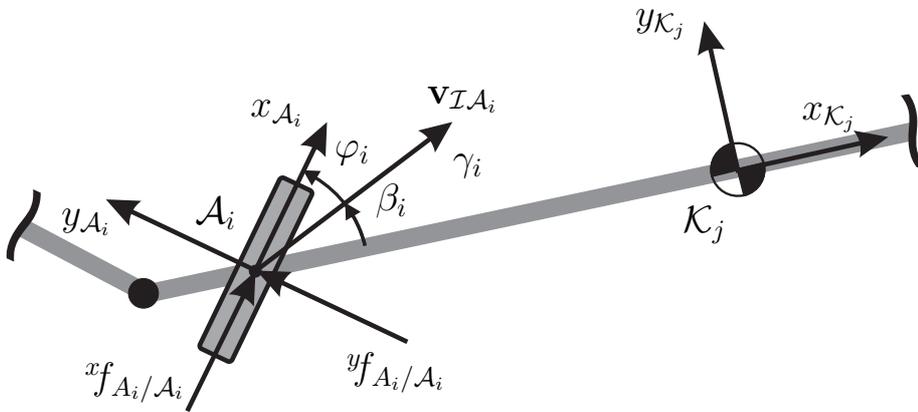
<sup>6</sup>Kombinierter Längs- und Querschlepp tritt u. a. beim Beschleunigen und Bremsen in Kurven auf.

1.3 m/s<sup>2</sup> empfohlen [131]. Daher wird in der vorliegenden Arbeit ein lineares Reifenmodell verwendet.

Die Kräfte  $\mathbf{f}_{cr}$  und  $\mathbf{f}_{dr}$  im Fahrzeugmodell (2.126) sind anschaulich interpretierbar, wenn sie in das zugehörige radfeste Koordinatensystem  $\mathcal{A}_i$  transformiert werden. Die Transformation erfolgt über den Lenkwinkel  $\gamma_i$ , sodass aus Gl. (2.96) folgt:

$$\mathbf{f}_{A_i/A_i} = \begin{pmatrix} x^f_{A_i/A_i} \\ y^f_{A_i/A_i} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{A_i\mathcal{K}_j} \mathbf{f}_{A_i/\mathcal{K}_j} \quad \text{mit } j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, \\ i & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.127)$$

In dieser Darstellung ist  $x^f_{A_i/A_i}$  die Umfangskraft<sup>7</sup> und  $y^f_{A_i/A_i}$  die Seitenkraft, die auf ein Rad der Achse  $A_i$  wirkt (Bild 2.6).



**Bild 2.6:** Reifenkräfte und Geschwindigkeitsvektor an der Achse  $A_i$

Die Seitenkraft  $y^f_{A_i/A_i}$  hängt primär vom Schräglaufwinkel  $\varphi_i$ , der Radlast  $z^f_{A_i/A_i}$ , dem Reibbeiwert der Fahrbahn  $\mu$  und dem Reifenluftdruck ab [96, 100]. Wird die Seitenkraft  $y^f_{A_i/A_i}$  über dem Schräglaufwinkel  $\varphi_i$  bei konstantem Reifenluftdruck und Reibbeiwert aufgetragen, entsteht eine von der Radlast  $z^f_{A_i/A_i}$  abhängende Kurvenschar. Bild 2.7 zeigt beispielhaft Kennlinien der Magic Tyre Formula, die im Simpack-Simulationsmodell verwendet werden.

Diese Kennlinien sind im Bereich kleiner Schräglaufwinkel gut linear approximierbar, sodass in dieser Arbeit das Reifenmodell

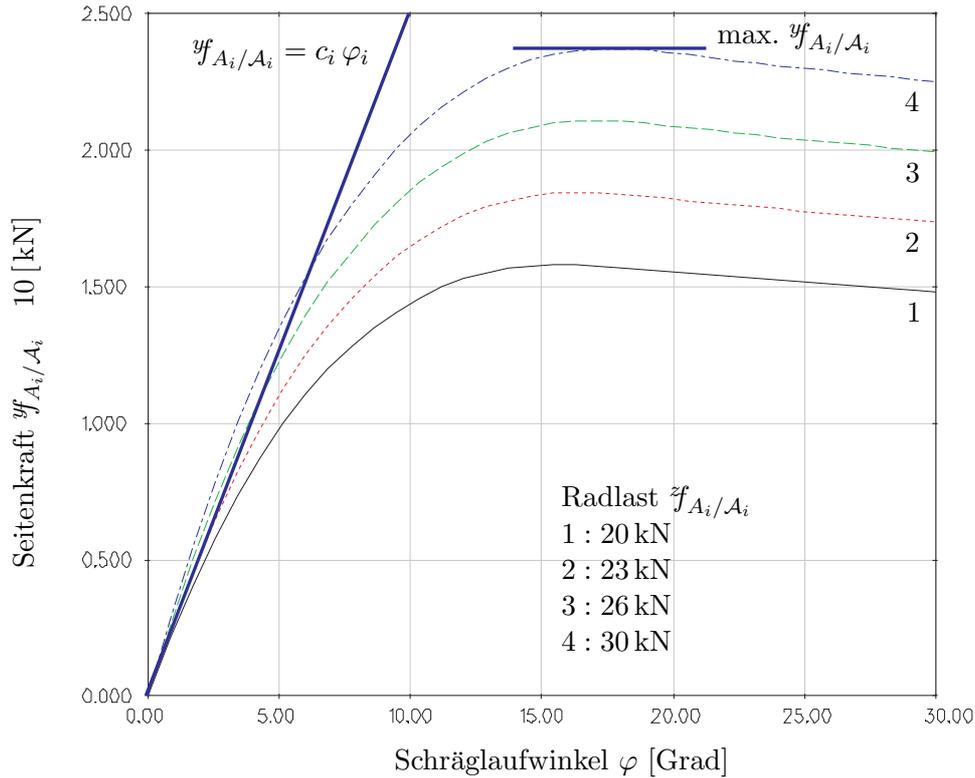
$$y^f_{A_i/A_i} = c_i \varphi_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (2.128)$$

mit dem so genannten Seitenkraftbeiwert  $c_i$  verwendet wird.

<sup>7</sup>Die Umfangskraft entsteht durch nicht-aerodynamische Fahrwiderstände sowie durch das Antriebsmoment und wird in dieser Arbeit auch als Antriebskraft bezeichnet.

Der Schräglaufwinkel  $\varphi_i$  ist die Differenz von Lenkwinkel  $\gamma_i$  und Schwimmwinkel  $\beta_i$ . Er lässt sich anhand des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}_{\mathcal{I}A_i} = (x_{v_{A_i}} \ y_{v_{A_i}})^\top$  berechnen (Bild 2.6), der wiederum mit den Gln. (2.69) und Gl. (2.92) wie folgt angegeben werden kann:

$$\mathbf{v}_{\mathcal{I}A_i} = \mathbf{J}_{A_i} \dot{\mathbf{z}}. \quad (2.129)$$



**Bild 2.7:** Reifenkennlinien des Simulationsmodells bei 20 – 30 kN Normalkraft  $z_{f_{A_i/A_i}}$

Mit Gl. (2.94) werden die Geschwindigkeitsvektoren in das fahrzeugfeste Koordinatensystem  $\mathcal{K}_j$  transformiert

$$\mathbf{v}_{\mathcal{I}A_i/\mathcal{K}_j} = \mathbf{J}_{A_i/\mathcal{K}_j} \dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} x_{v_{A_i/\mathcal{K}_j}} \\ y_{v_{A_i/\mathcal{K}_j}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, \\ i & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.130)$$

sodass für den Schräglaufwinkel gilt:

$$\varphi_i = \gamma_i - \beta_i = \gamma_i - \arctan \frac{y_{v_{A_i/\mathcal{K}_j}}}{x_{v_{A_i/\mathcal{K}_j}}}. \quad (2.131)$$

Wird Gl. (2.131) in Gl. (2.128) eingesetzt, folgt für die Komponenten von  $\mathbf{f}_{dr}$  und  $\mathbf{f}_{cr}$  nach

Rücktransformation von Gl. (2.127) und mit Gl. (2.96):

$$\mathbf{f}_{A_i/\mathcal{K}_j} = \begin{pmatrix} drf_{A_i} \\ crf_{A_i} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\mathcal{K}_j A_i} \begin{pmatrix} {}^x f_{A_i/A_i} \\ c_i \left( \gamma_i - \arctan \frac{{}^y v_{A_i/\mathcal{K}_j}}{{}^x v_{A_i/\mathcal{K}_j}} \right) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, \\ i & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.132)$$

Das Reifenmodell (2.132) ist an der Stelle  ${}^x v_{A_i/\mathcal{K}_j} = 0$  nicht definiert. Praktisch entspricht das einem stehendem Fahrzeug, sodass diese Besonderheit nur bei der Implementierung zu beachten ist.

Das Fahrzeugmodell (2.126) und das Reifenmodell (2.132) bilden das modulare regelungstechnische *Entwurfsmodell*, das im Gegensatz zu bekannten Arbeiten bei kleinen Schräglaufwinkeln auch für große Lenkwinkel  $\gamma_i < 90^\circ$  gilt.

### 2.2.3 Simulationsbasierte und experimentelle Validierung

Das in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 entwickelte Entwurfsmodell lässt sich nur mit sehr hohem Aufwand vollständig validieren, da der gesamte praktisch relevante Raum aller Zustände, Parameter und Eingangsgrößen zu überprüfen wäre. Dennoch kann die Güte des Entwurfsmodells anhand repräsentativer Fahrmanöver abgeschätzt werden. Dazu wird das Entwurfsmodell mit einem dreigliedrigen Simulationsmodell und mit dem zweigliedrigen Versuchsfahrzeug AutoTram verglichen.

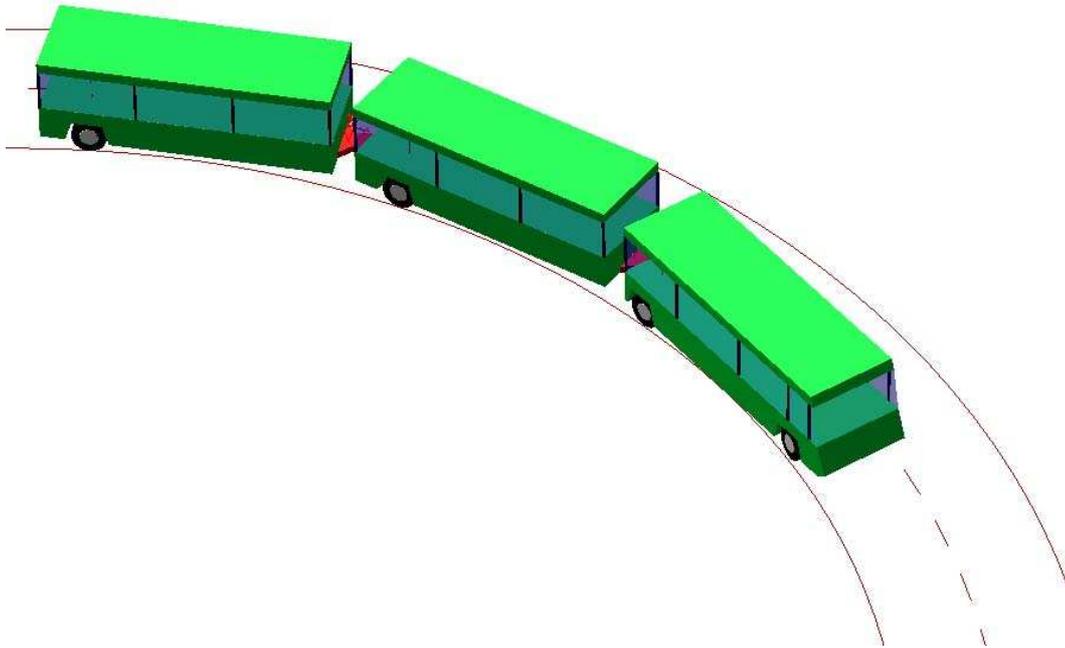
Die Validierung erfolgt durch den Vergleich der reduzierten fahrzeugfesten Geschwindigkeiten  ${}^r \mathbf{z}_{\mathcal{K}_1} = (\dot{y}_{\mathcal{K}_1}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3)^\top$ , weil für die automatischen Lenkungen nur die Querdynamik des Entwurfsmodells von Bedeutung ist. Zusätzlich wird der Wankanteil des Primärmoduls in der Quergeschwindigkeit  $v_y := \dot{y}_{\mathcal{K}_1}$  eliminiert, indem die Quergeschwindigkeit des Simulationsmodells auf Höhe der Wankachse gemessen wird<sup>8</sup>. Die verallgemeinerten Beschleunigungen ergeben sich anschaulich durch die Differentiation der Messkurven. Der Zeitverlauf des Ortsvektors  $\mathbf{x}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_1}$  ist zur Modellvalidierung ungeeignet, weil er nicht ohne Weiteres in längs- und querdynamische Anteile im Sinne von Gl. (2.126) zerlegbar ist.

---

<sup>8</sup>Der Wankanteil der Quergeschwindigkeit  $v_y$  wird eliminiert, weil bei automatischen Lenkungen die Bewegung der Achsmittelpunkte betrachtet wird. Der Einfluss der Wankbewegung auf die Bewegung dieser Punkte ist vernachlässigbar gering.

### Simulationsbasierte Modellvalidierung

Bild 2.8 zeigt das Simulationsmodell, das über 36 Freiheitsgrade sowie über nichtlineare Feder- und Dämpferkennlinien verfügt. Die Reifeneigenschaften sind mit der Magic Tyre Formula<sup>9</sup> modelliert [100] und die geometrischen Parameter werden vom Versuchsfahrzeug AutoTram übernommen.



**Bild 2.8:** Simulationsmodell eines dreigliedrigen Fahrzeuges

Das Simulationsmodell wird durch das weiter vereinfachte Entwurfsmodell (2.126) und (2.128) nachgebildet, wobei die Fahrzeugmodulmassen und -trägheitsmomente sowie die geometrischen Daten vom Simulationsmodell übernommen sind.

Der Seitenkraftbeiwert des Reifenmodells wird meist bei mittlerer Fahrzeugbeladung bestimmt und gleich dem Anstieg der Sekante gesetzt, die durch den Koordinatenursprung und  $1/3$  der maximalen Seitenkraft verläuft [96]. Abweichend dazu wird die Sekante in dieser Arbeit durch  $1/2$  der maximalen Seitenkraft bei trockener Fahrbahn ( $\mu = 0.9$ ) gelegt, s. a. Bild 2.7. Dadurch lässt sich der Gültigkeitsbereich bei größeren Schräglaufwinkeln erhöhen und zusätzlich die Übereinstimmung bei abnehmendem Reibbeiwert verbessern<sup>10</sup>.

Die Lenkwinkel  $\gamma_i$  werden über Lenkaktoren eingestellt, die als  $PT_2$ -Glieder mit einem Doppelpol bei  $p_a = -40$  modelliert sind, sodass das Simulations- und Entwurfsmodell mit einer

<sup>9</sup>In [100] wird dieses Reifenmodell für die Simulation von Fahrmanövern vorgeschlagen, bei denen Anregungen bis ca. 8 Hz und Schräglaufwinkel bis ca.  $15^\circ$  entstehen.

<sup>10</sup>Bei abnehmendem Reibbeiwert  $\mu$  werden die Reifenkennlinien in Bild 2.7 vorwiegend entlang der Ordinate gestaucht, sodass sich deren Anstieg verringert.

Bandbreite von ca. 4 Hz angeregt wird. Zum Zeitpunkt  $t_1 = 1$  s springt das Eingangssignal jeweils eines Lenkaktors auf den Wert  $\tilde{\gamma}_i(t_1)$ . Die Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_x := \dot{x}_{\mathcal{K}_1}$  wird vorgegeben und durch einen Geschwindigkeitsregler gehalten, der die Antriebskräfte  ${}^x f_{A_i/A_i}$  als Stellgrößen nutzt.

Einen Auszug aus dem Versuchsprogramm zeigt Tabelle 2.1. Aufgrund der praktischen Bedeutung wurden bei geringen Geschwindigkeiten vorwiegend größere Lenkwinkelsprünge und bei hohen Geschwindigkeiten kleinere Lenkwinkelsprünge untersucht. Ergänzend wurden Lenkwinkelverläufe aufgeschaltet, die bei der Fahrt auf einer Teststrecke (Bild 4.1, S. 95) mit typischen Fahrmanövern wie Spurwechsel und Kurvenein- und -ausfahrt auftreten.

**Tabelle 2.1:** Validierung des Entwurfsmodells: Übersicht über die durchgeführten Simulationen

$v_x$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	Bild
2 m/s	40°	0°	0°	0°	Bild C.1, S. 144
4 m/s	0°	0°	0°	40°	Bild C.2, S. 145
6 m/s	20°	0°	0°	0°	Bild C.3, S. 146
8 m/s	0°	0°	20°	0°	Bild C.4, S. 147
10 m/s	0°	10°	0°	0°	Bild 2.9, S. 58
20 m/s	5°	0°	0°	0°	Bild 2.10, S. 59
20 m/s	0°	2°	0°	0°	Bild C.5, S. 148

Die simulationsbasierte Modellvalidierung zeigt, dass das Simulations- und das Entwurfsmodell im untersuchten Geschwindigkeitsbereich und bei Zentripetalbeschleunigungen bis ca.  $4 \text{ m/s}^2$  qualitativ und quantitativ übereinstimmen. In Bild 2.9 (S. 58) ist ein typischer Zeitverlauf von  $\dot{z}_{\mathcal{K}_1}$  dargestellt, wobei der Zeitverlauf des Entwurfsmodells durch ein Dach gekennzeichnet ist. Weitere Simulationsergebnisse sind im Anhang C zusammengefasst.

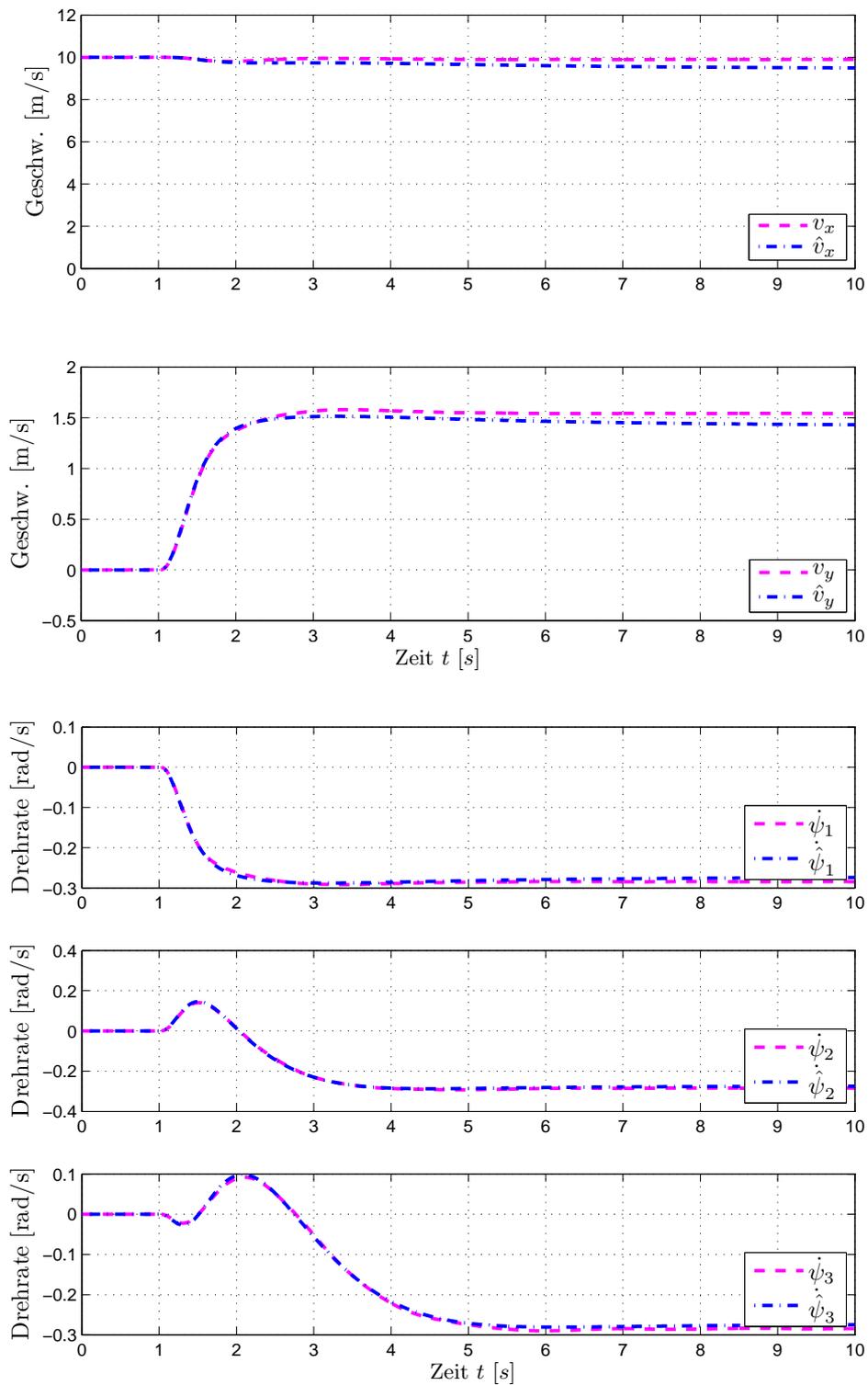
Auffällig ist, dass bei sehr kleinen Schräglaufwinkeln quasi stationäre Abweichungen entstehen, weil das lineare Reifenmodell in diesem Arbeitsbereich ungenau ist. Das führt zu unterschiedlichen Endwerten der Seitenkräfte  ${}^y f_{A_i/A_i}$ , die unterschiedliche Geschwindigkeiten  $v_y$  und Drehraten  $\dot{\psi}_i$  zur Folge haben (Bild C.1, S. 144).

Aus den Zeitverläufen der Quergeschwindigkeit  $v_y$  ist ersichtlich, dass die Wankbewegungen des Simulationsmodells durch die gewählte Messanordnung nicht auf  $v_y$  übertragen werden. Auffällig ist auch, dass die Wirkung eines Lenkwinkelsprungs  $\tilde{\gamma}_i(t_1)$  auf die Drehraten der vorgelagerten Fahrzeugmodule  $\dot{\psi}_j$  ( $j < i$ ) jeweils um ca. eine Größenordnung abnimmt (Bild C.2, S. 145). Der Einfluss auf die Drehrate eines nachgelagerten Fahrzeugmoduls ist erwartungsgemäß hoch.

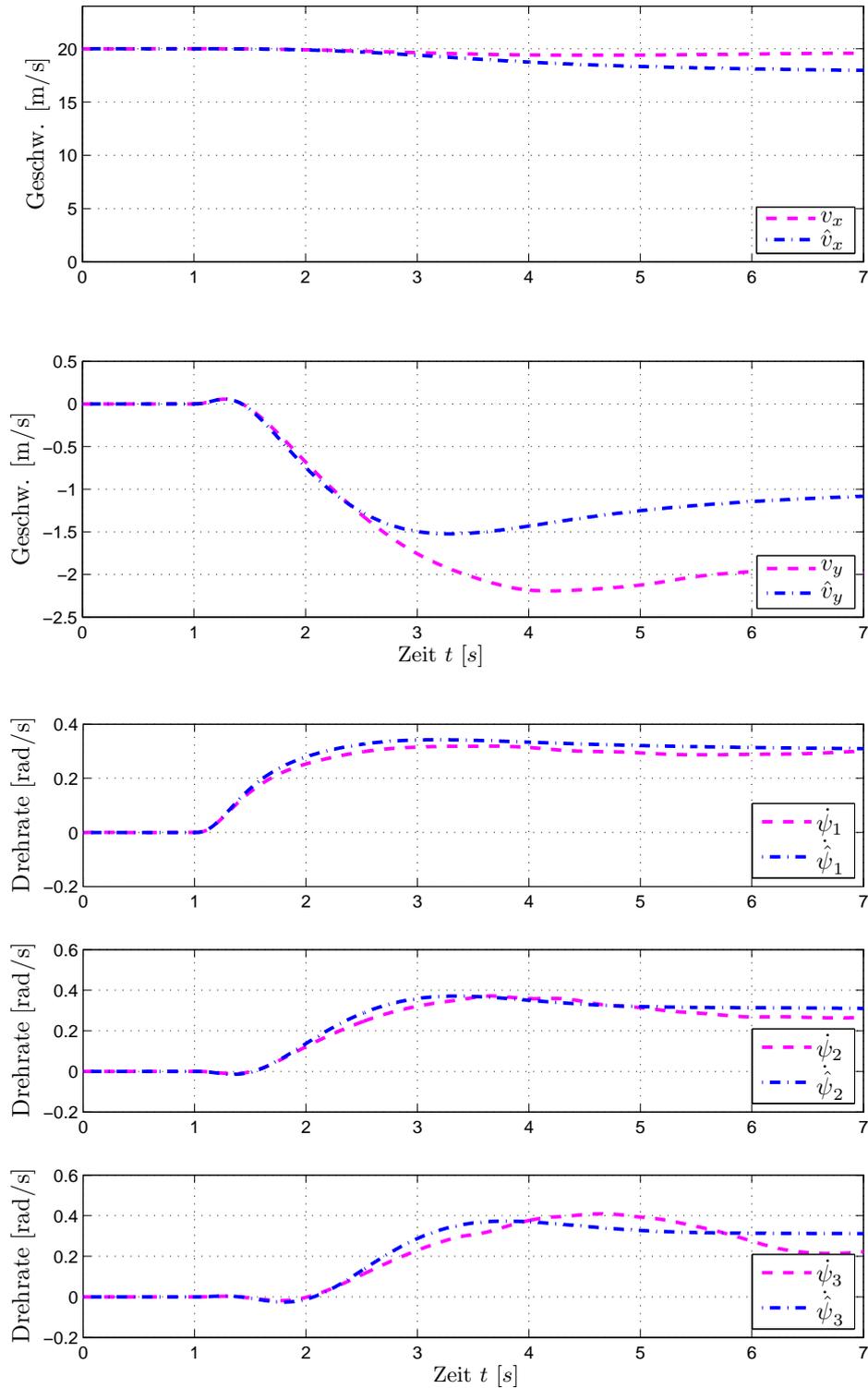
Bild 2.10 zeigt die Grenzen des Entwurfsmodells. In dieser Simulation fährt das Fahrzeug mit  $v_x = 20 \text{ m/s}$  und wird mit  $\tilde{\gamma}_0(t_1) = 5^\circ$  schlagartig eingelenkt. Die Zentripetalbeschleu-

nigung beträgt bis zu  $6.5 \text{ m/s}^2$  und die Quergeschwindigkeit  $v_y$  des Simulationsmodells ist ab  $t \approx 3 \text{ s}$  deutlich größer als beim Entwurfsmodell. Dieses Ergebnis lässt sich wiederum auf das lineare Reifenmodell (2.128) zurückführen. Die Reifenkennlinien des Simulationsmodells sind bei großen Schräglaufwinkeln degressiv und erreichen ein lokales Maximum. An dieser Stelle erfolgt bei weiter zunehmendem Schräglaufwinkel der Übergang von Roll- zu Gleitreibung und  $\mathcal{Y}_{A_i/A_i}$  nimmt wieder ab (Bild 2.7, S. 53). Im Gegensatz dazu steigen die Reifenkräfte  $\mathcal{Y}_{A_i/A_i}$  des linearen Reifenmodells proportional mit dem Schräglaufwinkeln  $\varphi_i$ . Die verwendeten Seitenkraftbeiwerte  $c_i$  führen daher bei großen Schräglaufwinkeln auf zu große Reifenkräfte  $\mathcal{Y}_{A_i/A_i}$ , die wiederum kleinere Quergeschwindigkeiten  $\hat{v}_y$  zur Folge haben.

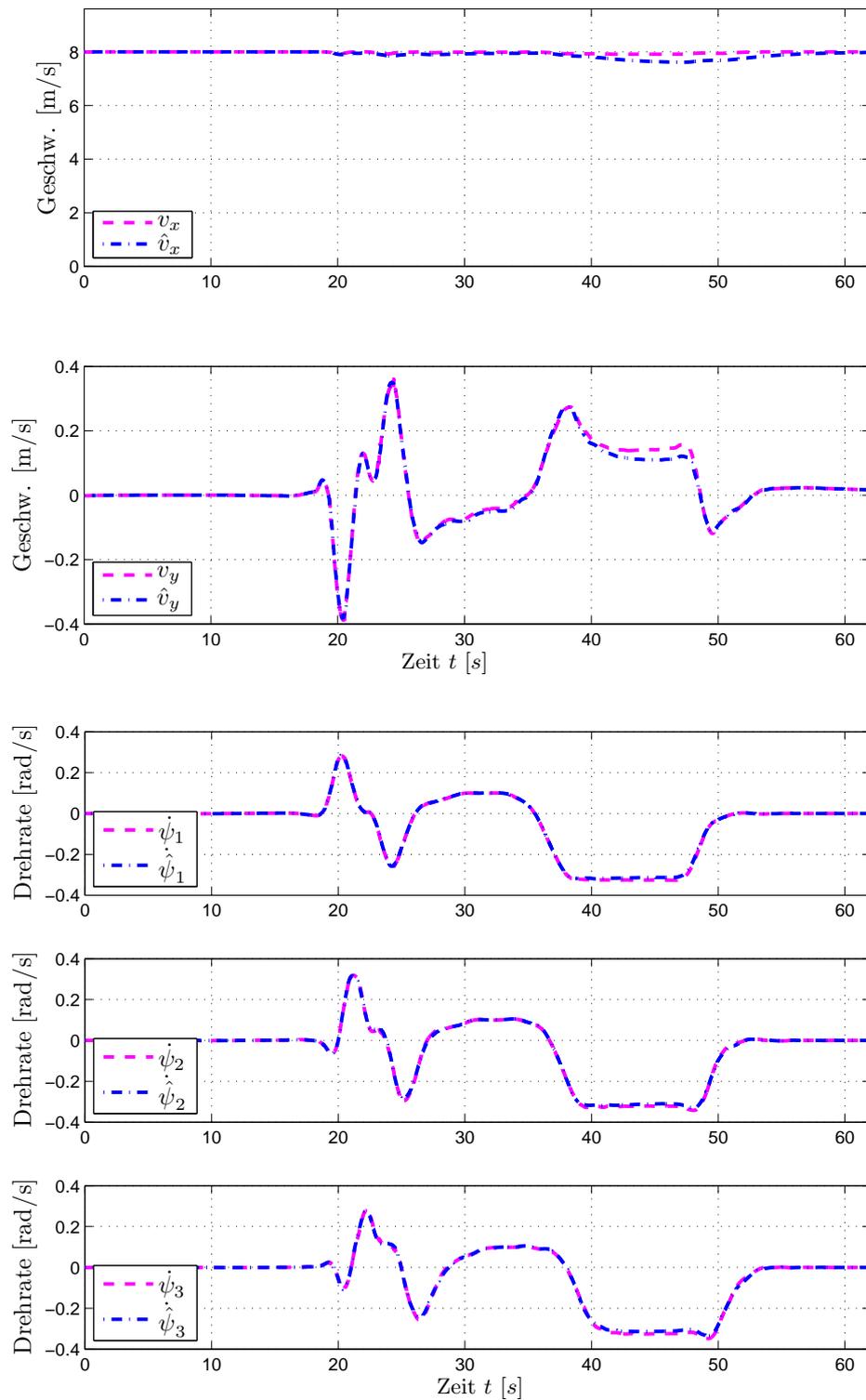
Das Bild 2.11 zeigt abschließend den Zeitverlauf von  $\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}$  bei typischen Fahrmanövern wie Spurwechsel und Kurvenein- bzw. -ausfahrt. Dazu wird das Simulationsmodell spurtreu entlang der Teststrecke in Bild 4.1 (S. 95) geführt und die Lenkwinkelverläufe  $\gamma_i(t)$  auf das Entwurfsmodell aufgeschaltet. Die Zeitverläufe der Modelle sind bei Fahrzeuggeschwindigkeiten  $v_x \in (0 \text{ m/s}, 8 \text{ m/s}]$  nahezu identisch. Erst ab einer Geschwindigkeit von  $v_x = 9 \text{ m/s}$  entstehen aufgrund des linearen Reifenmodells größere Abweichungen zwischen  $v_y(t)$  und  $\hat{v}_y(t)$  (Bild C.7, S. 150).



**Bild 2.9:** Vergleich zwischen dreigliedrigem Simulations- und Entwurfsmodell ( $\hat{\cdot}$ ) bei sprunghaftem Einlenken der Achse  $A_1$  mit  $\tilde{\gamma}_1(t_1) = 10^\circ$  und  $v_x = 10$  m/s



**Bild 2.10:** Vergleich zwischen dreigliedrigem Simulations- und Entwurfsmodell ( $\hat{\cdot}$ ) bei sprunghaftem Einlenken der Achse  $A_0$  mit  $\tilde{\gamma}_0(t_1) = 5^\circ$  und  $v_x = 20$  m/s



**Bild 2.11:** Vergleich zwischen dreigliedrigem Simulations- und Entwurfsmodell ( $\hat{\cdot}$ ) anhand des Teststreckenverlaufs in Bild 4.1 bei  $v_x = 8 \text{ m/s}$

### Experimentelle Modellvalidierung

Die experimentelle Modellvalidierung erfolgt mit dem Versuchsfahrzeug AutoTram ( $n = 2$ ), indem Lenkwinkelverläufe  $\gamma(t)$  sowohl am Versuchsfahrzeug als auch an einem Entwurfsmodell aufgeschaltet und die resultierenden verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}$  miteinander verglichen werden.

Die Modellparameter wie Fahrzeuggeometrie, Fahrzeugmodulmassen und -trägheitsmomente sind von einem FEM-Modell der AutoTram übernommen und durch zusätzliche Achslastmessungen abgesichert (s. a. Anhang B.1). Die Seitenkraftbeiwerte  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2)^\top$  sind hingegen nicht ohne Weiteres bestimmbar. Sie lassen sich jedoch durch einen so genannten Modellabgleich mit Methoden der nichtlinearen Parameterschätzung ermitteln.

Für den Modellabgleich werden Versuchsfahrten durchgeführt und sowohl die Lenkwinkel  $\gamma$  als auch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}$  gemessen<sup>11</sup>. Werden die gemessenen Lenkwinkelverläufe auf das Entwurfsmodell aufgeschaltet, gilt für die geschätzten reduzierten verallgemeinerten Geschwindigkeiten:

$$r\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} = \mathbf{h}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}(t_0), \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}(t_0), \mathbf{c}, \gamma, v_x). \quad (2.133)$$

In dieser Gleichung werden die Umfangskräfte  $f_{A_i/A_i}$  näherungsweise rekonstruiert, indem die gemessene Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_x$  durch einen Geschwindigkeitsregler eingestellt wird, der die Umfangskräfte  $f_{A_i/A_i}$  als Stellgrößen nutzt.

Die gesuchten Seitenkraftbeiwerte  $\mathbf{c}$  lassen sich daher in an sich bekannter Weise als Lösung der nichtlinearen Optimierungsaufgabe

$$\min_{\mathbf{c}} \sum_{k=1}^m \|\mathbf{h}(\mathbf{z}_{\mathcal{K}_1}(t_0), \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}(t_0), \mathbf{c}, \gamma(k), v_x(k)) - r\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}(k)\|_2^2 \quad (2.134)$$

aus  $m$  Messdatensätzen der Lenkwinkel  $\gamma$ , der Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_x$  und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $r\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}$  ermitteln<sup>12</sup>. Die Lösung erfolgt schrittweise und ist von der Ausgangsnäherung  $\mathbf{c}_0$  abhängig, da im Allgemeinen mehrere lokale Minimalpunkte existieren. In [18, 132, 133] werden Seitenkraftbeiwerte für Nutzfahrzeugreifen genannt, die als Ausgangsnäherung geeignet sind.

Die Güte der ermittelten Seitenkraftbeiwerte lässt sich mit so genannten Validierungsdatensätzen überprüfen, die ebenfalls bei Versuchsfahrten gemessen aber nicht zur Berechnung

---

<sup>11</sup> Aufgrund der Platzverhältnisse auf dem Testgelände lassen sich die Übergänge bei Lenkwinkelsprüngen nur bedingt ermitteln. Statt dessen werden zum Modellabgleich Messdaten verwendet, die bei willkürlicher Fahrzeugsteuerung mit variierenden Geschwindigkeiten und Zentripetalbeschleunigungen entstanden sind.

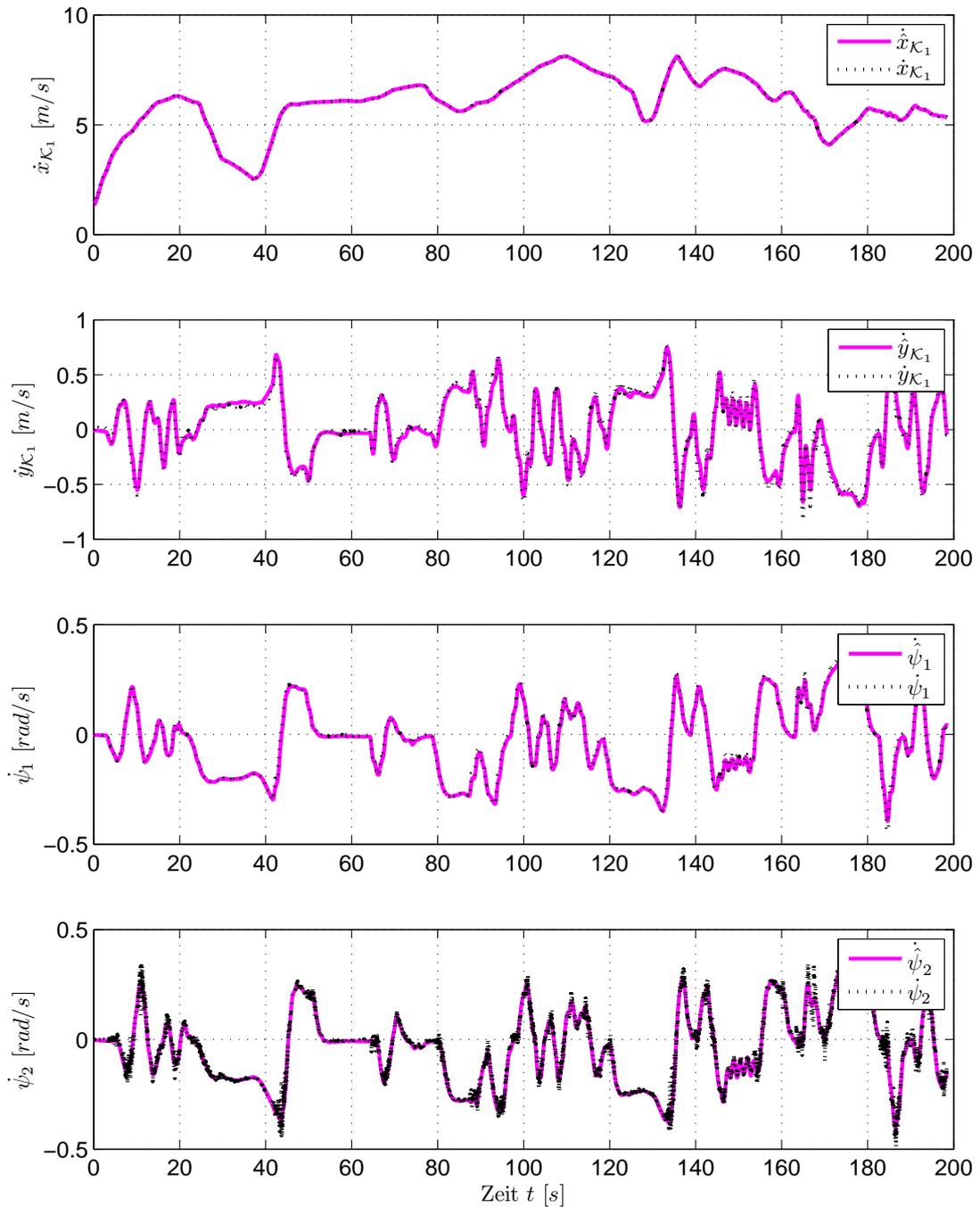
<sup>12</sup> Die Lösung der Optimierungsaufgabe (2.134) wurde in dieser Arbeit mit der Matlab/Simulink Funktion `lsqcurvefit` berechnet, die ein Gradientenverfahren nutzt.

der Seitenkraftbeiwerte verwendet werden. Die Lenkwinkel- und Geschwindigkeitsverläufe der Validierungsdatensätze werden auf das Entwurfsmodell aufgeschaltet und die geschätzten verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $r\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}$  berechnet. Im Bild 2.12 sind die verallgemeinerten Geschwindigkeiten eines Validierungsdatensatzes und des Entwurfsmodells über der Zeit aufgetragen. Weitere Diagramme sind im Anhang C dargestellt.

Der Vergleich der verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $r\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}$  und  $r\ddot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}$  zeigt, dass das Entwurfsmodell die Querdynamik des Versuchsfahrzeugs für Geschwindigkeiten bis  $v_x = 16$  m/s und Zentripetalbeschleunigungen bis ca.  $4$  m/s<sup>2</sup> gut nachbildet<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup>Die maximale Geschwindigkeit des Versuchsfahrzeugs AutoFram beträgt im elektrohydraulischen Lenkmodus  $v_{x,max} = 16$  m/s. Dieser Lenkmodus ist eine Voraussetzung zur unabhängigen Ansteuerung der drei Lenkachsen.



**Bild 2.12:** Vergleich der verallgemeinerten Geschwindigkeiten des Entwurfsmodells ( $\hat{\cdot}$ ) und des Versuchsfahrzeugs

## 2.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zunächst die Grundlagen zur Modellierung von Mehrkörpersystemen vorgestellt und anschließend ein Einspurmodell eines n-gliedrigen allradgelenkten Fahrzeugs hergeleitet, das der in Bild 2.2 (S. 39) gezeigten Struktur entspricht. Die Unterteilung in ein Fahrzeug- und ein Reifenmodell vereinfacht im folgenden Kapitel den Vorsteuerungsentwurf, weil das Fahrzeugmodell linear in den gewählten Eingängen ist. Zusätzlich lassen sich ohne Weiteres verschiedene Reifenmodelle untersuchen.

Die simulationsbasierte und die experimentelle Validierung zeigen, dass das Einspurmodell mit dem vorgeschlagenen linearen Reifenmodell auch bei großen Lenkwinkeln für kleine Schräglaufwinkel und bis zu einer Zentripetalbeschleunigung von ca.  $4 \text{ m/s}^2$  gültig ist. Größere Zentripetalbeschleunigungen führen zu Schräglaufwinkeln, bei denen das lineare Reifenmodell deutlich von den realen Reifenkennlinien abweicht, sodass insbesondere die Geschwindigkeiten  $v_y$  und  $\hat{v}_y$  differieren. Soll das Entwurfsmodell auch für Zentripetalbeschleunigungen  $a_{zp} > 4 \text{ m/s}^2$  gelten, sind primär genauere Reifenmodelle einzusetzen. Einen viel versprechenden Ansatz stellt die arctan-Funktion dar [7, 78, 100]. Die Untersuchung des querdynamischen Grenzbereichs ist jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Aufgrund der erfolgreichen Validierung wird das entwickelte Entwurfsmodell im folgenden Kapitel für den Steuerungsentwurf und insbesondere für den Entwurf einer modellbasierten Vorsteuerung verwendet.

# Kapitel 3

## Entwurf der automatischen Lenkungen

In diesem Kapitel wird der Entwurf hochgradig spurtreuer automatischer Lenkungen für  $n$ -gliedrige Fahrzeuge vorgestellt. In Abschn. 3.1 wird die automatische Spurführung und in Abschn. 3.2 die Nachführregelung betrachtet.

Das Ziel der *automatischen Spurführung* besteht darin, die Achsmittelpunkte allrad-gelenkter  $n$ -gliedriger Fahrzeuge ohne Querabweichungen auf einem vorgegebenen Sollweg zu führen. Damit wird die von Schienenfahrzeugen bekannte Spurtreue auf Straßenfahrzeuge übertragen. Der Steuerungsentwurf erfolgt unter der Voraussetzung, dass

- der zweimal stetig differenzierbare Sollweg bekannt und realisierbar ist und
- die Minimalkoordinaten  $\mathbf{z}$ ,
- die verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}$  sowie optional
- die Beschleunigung  $\dot{v}_x$ ,
- die Antriebskräfte  ${}^x f_{A_i/A_i}$  und
- die Lenkwinkel  $\gamma$  gemessen werden.

Um mit vergleichsweise geringem Aufwand verschiedene Sollwege vorgeben und analysieren zu können, werden keine ortsfesten Sollwegmarkierungen wie Leitdrähte oder optische Spurmankierungen verwendet. Statt dessen wird ein mathematisch beschriebener Sollweg vorgeschlagen, der sich komfortabel planen und automatisch erstellen lässt.

Die *Nachführregelung* basiert auf der Annahme, dass die Vorderachse  $A_0$  willkürlich, beispielsweise durch einen Fahrer, gelenkt wird und die zweite Achse  $A_1$  als Starrachse ausgelegt ist. Die Achsen der Nachlaufmodule sind unabhängig lenkbar und werden als *Nachlaufachsen* bezeichnet. Bei dieser Fahrzeugkonfiguration wird das vom Fahrer gewohnte Fahrverhalten

nicht verändert und die Bewegung des Primärmoduls kann als unabhängig aufgefasst werden<sup>1</sup>. Ein Spurversatz zwischen der Achse  $A_0$  und der Starrachse  $A_1$  ist prinzipbedingt nicht vermeidbar.

Das Ziel der Nachführregelung besteht darin, mit den Mittelpunkten der Nachlaufachsen dem Bewegungsverlauf eines auf dem Primärmodul definierten Führungspunktes automatisch nachzufahren. In dieser Arbeit wird der Achsmittelpunkt der Starrachse  $A_1$  als Führungspunkt gewählt. Folglich fährt das Fahrzeug hochgradig spurtreu, wenn die Bewegungsverläufe der Nachlaufachsen nur geringfügig vom Bewegungsverlauf der Starrachse abweichen, d. h. kein Spurversatz vorhanden ist. Für den praxisgerechten Steuerungsentwurf wird vorausgesetzt, dass

- die Knick- und Lenkwinkel,
- die Drehraten der Fahrzeugmodule um die Hochachse,
- die Längsgeschwindigkeit des Primärmoduls  $v_x$  und optional
- die Beschleunigung  $\dot{v}_x$  messbar sind.

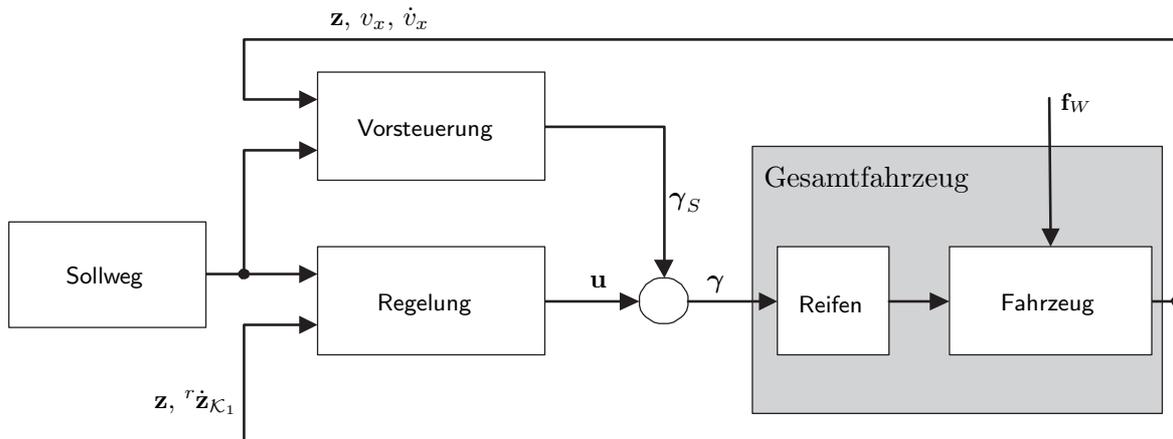
Ein Fahrzeug, das mit einem elektronischen Stabilitätsprogramm (ESP) ausgestattet ist, verfügt bereits über einen Großteil dieser Messgrößen.

### 3.1 Automatische Spurführung

Die automatische Spurführung wird durch die in Bild 3.1 gezeigte Steuerungstruktur mit zwei Freiheitsgraden realisiert, die aus einer modellbasierten Vorsteuerung und einer zusätzlichen Rückführregelung besteht. In der Vorsteuerung wird abhängig von der aktuell gemessenen Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_x$ , der Beschleunigung  $\dot{v}_x$  sowie dem Verlauf des Sollweges unter dem Fahrzeug ein Steuersignal berechnet, das theoretisch eine spurtreue Fahrzeugführung bewirkt. Die im Betrieb auftretenden Störungen, Messabweichungen und Modellunbestimmtheiten führen zu Querabweichungen  $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_n)^T$ , die als Abstände der Achsmittelpunkte vom Sollweg eingeführt werden (Bild 3.6, S. 86). Diese Querabweichungen werden durch eine zusätzliche Rückführregelung ausgeglichen. In Abschn. 3.1.2 werden ein nichtlinearer Mehrgrößenregler und als Alternative achs-individuelle lineare Eingrößenregler entworfen.

---

<sup>1</sup>Ist die Achse  $A_1$  lenkbar und wird sie der Achse  $A_0$  spurtreu nachgeführt, so ist bei  $\gamma_0 = 0$  nicht zwingend die Drehrate  $\dot{\psi}_1 = 0$ . Das heißt, dass der Fahrer beispielsweise am Kurvenausgang kurzzeitig entgegen der ursprünglichen Richtung lenken müsste, um die aus  $\gamma_1 \neq 0$  resultierende Drehbewegung auszugleichen. Das steht im Widerspruch zur gewohnten Fahrzeugreaktion, bei der  $\gamma_0 = 0$  auch zu  $\dot{\psi}_1 = 0$  führt.



**Bild 3.1:** Struktur der automatischen Spurführung mit zwei Freiheitsgraden

### 3.1.1 Modellbasierte Vorsteuerung

Bild 3.2 veranschaulicht am Beispiel eines dreigliedrigen Fahrzeugs das Konzept der Vorsteuerung. Es wird davon ausgegangen, dass sich das Fahrzeug in der aktuellen Position  $L_0$  befindet und dem Sollweg  $s(\lambda)$  spurtreu folgen soll. Zur Verdeutlichung weicht die Position  $L_0$  stark von der Sollposition  $L_S$  ab. Die Sollposition lässt sich anhand des Sollweges geometrisch berechnen, wenn der Ort *eines* fahrzeugfesten Punktes bekannt ist. Die Wahl eines Achsmittelpunktes erleichtert die Berechnung der Sollposition, ist jedoch nicht zwingend. In dieser Arbeit wird der Ort des Achsmittelpunktes  $A_0$  als bekannt vorausgesetzt.

Ausgehend von der Sollposition ist die Sollkinematik, also  $\mathbf{z}_S$ ,  $\dot{\mathbf{z}}_{S\kappa_1}$  und  $\ddot{\mathbf{z}}_{S\kappa_1}$ , differentialgeometrisch berechenbar. Dabei wird angenommen, dass die Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_x$  und deren Änderung  $\dot{v}_x$  unabhängige Größen sind, die während der Fahrt gemessen werden. Wird die Sollkinematik in das Fahrzeugmodell (2.126) eingesetzt, lassen sich zunächst die Sollseitenkräfte  $\mathbf{f}_{Scr}$  und anschließend mit dem Reifenmodell die am Fahrzeug einzustellenden Solllenkwinkel berechnen.

#### Beschreibung des Sollweges

Die Berechnung der Sollposition und der Sollkinematik basiert auf einem analytisch beschriebenen Sollweg mit stetigem Krümmungsverlauf. Der stetige Krümmungsverlauf wird im Straßenverkehr durch die Kombination von Geraden, Klothoidenabschnitten und Kreisbögen erreicht [46, 72, 138] und ist eine notwendige Bedingung für die Realisierbarkeit des Sollweges. Es ist intuitiv klar, dass unstetige Krümmungsverläufe zu Lenkwinkelsprüngen führen, die mit begrenzter Stellenergie nicht realisierbar sind und sich negativ auf den Fahrkomfort auswirken.

Für die praktische Anwendung ist es zweckmäßig, den Sollweg aus  $\tilde{m}$  Positionsmessdaten  ${}^i\tilde{S}(\tilde{x}, \tilde{y})$ , ( $i = 1, \dots, \tilde{m}$ ) zu ermitteln, die beispielsweise durch ein- oder mehrmaliges Abfahren der gewünschten Strecke gewonnen werden<sup>2</sup>. Aus diesen Positionsmessdaten wird ein analytisch beschriebener Sollweg mit folgenden Eigenschaften ermittelt:

- stetiger Krümmungsverlauf,
- geeignete mathematische Beschreibung,
- geringer Speicherbedarf,
- genaue Approximation der Positionsmessdaten und
- Unterdrücken von Messrauschen.

---

<sup>2</sup>Die Positionsmessdaten wurden in dieser Arbeit mit differentiellem GPS aufgenommen.

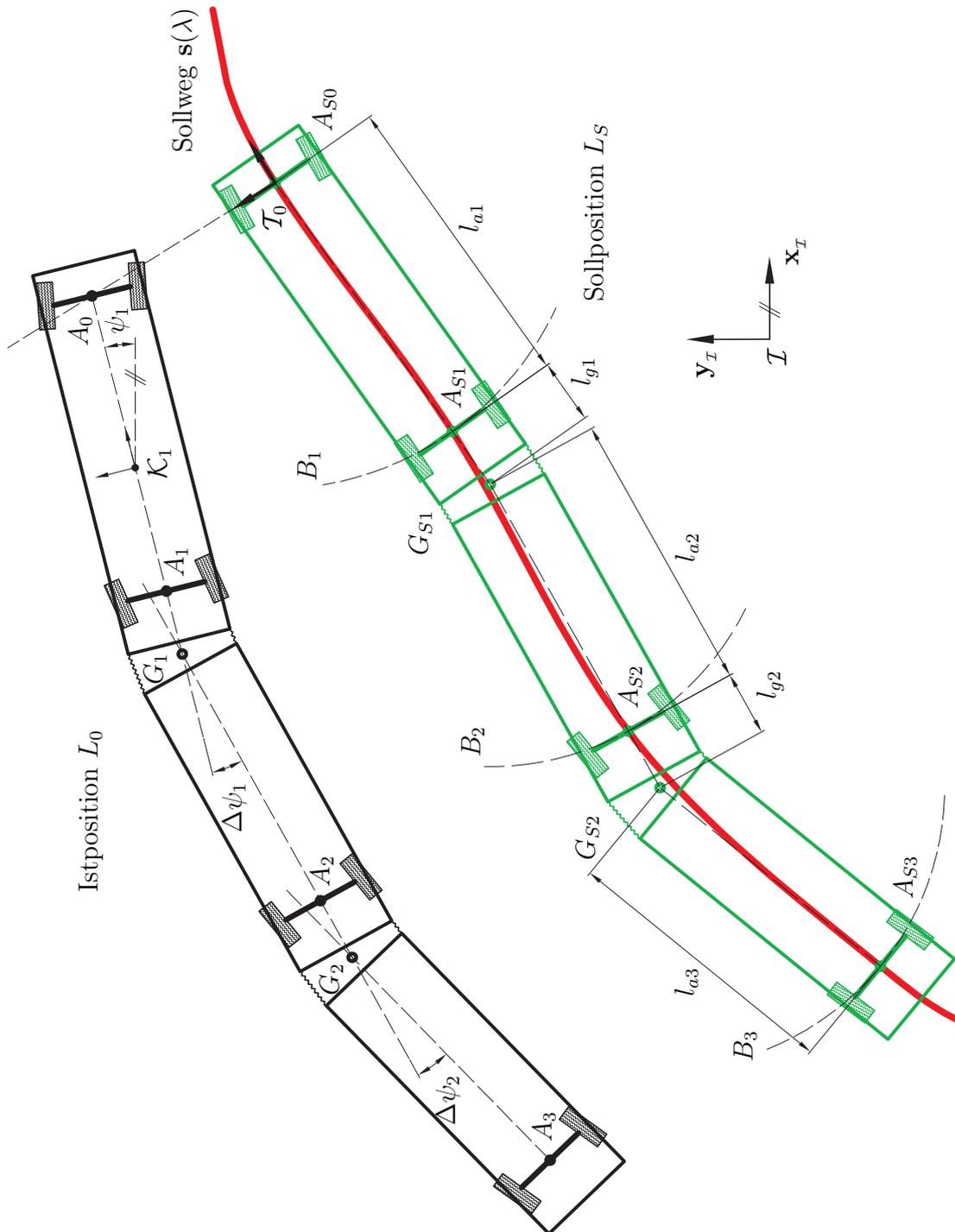


Bild 3.2: Konzept der Vorsteuerung am Beispiel eines dreigliedrigen Gelenkfahrzeugs

Grundsätzlich lassen sich die Positionsmessdaten durch eine Vielzahl funktionaler Zusammenhänge approximieren. Der Einfachheit halber werden in der Literatur meist Polynome angesetzt. So wird in [73] ein Polynom achten Grades zur Beschreibung eines doppelten Spurwechsels verwendet. Polynome höheren Grades neigen jedoch zu unerwünschten Schwingungen. Diese Schwingungen sind vermeidbar, wenn das Approximationsintervall in Teilintervalle zerlegt wird, die dann durch Polynome niedriger Ordnung beschreibbar sind. Dieser Ansatz wird hier aufgegriffen, indem der Sollweg durch so genannte *kubische Splines* beschrieben wird, die die eingangs genannten Forderungen erfüllen [15, 39, 44].

Kubische Splines basieren auf stückweise definierten Polynomen dritten Grades

$${}^iP_j(\lambda) = \begin{cases} {}^i a_j (\lambda - {}^i\lambda)^3 + {}^i b_j (\lambda - {}^i\lambda)^2 + {}^i c_j (\lambda - {}^i\lambda) + {}^i d_j & \text{für } \lambda \in [{}^i\lambda, {}^{i+1}\lambda), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.1)$$

die an den Übergangsstellen zwischen zwei Segmenten  ${}^i\lambda$ , den so genannten Stützstellen, die Randbedingungen

$${}^{i-1}P_j({}^i\lambda) = {}^iP_j({}^i\lambda), \quad (3.2a)$$

$${}^{i-1}P'_j({}^i\lambda) = {}^iP'_j({}^i\lambda) \text{ sowie} \quad (3.2b)$$

$${}^{i-1}P''_j({}^i\lambda) = {}^iP''_j({}^i\lambda) \quad (3.2c)$$

erfüllen.

Da sich die Positionsmessdaten meist nicht durch eine Funktion  $x \mapsto y$  in kartesischen Koordinaten abbilden lassen, wird der Sollweg in der Parameterform  $\mathbf{s}(\lambda) = (s_x(\lambda), s_y(\lambda))^T$  mit dem reellen Laufparameter  $\lambda$  angegeben. Die Splines  $s_x(\lambda)$  und  $s_y(\lambda)$  mit  $m$  Stützstellen ergeben sich dann aus der Summe der  $m - 1$  Polynomsegmente:

$$s_x(\lambda) = \sum_{i=1}^{m-1} {}^iP_x(\lambda), \quad (3.3a)$$

$$s_y(\lambda) = \sum_{i=1}^{m-1} {}^iP_y(\lambda). \quad (3.3b)$$

Die Randbedingungen (3.2) stellen sicher, dass  $\mathbf{s}(\lambda)$  mindestens zweimal stetig differenzierbar ist. Diese Eigenschaft ist notwendig und hinreichend für einen stetigen Krümmungsverlauf, da für die Krümmung  $\kappa$  einer ebenen Kurve in Parameterform mit  $s'_x = ds_x(\lambda)/d\lambda$  und

$s'_y = ds_y(\lambda)/d\lambda$  gilt:

$$\kappa = \frac{s'_x s''_y - s''_x s'_y}{(s'^2_x + s'^2_y)^{3/2}}. \quad (3.4)$$

Die Berechnung der Splines  $s_x(\lambda)$  und  $s_y(\lambda)$  basiert auf einer streng monotonen Folge von Punkten  $\hat{S} = \{^1\hat{S}(^1\hat{x}, ^1\hat{y}), \dots, ^{\hat{m}}\hat{S}(^{\hat{m}}\hat{x}, ^{\hat{m}}\hat{y})\}$  mit  $\hat{m} < \tilde{m}$ , die aus den Positionsmessdaten  $^i\tilde{S}(^i\tilde{x}, ^i\tilde{y})$  durch einen gleitenden Mittelwert gebildet wird. Der Speicherbedarf wird weiter reduziert, indem nur ein Teil der Punktfolge  $\hat{S}$  als Splinestützstellen verwendet wird. Dazu werden die Indizes der Splinestützstellen in einem Vektor  $\lambda \in \mathbb{N}^m$  mit  $m \leq \hat{m}$ ,  $^1\lambda = 1$  und  $^m\lambda = \hat{m}$  zusammengefasst, dessen Elemente die Teilintervalle der kubischen Splines  $s_x(\lambda)$  und  $s_y(\lambda)$  kennzeichnen. Gesucht ist nun ein möglichst glatter Sollweg  $s(\lambda)$ , der möglichst wenige Stützstellen  $^i\hat{S} \in \hat{S}$  benötigt, die Approximationsbedingungen<sup>3</sup>

$$s_x(^i\lambda) \simeq ^i\lambda_{\hat{x}} \quad \text{und} \quad (3.5a)$$

$$s_y(^i\lambda) \simeq ^i\lambda_{\hat{y}} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.5b)$$

erfüllt und einen definierten Abstand von den Elementen der Punktfolge  $\hat{S}$  nicht überschreitet. Dazu werden die Parameter der Ausgleichssplines  $s_x(\lambda)$  und  $s_y(\lambda)$  so bestimmt, dass sie die Gewichtsfunktionen

$$L_x = p \sum_{i=1}^m \left( \frac{^i\lambda_{\hat{x}} - s_x(^i\lambda)}{^i\lambda_{\sigma_x}} \right)^2 + (1-p) \int_{^1\lambda}^{^m\lambda} \left( \frac{d^2 s_x(\lambda)}{d\lambda^2} \right)^2 d\lambda \quad \text{bzw.} \quad (3.6a)$$

$$L_y = p \sum_{i=1}^m \left( \frac{^i\lambda_{\hat{y}} - s_y(^i\lambda)}{^i\lambda_{\sigma_y}} \right)^2 + (1-p) \int_{^1\lambda}^{^m\lambda} \left( \frac{d^2 s_y(\lambda)}{d\lambda^2} \right)^2 d\lambda \quad (3.6b)$$

minimieren. Hierbei sind die Parameter  $^i\lambda_{\sigma_x}$  und  $^i\lambda_{\sigma_y}$  die Standardabweichungen der Messdaten  $^i\lambda_{\hat{S}}(^i\lambda_{\hat{x}}, ^i\lambda_{\hat{y}})$  und  $p \in [0, 1]$  der Glättungsparameter.

Die Gewichtsfunktionen (3.6) erzeugen einen Kompromiss zwischen der Abweichung des Splines von den Messdaten  $^i\lambda_{\hat{S}}$  und der Glattheit der Kurve. Die Lösung der Minimierungsaufgaben (3.6) führt auf ein lineares Gleichungssystem, das in an sich bekannter Weise lösbar ist. Der Glättungsparameter  $p$  beeinflusst die Lösung wie folgt:

- Für jedes  $p \in [0, 1]$  existiert genau eine Lösung für  $s_x(\lambda)$  und für  $s_y(\lambda)$ .
- Für  $p = 1$  entstehen Splines  $s_x(\lambda)$  und  $s_y(\lambda)$ , die die Splinestützstellen interpolieren.

<sup>3</sup>Die Interpolationsbedingungen  $s_x(^i\lambda) = ^i\lambda_{\hat{x}}$  und  $s_y(^i\lambda) = ^i\lambda_{\hat{y}}$  sind bei fehlerbehafteten Messdaten ungeeignet und werden zugunsten eines glatteren Sollweges vernachlässigt. Splines, die den Approximationsbedingungen (3.5) genügen, werden als Ausgleichssplines bezeichnet.

- Für  $p = 0$  ist  $\mathbf{s}(\lambda)$  die Regressionsgerade zu den gegebenen Messpunkten in Parameterform.

Um die Anzahl der Splinestützstellen möglichst gering zu halten, wird ein zweistufiges Verfahren vorgeschlagen:

1. Berechnung eines sehr genauen und glatten Referenzsollweges  $\hat{\mathbf{s}}(\lambda)$  mit  $\hat{m}$  Stützstellen, sodass alle Stützstellen  ${}^i\hat{S}$  weniger als  $\Delta_p$  von  $\hat{\mathbf{s}}(\lambda)$  abweichen.
2. Ermittlung der Stützstellenmenge  $S \subseteq \hat{S}$  mit möglichst kleiner Elementanzahl  $m$ , mit denen ein Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda)$  berechenbar ist, der weniger als  $\Delta_m$  von  $\hat{\mathbf{s}}(\lambda)$  abweicht.

Die erste Teilaufgabe lässt sich lösen, indem der Glättungsparameter  $p$  unter der Bedingung minimiert wird, dass alle Stützstellen  ${}^i\hat{S}$  weniger als  $\Delta_p$  von  $\hat{\mathbf{s}}(\lambda)$  abweichen. Die zweite Teilaufgabe wird iterativ gelöst, indem zunächst ein Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda)$  mit den zwei Stützstellen  ${}^1\hat{S}$  und  ${}^{\hat{m}}\hat{S}$  erstellt wird, der in der Regel stark vom Referenzsollweg abweicht. Anschließend wird für jede noch nicht verwendete Stützstelle  ${}^i\hat{S} \in \hat{S}$  ein neuer Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda, p)$  berechnet und die Minimierungsaufgabe

$$\min_p \|\hat{\mathbf{s}}(\lambda) - \mathbf{s}(\lambda, p)\|_\infty \quad (3.7)$$

gelöst. Die Stützstelle, bei der die  $L_\infty$ -Norm (3.7) am kleinsten ist, wird der Menge  $S$  als neue Stützstelle hinzugefügt. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis der maximale Abstand von  $\mathbf{s}(\lambda)$  zum Referenzspline  $\hat{\mathbf{s}}(\lambda)$  kleiner als  $\Delta_m$  ist. Das Ergebnis ist eine glatte Sollwegtrajektorie mit  $m \ll \hat{m}$  Stützstellen, die maximal  $\Delta = \Delta_p + \Delta_m$  von allen  ${}^i\hat{S}$  abweicht.

Der Speicherbedarf des Sollweges mit  $m$  Splinestützstellen beläuft sich auf  $8(m-1)$  double-Gleitkommazahlen für die Polynomparameter und  $m-1$  ganzzahlige Werte<sup>4</sup>  ${}^i\lambda$ . Im Vergleich dazu werden bei linearer Approximation nur  $4(m-1)$  Gleitkommazahlen gespeichert. Der Mehraufwand wird jedoch durch die längeren Abschnitte relativiert. So ist die in Bild 4.1 (S. 95) gezeigte, ca. 550 m lange Teststrecke mit  $m = 61$  Stützstellen beschreibbar. Der maximale Abstand des Sollweges  $\mathbf{s}(\lambda)$  von den Stützstellen  ${}^i\hat{S}$  ist  $< 0.05$  m, die Stützstellen sind zwischen 2 m und 35 m voneinander entfernt. Die lineare Approximation der gezeigten  $R25$ -Kurve durch Geradenstücke der Länge  $l = 0.5$  m benötigt bereits ca. 150 Stützstellen, wobei die Winkeldifferenz zwischen zwei Geradenstücken größer als  $1^\circ$  ist. Durch Fahrversuche wurde nachgewiesen, dass diese Winkeldifferenz den Fahrkomfort negativ beeinflusst.

---

<sup>4</sup>Dabei wird angenommen, dass stets  ${}^1\lambda = 1$  gilt.

### Berechnung der Sollkinematik

Die Kinematik eines Gelenkfahrzeugs ist durch den Zeitverlauf der Minimalkoordinaten  $\mathbf{z}$ , der verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}$  und der verallgemeinerten Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{z}}$  beschreibbar. Unter dem Begriff *Sollkinematik* werden die Zeitverläufe der verallgemeinerten Sollposition  $\mathbf{z}_S$ , der verallgemeinerten Sollgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1}$  und der verallgemeinerten Sollbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1}$  verstanden, die bei spurtreuer Fahrt entlang der Sollwegtrajektorie theoretisch entstehen.

Die Sollkinematik lässt sich anhand des vorgegebenen Sollweges  $\mathbf{s}(\lambda)$  und der gemessenen Geschwindigkeit  $v_x$  sowie  $\dot{v}_x$  berechnen. Da  $v_x$  und  $\dot{v}_x$  nicht im Voraus bekannt sind, ist die Sollkinematik in jedem Zeitschritt in Echtzeit zu berechnen. Durch diesen Ansatz lässt sich der Geschwindigkeitsverlauf entlang des Sollweges innerhalb zweckmäßiger physikalischer Grenzen frei wählen. Die Berechnung der Sollkinematik erfolgt in drei Schritten:

1. Bestimmen der Sollposition  $L_S$  und der verallgemeinerten Sollposition  $\mathbf{z}_S$ ,
2. Berechnung der verallgemeinerten Sollgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1}$  und
3. Berechnung der verallgemeinerten Sollbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1}$ .

**Sollposition** Die Sollposition  $L_S$  auf dem Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda)$  ist berechenbar, wenn die Istposition eines fahrzeugfesten Punktes bekannt ist. Für die automatische Spurführung bietet es sich an, die Istposition der ersten Achse  $A_0$  zu messen, die mit den Gln. (2.90) und (2.91) aus den gemessenen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $\psi_1$  sowie  $l_0$  berechnet wird. Ausgehend von  $A_0$  werden die Ortsvektoren der Achssollpositionen

$$\mathbf{r}_{\mathcal{I}A_{Si}} = (x_{A_{Si}}, y_{A_{Si}})^T \quad \text{mit } \mathbf{r}_{\mathcal{I}A_{Si}} \in \mathbf{s}(\lambda), \quad i = 0, \dots, n \quad (3.8)$$

bestimmt.

Die Berechnung der Sollposition  $A_{S0}$  ist genauer zu untersuchen, weil der Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda)$  Kreuzungen und dicht nebeneinander liegende Streckenabschnitte aufweisen kann. Die Aufgabe besteht zunächst darin, der Istposition  $A_0$  den gewünschten Sollwegabschnitt zuzuordnen. Diese Zuordnung wird vereinfacht, wenn  $A_{S0}$  zur Tastzeit  $k = 0$  initialisiert und die folgenden  $A_{S0}(k)$  abhängig von  $A_{S0}(k - 1)$  ermittelt werden.

Der auf dem Sollweg liegende Punkt  $A_{S0}(0) \in \mathbf{s}(\lambda)$  wird so initialisiert, dass das Abstandsquadrat zwischen  $A_0(0)$  und dem Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda)$

$$\varepsilon(\lambda) = |\mathbf{r}_{\mathcal{I}A_0}(0) - \mathbf{s}(\lambda)|^2 \quad (3.9)$$

minimal ist. Zur Vereinfachung wird auf die weitere Kennzeichnung der Taktzeit  $k = 0$  verzichtet. Für den Ortsvektor von  $A_{S0}$  gilt daher:

$$\mathbf{r}_{\mathcal{I}A_{S0}} = \mathbf{s}(\lambda_{A_{S0}}) \quad \text{mit} \quad (3.10)$$

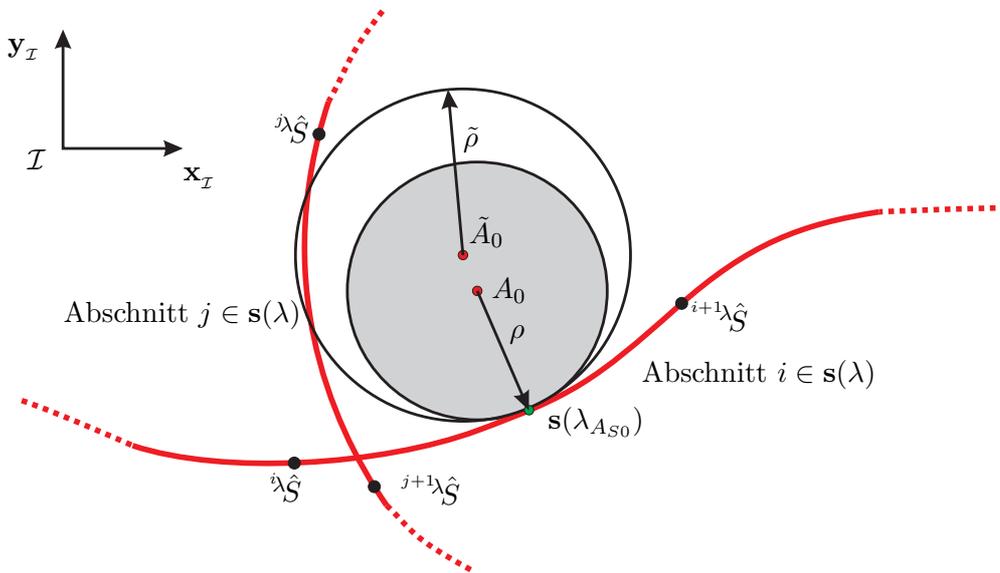
$$\lambda_{A_{S0}} = \arg \min_{\lambda} \varepsilon(\lambda). \quad (3.11)$$

Bei diesem Verfahren ist sicherzustellen, dass der gewünschte Sollwegabschnitt der Istposition  $A_0$  am nächsten ist. Zur Veranschaulichung zeigt Bild 3.3 einen Kreuzungsbereich, bei dem  $i$  und  $j$  Abschnitte von  $\mathbf{s}(\lambda)$  sind. Die Initialisierung von  $A_{S0}$  soll auf dem Sollwegabschnitt  $i$  erfolgen, der  $\rho$  von  $A_0$  entfernt ist. Das wird durch die Lösung von Gl. (3.11) nur dann gewährleistet, wenn der Kreis

$$(x - x_{A0})^2 + (y - y_{A0})^2 = \rho^2 \quad (3.12)$$

den Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda)$  in genau einem Punkt, der Sollposition  $A_{S0}$ , berührt. Befindet sich die erste Achse zur Taktzeit  $k = 0$  an der Stelle  $\tilde{A}_0$ , führt die Lösung von Gl. (3.11) auf einen Punkt des Streckenabschnitts  $j$ .

Das bedeutet, dass die Initialisierung von  $A_{S0}$  nicht an jeder Stelle der  $\mathbf{x}_{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{y}_{\mathcal{I}}$ -Ebene zum gewünschten Ergebnis führt. Praktisch ist davon auszugehen, dass das Fahrzeug mit  $\rho < 0.5$  m platzierbar ist, sodass die Gebiete falscher Zuordnung vergleichsweise klein sind.



**Bild 3.3:** Initialisierung von  $A_{S0}$  im Kreuzungsbereich

Für  $k > 0$  wird die Sollposition  $A_{S0}(k)$  abhängig von der Sollposition im vorigen Takt

$A_{S_0}(k-1)$  berechnet:

$$\mathbf{r}_{\mathcal{I}A_{S_0}}(k) = \mathbf{s}(\lambda_{A_{S_0}}(k)), \quad (3.13)$$

$$\lambda_{A_{S_0}}(k) = \begin{cases} \min \lambda : \frac{d\varepsilon(\lambda)}{d\lambda} = 0, \lambda \geq \lambda_{A_{S_0}}(k-1) & \text{für } v_x \geq 0 \\ \max \lambda : \frac{d\varepsilon(\lambda)}{d\lambda} = 0, \lambda < \lambda_{A_{S_0}}(k-1) & \text{für } v_x < 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Unter der Voraussetzung, dass der Abstand  $\rho$  kleiner als der minimale Kurvenradius  $R_{min}$  ist<sup>5</sup>, lässt sich die Lösung der Extremwertaufgaben auf die Wurzelberechnung von Polynomgleichungen 5. Grades zurückführen, die im Allgemeinen numerisch zu lösen sind. In dieser Arbeit wird das NEWTON-Verfahren verwendet, das sich insbesondere für die Lösung von Polynomgleichungen eignet [19, 57].

Ist die Sollposition der ersten Achse  $A_{S_0}(k)$  bekannt, werden die Sollpositionen der weiteren Achsen  $A_{S_i}(k)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) auf dem Sollweg sukzessive berechnet. Ausgehend von  $A_{S_0}$  ist die Sollposition  $A_{S_1}$  der Punkt auf dem Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda)$ , der  $l_{a1}$  hinter  $A_{S_0}$  liegt (s. a. Bild 3.2, S. 69):

$$\lambda_{A_{S_1}} = \max \lambda : |\mathbf{s}(\lambda_{A_{S_0}}) - \mathbf{s}(\lambda)| = l_{a1} \quad \text{mit } \lambda < \lambda_{A_{S_0}}. \quad (3.15)$$

Durch die Sollpositionen der Achsen  $A_{S_0}$  und  $A_{S_1}$  ist die Sollposition des Primärmoduls eindeutig festgelegt und für den Ortsvektor zum Gelenk  $G_{S_1}$  gilt:

$$\mathbf{r}_{\mathcal{I}G_{S_1}} = \mathbf{s}(\lambda_{A_{S_1}}) + l_{g1} \frac{\mathbf{s}(\lambda_{A_{S_1}}) - \mathbf{s}(\lambda_{A_{S_0}})}{|\mathbf{s}(\lambda_{A_{S_1}}) - \mathbf{s}(\lambda_{A_{S_0}})|}. \quad (3.16)$$

Die Sollpositionen der weiteren Achsen  $A_{S_i}$  sind jeweils  $l_{ai}$  vom Gelenk  $G_{S_{i-1}}$  entfernt und liegen in Richtung abnehmendem  $\lambda$  auf dem Sollweg, sodass mit der Randbedingung  $l_{ai} > l_{gi-1}$

$$\lambda_{A_{S_i}} = \max \lambda : |\mathbf{r}_{\mathcal{I}G_{S_{i-1}}} - \mathbf{s}(\lambda)| = l_{ai} \quad \text{mit } \lambda < \lambda_{A_{S_{i-1}}}, \quad i = 2, \dots, n \quad (3.17)$$

gilt. Die Ortsvektoren der Gelenke  $G_{S_i}$  lassen sich wiederum aus der Sollposition  $A_{S_i}$  und dem Ortsvektor des Gelenks  $G_{S_{i-1}}$  berechnen:

$$\mathbf{r}_{\mathcal{I}G_{S_i}} = \mathbf{s}(\lambda_{A_{S_i}}) + l_{gi} \frac{\mathbf{s}(\lambda_{A_{S_i}}) - \mathbf{r}_{\mathcal{I}G_{S_{i-1}}}}{|\mathbf{s}(\lambda_{A_{S_i}}) - \mathbf{r}_{\mathcal{I}G_{S_{i-1}}}|}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (3.18)$$

sodass die übrigen Sollpositionen mit den Gln. (3.17) und (3.18) rekursiv berechenbar sind.

<sup>5</sup>Der minimale Kurvenradius im Straßenverkehr beträgt 4 m [138]. Durch die automatische Spurführung ist  $\rho \ll 4$  m.

Die Sollpositionen aller Achsen  $A_{S_i}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) legen die Sollposition  $L_S$  des Fahrzeugs eindeutig fest.

Die Sollposition des Primärmoduls

$$\mathbf{r}_{\mathcal{IK}_{S1}} = (x_S, y_S)^\top = \mathbf{s}(\lambda_{A_{S0}}) + l_0 \frac{\mathbf{s}(\lambda_{A_{S1}}) - \mathbf{s}(\lambda_{A_{S0}})}{|\mathbf{s}(\lambda_{A_{S1}}) - \mathbf{s}(\lambda_{A_{S0}})|} \quad (3.19)$$

und die Gierwinkel der Fahrzeugmodule

$$\psi_{S_i} = \begin{cases} \arccos \mathbf{r}_{\psi_{S_i}} & \mathbf{r}_{\psi_{S_i}} \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \mathbf{r}_{\psi_{S_i}} & \mathbf{r}_{\psi_{S_i}} < 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

mit

$$\mathbf{r}_{\psi_{S_i}} = \begin{cases} \frac{\mathbf{r}_{A_{S1}A_{S0}}}{|\mathbf{r}_{A_{S1}A_{S0}}|} & \text{für } i = 1, \\ \frac{\mathbf{r}_{A_{S_i}G_{S_{i-1}}}}{|\mathbf{r}_{A_{S_i}G_{S_{i-1}}|} & \text{für } i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.21)$$

werden abschließend zur verallgemeinerten Sollposition  $\mathbf{z}_S$  zusammengefasst.

**Verallgemeinerte Sollgeschwindigkeiten** Die Sollgeschwindigkeiten in den Punkten  $A_{S_i}$  werden durch die Ableitung des Sollweges nach der Zeit  $t$  berechnet. Mit dem Skalierungsfaktor  $\nu_i$  gilt:

$$\mathbf{v}_{\mathcal{I}A_{S_i}} = \left. \frac{d\mathbf{s}(\lambda)}{dt} \right|_{\lambda_{A_{S_i}}} = \dot{\lambda} \left. \frac{d\mathbf{s}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_{A_{S_i}}} = \nu_i \mathbf{s}'_{\lambda_{A_{S_i}}} \quad \text{mit } i = 0, \dots, n. \quad (3.22)$$

Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich mit den Gln. (2.129) und (2.118) ersetzen:

$$\mathbf{J}_{A_i} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} \dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} = \nu_i \mathbf{s}'_{\lambda_{A_{S_i}}}, \quad (3.23)$$

wobei in die Matrizen  $\mathbf{J}_{A_i}$  und  $\mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1}$  die Sollgierwinkel (3.20) eingesetzt werden. Diese Gleichungen lassen sich in die Matrixform

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{A_0} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} \\ \mathbf{J}_{A_1} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{A_n} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}'_{\lambda_{A_{S0}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{s}'_{\lambda_{A_{S1}}} & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \mathbf{s}'_{\lambda_{A_{S_n}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_0 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

oder kurz

$$\tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{z}}_{SK_1} = \mathbf{S}' \nu \quad (3.25)$$

überführen. Das erste Element von  $\dot{\mathbf{z}}_{SK_1}$  wird der gemessenen Geschwindigkeit gleichgesetzt ( ${}^1\dot{z}_{SK_1} = v_x$ ) und von den unbekannt Elementen  ${}^r\dot{\mathbf{z}}_{SK_1} = (v_{Sy}, \dot{\psi}_{S1}, \dots, \dot{\psi}_{Sn})^\top$  separiert:

$$\tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{z}}_{SK_1} = \mathbf{j} v_x + \mathbf{J} {}^r\dot{\mathbf{z}}_{SK_1}. \quad (3.26)$$

Folglich ist der Vektor  $\mathbf{j}$  die erste Spalte von  $\tilde{\mathbf{J}}$  und in der Matrix  $\mathbf{J}$  sind die restlichen  $n+1$  Spalten von  $\tilde{\mathbf{J}}$  zusammengefasst. Wird die Gl. (3.26) in Gl. (3.25) eingesetzt, gilt dann mit der Matrix  $\mathbf{H} = (\mathbf{S}', -\mathbf{J}) \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times 2(n+1)}$ :

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \nu \\ {}^r\dot{\mathbf{z}}_{SK_1} \end{pmatrix} = \mathbf{j} v_x. \quad (3.27)$$

Dieses Gleichungssystem ist stets lösbar, wenn  $\mathbf{H}$  regulär ist. Im Anhang E.1 (s. S. 160) wird gezeigt, dass diese Bedingung praktisch immer erfüllt ist.

**Verallgemeinerte Sollbeschleunigungen** Die Zeitableitung von Gl. (3.22) führt auf die Beschleunigungen, sodass sich mit dem Skalierungsfaktor  $\alpha_i$

$$\mathbf{a}_{\mathcal{A}_{S_i}} = \left. \frac{d^2 \mathbf{s}(\lambda)}{dt^2} \right|_{\lambda_{A_{S_i}}} = \left( \ddot{\lambda} \mathbf{s}'(\lambda) + \dot{\lambda}^2 \mathbf{s}''(\lambda) \right) \Big|_{\lambda_{A_{S_i}}} = \alpha_i \mathbf{s}'_{\lambda_{A_{S_i}}} + \nu_i^2 \mathbf{s}''_{\lambda_{A_{S_i}}}. \quad (3.28)$$

schreiben lässt. Die Sollbeschleunigungen  ${}^r\ddot{\mathbf{z}}_{SK_1}$  sind berechenbar, indem Gl. (2.129) nach der Zeit abgeleitet wird

$$\dot{\mathbf{v}}_{\mathcal{A}_i} = \mathbf{J}_{A_i} \ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{J}}_{A_i} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{a}_{\mathcal{A}_i} \quad (i = 0, \dots, n) \quad (3.29)$$

und anschließend die Gln. (2.118), (2.119) und (3.28) sowie die Sollgierwinkel (3.20) eingesetzt werden:

$$\mathbf{J}_{A_i} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} \ddot{\mathbf{z}}_{SK_1} + \left( \dot{\mathbf{J}}_{A_i} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} + \mathbf{J}_{A_i} \dot{\mathbf{T}}_{\mathcal{IK}_1} \right) \dot{\mathbf{z}}_{SK_1} = \alpha_i \mathbf{s}'_{\lambda_{A_{S_i}}} + \nu_i^2 \mathbf{s}''_{\lambda_{A_{S_i}}}. \quad (3.30)$$

Diese Gleichungen lassen sich wiederum in Matrixform zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{A_0} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} \\ \mathbf{J}_{A_1} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{A_n} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}'_{\lambda_{AS_0}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{s}'_{\lambda_{AS_1}} & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \mathbf{s}'_{\lambda_{AS_n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_0^2 \mathbf{s}''_{\lambda_{AS_0}} \\ \nu_1^2 \mathbf{s}''_{\lambda_{AS_1}} \\ \vdots \\ \nu_n^2 \mathbf{s}''_{\lambda_{AS_n}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{A_0} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} + \mathbf{J}_{A_0} \dot{\mathbf{T}}_{\mathcal{IK}_1} \\ \dot{\mathbf{J}}_{A_1} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} + \mathbf{J}_{A_1} \dot{\mathbf{T}}_{\mathcal{IK}_1} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{J}}_{A_n} \mathbf{T}_{\mathcal{IK}_1} + \mathbf{J}_{A_n} \dot{\mathbf{T}}_{\mathcal{IK}_1} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} \quad (3.31)$$

und kurz wie folgt notieren:

$$\tilde{\mathbf{J}} \ddot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} = \mathbf{S}' \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\chi}. \quad (3.32)$$

In diesem aus  $2(n+1)$  Gleichungen bestehenden System sind nach dem Einsetzen von  $\mathbf{z}_S$ ,  $\dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}}$  und dem Messwert  $\dot{v}_x = {}^1\dot{z}_{S\mathcal{K}_1}$  nur  ${}^r\ddot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} \in \mathbb{R}^{n+1}$  sowie  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{n+1}$  unbekannt. Für die gesuchten Größen gilt analog zu den Gln. (3.25) bis (3.27):

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ {}^r\ddot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} \end{pmatrix} = \mathbf{j} \dot{v}_x - \boldsymbol{\chi}. \quad (3.33)$$

Zur effizienten Lösung der Gleichungssysteme (3.27) und (3.33) wird in jedem Zeitschritt zunächst die Dreieckszerlegung (LR-Faktorisierung) der Matrix  $\mathbf{H}$  mittels GAUSSSchem Eliminationsverfahren bestimmt und anschließend die verallgemeinerten Sollgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1}$  und -beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1}$  berechnet. Zusammen mit der verallgemeinerten Sollposition  $\mathbf{z}_S$  ist somit die Sollkinematik vollständig verfügbar, die im folgenden Abschnitt zur Berechnung der Sollseitenkräfte benötigt wird.

### Berechnung der Sollseitenkräfte

Die Sollseitenkräfte  $\mathbf{f}_{Scr} = ({}^{cr}f_{SA_0}, \dots, {}^{cr}f_{SA_n})^\top$  werden mit dem Fahrzeugmodell (2.126) berechnet. Die erste Zeile des Fahrzeugmodells beschreibt die Längsdynamik des Primärmoduls und ist daher für die folgenden Ausführungen vernachlässigbar. Werden zusätzlich die als nicht gemessene Störungen aufgefassten Kräfte  $\mathbf{f}_w = \mathbf{0}$  gesetzt, gilt

$${}^r\ddot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} = \tilde{\mathbf{J}}_{dr/\mathcal{K}_1} \mathbf{f}_{dr} + \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1} \mathbf{f}_{cr} - \tilde{\mathbf{G}}_{\mathcal{K}_1} \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} \quad (3.34)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{J}}_{dr/\mathcal{K}_1} = 2 {}^r\mathbf{M}_{\mathcal{K}_1}^{-1} \mathbf{J}_{dr/\mathcal{K}_1}, \quad (3.35)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1} = 2 {}^r\mathbf{M}_{\mathcal{K}_1}^{-1} \mathbf{J}_{cr/\mathcal{K}_1} \quad \text{und} \quad (3.36)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\mathcal{K}_1} = {}^r\mathbf{M}_{\mathcal{K}_1}^{-1} \mathbf{G}_{\mathcal{K}_1}. \quad (3.37)$$

Die Matrix  ${}^r\mathbf{M}_{\mathcal{K}_1}^{-1} \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+2}$  enthält die letzten  $n+1$  Zeilen von  $\mathbf{M}_{\mathcal{K}_1}^{-1}$ .

Wird nun in Gl. (3.34) die Sollkinematik eingesetzt, so ist die Sollseitenkraft  $\mathbf{f}_{Scr}$  die Lösung des Gleichungssystems

$$\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1} \mathbf{f}_{Scr} = {}^r\ddot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} + \tilde{\mathbf{G}}_{\mathcal{K}_1} \dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} - \tilde{\mathbf{J}}_{dr/\mathcal{K}_1} \mathbf{f}_{dr}. \quad (3.38)$$

Gl. (3.38) zeigt, dass sich bei der Vorsteuerung auch die Kräfte  $\mathbf{f}_{dr}$  berücksichtigen lassen, die an den Achsen in die Längsrichtung des zugehörigen Fahrzeugmoduls wirken. Diese Kräfte beeinflussen die Sollseitenkräfte besonders bei großen Lenk- und Knickwinkeln sowie großen Umfangskräften  ${}^xf_{A_i/A_i}$ , die beispielsweise bei einer Gefahrenbremsung in einer Kurve entstehen.

Die Komponenten von  $\mathbf{f}_{dr}$  lassen sich mit den Gln. (2.132) und (2.131) sowie der Transformation  $\mathbf{A}_{\mathcal{K}_j/A_i}$  wie folgt berechnen:

$${}^{i+1}f_{dr} = {}^{dr}f_{A_i} = {}^{xf}_{A_i/A_i} \cos \gamma_i + c_i(\beta_i - \gamma_i) \sin \gamma_i \quad \text{mit } i = 0, \dots, n. \quad (3.39)$$

Werden für die Lenkwinkel  $\gamma_i$  die Werte des vorangegangenen Zeitschritts eingesetzt, liefert diese Gleichung eine gute Näherung der Kräfte  ${}^{dr}f_{A_i}$ , weil sich die Lenkwinkel innerhalb der Tastzeit nur wenig ändern. Alternativ sind gemessene Lenkwinkel verwendbar.

Das Gleichungssystem (3.38) ist theoretisch lösbar, wenn die Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1}$  regulär ist. Diese Eigenschaft allgemein nachzuweisen ist schwierig, da ein zusätzliches Fahrzeugmodul die Elemente von  $\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1}$  durch teilweise nichtlineare Terme und Faktoren verändert. Im Anhang E.2 wird die Lösbarkeit für zwei- und dreigliedrige Fahrzeuge nachgewiesen, indem jeweils  $\det \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1} \neq 0$  gezeigt wird.

Die Lösung des Gleichungssystems (3.38) wird in jedem Zeitschritt analog zur Berechnung der Sollgeschwindigkeiten und -beschleunigungen über die Dreieckszerlegung der Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1}$  berechnet. Dieses Verfahren erlaubt eine effiziente Lösung eines Gleichungssystems für verschiedene rechte Seiten und verringert den Rechenaufwand im folgenden Abschnitt.

### 3.1.2 Rückführregelung

Die Vorsteuerung wird um eine Rückführregelung erweitert, die praktisch nicht vermeidbare Messabweichungen, Modellungenauigkeiten und Störungen ausgleicht und das Folgeverhalten stabilisiert. Die vorgeschlagene Steuerungsstruktur erlaubt hierfür verschiedene, an die verfügbare Sensorik angepasste Ansätze.

In diesem Abschnitt wird zunächst ein nichtlinearer Mehrgrößenregler entworfen, der die Differenz zwischen den Ist- und den Sollminimalkoordinaten ausregelt. Dieses Regelziel ist theoretisch zur Minimierung der Querabweichungen  $\mathbf{h}$  äquivalent. Zusätzlich werden lineare Eingrößenregler vorgeschlagen, die die Querabweichungen an jeder Achse individuell ausregeln. Da im Versuchsfahrzeug die Minimalkoordinaten  $\mathbf{z}$  sowie  $\dot{\mathbf{z}}$  gemessen werden, sind  $\mathbf{h}$  als auch  $\dot{\mathbf{h}}$  berechenbar. Diese Berechnung entfällt, wenn die Querabweichungen direkt mittels Leitdraht, Kamera, Laser usw. gemessen werden. Durch derartige Messverfahren wird jedoch die Flexibilität des Spurführungssystems eingeschränkt, weil meist eine spezielle wechselseitige Infrastruktur benötigt wird.

#### Nichtlineare Mehrgrößenregelung

In dieser Arbeit wird nur die automatische Querführung untersucht. Daher ist die Differenz zwischen den Soll- und den Istminimalkoordinaten unter der Voraussetzung auszuregeln, dass die Abweichung in der Richtung  $x_{\mathcal{K}_{S1}}$  Null ist. Die Regelabweichung wird folglich so eingeführt, dass das erste Element der Abstand des Koordinatensystems  $\mathcal{K}_1$  vom Sollkoordinatensystem  $\mathcal{K}_{S1}$  in Richtung  $y_{\mathcal{K}_{S1}}$  ist und die weiteren Elemente die Differenzen zwischen den Soll- und Istgierwinkeln sind:

$$\mathbf{e} = {}^r\mathbf{T}_{\mathcal{K}_1\mathcal{I}}(\mathbf{z}_S - \mathbf{z}). \quad (3.40)$$

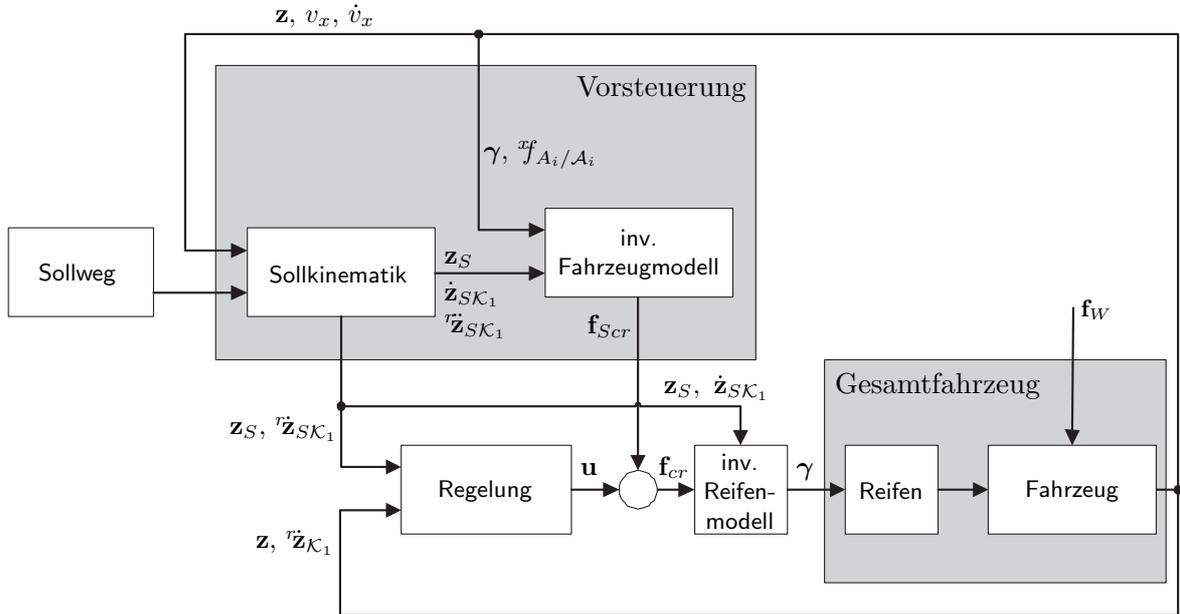
Die Matrix  ${}^r\mathbf{T}_{\mathcal{K}_1\mathcal{I}}$  enthält demnach die letzten  $n + 1$  Zeilen der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_1}^\top$ , in die der Sollgierwinkel  $\psi_{S1}$  eingesetzt wird (vgl. Gl. (2.118), S. 49). Ist die Regelabweichung klein, gilt für die Zeitableitungen:

$$\dot{\mathbf{e}} = {}^r\dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} - {}^r\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} \quad \text{und} \quad (3.41)$$

$$\ddot{\mathbf{e}} = {}^r\ddot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} - {}^r\ddot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}. \quad (3.42)$$

Als Reglerausgangsgröße wird ein neuer Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$  additiv zur Sollseitenkraft  $\mathbf{f}_{S_{cr}}$  eingeführt:

$$\mathbf{f}_{cr} = \mathbf{f}_{S_{cr}} + \mathbf{u}. \quad (3.43)$$



**Bild 3.4:** Struktur der automatischen Spurführung mit nichtlinearem Mehrgrößenregler

Wird Gl. (3.38) in Gl. (3.43) und diese wiederum in Gl. (3.34) eingesetzt, folgt mit der Annahme einer idealen Vorsteuerung

$$\ddot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1} = \ddot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} + \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1} \mathbf{u}, \quad (3.44)$$

sodass mit Gl. (3.42) gilt:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.45)$$

Der neue Eingang  $\mathbf{u}$  wird so gewählt, dass stabile Differentialgleichungen für die Regelabweichung  $\mathbf{e}$  entstehen. Bei mechanischen Systemen ist es zweckmäßig, jedem Element von  $\mathbf{e}$  eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

vorzugeben, die sich mit dem Regler

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1}^{-1} (\mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{e}) \quad (3.47)$$

realisieren lässt. Die Matrizen  $\mathbf{K}_0$  und  $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  werden als Diagonalmatrizen angesetzt und die Elemente so gewählt, dass die einzelnen Fehlerdifferentialgleichungen asym-

ptotisch stabil sind. Für die Elemente von  $\mathbf{K}_1$  gilt demzufolge:

$${}^i\mathbf{K}_1 = 2d\sqrt{{}^i\mathbf{K}_0} \quad \text{mit } {}^i\mathbf{K}_0 > 0, d > 0 \text{ und } i = 0, \dots, n. \quad (3.48)$$

Für die Erprobung in Kapitel 4 werden die Dämpfung  $d$  und die Reglerparameter  $\mathbf{K}_0$  mit Hilfe von Simulationen so eingestellt, dass das Fahrzeug bei einer Geschwindigkeit von 30 m/s stabil auf einer Geraden fährt.

Die Lösung der Gl. (3.47) wird analog zu Gl. (3.38) in jedem Zeitschritt numerisch bestimmt. Der Rechenaufwand ist durch die bereits vorhandene Dreieckszerlegung der Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1}$  gering.

**Lenkwinkelberechnung** Zur Führung des Fahrzeugs werden die Seitenkräfte (3.43) in entsprechende Lenkwinkel  $\gamma$  transformiert. Die Umrechnung erfolgt mit den Sollgrößen  $\mathbf{z}_S$  und  $\dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1}$  anhand des Reifenmodells (2.132). Wird der Schwimmwinkel  $\beta_i$  nach Gl. (2.131) eingesetzt und die Transformation  $\mathbf{A}_{\mathcal{K}_j\mathcal{A}_i}$  angewendet, gilt für die Seitenkraft der Achse  $A_i$ :

$${}^{cr}f_{A_i} = {}^x f_{A_i/\mathcal{A}_i} \sin \gamma_i + c_i (\gamma_i - \beta_i) \cos \gamma_i \quad (i = 0, \dots, n). \quad (3.49)$$

Die Gleichung ist in dieser Form nicht ohne Weiteres nach  $\gamma_i$  auflösbar. Die Winkelfunktionen lassen sich jedoch um  $\gamma_i = 0$  mit den Taylorreihen

$$\cos x = \sum_{\eta=0}^{\infty} (-1)^\eta \frac{x^{2\eta}}{(2\eta)!}, \quad (3.50a)$$

$$\sin x = \sum_{\eta=0}^{\infty} (-1)^\eta \frac{x^{2\eta+1}}{(2\eta+1)!} \quad (3.50b)$$

approximieren, die nach dem zweiten Glied abgebrochen werden. Diese Näherungen sind für praktisch relevante Lenkwinkelbeträge  $|\gamma_i| \leq \pi/3$  hinreichend genau. Wird die Identität nach der Substitution in Gl. (3.49) vereinfachend beibehalten, gilt:

$$0 = \left( -\frac{c_i}{2} - \frac{{}^x f_{A_i/\mathcal{A}_i}}{6} \right) \gamma_i^3 + \frac{c_i \beta_i}{2} \gamma_i^2 + (c_i + {}^x f_{A_i/\mathcal{A}_i}) \gamma_i - c_i \beta_i - {}^{cr}f_{A_i}. \quad (3.51)$$

In dieser kubischen Gleichung ist der Seitenkraftbeiwert  $c_i$  bekannt, der Schräglaufwinkel  $\beta_i$  lässt sich mit den Gln. (2.118), (2.130), (2.131) und der Sollkinematik berechnen. Sind Messwerte für die Umfangskräfte  ${}^x f_{A_i/\mathcal{A}_i}$  verfügbar, lassen sie sich bei der Lenkwinkelberechnung berücksichtigen. Andernfalls werden die Kräfte  ${}^x f_{A_i/\mathcal{A}_i}$  als nicht gemessene Störungen aufgefasst.

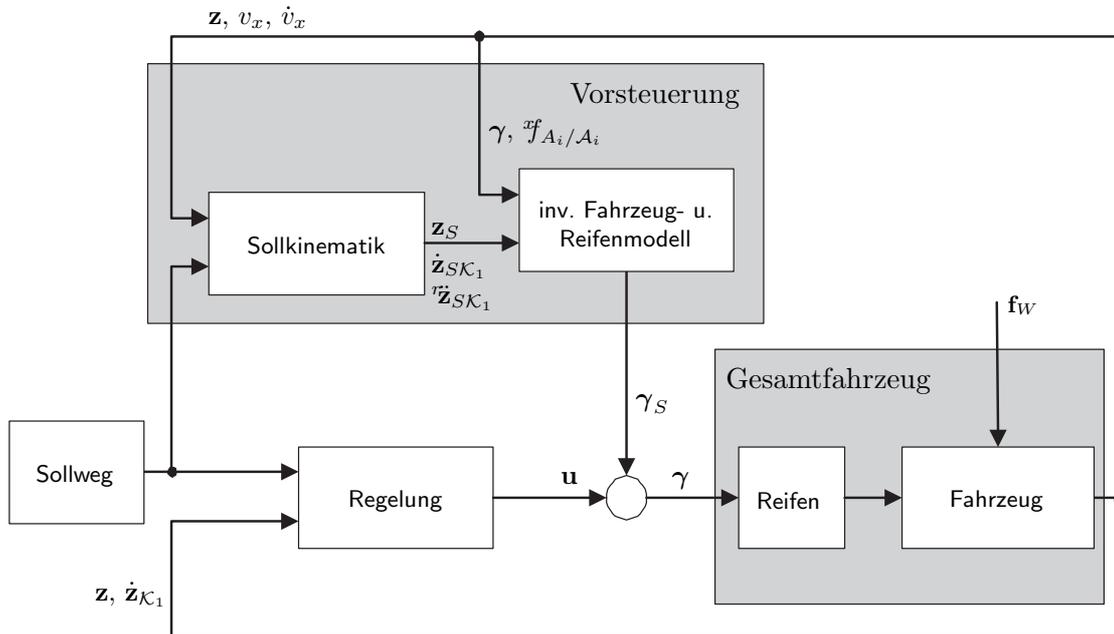
Die Wurzeln der Gl. (3.51) sind in an sich bekannter Weise mit den CARDANOSCHEN FORMELN berechenbar [57, 94]. Existieren mehrere reelle Lösungen, entspricht der gesuchte Lenkwinkel  $\gamma_i$  stets der betragskleinsten Wurzel. Alternativ kann die Lösung der Gl. (3.49) in jedem Zeitschritt numerisch bestimmt werden.

### Lineare Eingrößenregler

Bild 3.5 zeigt die Struktur der automatischen Spurführung mit linearen Eingrößenreglern. In der Vorsteuerung werden die Sollseitenkräfte  $\mathbf{f}_{Scr}$  über das Gleichungssystem (3.38) berechnet und durch das Lösen der Gl. (3.51) in die Solllenkwinkel  $\boldsymbol{\gamma}_S = (\gamma_{S0}, \dots, \gamma_{Sn})^\top$  transformiert. Die Folgebewegung wird durch lineare Eingrößenregler stabilisiert, deren Reglerausgangsgrößen  $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_n)^\top$  die Solllenkwinkel additiv überlagern:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_S + \mathbf{u}. \quad (3.52)$$

Die Regelung hat die Aufgabe, die Querabweichungen der Achsen vom Sollweg auszuregeln. In der Literatur werden hierfür meist PD-Regler vorgeschlagen [73], die auch in dieser Arbeit verwendet werden.



**Bild 3.5:** Struktur der automatischen Spurführung mit linearen Eingrößenreglern

Die Querabweichungen  $\mathbf{h}$  sind als kürzester Abstand zum Sollweg definiert, sodass die vorzeichenbehafteten Abstände zwischen den Istpositionen der Achsen und den zugehörigen Lotfußpunkten auf dem Sollweg zu berechnen sind. Die Istpositionen der Achsen  $\mathbf{r}_{\mathcal{I}A_i}$  ergeben

sich aus den Gln. (2.90) und (2.91), wenn die Istposition des Primärmoduls  $\mathbf{r}_{\mathcal{K}_1} = (x, y)^\top$ , der Gierwinkel  $\psi_1$  und die Knickwinkel  $\Delta\psi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (Bild 3.2, S. 69) gemessen und die Gierwinkel der Nachlaufmodule

$$\psi_{i+1} = \psi_i + \Delta\psi_i \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (3.53)$$

rekursiv berechnet werden. Der Lotfußpunkt  $T_0$  zum Achsmittelpunkt  $A_0$  ist identisch zur Sollposition  $A_{S0}$ , deren Berechnung im Abschn. 3.1.1 beschrieben ist. Mit dem Abstandsquadrat

$$\varepsilon_i(\lambda) = |\mathbf{r}_{\mathcal{I}A_i} - \mathbf{s}(\lambda)|^2 \quad (3.54)$$

gilt für die weiteren Lotfußpunkte  $T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$\mathbf{r}_{\mathcal{I}T_i} = \mathbf{s}(\lambda_{T_i}), \quad (3.55)$$

$$\lambda_{T_i} = \max \lambda : \frac{d\varepsilon_i(\lambda)}{d\lambda} = 0, \quad \lambda < \lambda_{T_{i-1}}. \quad (3.56)$$

Die Lotfußpunkte  $T_i$  sind die Ursprünge kartesischer Koordinatensysteme  $\mathcal{T}_i$ , deren  $x$ -Achsen tangential zum Sollweg ausgerichtet sind (Bild 3.6, S. 86). Wird der Vektor

$$\mathbf{r}_{\mathcal{T}_i A_i} = \mathbf{r}_{\mathcal{I}A_i} - \mathbf{r}_{\mathcal{I}T_i} \quad (3.57)$$

in das Koordinatensystem  $\mathcal{T}_i$  transformiert, so ist das zweite Element die vorzeichenbehaftete Querabweichung der Achse  $A_i$  vom Sollweg:

$$h_i = {}^2r_{\mathcal{T}_i A_i / \mathcal{T}_i} \quad \text{mit } i = 0, \dots, n. \quad (3.58)$$

Ein PD-Regler führt auch die zeitliche Änderung der Querabweichung  $\dot{h}_i = dh_i/dt$  zurück, mit der sich der Achsmittelpunkt  $A_i$  dem Sollweg nähert. Die Annäherungsgeschwindigkeit  $\dot{h}_i$  lässt sich ohne numerische Differentiation berechnen, wenn die verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}$  gemessen werden. Wird Gl. (2.118) in Gl. (2.129) eingesetzt, gilt für den Geschwindigkeitsvektor an der Achse  $A_i$ :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{I}A_i} = \mathbf{J}_{A_i} \mathbf{T}_{\mathcal{I}\mathcal{K}_1} \dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}. \quad (3.59)$$

Nach der Transformation in das Koordinatensystem  $\mathcal{T}_i$  ist  $\dot{h}_i$  das zweite Element des Ge-

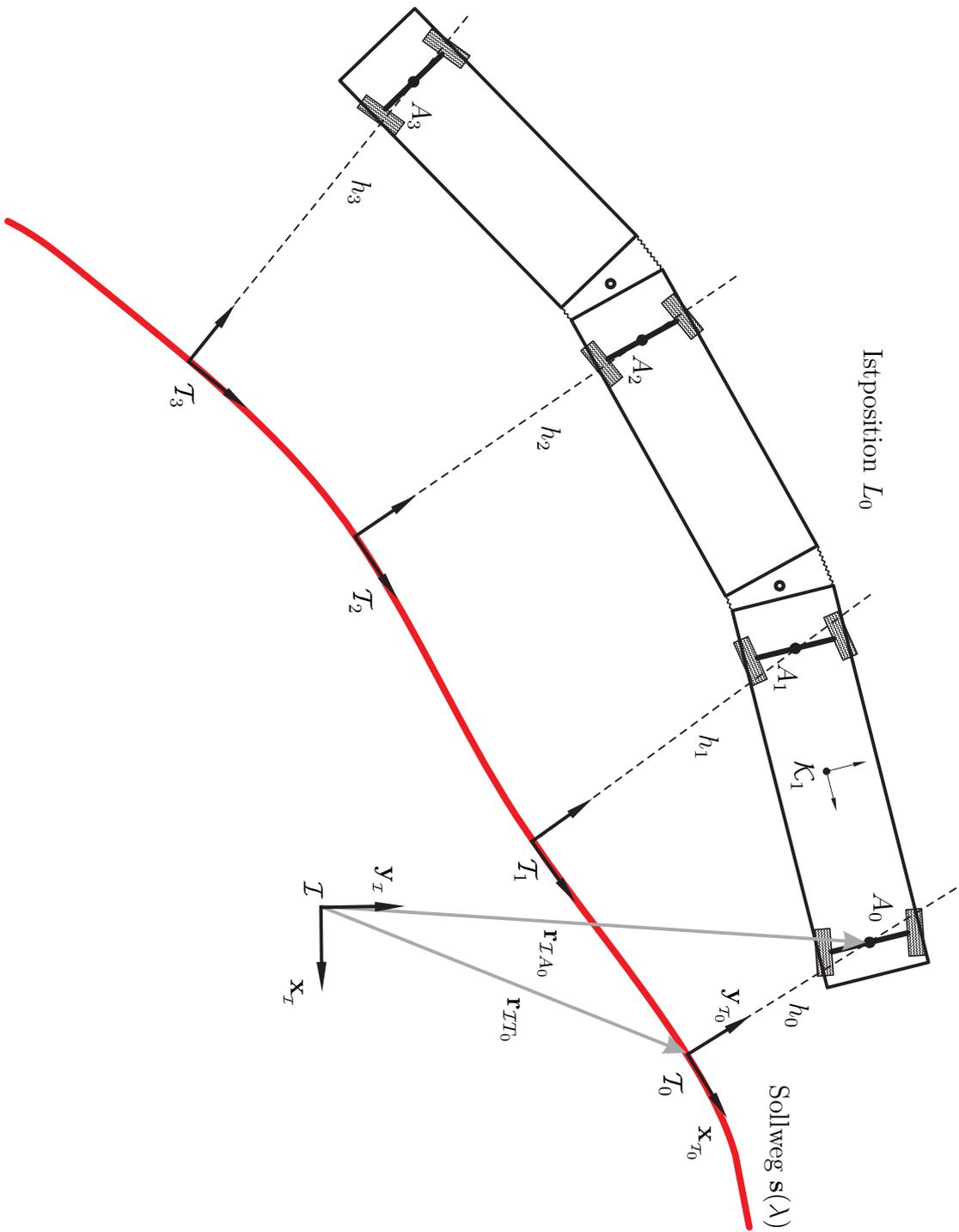
schwindigkeitsvektors:

$$\dot{h}_i = {}^2v_{\mathcal{I}\mathcal{A}_i/\mathcal{I}_i}. \quad (3.60)$$

Die Querabweichungen werden zur Regelabweichung  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})^\top = \mathbf{h}$  zusammengefasst, sodass für die Reglerausgangsgröße mit den Diagonalmatrizen  $\mathbf{K}_r$  und  $\mathbf{K}_d$  gilt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_r(\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \mathbf{e}). \quad (3.61)$$

Für die Untersuchungen im Kapitel 4 werden die Reglerparameter  $\mathbf{K}_r$  und  $\mathbf{K}_d$  mit Hilfe von Simulationen so eingestellt, dass das Fahrzeug bei einer Geschwindigkeit von  $v_x = 30 \text{ m/s}$  stabil auf einer Geraden fährt.



**Bild 3.6:** Regelabweichungen der linearen Rückführregler am Beispiel eines dreigliedrigen Gelenkfahrzeugs

## 3.2 Nachführregelung

Bei der Nachführregelung wird das Primärmodul willkürlich gesteuert, indem beispielsweise ein Fahrer den Lenkwinkel  $\gamma_0$  und die Geschwindigkeit  $v_x$  vorgibt. Um das vom Fahrer gewohnte Lenkverhalten beizubehalten, wird zusätzlich davon ausgegangen, dass die Achse  $A_1$  nicht lenkbar ist. Das Ziel der Nachführregelung besteht darin, die Lenkachsen  $A_2$  bis  $A_n$  dem Bewegungsverlauf von Achse  $A_1$  ohne Spurversatz nachzuführen. Dadurch ist die Manövrierfähigkeit des gesamten n-gliedrigen Fahrzeugs mit der des Primärmoduls vergleichbar.

Der Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda)$  ist folglich der von der Achse  $A_1$  beschriebene Weg, der prinzipbedingt während der Fahrt zu erstellen ist. Die Grundlage für die Sollwegberechnung bildet die fortlaufend gemessene Position der Achse  $A_1$ , die sich einerseits direkt mit differentiellm GPS, andererseits modellbasiert messen lässt. In dieser Arbeit wird ein modellbasiertes Verfahren vorgeschlagen, das mit geringem Sensoraufwand realisierbar ist. Das Verfahren beruht auf der Tatsache, dass die Soll- und die Istposition des Primärmoduls per Definition identisch sind und die Positionsmessung der Achse  $A_1$  folglich nur lokal genau sein muss.

Die Positionsmessung erfolgt, indem die gemessenen Lenkwinkel  $\gamma_0, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  auf das Entwurfsmodell aufgeschaltet werden und die Modellgeschwindigkeit  $\hat{v}_x$  durch einen Geschwindigkeitsregler der gemessenen Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_x$  nachgeführt wird, der die Umfangskräfte  ${}^x f_{A_i/A_i}$  als Stellgrößen nutzt. Die geschätzte Istkinematik  $\hat{\mathbf{z}}, \dot{\hat{\mathbf{z}}}_{\mathcal{K}_1}$  und  $\ddot{\hat{\mathbf{z}}}_{\mathcal{K}_1}$  lässt sich nun vom Entwurfsmodell übernehmen, sodass mit

$$\hat{\mathbf{r}}_{\mathcal{I}A_1} = \left( {}^{2:\cdot} \mathbf{L}_A \boldsymbol{\eta}_x(\hat{\mathbf{z}}), {}^{2:\cdot} \mathbf{L}_A \boldsymbol{\eta}_y(\hat{\mathbf{z}}) \right)^\top \quad (3.62)$$

auch die geschätzte Position der Achse  $A_1$  verfügbar ist (vgl. Gln. (2.86) bis (2.91), S. 44). Der Weg, den die Achse  $A_1$  des Entwurfsmodells beschreibt, ist der Sollweg für die Fahrzeugachsen  $A_2$  bis  $A_n$ . Ausgehend von der aktuellen Position der Achse  $A_1$  wird der Sollweg nur so weit nachgebildet, dass die Sollposition des Fahrzeugs  $L_S$  berechenbar ist.

Der Sollweg wird wie bei der automatischen Spurführung durch kubische Splines beschrieben. Da diese Splines in Echtzeit zu erstellen sind, wird jedoch die Stützstellenanzahl nicht minimiert. Statt dessen wird ein fester Stützstellenabstand vorgegeben, der durch die notwendige Bogenlänge des Sollweges auf eine feste Stützstellenanzahl  $m$  führt. Durch den festen Stützstellenabstand lassen sich die Splines sehr effizient ermitteln, da die  $(m-1) \times (m-1)$  Koeffizientenmatrix des zu lösenden Gleichungssystems konstant und deren Dreieckszerlegung folglich vorab berechenbar ist<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Der Stützstellenabstand lässt sich auch an die Krümmung des Sollweges anpassen. Beispielsweise ist der Stützstellenabstand umgekehrt proportional zum Lenkwinkelbetrag  $|\gamma_0|$  wählbar. Dadurch erhöht sich je-

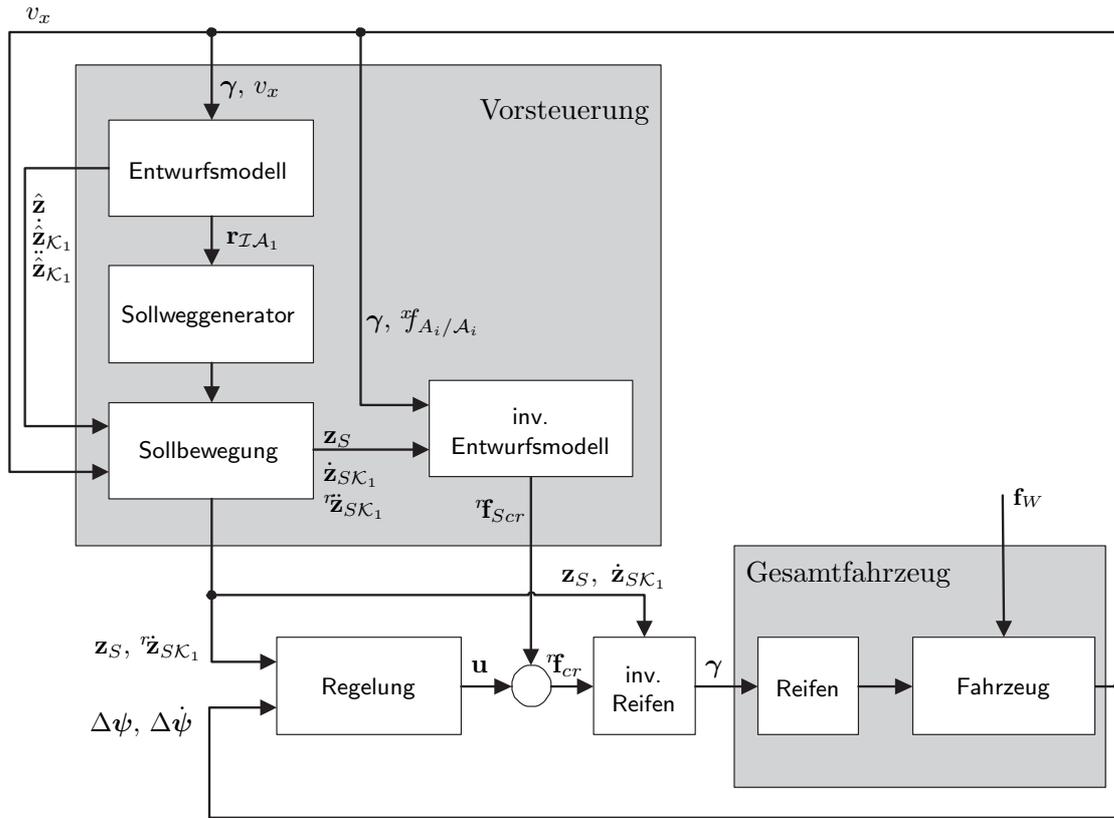


Bild 3.7: Struktur der Nachführregelung

Die Sollkinematik des Primärmoduls wird durch den Fahrer vorgegeben und ist mit den ersten drei Elementen von  $\hat{\mathbf{z}}, \dot{\hat{\mathbf{z}}}_{\mathcal{K}_1}$  sowie von  $\ddot{\hat{\mathbf{z}}}_{\mathcal{K}_1}$  näherungsweise beschrieben. Bei der Nachführregelung ist daher nur die Sollkinematik der Nachlaufmodule zu bestimmen.

Die Sollposition  $L_S$  ist analog zur Spurführung berechenbar, wobei die Sollposition des Primärmoduls durch die ersten drei Elemente von  $\hat{\mathbf{z}}$ ,

$${}^{1:3}\mathbf{z}_S = {}^{1:3}\hat{\mathbf{z}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{\psi}_1)^\top, \quad (3.63)$$

gegeben ist. Die Sollpositionen der Nachlaufmodule werden so bestimmt, dass die Achsen  $A_2$  bis  $A_n$  auf dem Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda)$  liegen. Zu dieser Position werden die Sollgierwinkel  ${}^r\mathbf{z}_S = (\psi_{S2}, \dots, \psi_{Sn})^\top$  berechnet und mit Gl. (3.63) zur verallgemeinerten Sollposition  $\mathbf{z}_S = ({}^{1:3}\mathbf{z}_S^\top, {}^r\mathbf{z}_S^\top)^\top$  zusammengefasst. Die Berechnung der Sollgeschwindigkeiten und -beschleunigungen erfordert weitere Modifikationen, auf die nachfolgend eingegangen wird.

---

doch der Rechenaufwand, da die Dreieckszerlegung der Koeffizientenmatrix bei jeder Splineberechnung durchzuführen ist.

### Verallgemeinerte Sollgeschwindigkeiten

Die verallgemeinerten Sollgeschwindigkeiten des Primärmoduls setzen sich aus der gemessenen Geschwindigkeit  $v_x$  und den geschätzten Geschwindigkeiten  ${}^{2:3}\dot{\mathbf{z}}_{\mathcal{K}_1}$  zusammen:

$${}^{1:3}\dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} = (v_x, \dot{y}_{\mathcal{K}_1}, \dot{\psi}_1)^\top. \quad (3.64)$$

Mit diesen Daten sind auch die Sollgeschwindigkeiten der Achse  $A_0$  und  $A_1$  bekannt, sodass in Gl. (3.24) die ersten vier Zeilen entfallen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{A_2} \mathbf{T}_{I\mathcal{K}_1} \\ \mathbf{J}_{A_3} \mathbf{T}_{I\mathcal{K}_1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{A_n} \mathbf{T}_{I\mathcal{K}_1} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}'_{\lambda_{A_{S2}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{s}'_{\lambda_{A_{S3}}} & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mathbf{s}'_{\lambda_{A_{Sn}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Zur Vereinfachung wird die Bezeichnung der Matrizen von der Spurführung übernommen und es gilt:

$$\tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} = \mathbf{S}' \boldsymbol{\nu}. \quad (3.66)$$

In dieser Gleichung werden die gesuchten Elemente  $r_{\mathbf{z}_{S\mathcal{K}_1}} = (\dot{\psi}_{S2}, \dots, \dot{\psi}_{Sn})^\top$  separiert:

$$\tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} = \hat{\mathbf{J}} {}^{1:3}\dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1} + \mathbf{J} r_{\mathbf{z}_{S\mathcal{K}_1}}. \quad (3.67)$$

Die Matrix  $\hat{\mathbf{J}}$  enthält folglich die ersten drei Spalten von  $\tilde{\mathbf{J}}$ , in  $\mathbf{J}$  sind die übrigen  $n - 1$  Spalten von  $\tilde{\mathbf{J}}$  zusammengefasst. Wird Gl. (3.67) in Gl. (3.66) eingesetzt, gilt mit der Matrix  $\mathbf{H} = (\mathbf{S}', -\mathbf{J}) \in \mathbb{R}^{2(n-1) \times 2(n-1)}$ :

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ r_{\mathbf{z}_{S\mathcal{K}_1}} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}} {}^{1:3}\dot{\mathbf{z}}_{S\mathcal{K}_1}. \quad (3.68)$$

Dieses Gleichungssystem ist stets lösbar, wenn  $\mathbf{H}$  regulär ist. Der notwendige Nachweis wird im Anhang E.1 (s. S. 160) für die Spurführung erbracht und lässt sich auf die Nachführregelung übertragen.

### Verallgemeinerte Sollbeschleunigungen

Die verallgemeinerten Sollbeschleunigungen des Primärmoduls werden den geschätzten Beschleunigungen  ${}^{1:3}\ddot{\mathbf{z}}_{SK_1}$  gleichgesetzt:

$${}^{1:3}\ddot{\mathbf{z}}_{SK_1} = (\ddot{x}_{K_1}, \ddot{y}_{K_1}, \ddot{\psi}_1)^\top, \quad (3.69)$$

sodass analog zu den Sollgeschwindigkeiten in Gl. (3.31) die ersten vier Zeilen entfallen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{A_2} \mathbf{T}_{IK_1} \\ \mathbf{J}_{A_3} \mathbf{T}_{IK_1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{A_n} \mathbf{T}_{IK_1} \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_{SK_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}'_{\lambda_{AS2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{s}'_{\lambda_{AS3}} & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \mathbf{s}'_{\lambda_{ASn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_2^2 \mathbf{s}''_{\lambda_{AS2}} \\ \nu_3^2 \mathbf{s}''_{\lambda_{AS3}} \\ \vdots \\ \nu_n^2 \mathbf{s}''_{\lambda_{ASn}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{A_2} \mathbf{T}_{IK_1} + \mathbf{J}_{A_2} \dot{\mathbf{T}}_{IK_1} \\ \dot{\mathbf{J}}_{A_3} \mathbf{T}_{IK_1} + \mathbf{J}_{A_3} \dot{\mathbf{T}}_{IK_1} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{J}}_{A_n} \mathbf{T}_{IK_1} + \mathbf{J}_{A_n} \dot{\mathbf{T}}_{IK_1} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{SK_1}. \quad (3.70)$$

Mit den Bezeichnungen der Spurführung gilt kurz:

$$\tilde{\mathbf{J}} \ddot{\mathbf{z}}_{SK_1} = \mathbf{S}' \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\chi}. \quad (3.71)$$

In diesem aus  $2(n-1)$  Gleichungen bestehenden System sind  ${}^r\ddot{\mathbf{z}}_{SK_1} = (\ddot{\psi}_2, \dots, \ddot{\psi}_n)^\top$  sowie  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{n-1}$  unbekannt. Für die gesuchten Größen gilt analog zu den Gln. (3.66) bis (3.68):

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ {}^r\ddot{\mathbf{z}}_{SK_1} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}} {}^{1:3}\ddot{\mathbf{z}}_{SK_1} - \boldsymbol{\chi}. \quad (3.72)$$

Die Gleichungssysteme (3.68) und (3.72) werden wie bei der Spurführung über die Dreieckszerlegung der Matrix  $\mathbf{H}$  gelöst, sodass mit der verallgemeinerten Sollposition  $\mathbf{z}_S$  die Sollkinematik vollständig verfügbar ist.

Die Berechnung der Sollseitenkräfte erfolgt aufgrund der Wechselwirkungen zwischen den Fahrzeugmodulen zunächst für alle Achsen, s. a. Abschn. 3.1.1. Bei der Nachführregelung werden jedoch nur die Sollseitenkräfte an den Nachlaufmodulen  ${}^r\mathbf{f}_{Scr} = ({}^{crf}_{SA_2}, \dots, {}^{crf}_{SA_n})^\top$  zur Vorsteuerung verwendet.

### Rückführregelung

Werden die Sollwinkel ausschließlich anhand der Sollseitenkräfte  ${}^r\mathbf{f}_{Scr}$  berechnet, verringern Modellungenauigkeiten und Störungen wie Seitenwind die Spurtreue des Fahrzeugs. Die Auswirkungen dieser Einflüsse lassen sich verringern, wenn zusätzliche Rückführregler eingesetzt werden, die die Istgierwinkel den Sollgierwinkeln nachführen. Die Regelabweichung ist folglich:

$$\mathbf{e} = {}^r\mathbf{z}_S - {}^r\mathbf{z}, \quad (3.73)$$

wobei sich die Istgierwinkel rekursiv aus dem geschätzten Gierwinkel  $\hat{\psi}_1$  und den gemessenen Knickwinkeln  $\Delta\psi_i$  ergeben (Bild 3.2, S. 69):

$$\psi_1 = \hat{\psi}_1, \quad (3.74)$$

$$\psi_{i+1} = \psi_i + \Delta\psi_i \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (3.75)$$

Die erste und zweite Zeitableitung der Gl. (3.73) ist bei kleinen Regelabweichungen

$$\dot{\mathbf{e}} = {}^r\dot{\mathbf{z}}_{SK_1} - {}^r\dot{\mathbf{z}}_{K_1} \quad \text{und} \quad (3.76)$$

$$\ddot{\mathbf{e}} = {}^r\ddot{\mathbf{z}}_{SK_1} - {}^r\ddot{\mathbf{z}}_{K_1}. \quad (3.77)$$

Die Reglerausgangsgröße  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$  wirkt additiv auf die Sollseitenkräfte der Nachlaufmodule, sodass für die resultierende Seitenkraft gilt:

$$\mathbf{f}_{cr} = \mathbf{f}_{Scr} + (0, 0, \mathbf{u}^\top)^\top. \quad (3.78)$$

Wird Gl. (3.38) in Gl. (3.78) und diese wiederum in Gl. (3.34) eingesetzt, folgt aus der Annahme einer idealen Vorsteuerung für die letzten  $n-1$  Zeilen

$${}^r\ddot{\mathbf{z}}_{K_1} = {}^r\ddot{\mathbf{z}}_{SK_1} + {}^r\tilde{\mathbf{J}}_{cr/K_1} \mathbf{u} \quad (3.79)$$

und mit Gl. (3.77):

$$\ddot{\mathbf{e}} + {}^r\tilde{\mathbf{J}}_{cr/K_1} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.80)$$

In dieser Gleichung ist  ${}^r\tilde{\mathbf{J}}_{cr/K_1} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  die rechte Untermatrix von  ${}^r\tilde{\mathbf{J}}_{cr/K_1}$ .

Der neue Eingang  $\mathbf{u}$  wird so gewählt, dass für die Regelabweichung  $\mathbf{e}$  stabile Differential-

gleichungen 2. Ordnung entstehen

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (3.81)$$

die sich mit dem Regler

$$\mathbf{u} = {}^r\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1}^{-1} (\mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{e}) \quad (3.82)$$

realisieren lassen. Die Matrizen  $\mathbf{K}_0$  und  $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  werden als Diagonalmatrizen angesetzt und es gilt:

$${}^i\mathbf{K}_1 = 2d\sqrt{{}^i\mathbf{K}_0} \quad \text{mit } {}^i\mathbf{K}_0 > 0, \quad d > 0 \quad \text{und } i = 2, \dots, n. \quad (3.83)$$

Für die in Kapitel 4 beschriebene Erprobung werden die Dämpfung  $d$  und die Reglerparameter  $\mathbf{K}_0$  durch Simulationen so eingestellt, dass das Fahrzeug mit  $v_x = 30 \text{ m/s}$  stabil auf einer Geraden fährt.

Die Lösungen der Gln. (3.82) und (3.38) werden in jedem Zeitschritt numerisch bestimmt. Der Rechenaufwand ist relativ gering, da mit der Dreieckszerlegung von  $\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1}$  beide Gleichungssysteme lösbar sind.

Die an den Nachlaufmodulen einzustellenden Lenkwinkel  $\gamma_2, \dots, \gamma_n$  lassen sich wie in Abschn. 3.1.2 beschrieben aus den resultierenden Seitenkräften  ${}^r\mathbf{f}_{cr}$  berechnen:

$${}^r\mathbf{f}_{cr} = {}^r\mathbf{f}_{Scr} + \mathbf{u}. \quad (3.84)$$

### 3.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst der Entwurf einer automatischen Spurführung vorgestellt, die aus einer modellbasierten Vorsteuerung und einem Rückführregler besteht. In der Vorsteuerung werden die Sollwinkel berechnet, die theoretisch zur spurtreuen Fahrzeugführung geeignet sind. Das Verfahren basiert auf wenigen Messwerten, bedämpft Messrauschen und lässt sich in drei Schritte unterteilen:

1. Berechnung der Sollkinematik anhand einer zweifach stetig differenzierbaren Beschreibung des Sollweges, dem gemessenen Ort eines Achsmittelpunktes sowie der gemessenen Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_x$  sowie optional  $\dot{v}_x$ ,
2. Berechnung der Sollseitenkräfte aus der Sollkinematik und dem Fahrzeugmodell und
3. Berechnung der Sollwinkel aus den Sollseitenkräften, der Sollkinematik und dem

Reifenmodell.

Die Berechnung der Sollseitenkräfte und -lenkwinkel wird genauer, wenn zusätzlich die Umfangskräfte  ${}^x f_{A_i/A_i}$  gemessen werden. In diesem Fall sind die Solllenkwinkel etwa bei einer plötzlichen Gefahrenbremsung in einer Kurve nach maximal zwei Taktzeiten auf die neue Situation eingestellt.

Die Steuerungsstruktur ermöglicht den Entwurf verschiedener, an die verfügbare Sensorik angepasster Rückführregler. In Abschn. 3.1.2 werden sowohl ein nichtlinearer Mehrgrößenregler als auch achs-individuelle lineare Eingrößenregler vorgestellt, die Messabweichungen, Modellungenauigkeiten und Störungen ausgleichen und das Folgeverhalten stabilisieren. Der nichtlineare Mehrgrößenregler führt die Istminimalkoordinaten den Sollminimalkoordinaten nach und basiert folglich darauf, dass die Minimalkoordinaten  $\mathbf{z}$  und deren Zeitableitung  $\dot{\mathbf{z}}$  beispielsweise mit einem DGPS-gestützten inertialen Navigationssystem gemessen werden.

Für die direkte achs-individuelle Ausregelung der Querabweichungen werden PD-Regler vorgeschlagen. Die Querabweichungen werden anhand der gemessenen Minimalkoordinaten und des mathematisch beschriebenen Sollweges berechnet und sichern so die hohe Flexibilität der automatischen Spurführung. Alternativ lassen sich die Querabweichungen mittels Leitdraht, Magnetenägeln, optischen Markierungen usw. direkt messen. Diese ortsfesten Sollwegmarkierungen würden jedoch die Flexibilität der automatischen Spurführung einschränken.

Im Abschn. 3.2 wird der Entwurf einer Nachführregelung beschrieben, bei der die erste Achse des Primärmoduls willkürlich gelenkt wird und die zweite Achse des Primärmoduls als Starrachse ausgelegt ist. Der Bewegungsverlauf dieser Starrachse ist der Sollweg für die lenkbaren Nachlaufachsen. Es wird eine Methode vorgestellt, mit der sich der Bewegungsverlauf der Starrachse während der Fahrt rekonstruieren lässt. Die dafür notwendigen Größen werden durch ein modellbasiertes Messverfahren ermittelt, das nur die gemessenen Lenkwinkel und die gemessene Fahrzeuggeschwindigkeit verwendet.

Die Vorsteuerung der Nachlaufachsen erfolgt wie bei der automatischen Spurführung unter der Voraussetzung, dass die Istposition des Primärmoduls der Sollposition entspricht. Theoretisch bewirken bereits die berechneten Solllenkwinkel eine hohe Spurtreue. In dieser Arbeit wird ein zusätzlicher Rückführregler vorgeschlagen, der das Folgeverhalten der Nachlaufmodule gegenüber Störungen wie Seitenwind stabilisiert. Dieser Rückführregler minimiert die Differenz zwischen den Soll- und den Istgierwinkeln.

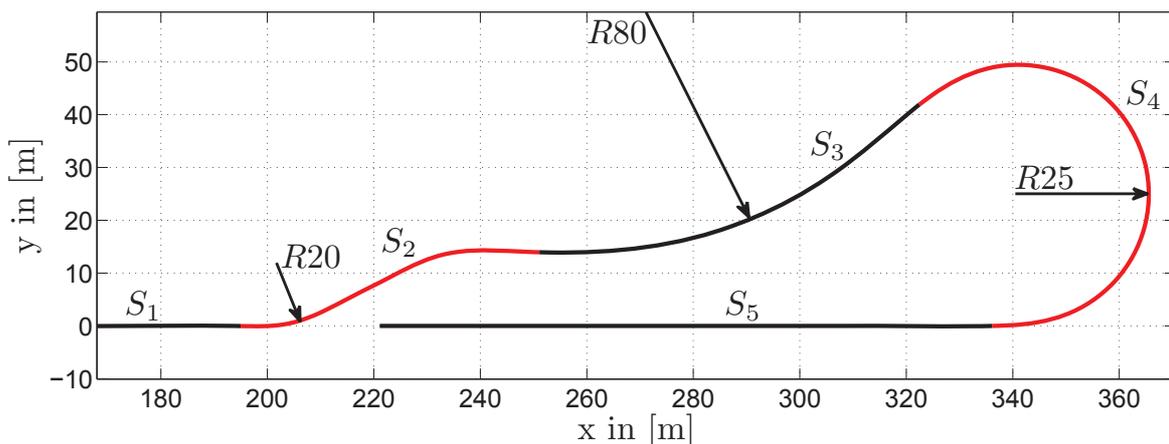
Bei beiden automatischen Lenkungen lassen sich die Solllenkwinkel vergleichsweise einfach in zwei Schritten berechnen, indem das Fahrzeug- und das Reifenmodell getrennt betrachtet werden. Die modellbasierten Berechnungen sind dabei so gestaltet, dass sie im normalen Fahrbetrieb keinen Einschränkungen unterliegen. Die hier vorgestellten automatischen Lenkungen

sind daher auch für große Lenkwinkel bis ca.  $50^\circ$  und für Knickwinkelbeträge  $|\Delta\psi_i| < 90^\circ$  geeignet.

# Kapitel 4

## Erprobung der automatischen Lenkungen

Die Stabilität und Robustheit der entworfenen automatischen Lenkungen ist aufgrund der verschiedenen Nichtlinearitäten nicht ohne Weiteres theoretisch nachweisbar. Daher wird anhand eines dreigliedrigen Simulationsmodells untersucht, wie sich die automatischen Lenkungen bei veränderten fahrdynamischen Einflussgrößen verhalten. Die Ergebnisse werden zusätzlich durch Fahrversuche mit einem zweigliedrigen Versuchsfahrzeug überprüft.



**Bild 4.1:** Teststrecke für die Erprobung der automatischen Lenkungen

Den Simulationen und Experimenten liegt die in Bild 4.1 gezeigte Teststrecke zugrunde, die typische Fahrmanöver abdeckt und aus den fünf Abschnitten  $S_1$  bis  $S_5$  besteht. Der Abschnitt  $S_1$  ist eine ca. 180 m lange Gerade, an die sich ein einfacher Spurwechsel  $S_2$  anschließt. Dem Spurwechsel folgen die Streckenabschnitte  $S_3$  und  $S_4$ , eine Linkskurve mit 80 m Radius (kurz:  $R80$ -Kurve) und eine  $R25$ -Rechtskurve. Das Ende der Teststrecke bildet mit dem Streckenabschnitt  $S_5$  wiederum eine Gerade. Die mit den Streckenabschnitten korrespondierenden Intervalle der Bogenlänge  $\lambda$  sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Die Teststrecke wurde zunächst mit Simpack aus Klothoidenabschnitten [72] erstellt und durch einen auf kubischen Splines basierenden Sollweg  $\mathbf{s}(\lambda)$  approximiert (vgl. Abschn. 3.1.1).

**Tabelle 4.1:** Bogenlängen der Streckenabschnitte

Abschnitt	$\lambda$ [m]	Beschreibung
$S_1$	$\lambda \in [0, 177)$	Gerade
$S_2$	$\lambda \in [177, 236)$	Spurwechsel
$S_3$	$\lambda \in [236, 315)$	R80-Kurve
$S_4$	$\lambda \in [315, 417)$	R25-Kurve
$S_5$	$\lambda \in [417, 532]$	Gerade

Mit 48 Stützstellen weicht der Sollweg maximal 0.05 m von der ursprünglichen Teststrecke ab. Eine höhere Genauigkeit lässt sich ohne Weiteres mit zusätzlichen Stützstellen erreichen.

## 4.1 Simulation

Die Simulationen wurden mit dem dreigliedrigen Simulationsmodell aus Abschn. 2.2.3 durchgeführt. Primär wurde untersucht, wie die entworfenen automatischen Lenkungen auf veränderte fahrdynamische Einflussgrößen reagieren. Besonders bei Nutzfahrzeugen ist neben der Geschwindigkeit und dem Haftbeiwert des Fahrbahn-Reifen-Kontaktes  $\mu$  auch der Einfluss der Zuladung zu analysieren<sup>1</sup>. Zusätzlich wurde überprüft, wie sich quer zum Fahrzeug angreifende Störungen (Seitenwind) auf die Stabilität und die Spurtreue der automatischen Lenkungen auswirken.

Für die Geschwindigkeit, den Haftbeiwert und die Zuladung wurden folgende Wertebereiche gewählt:

$$v_x \in \{1, 2, \dots, 12\} \text{ m/s}, \quad (4.1)$$

$$\mu \in \{0.3, 0.6, 0.9\} \quad \text{und} \quad (4.2)$$

$$\Delta m_i \in \{0, 500, 1000, \dots, 5000\} \text{ kg}. \quad (4.3)$$

Bei  $v_x = 12 \text{ m/s}$  beträgt die theoretische Zentripetalbeschleunigung in der R25-Kurve ca.  $5.8 \text{ m/s}^2$  und liegt damit deutlich über dem für den ÖPNV empfohlenen Wert von  $1.3 \text{ m/s}^2$  [131]. Die verschiedenen Haftbeiwerte passen die Reifenkennlinien des *Simulationsmodells* an unterschiedliche Fahrbahnzustände an. Die gewählten Werte sind typisch für trockenen ( $\mu = 0.9$ ) und nassen ( $\mu = 0.6$ ) Asphalt sowie für eine geschlossene Schneedecke ( $\mu = 0.3$ ) [96].

Die Zuladungen der Fahrzeugmodule  $\Delta m_i$  weichen in der Praxis meist voneinander ab. In den Simulationen wird vereinfachend angenommen, dass alle  $\Delta m_i$  gleich sind. Mit der

---

<sup>1</sup>In [2] werden die genannten Größen zur Robustheitsanalyse automatischer Pkw-Lenkungen herangezogen.

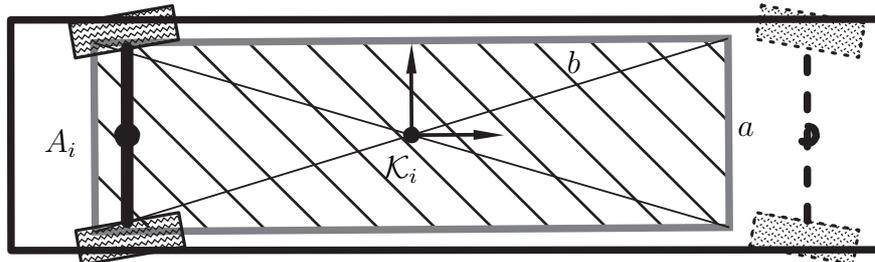
Leermasse  $\tilde{m}_i$  ist die Masse des  $i$ -ten Fahrzeugmoduls

$$m_i = \tilde{m}_i + \Delta m. \quad (4.4)$$

Neben der Masse verändert die Zuladung  $\Delta m_i$  und deren Verteilung auch den Ort des Schwerpunktes  $K_i$  und das Massenträgheitsmoment  ${}^z I_{K_i/\mathcal{K}_i}$ . In [70] wurde jedoch experimentell nachgewiesen, dass der Einfluss asymmetrisch verteilter Zuladungen vernachlässigbar ist. In der vorliegenden Arbeit wird daher angenommen, dass  $\Delta m_i$  symmetrisch zu den Achsen des Koordinatensystems  $\mathcal{K}_i$  verteilt ist. Wird zusätzlich eine homogene, rechteckige Verteilung wie im Bild 4.2 vorausgesetzt, gilt mit den Seitenlängen des Rechtecks  $a$  und  $b$  und dem Massenträgheitsmoment des unbeladenen Fahrzeugmoduls  ${}^z \tilde{I}_{K_i/\mathcal{K}_i}$ :

$${}^z I_{K_i/\mathcal{K}_i} = {}^z \tilde{I}_{K_i/\mathcal{K}_i} + \Delta {}^z I_i = {}^z \tilde{I}_{K_i/\mathcal{K}_i} + \frac{1}{12} \Delta m (a^2 + b^2). \quad (4.5)$$

Die Massenträgheitsmomente  ${}^z I_{K_i/\mathcal{K}_i}$  werden im Simulationsmodell für  $a = 2.2$  m und  $b = 6.5$  m abhängig von der Zuladung  $\Delta m$  eingestellt.



**Bild 4.2:** Verteilung der Zuladung  $\Delta m$  im  $i$ -ten Fahrzeugmodul

Die Parameter der automatischen Lenkungen sind bis auf die Geschwindigkeit  $v_x$  bei allen Simulationen konstant. Für die Zuladung je Fahrzeugmodul wird  $\Delta m = 2500$  kg angenommen. Die Seitenkraftbeiwerte des Reifenmodells  $c_i$  werden, wie in Abschn. 2.2.3 beschrieben, anhand der nichtlinearen Reifenkennlinien bei trockener Fahrbahn bestimmt.

Die von den automatischen Lenkungen geforderten Lenkwinkel  $\gamma$  werden von unterlagerten Stellregelkreisen am Fahrzeug eingestellt. Diese Stellregelkreise sind praxisgerecht zu modellieren, da deren Bandbreite die Güte automatischer Lenkungen stark beeinflusst [1]. In der vorliegenden Arbeit wird das Übertragungsverhalten der Stellregelkreise jeweils durch ein  $PT_2$ -Glied mit doppeltem Pol bei  $p_g = -12$  und einer Bandbreite von ca. 1.2 Hz nachgebildet. In [3] wird diese Bandbreite als Obergrenze bei automatischen Lenkungen angegeben, weil Frequenzen von ca. 5 – 10 Hz im menschlichen Körper Resonanzen anregen, die häufig zu Übelkeit führen [55].

### 4.1.1 Simulationsergebnisse der automatischen Spurführung

Die Simulationen haben gezeigt, dass die automatische Spurführung sowohl mit der Mehrgrößenregelung als auch mit der Eingrößenregelung in einem breiten Geschwindigkeitsbereich stabil und robust gegenüber unterschiedlichen Fahrbahnzuständen und Zuladungen ist.

Die Bilder 4.3 bis 4.6 stellen die Simulationsergebnisse auf trockener und auf schneebedeckter Fahrbahn zusammenfassend dar. Die Simulationsergebnisse bei nasser Fahrbahn sind im Anhang D abgebildet. In den Diagrammen ist der Betrag der größten Querabweichung  $\|\mathbf{h}\|_\infty$  in Abhängigkeit von der Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_x$  und der Zuladung  $\Delta m$  aufgetragen, der beim simulierten Durchfahren der Teststrecke in Bild 4.1 entsteht. Die größten Querabweichungen mit minimaler und mit maximaler Zuladung sind hervorgehoben.

Bemerkenswert ist, dass die automatische Spurführung mit beiden Rückführreglern bis an den querdynamischen Grenzbereich stabil und hochgradig spurtreu ist. Auf trockener Fahrbahn lässt sich die Teststrecke mit maximal ca. 13 m/s durchfahren. Bei dieser Geschwindigkeit ist  $\|\mathbf{h}\|_\infty \simeq 0.27$  m und die Zentripetalbeschleunigung in der R25-Kurve beträgt ca.  $6.8$  m/s<sup>2</sup>. Bei noch höheren Geschwindigkeiten erfolgt der Übergang von Haft- in Gleitreibung und das Fahrzeug rutscht seitlich aus der Kurve. Auf nasser oder schneebedeckter Fahrbahn erfolgt dieser Übergang bereits ab ca. 11 m/s bzw. 7 m/s. Wird eine dem Fahrbahnzustand angepasste Geschwindigkeit vorausgesetzt<sup>2</sup>, gilt  $\|\mathbf{h}\|_\infty < 0.03$  m.

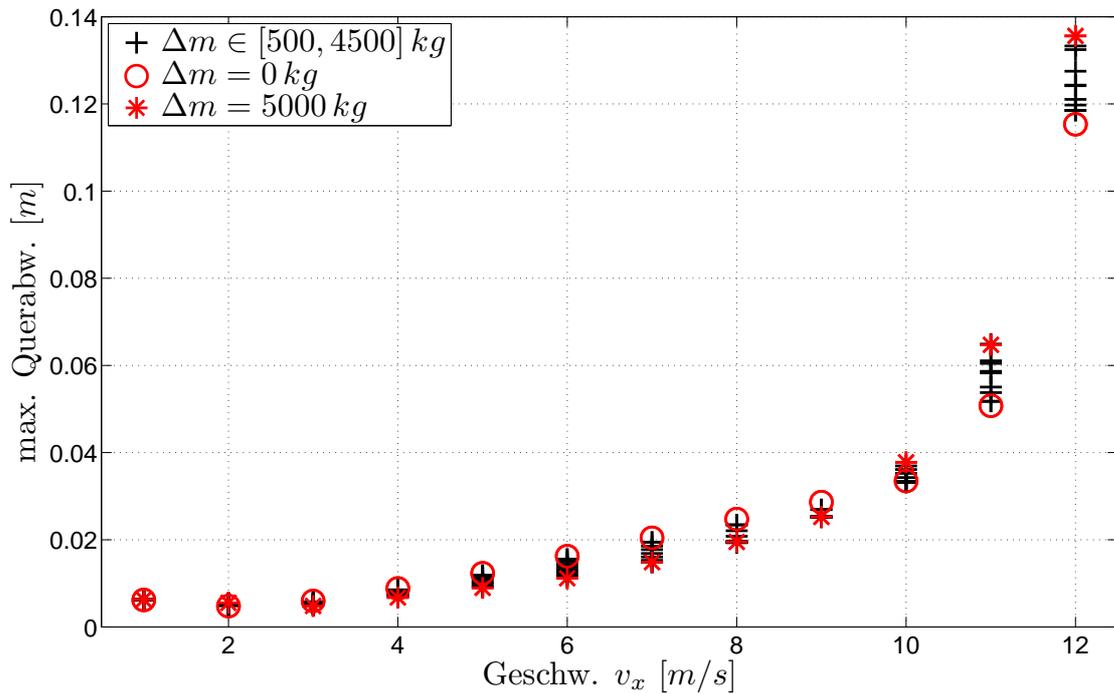
Die Mehrgrößenregelung hat aufgrund des Regelziels den Nachteil, dass eine Regelabweichung  $\dot{\mathbf{e}}$  zu Querabweichungen an allen nachfolgenden Achsen  $A_j$  mit  $j = i, \dots, n$  führt. Durch diese Fehlerfortpflanzung treten die maximalen Querabweichungen erwartungsgemäß an der letzten Achse ( $A_3$ ) auf. Im Gegensatz dazu gleicht die Eingrößenregelung die Querabweichungen jedes Achsmittelpunktes direkt und individuell aus, sodass sich eine Regelabweichung  $\dot{\mathbf{e}}$  praktisch nicht auf andere Querabweichungen auswirkt. In diesem Fall sind die größten Querabweichungen meist der Achse  $A_0$  zuzuordnen.

Bild 4.7 zeigt typische Verläufe der Querabweichungen  $\mathbf{h}$ , der Zentripetalbeschleunigung  $\ddot{y}_{\mathcal{K}_1}$  und der sich aus der Vorsteuerung bzw. der Rückführregelung ergebenden Lenkwinkel  $\gamma_S$  und  $\gamma_R$  in Abhängigkeit von der Bogenlänge  $\lambda$ . Die Parameter des Simulationsmodells sind  $v_x = 7$  m/s,  $\Delta m = 5000$  kg und  $\mu = 0.3$ . Die Folgebewegung wird durch die Mehrgrößenregelung stabilisiert. In der Simulation weicht Achse  $A_3$  mit  $\|h_3\|_\infty \simeq 0.044$  m am weitesten vom Sollweg ab. Die maximale Querabweichung tritt während des Spurwechsels (Streckenabschnitt  $S_2$ ) auf, da die Krümmungsänderung in diesem Streckenabschnitt am größten ist. Der Anteil der Regelung  $\gamma_R$  am Lenkwinkel  $\gamma = \gamma_S + \gamma_R$  ist mit  $\|\gamma_R\|_\infty \simeq 1.8^\circ$  klein. Werden nur dem Fahrbahnzustand angepasste Geschwindigkeiten betrachtet, gilt unabhängig

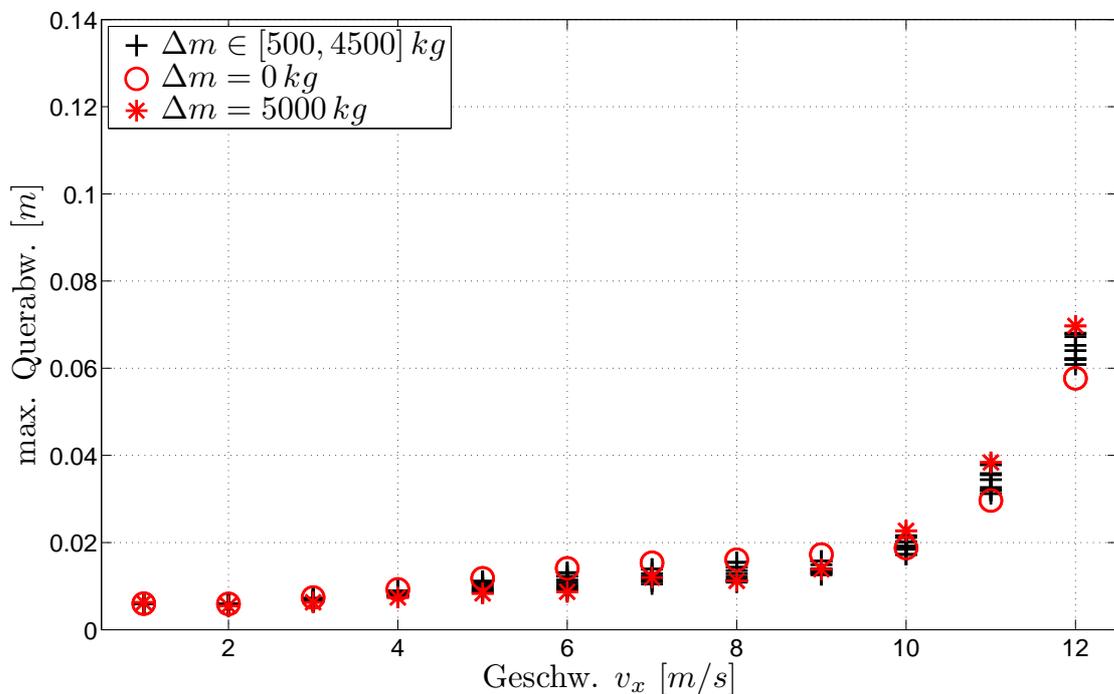
---

<sup>2</sup>Auf trockener Fahrbahn sollten Geschwindigkeiten von 9 m/s und auf schneebedeckter Fahrbahn von 6 m/s nicht überschritten werden.

von der Zuladung:  $\|\gamma_R\|_\infty \leq 0.5^\circ$ . Dieses Ergebnis verdeutlicht die Güte der Vorsteuerung, deren Lenkwinkel  $\gamma_S$  nur geringfügig durch die Rückführregler angepasst werden.



**Bild 4.3:** Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte vom Sollweg mit Mehrgrößenregler, Reibbeiwert  $\mu = 0.9$



**Bild 4.4:** Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte vom Sollweg mit Eingrößenreglern, Reibbeiwert  $\mu = 0.9$

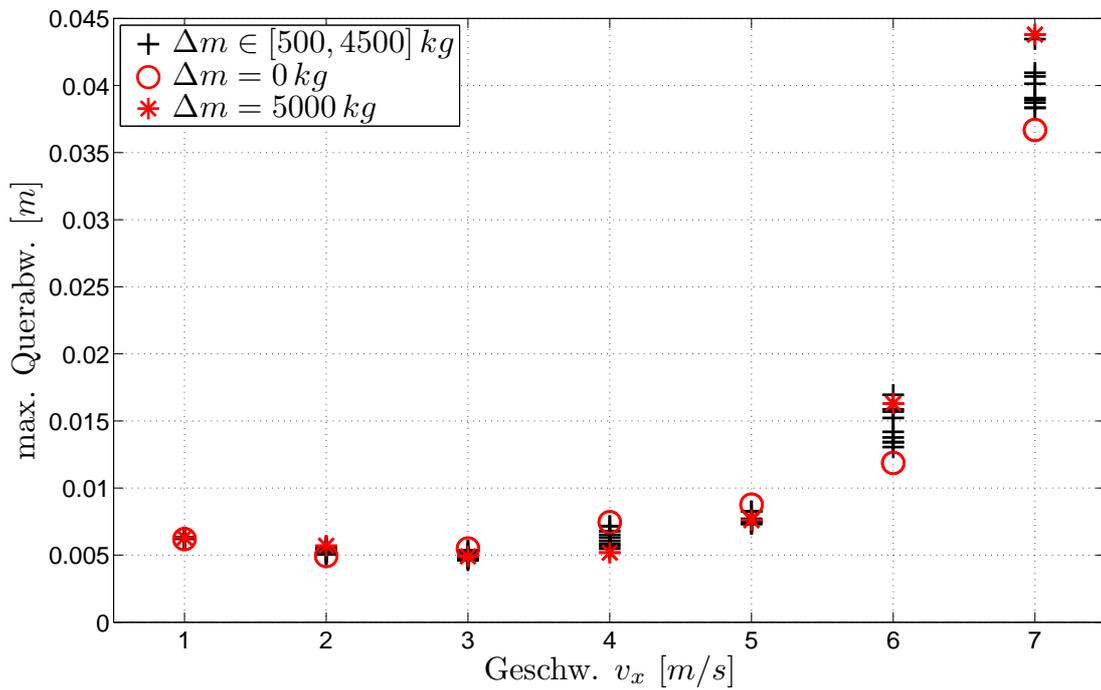


Bild 4.5: Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte vom Sollweg mit Mehrgrößenregler, Reibbeiwert  $\mu = 0.3$

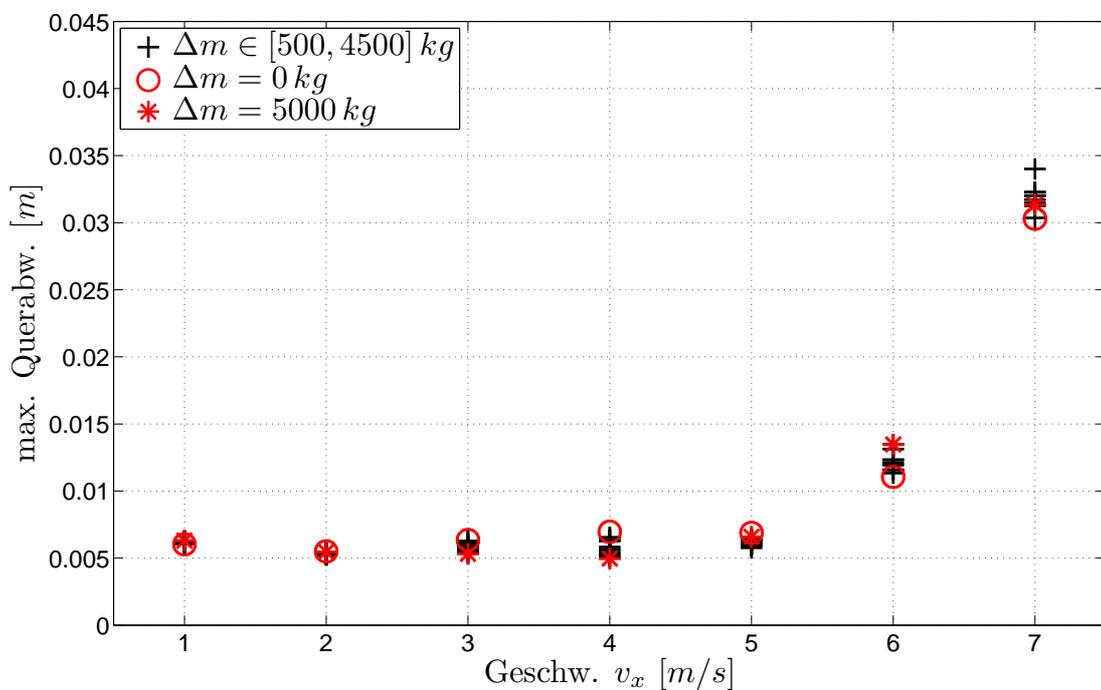
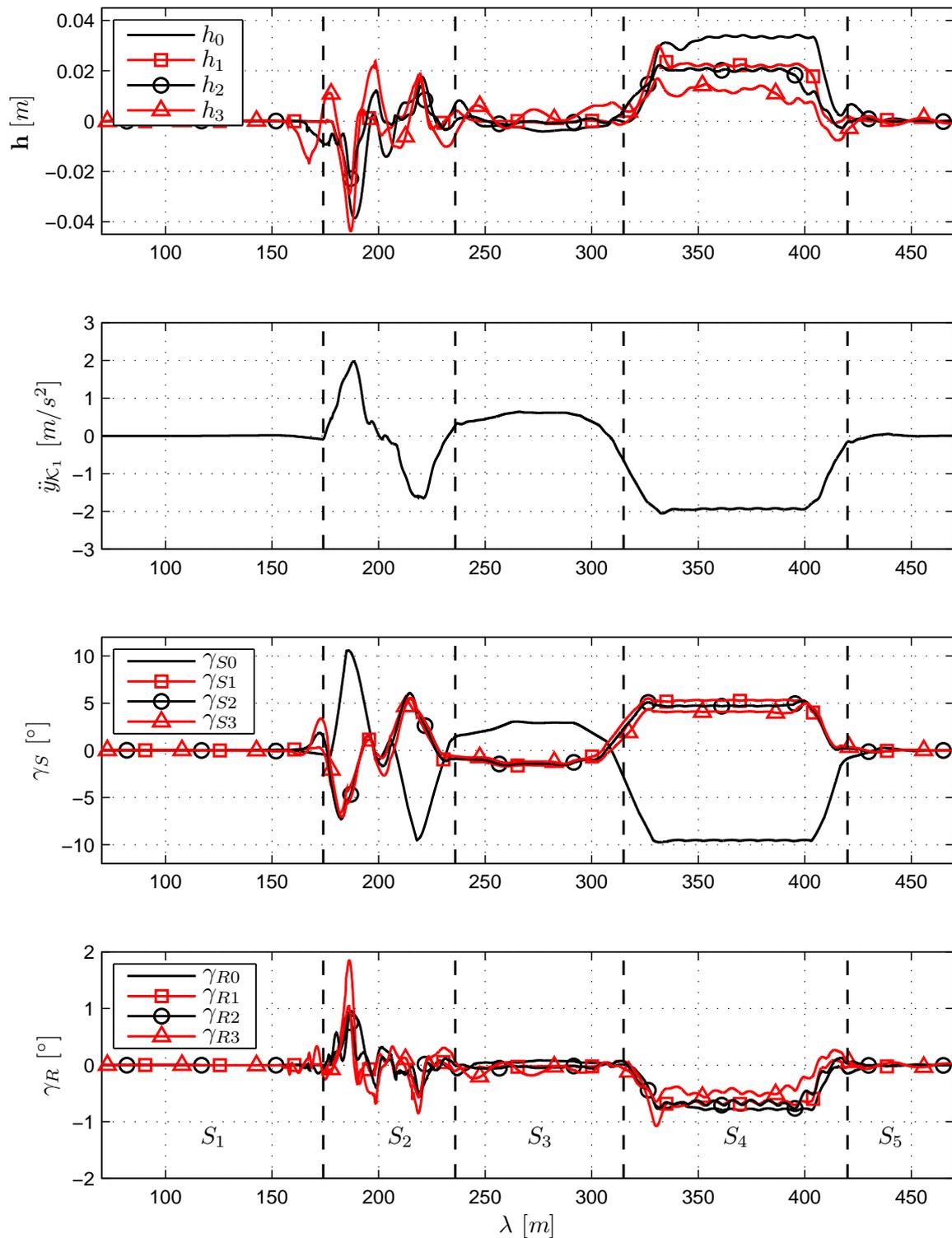


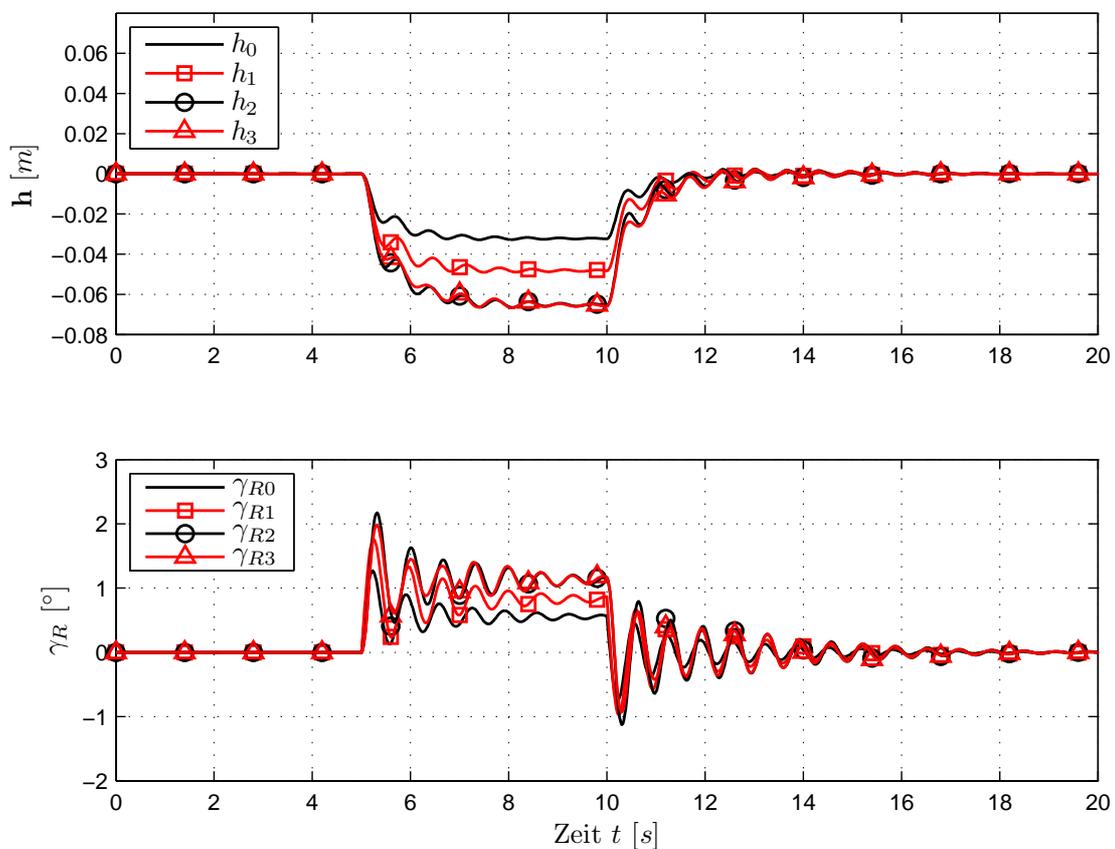
Bild 4.6: Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte vom Sollweg mit Eingrößenreglern, Reibbeiwert  $\mu = 0.3$



**Bild 4.7:** Simulationsergebnisse für  $v_x = 7 \text{ m/s}$ ,  $\Delta m = 5000 \text{ kg}$ ,  $\mu = 0.3$  mit nichtlinearem Mehrgrößenregler

### Laterale Störungen

Die automatische Spurführung wird von nicht gemessenen Kräften gestört, die seitlich auf die Fahrzeugmodule wirken. Diese so genannten lateralen Störungen entstehen beispielsweise durch Seitenwind oder seitlich geneigte Fahrbahnen. Für die Untersuchungen am dreigliedrigen Simulationsmodell wird vereinfachend angenommen, dass das Fahrzeug auf einer Geraden fährt und die Störkräfte  $wf_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) jeweils in Richtung  $y\kappa_i$  auf den Schwerpunkt des Fahrzeugmoduls  $K_i$  wirken. Zum Zeitpunkt  $t = 5$  s nehmen die Kräfte  $wf_i$  sprunghaft den Wert  $f_w$  an und sind nach 5 s wieder Null.



**Bild 4.8:** Simulationsergebnis bei seitlicher Störung  $f_w = 10$  kN,  $v_x = 25$  m/s,  $\Delta m = 0$  kg,  $\mu = 0.9$  und linearen Eingrößenreglern

Die Simulationen haben gezeigt, dass laterale Störungen erwartungsgemäß bei hohen Geschwindigkeiten und  $\Delta m = 0$  kg zu besonders großen Querabweichungen vom Sollweg führen. In Bild 4.8 sind beispielhaft die Querabweichungen  $h$  und der Lenkwinkelanteil  $\gamma_R$  über der Zeit aufgetragen, die sich für  $v_x = 25$  m/s,  $\Delta m = 0$  kg,  $\mu = 0.9$  und  $f_w = 10$  kN mit linearen Eingrößenreglern ergeben. Den Diagrammen ist zu entnehmen, dass die Rückführregelung

die Folgebewegung auch bei hohen Geschwindigkeiten stabilisiert. Die sprungartige Störung führt jedoch zu Schwingungen im Regelkreis, die sich negativ auf den Fahrkomfort auswirken, vergleichsweise langsam abklingen und auf die Nähe zur Stabilitätsgrenze hinweisen. Wird die Geschwindigkeit  $v_x$  verringert, verringern sich auch die Amplituden und die Abklingzeiten. Bei hohen Geschwindigkeiten lassen sich die Schwingungen durch kleinere Reglerverstärkungen vermeiden.

Die Simulationsergebnisse der Mehrgrößenregelung sind mit denen der Eingrößenregelung vergleichbar.

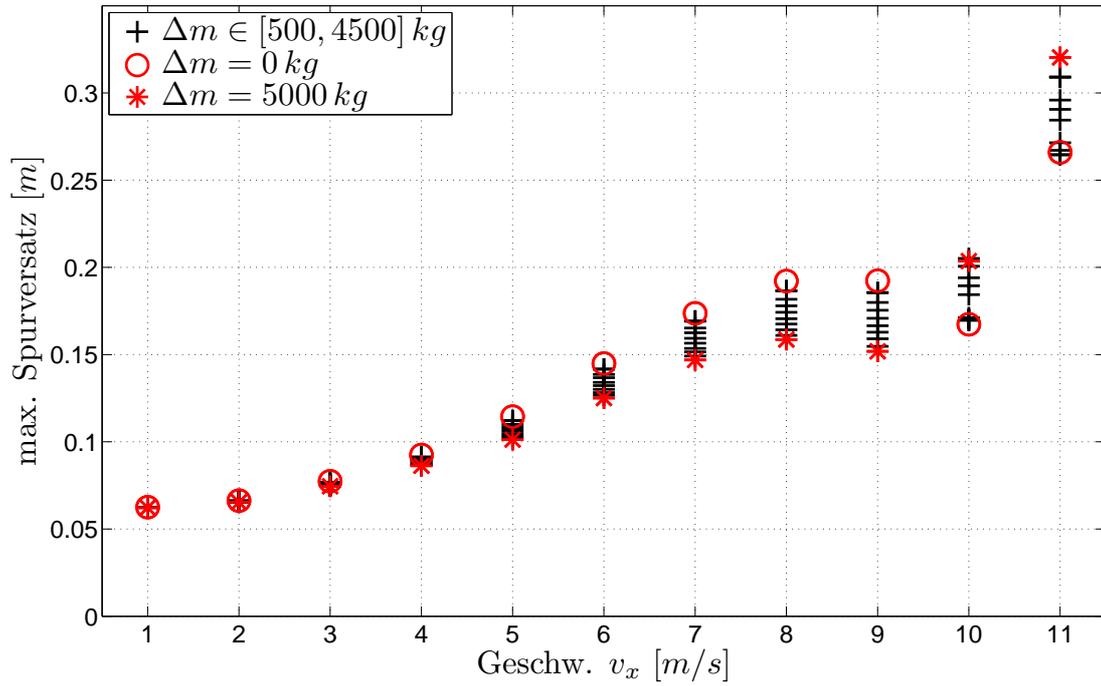
#### 4.1.2 Simulationsergebnisse der Nachführregelung

Die simulationsbasierte Erprobung der Nachführregelung erfolgt ebenfalls mit dem dreigliedrigen Simulationsmodell. Im Gegensatz zur automatischen Spurführung wird davon ausgegangen, dass die Bewegung des Primärmoduls willkürlich ist und die Achsmittelpunkte  $A_2$  und  $A_3$  dem Bewegungsverlauf des Achsmittelpunktes  $A_1$  ohne Spurversatz nachzuführen sind.

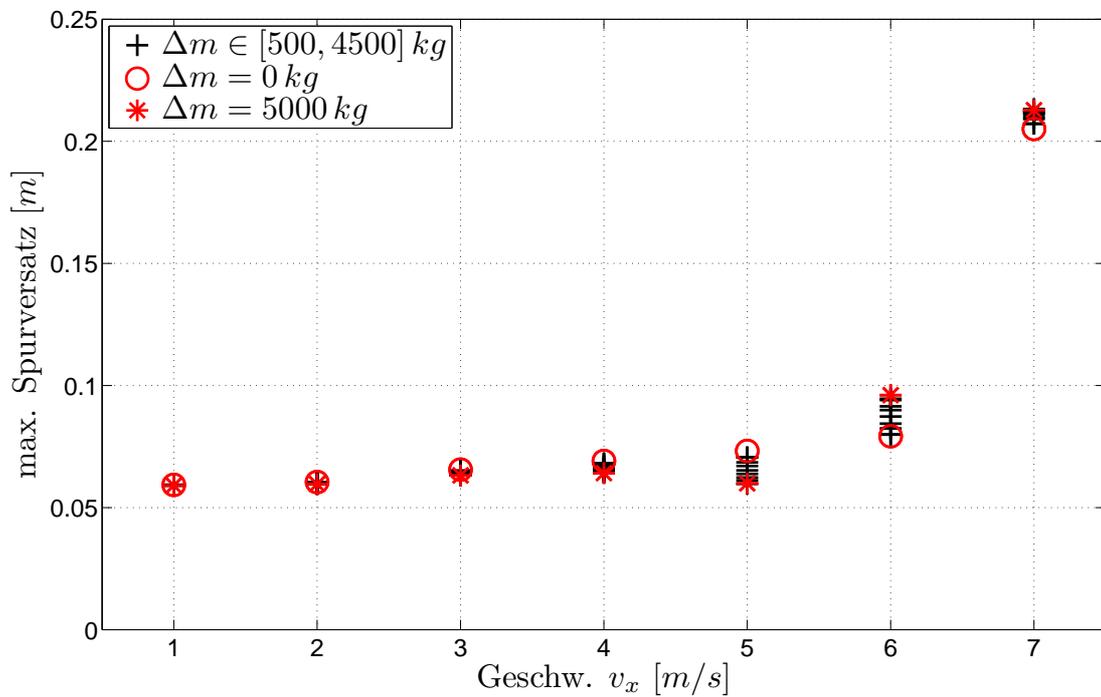
Damit die Simulationsergebnisse der automatischen Lenkungen untereinander vergleichbar sind, wird das Primärmodul und damit auch der Führungspunkt  $A_1$  spurtreu auf der Teststrecke (Bild 4.1, S. 95) geführt. Mit den Querabweichungen  $h_i(\lambda)$  der Achsmittelpunkte  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) vom Sollweg  $s(\lambda)$  gilt dann für den Spurversatz der Achsmittelpunkte  $A_2$  und  $A_3$ :

$$h_i^*(\lambda) = h_1(\lambda) - h_i(\lambda) \quad \text{mit } i = 2, 3. \quad (4.6)$$

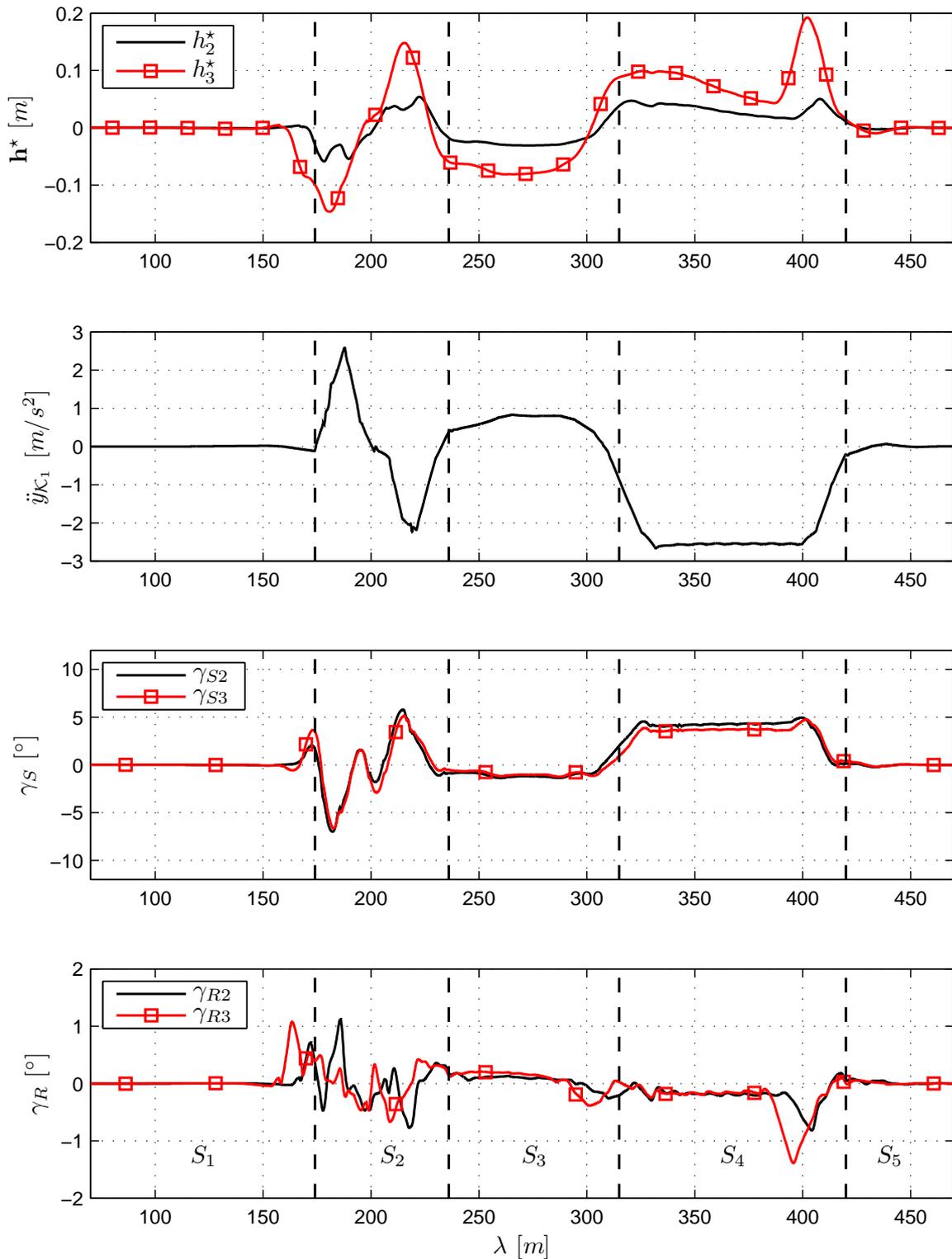
Die Simulationen zeigen, dass auch die Nachführregelung hochgradig spurtreu und robust gegenüber der Zuladung und dem Fahrbahnzustand ist. Die Bilder 4.9 und 4.10 stellen die Simulationsergebnisse zusammenfassend dar. In den Diagrammen ist der maximale Spurversatz abhängig von der Geschwindigkeit  $v_x$  und der Zuladung  $\Delta m$  für trockene und schneebedeckte Fahrbahn aufgetragen. Werden nur Geschwindigkeiten betrachtet, die dem Fahrbahnzustand angepasst sind, ist der maximale Spurversatz stets kleiner als 0.2 m. Bei deaktivierter Nachführregelung entstehen hingegen Spurversätze von  $\|h_2^*\|_\infty \simeq 1.0$  m und  $\|h_3^*\|_\infty \simeq 2.0$  m.



**Bild 4.9:** Maximaler Spurversatz der Achsmittelpunkte  $A_2$  und  $A_3$  vom Verlauf des Führungspunktes  $A_1$ , Reibbeiwert  $\mu = 0.9$

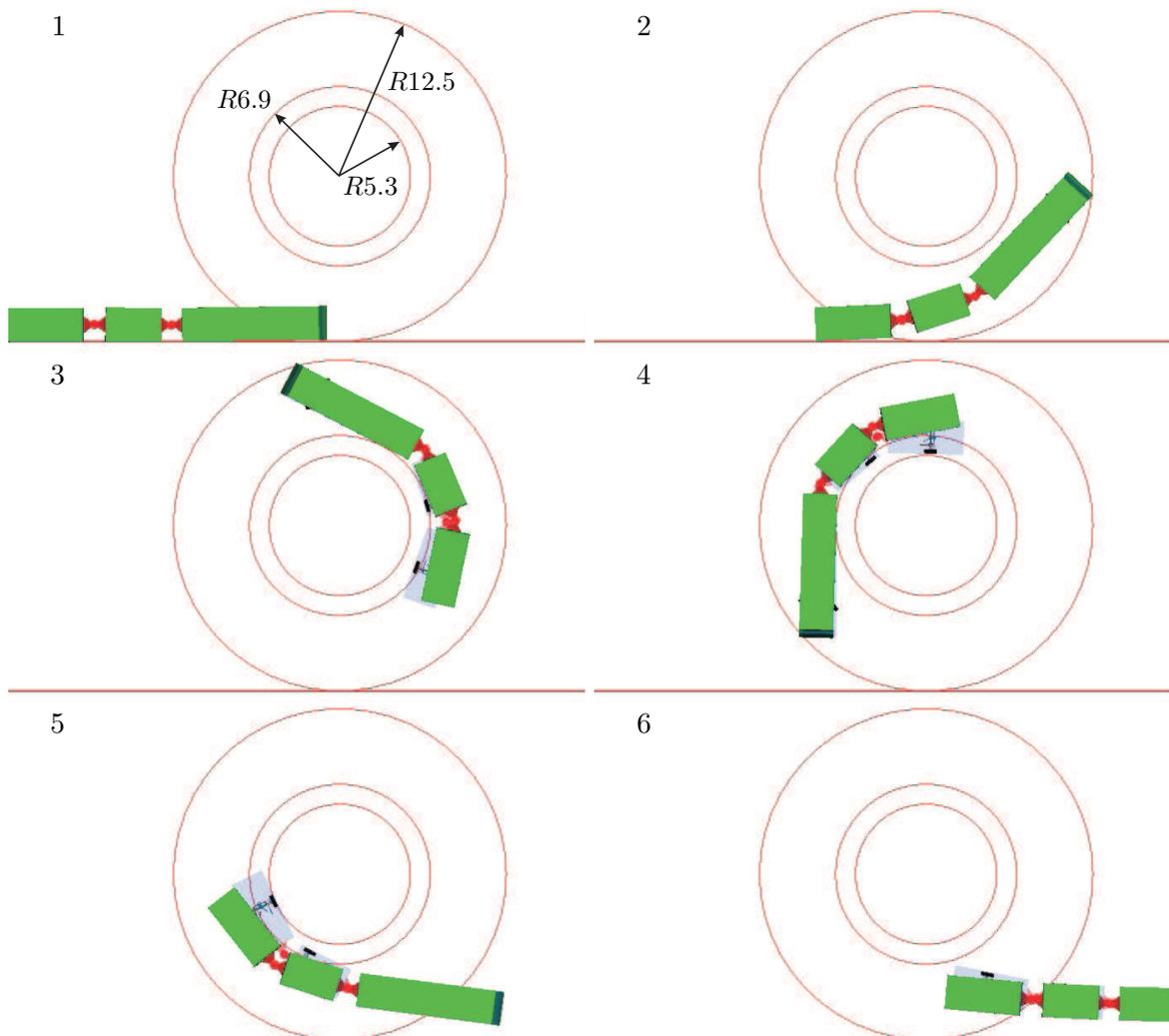


**Bild 4.10:** Maximaler Spurversatz der Achsmittelpunkte  $A_2$  und  $A_3$  vom Verlauf des Führungspunktes  $A_1$ , Reibbeiwert  $\mu = 0.3$



**Bild 4.11:** Simulationsergebnisse der Nachführregelung,  $v_x = 8$  m/s,  $\Delta m = 0$  kg,  $\mu = 0.9$

Auffällig ist der im Vergleich zur automatischen Spurführung höhere Spurversatz. Die Ursache hierfür ist die nur lokal genaue, modellbasierte Positionsmessung des Führungspunktes  $\mathbf{r}_{TA_1}(t)$ . Der Messfehler wird bei der Rekonstruktion des Sollweges aufsummiert. Somit nimmt der maximale Spurversatz mit dem Abstand zwischen dem Führungspunkt  $A_1$  und dem Folgepunkt  $A_2$  bzw.  $A_3$  zu, sodass stets  $\|h_3^*\|_\infty > \|h_2^*\|_\infty$  ist. Zur Veranschaulichung ist im Bild 4.11 der Verlauf der Spurversätze bei  $v_x = 8 \text{ m/s}$ ,  $\Delta m = 0 \text{ kg}$  und  $\mu = 0.9$  über der Bogenlänge  $\lambda$  aufgetragen.



**Bild 4.12:** Bildsequenz eines 24 m langen Fahrzeugs im BOKraft-Kreis mit und ohne Nachführregelung, Reduktion der Ringbreite um 1.8 m

Die Bildsequenz 4.12 zeigt abschließend die Fahrt eines dreigliedrigen Fahrzeugs durch den BOKraft-Kreis. Die Fahrzeuggeometrie wurde von den bekannten 24 m langen Fahrzeugen *Lichttram* (Fa. Hess) und *AGG 300* (Fa. Van Hool) übernommen. Mit der Nachführregelung

gelingt es, praktisch ohne Ausscheren in den BOKraft-Kreis einzufahren. Die für die Kreisfahrt erforderliche Ringbreite wird um ca. 1.8 m auf 5.6 m reduziert. Damit erreicht das 24 m lange Gelenkfahrzeug die Manövrierfähigkeit eines 12 m-Busses.

## 4.2 Experimentelle Erprobung

Die Spurführung wurde mit der AutoTram, einem zweigliedrigen Versuchsfahrzeug von 18 m Länge und einem Gewicht von ca. 18 t, erprobt (Bild 4.13). Aus zeitlichen Gründen beschränkt sich die Erprobung auf die Spurführung mit linearer Eingrößenregelung<sup>3</sup>. Die präsentierten Ergebnisse sind mit einer Zuladung von  $\Delta m \simeq 1000$  kg auf einer trockenen Betonfahrbahn entstanden. Die Beschleunigung  $\dot{v}_x$  und die Antriebskräfte  ${}^x f_{A_i/A_i}$  wurden in der Vorsteuerung nicht berücksichtigt.

In diesem Abschnitt werden zunächst das Versuchsfahrzeug einschließlich der verwendeten Sensoren und Aktoren sowie die für die Fahrversuche notwendigen Modifikationen der Steuerung beschrieben. Anschließend werden die Ergebnisse der Versuchsfahrten auf der in Bild 4.1 (S. 95) gezeigten Teststrecke und das Verhalten der Spurführung bei einer Gefahrenbremsung in einer Kurve vorgestellt.



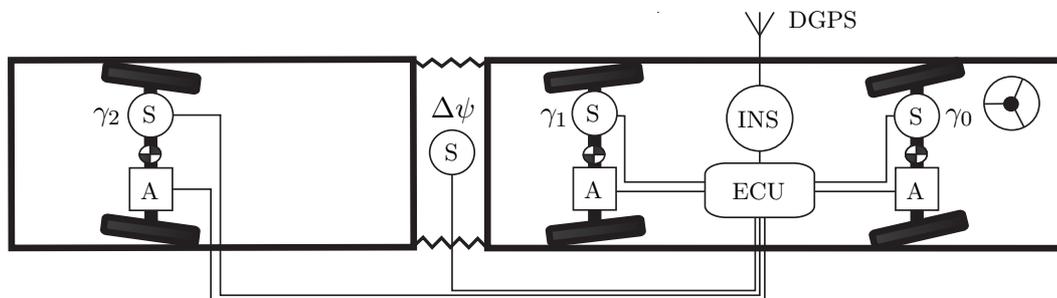
**Bild 4.13:** Das zweigliedrige, allrad-gelenkte Versuchsfahrzeug AutoTram

---

<sup>3</sup>Neben der vernachlässigbaren Fehlerfortpflanzung hat die Eingrößenregelung gegenüber der Mehrgrößenregelung den Vorteil, dass die Regelabweichungen  $\mathbf{e} := \mathbf{h}$  ohne Weiteres mit verschiedenen Sensoren wie Leitdraht, Magnetenägeln oder optischen Markierungen direkt messbar sind.

### Das Versuchsfahrzeug AutoTram

Für die Erprobung neuartiger automatischer Lenkungen ist die AutoTram mit drei unabhängig lenkbaren Achsen und umfangreicher Mess-, Stell-, und Regelungstechnik (kurz: MSR-Technik) ausgestattet. Winkelsensoren messen die Lenkwinkel  $\gamma_i$  sowie den Knickwinkel  $\Delta\psi$ . Ein DGPS-gestütztes inertiales Navigationssystem (INS) ermittelt den Ort, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sowie die Lage und die Drehraten des vorderen Fahrzeugteils mit einer Abtastrate von 100 Hz. Die schematische Anordnung der MSR-Technik zeigt Bild 4.14, wobei Sensoren durch Kreise, Aktoren durch Quadrate gekennzeichnet sind. Zusätzlich erfassen Kameras den Verlauf der Fahrbahnmarkierungen im Front- und Seitenbereich des Fahrzeugs und sind alternativ zur Bestimmung der Querabweichung vom Sollweg sowie zur Hinderniserkennung nutzbar.



**Bild 4.14:** MSR-Technik für die Spurführung der AutoTram

Die Lenkwinkel der AutoTram werden durch ein mechatronisches System eingestellt, das im Wesentlichen aus einer elektrischen Zahnradpumpe, einem Druckspeicher sowie je einem Hydraulikzylinder mit Proportionalventil pro Achse besteht. Die Ventilkolbenposition des Proportionalventils wird durch eine elektrische Stellgröße  $u_v(t)$  vorgegeben und bestimmt die Stellgeschwindigkeit des Hydraulikzylinders in die eine oder andere Richtung. Prinzipbedingt befindet sich am Eingang dieser Regelstrecke eine Totzone, sodass kleine Stellgrößenbeträge keine Wirkung am Ausgang zeigen. Die Kolbenposition des Hydraulikzylinders gibt über das Lenkgestänge den am Fahrzeug gemessenen Lenkwinkel  $\check{\gamma}$  vor.

Im Anhang B wird für dieses mechatronische System ein Lenkwinkelstellregelkreis (kurz: Stellregelkreis) entworfen, der die von der automatischen Lenkung geforderten Lenkwinkel  $\gamma$  am Versuchsfahrzeug einstellt. Die Stellregelkreise sind so ausgelegt, dass für das Übertragungsverhalten näherungsweise

$$G_{\check{\gamma}}(s) = \frac{p_g^2}{(s - p_g)^2} \quad (4.7)$$

gilt. Die Bandbreite der Stellregelkreise ist durch Stellenergiebeschränkungen im hydraulischen

schen Teilsystem stark eingeschränkt. Versuchsfahrten haben gezeigt, dass für den Doppelpol minimal  $p_g = -3.2$  gewählt werden kann. Damit liegt die Bandbreite der Stellregelkreise bei nur ca.  $0.3 \text{ Hz}^4$ .

Die geringe Bandbreite führt auch bei niedrigen Frequenzen zu beachtlichen Phasendrehungen, sodass die Sollwinkel  $\gamma$  deutlich verzögert am Fahrzeug eingestellt werden. Folglich ist auch die Anstiegszeit der Stellregelkreise mit  $t_r \simeq 0.85 \text{ s}$  vergleichsweise hoch. Innerhalb dieser Anstiegszeit legt ein Fahrzeug mit  $v_x = 25 \text{ m/s}$  einen Weg von über  $21 \text{ m}$  zurück. Mit diesen Eigenschaften sind die Stellregelkreise in den automatischen Lenkungen nicht mehr vernachlässigbar.

Weitere Fahrversuche haben gezeigt, dass durch Spiel in den Lenkmechaniken Totzeiten entstehen, die destabilisierend auf die Rückführregelung wirken. Nachfolgend werden die Modifikationen an der Spurführung vorgestellt, mit denen die Vorsteuerung an die geringe Dynamik der Stellregelkreise und die Rückführregelung an die Totzeiten angepasst wurden.

### Modifikation der Spurführung

**Vorsteuerung** In der Vorsteuerung lässt sich die Verzögerung der Stellregelkreise kompensieren, indem die Lenkwinkel  $\gamma_S$  den tatsächlichen Lenkwinkeln  $\check{\gamma}_S$  gleich gesetzt werden. Aus der Stellregelkreisdynamik (4.7) folgt dann für die modifizierte Vorsteuerung

$$\gamma_{Si}^* = \frac{1}{p_g^2} \check{\gamma}_{Si} - \frac{2}{p_g} \dot{\gamma}_{Si} + \gamma_{Si}, \quad (4.8)$$

wobei  $\dot{\gamma}_{Si}$  und  $\check{\gamma}_{Si}$  durch numerische Differentiation von  $\gamma_{Si}$  zu berechnen sind. Die zweite Zeitableitung  $\check{\gamma}_{Si}$  führt jedoch zu Sprüngen im Steuersignal  $\gamma_{Si}^*$ , die sich negativ auf die Lebensdauer des Magnetventils und den Fahrkomfort auswirken. Dennoch lässt sich die Stellregelkreisdynamik für  $\check{\gamma}_{Si} \ll \dot{\gamma}_{Si}$  näherungsweise mit

$$\gamma_{Si}^* = \gamma_{Si} - \frac{2}{p_g} \dot{\gamma}_{Si} \quad (4.9)$$

kompensieren, sodass mit den Gln. (3.52) und (4.9) für die neue Führungsgröße der Stellregelkreise gilt:

$$\gamma = \gamma_S^* + \mathbf{u}. \quad (4.10)$$

**Rückführregelung** Durch das Lenkungsspiel entstehen Totzeiten, die nicht vermeidbare Grenzyklen in der Rückführregelung hervorrufen. Da die Phasenverschiebung der Totzeit

---

<sup>4</sup>In der Literatur wird meist von ca.  $1.2 \text{ Hz}$  Bandbreite ausgegangen [1, 2, 34].

proportional zur anregenden Frequenz ist, werden die Regelkreise mit zunehmender Geschwindigkeit instabil. Wird dennoch von konstanten Reglerparametern im Geschwindigkeitsbereich  $v_x \in (0, v_{xmax}]$  ausgegangen, ist die Regelgüte auch für kleine  $v_x$  gering. Daher wurde die Reglerverstärkung  $\mathbf{K}_r$  an die aktuelle Geschwindigkeit  $v_x$  angepasst<sup>5</sup>, indem zunächst bei verschiedenen Geschwindigkeiten die maximalen Reglerverstärkungen  $K_r$  experimentell bestimmt wurden, die subjektiv einen hohen Fahrkomfort gewährleisten. Die ermittelten Reglerverstärkungen weisen näherungsweise einen exponentiellen Verlauf auf, sodass

$${}^{ii}K_r(v_x) = a e^{-b v_x} + c \quad \text{mit } b > 0 \quad (4.11)$$

angesetzt wurde. Die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  wurden mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ermittelt.

### Ergebnisse der Fahrversuche

Mit den beschriebenen Modifikationen wurde die automatische Spurführung erfolgreich erprobt. Auf einer Geraden wurde die Stabilität bis zur Höchstgeschwindigkeit vom 16 m/s nachgewiesen<sup>6</sup>. Die Ergebnisse der Fahrversuche auf der in Bild 4.1 gezeigten Teststrecke und bei einer Gefahrenbremsung in einer Kurve werden nachfolgend vorgestellt.

**Teststrecke** Bild 4.15 (S. 113) zeigt das Ergebnis einer Versuchsfahrt mit  $v_x = 4$  m/s. Die Querabweichungen sind meist kleiner als 0.1 m und es werden Zentripetalbeschleunigungen von maximal ca.  $0.7 \text{ m/s}^2$  erreicht. Der von der Vorsteuerung berechnete Lenkwinkelverlauf  $\gamma_S(\lambda)$  ist glatt und erwartungsgemäß sowohl qualitativ als auch quantitativ mit den Simulationen vergleichbar. Die vom Lenkungsspiel hervorgerufenen Grenzyklen in den Rückführreglern sind auf dem geraden Streckenabschnitt  $S_1$  besonders gut erkennbar. Die Querabweichungen  $\mathbf{h}$  und Lenkwinkel  $\gamma_R = \mathbf{u}$  schwingen mit ca. 0.4 Hz.

Wird die Teststrecke mit  $v_x = 8$  m/s durchfahren, entstehen Querabweichungen bis ca. 0.35 m und Zentripetalbeschleunigungen von maximal ca.  $2.5 \text{ m/s}^2$  in der R25-Kurve (vgl. Bild 4.16, S. 114). Die Querabweichungen nehmen gegenüber den Simulationen überproportional zu, da die Totzeiten im Regelkreis eine Verringerung der Reglerverstärkung  $\mathbf{K}_r$  erfordern. Durch den geschwindigkeitsabhängigen Ansatz (4.11) gilt:  $\mathbf{K}_r(v_x = 8 \text{ m/s}) \simeq 1/3 \mathbf{K}_r(v_x = 4 \text{ m/s})$ . Die Frequenz des Grenzyklus beträgt wiederum ca. 0.4 Hz.

Die Teststrecke wurde mit bis zu  $v_x = 10$  m/s spurtreu befahren. Bei dieser Geschwindigkeit sind die Querabweichungen kleiner als 0.7 m und es werden Zentripetalbeschleunigungen

<sup>5</sup>In Simulationen ohne Totzeit lassen sich auch mit den langsamen Stellregelkreisen der AutoTram ( $p_g = -3.2$ ) gute Ergebnisse mit konstanten Reglerparametern erzielen.

<sup>6</sup>Die Geschwindigkeit der AutoTram ist bei automatischer Lenkung auf  $v_{xmax} = 16$  m/s begrenzt.

bis  $4.5 \text{ m/s}^2$  erreicht. In [96] werden ca.  $3.5 - 4.0 \text{ m/s}^2$  als maximal gemessene Zentripetalbeschleunigung für schwere Lkw auf trockener Fahrbahn angegeben. Weiterhin wird darauf hingewiesen, dass ein durchschnittlicher *Pkw*-Fahrer nur auf 0.2% der Länge eines Straßenkurses Zentripetalbeschleunigungen von mehr als  $3 \text{ m/s}^2$  erreicht. Diese Beschleunigungswerte verdeutlichen die hohe Leistungsfähigkeit der entwickelten automatischen Spurführung.

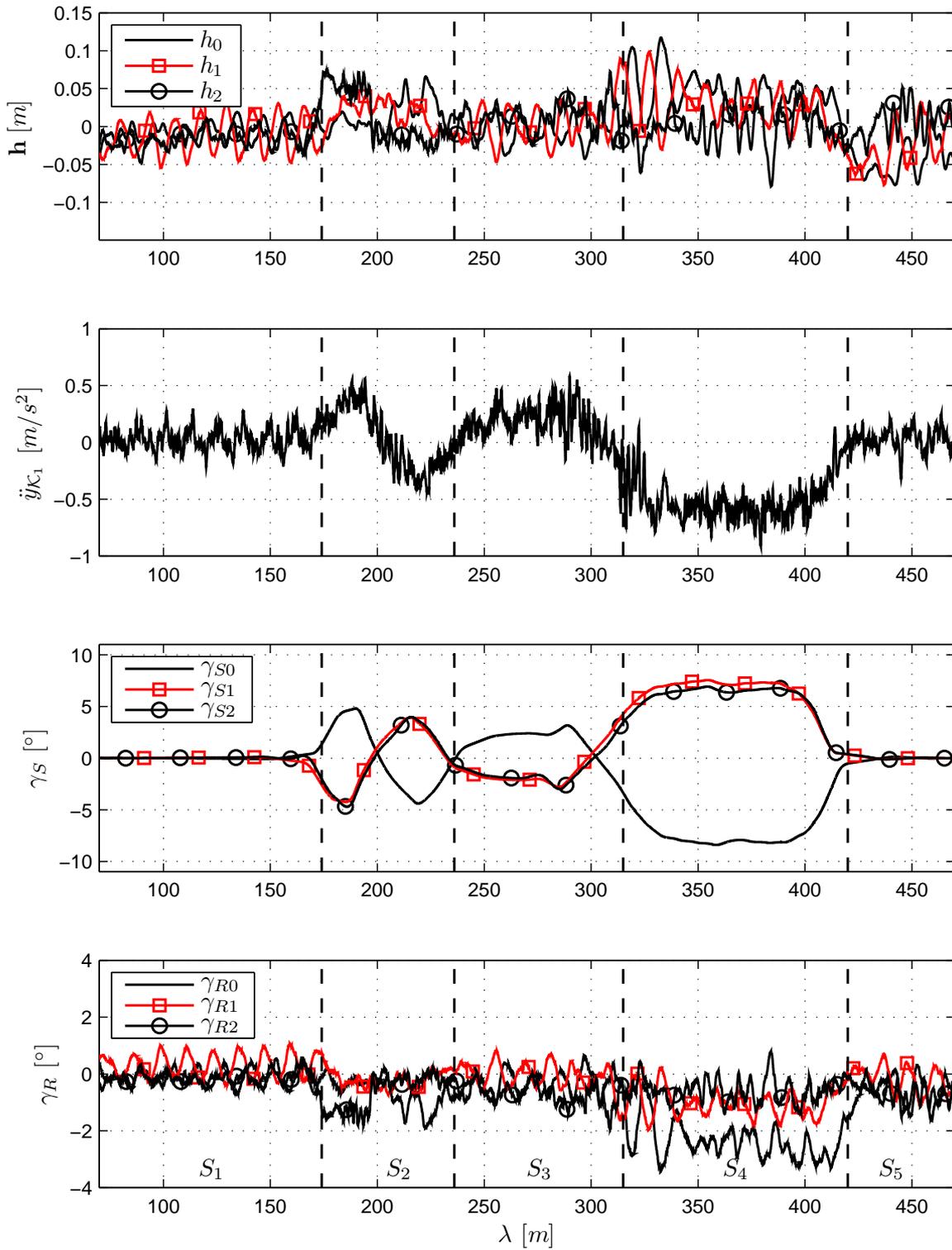


Bild 4.15: Fahrversuch auf der Teststrecke mit  $v_x = 4$  m/s

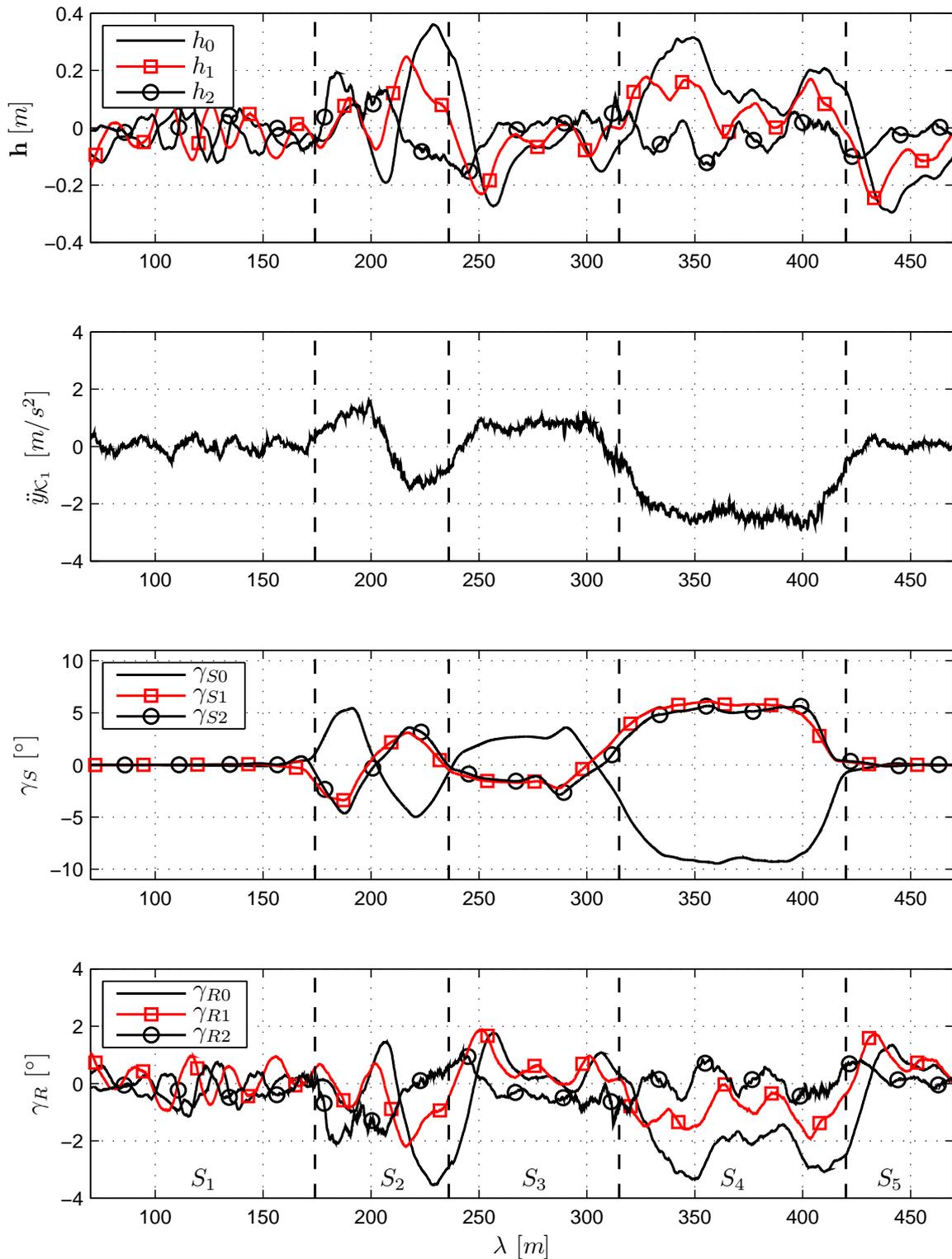
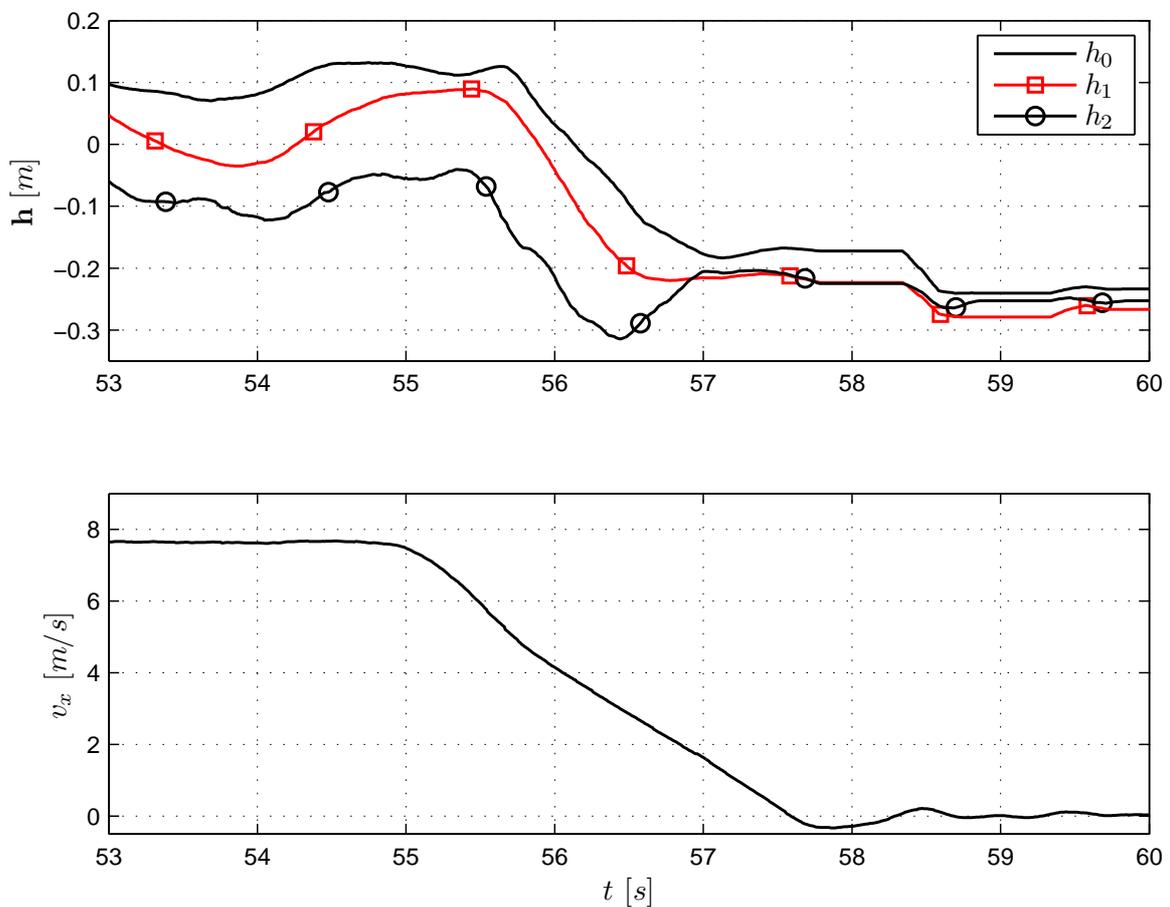


Bild 4.16: Fahrversuch auf der Teststrecke mit  $v_x = 8$  m/s

**Kurvenbremsung** Das Kurvenbremsverhalten der automatischen Spurführung wurde untersucht, indem das Versuchsfahrzeug mit  $v_x = 8 \text{ m/s}$  durch eine  $R25$ -Kurve fuhr und mit einer mittleren Verzögerung von ca.  $3.0 \text{ m/s}^2$  bis zum Stillstand abgebremst wurde. In Bild 4.17 ist der Verlauf der Querabweichungen und der Geschwindigkeit über der Zeit aufgetragen. Während des Bremsvorgangs bleibt die Spurführung stabil und das Fahrzeug versetzt um ca.  $0.25 \text{ m}$  nach innen. Dieser Versatz entsteht durch die während des Bremsvorganges stark abnehmen Zentripetalkräfte<sup>7</sup>. Zukünftige Fahrversuche müssen zeigen, ob das Fahrzeug weniger stark versetzt, wenn die Geschwindigkeitsänderung  $\dot{v}_x$  in der Vorsteuerung berücksichtigt wird.



**Bild 4.17:** Kurvenbremsung von  $v_x = 8 \text{ m/s}$  auf  $0 \text{ m/s}$  in einer  $R25$ -Kurve ohne Berücksichtigung von  $\dot{v}_x$

<sup>7</sup>Die Zentripetalkraft hängt vom Quadrat der Geschwindigkeit  $v_x$  ab, sodass bei halber Geschwindigkeit nur ein Viertel der ursprünglichen Zentripetalkraft wirkt.

### 4.3 Zusammenfassung

Die in dieser Arbeit entwickelte automatische Spurführung wurde anhand eines dreigliedrigen, allradgelenkten Simulationsmodells umfassend erprobt. Die Ergebnisse zeigen, dass sich lange Fahrzeuge hochgradig spurtreu auf einem vorgegebenen Sollweg führen lassen. Die spurtreue Fahrzeugführung ist robust und gelingt

- in einem großen Geschwindigkeitsbereich,
- bei hohen Zentripetalbeschleunigungen,
- wechselnden Fahrbahnzuständen und
- variierender Zuladung.

Die Vorsteuerung linearisiert die nichtlineare Regelstrecke, sodass für die stabilisierende Rückführregelung ohne Weiteres achs-individuelle lineare Eingrößenregler eingesetzt werden können. Die Simulationsergebnisse sind qualitativ und quantitativ mit dem im Abschnitt 3.1.2 entworfenen nichtlinearen Mehrgrößenregler vergleichbar. Die Vorteile der linearen Eingrößenregler sind:

- Die notwendigen Größen  $(\mathbf{h}, \dot{\mathbf{h}})$  sind mit verschiedenen Verfahren messbar.
- Die linearen Eingrößenregler regeln die Querabweichungen an den Achsen individuell aus und sind identisch parametrisiert. Dadurch ist kein neuerlicher Reglerentwurf notwendig, wenn ein weiteres Nachlaufmodul hinzukommt.
- Im Gegensatz zur nichtlinearen Mehrgrößenregelung führen Regelabweichungen  ${}^i e$  nicht zu Querabweichungen an den nachfolgenden Achsen  $A_j$  mit  $j = i, \dots, n$ .

Diese Vorteile begründen den Einsatz der linearen Eingrößenregler für die experimentelle Erprobung. In zukünftigen Arbeiten sind jedoch Mehrgrößenregler zu entwerfen, die statt der Differenz zwischen Soll- und Istminimalkoordinaten die Querabweichungen vom Sollweg  $\mathbf{h}$  ausregeln. Dadurch wird vermieden, dass Regelabweichungen  ${}^i e$  zu Querabweichungen an den nachfolgenden Achsen  $A_j$  mit  $j = i, \dots, n$  führen.

Die Simulationsergebnisse wurden durch erfolgreiche Fahrversuche mit der AutoTram bestätigt. Die Versuchsfahrten verdeutlichten jedoch den Einfluss der Stellregelkreise auf die Güte der automatischen Spurführung. Insbesondere Totzeiten, die beispielsweise durch Spiel in der Lenkung entstehen, sind zu vermeiden. Andernfalls kommt es zu praktisch nicht vermeidbaren Grenzyklen, die mit zunehmender Geschwindigkeit destabilisierend wirken. Auf die konstruktive Beseitigung der Totzeiten wurde aus Zeitgründen verzichtet. Statt dessen wurden

die Rückführregler mit geschwindigkeitsabhängigen Reglerverstärkungen  $K_{Ri}(v_x)$  erweitert. Mit dieser Modifikation wurde nachgewiesen, dass eine stabile automatische Spurführung bis zur Maximalgeschwindigkeit der AutoTram von 16 m/s und bei Querbeschleunigungen bis  $4.5 \text{ m/s}^2$  gelingt.

Die Erprobung der Nachführregelung beschränkt sich auf Simulationen. In diesen konnte anhand eines 27 m langen, dreigliedrigen Gelenkfahrzeugs gezeigt werden, dass sich der Spurversatz mit der Nachführregelung um mehr als eine Größenordnung verringern lässt. Die Nachführregelung ist wie die automatische Spurführung robust gegenüber wesentlichen fahrdynamischen Einflussgrößen, weist jedoch höhere Querabweichungen auf. Die Ursache hierfür ist die nur lokal genaue, modellbasierte Positionsmessung des Führungspunktes  $A_1$ . Wird statt dessen die wahre Position des Führungspunktes zur Rekonstruktion des Sollweges verwendet, liegen die maximalen Querabweichungen im Bereich der automatischen Spurführung.



## Kapitel 5

### Zusammenfassung und Ausblick

Wie die Analyse bekannter automatischer Lenkungen für mehrachsgelenkte Gelenkfahrzeuge gezeigt hat, ist die hochgradig spurtreue Führung langer Gelenkfahrzeuge derzeit noch unbefriedigend gelöst. In den wenigen ausschließlich theoretischen Arbeiten zur automatischen Spurführung ist die Anwendbarkeit der Ansätze stets durch Annahmen wie kleine Lenkwinkel und kleine Zentripetalbeschleunigungen eingeschränkt. Beiträge zur hochgradig spurtreuen Nachführregelung sind hingegen nicht bekannt.

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur hochgradig spurtreuen Führung n-gliedriger mehrachsgelenkter Fahrzeuge. Es wird ein Steuerungskonzept und der systematische Entwurf einer automatischen Spurführung und einer Nachführregelung vorgestellt, die in einem großen Geschwindigkeitsbereich und auch bei großen Lenk- und Knickwinkeln einsetzbar sind. Anhand eines 27 m langen, dreigliedrigen Simulationsmodells wurde gezeigt, dass die entwickelten automatischen Lenkungen robust gegenüber veränderten Fahrbahn- und Beladungszustand sind. Die Simulationsergebnisse wurden durch die erfolgreiche Erprobung der Spurführung mit dem 18 m langen, zweigliedrigen Versuchsfahrzeug AutoTram im Wesentlichen bestätigt.

Die hohe Spurtreue der Simulationen konnte in den Fahrversuchen nicht ganz erreicht werden. Die Ursache hierfür sind Zeitverzögerungen in der Rechentechnik, Spiel in der Lenkmechanik und die trägen Stellglieder der AutoTram. Dennoch ist es durch geschwindigkeitsabhängige Reglerverstärkungen gelungen, die Folgebewegung bis zur Höchstgeschwindigkeit zu stabilisieren und eine hohe Spurtreue bei einem sicheren und subjektiv komfortablen Fahrverhalten zu gewährleisten. Die vorgeschlagene Sollwegbeschreibung und die Algorithmen zur automatischen Sollweggenerierung haben sich als gut handhabbar und rechentechnisch effizient erwiesen.

Das Konzept der automatischen Lenkungen, das eine neuartige, modellbasierte Vorsteuerung und eine stabilisierende Rückführregelung vorsieht, hat sich bewährt. In der Vorsteuerung werden die Solllenkwinkel berechnet, die theoretisch zur hochgradig spurtreuen Verfol-

gung des Sollweges führen. Dafür sind nur die Position einer Achse, die Lenkwinkel sowie die Fahrzeuggeschwindigkeit und -beschleunigung zu messen. Da die Vorsteuerung die nicht-lineare Fahrzeugquerdynamik entlang des Sollweges linearisiert, lässt sich die Folgebewegung mit vergleichsweise schwach eingestellter Rückführregelung stabilisieren. Als vorteilhaft erwies sich, dass die Regelung nicht wie in der Literatur üblich den Abstand der Körperschwerpunkte vom Sollweg minimiert. Statt dessen werden Punkte geführt, die auf den Wankachsen der Fahrzeugmodule liegen. Dadurch wird die Rückführregelung nicht von den Wankbewegungen des Fahrzeugaufbaus gestört.

Bei der Nachführregelung wird der Sollweg aus dem Bewegungsverlauf des Führungspunktes (Achsmittelpunktes  $A_1$ ) während der Fahrt berechnet. Mit einem modellbasierten Messverfahren ist es gelungen, die Position von  $A_1$  ausschließlich anhand der gemessenen Lenkwinkel und der Fahrzeuggeschwindigkeit hinreichend genau zu ermitteln. Wie erwartet, nimmt der Spurversatz mit dem Abstand zwischen Führungs- und Folgepunkt zu, da bei der Sollwegberechnung die Abweichungen der modellbasierten Positionsmessung aufsummiert werden. In zukünftigen Arbeiten ist zu untersuchen, wie sich diese Messabweichung verringern lässt. Ein viel versprechender Ansatz besteht darin, weitere Größen wie die Knickwinkel und Drehraten der Fahrzeugmodule zu messen und über einen erweiterten Kalman-Filter eine genauere und robustere Positionsmessung zu erreichen.

Die automatischen Lenkungen sind theoretisch zur hochgradig spurtreuen Führung  $n$ -gliedriger Fahrzeuge geeignet. Die Umsetzbarkeit wird jedoch durch die Komplexität des Entwurfsmodells eingeschränkt. So ist die Vorsteuerung für ein viergliedriges Fahrzeug nur mit weiteren Modellvereinfachungen symbolisch zu entwerfen. Ein Ziel zukünftiger Arbeiten besteht folglich darin, durch zusätzliche Vereinfachungen die Komplexität des Entwurfsmodells zu verringern ohne die Güte der modellbasierten Vorsteuerung signifikant zu beeinträchtigen.

Verfügt ein Fahrzeug über eine unabhängige Allradlenkung, ist das Steuerungskonzept auch auf die Rückwärtsfahrt übertragbar. Andernfalls können strukturelle Beschränkungen entstehen, die gesondert zu betrachten sind. Grundsätzlich kann jedoch bei einer für die Rückwärtsfahrt ausgelegten Lenkung von geringen Zentripetalbeschleunigungen ausgegangen werden, sodass die Vorsteuerung mit einem einfacheren *kinematischen* Fahrzeugmodell entworfen werden kann.

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit sind:

1. Entwicklung eines rigorosen Simulationsmodells für  $n$ -gliedrige Fahrzeuge, das strukturell dem Versuchsfahrzeug AutoTram nachempfunden ist und über die für die Querdynamik wesentlichen Freiheitsgrade sowie nichtlineare Reifen-, Feder- und Dämpferkennlinien verfügt.

- 
2. Herleitung eines modularen regelungstechnischen Entwurfsmodells für n-gliedrige, allradgelenkte Fahrzeuge, das aus einem Fahrzeugmodell mit affinem Eingang und zusätzlichem Reifenmodell besteht. Durch die Modularisierung wird der Entwurfsprozess der Vorsteuerung vereinfacht und das Entwurfsmodell lässt sich gezielt an neue Randbedingungen anpassen.
  3. Validierung des Entwurfsmodells durch Simulationen und Fahrversuche mit dem Versuchsfahrzeug AutoTram für Zentripetalbeschleunigungen bis ca.  $4 \text{ m/s}^2$ .
  4. Konzeption neuartiger automatischer Lenkungen, die Informationen über das Fahrzeug und den Sollweg systematisch nutzen.
  5. Entwicklung eines Verfahrens, mit dem sich die Sollkinematik n-gliedriger Fahrzeuge anhand weniger, gut messbarer Größen wie der Fahrzeuggeschwindigkeit und der Fahrzeugposition sowie einem analytisch beschriebenen Sollweg berechnen lässt.
  6. Entwicklung eines Verfahrens, mit dem sich zweimal stetig differenzierbare Sollwege automatisch erstellen lassen. Dabei basiert die Sollwegbeschreibung auf kubischen Ausgleichssplines und benötigt nur wenige Stützstellen.
  7. Entwicklung eines modellbasierten Messverfahrens zur Positionsmessung des Führungspunktes und eines echtzeitfähigen Verfahrens zur Sollweggenerierung mit fester Stützstellenanzahl.
  8. Entwicklung einer automatischen Spurführung und einer automatischen Nachführregelung für n-gliedrige, allradgelenkte Fahrzeuge, die besonders flexibel, hochgradig spurtreu und auch bei großen Lenk- und Knickwinkeln einsetzbar sind.
  9. Entwurf einer echtzeitfähigen Vorsteuerung, in der die Sollkinematik während der Fahrt berechnet und modellbasiert in Solllenkwinkel umgeformt wird, die die Regelstrecke entlang des Sollweges linearisieren. Die Vorsteuerung ist für Lenkwinkelbeträge von maximal ca.  $50^\circ$ , Knickwinkelbeträge  $< 90^\circ$  und Zentripetalbeschleunigungen bis  $4 \text{ m/s}^2$  ausgelegt.
  10. Entwurf und Vergleich eines nichtlinearen Mehrgrößenreglers sowie achs-individueller linearer Eingrößenregler, die die Folgebewegung stabilisieren.
  11. Nachweis anhand eines dreigliedrigen Simulationsmodells, dass die automatischen Lenkungen im vorgesehenen Geschwindigkeitsbereich robust gegenüber verändertem Fahrbahn- und Beladungszustand sind.

12. Entwurf und Erprobung eines adaptiven Rückführreglers, der die Folgebewegung auch bei Totzeiten im Regelkreis stabilisiert und ein sicheres, subjektiv komfortables Fahrverhalten gewährleistet.
13. Echtzeitfähige Implementierung und erfolgreiche praktische Erprobung der automatischen Spurführung mit dem Versuchsfahrzeug AutoTram.

# Anhang A

## Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, J. ; BÜNTE, T.: Actuator rate limits in robust car steering control. In: *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*. San Diego, USA, 1997, S. 4726–4731
- [2] ACKERMANN, J. ; BÜNTE, T. ; SIENEL, W. ; JEEBE, H. ; NAAB, K.: Fahrsicherheit durch robuste Lenkregelung. In: *at – Automatisierungstechnik* 44 (1996), Nr. 5, S. 219–225
- [3] ACKERMANN, J. ; SIENEL, W.: Robust control for automatic steering. In: *Proceedings of the American Control Conference*. San Diego, USA, May 1990
- [4] ALBERTH, G.: *Zugkombination 25.5 m lang, gelenkt*. Gebrauchsmusterschrift DE 202006010359 U1, Oktober 2006
- [5] ALEXANDER, L. ; PI-MING-CHENG ; DONATH, M. ; GORJESTANI, A. ; TRACH, W. ; NEWSTROM, B. ; SHANKWITZ, C.: DGPS-based lane assist system for transit buses. In: *Proceedings of the 7th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*. Washington, WA, USA, October 2004, S. 755–760
- [6] ANDRE, J.-L.: *Two-Way Guiding Assembly along a Rail for a Road Axle Lateral Offset*. United States Patent US 6363860 B1, April 2002
- [7] ANTONOV, S. ; FEHN, A. ; KUGI, A.: Ein neuartiger Ansatz zur Querdynamikregelung von Personenkraftwagen. In: *at – Automatisierungstechnik* 55 (2007), S. 488–496
- [8] ASTOLFI, A. ; BOLZERN, P. ; LOCATELLI, A.: Path-tracking of a tractor-trailer vehicle along rectilinear and circular paths: a Lyapunov-based approach. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 20 (2004), February, Nr. 1, S. 154–160
- [9] BAKKER, E. ; NYBORG, L. ; PACEJKA, H.-B.: Tyre Modelling for use in Vehicle Dynamic Studies. In: *SAE International Congress and Exposition*. Detroit, MI, USA, 1987

- [10] BAKKER, E. ; NYBORG, L. ; PACEJKA, H.-B.: Tyre Modelling for use in Vehicle Dynamic Studies / Delft University of Technology. 1988. – Forschungsbericht
- [11] BEITELSCHMIDT, M.: Kinematics of Drawbar Combinations with Many Trailers. In: *Proceedings of the 80th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM)* Bd. Volume 9. Gdansk, 2009, S. 137–138
- [12] BESSELINK, I. J. M. ; PACEJKA, H.-B. ; SCHMEITZ, A. J. C. ; JANSEN, S. T. H.: The SWIFT Tyre Model: Overview and Applications. In: *Proceedings of the International symposium on Advanced Vehicle Control*. Arnhem, Netherlands, 2004, S. 525–530
- [13] BOLZERN, P. ; DESANTIS, R. M. ; LOCATELLI, A.: An Input-Output Linearization Approach to the Control of an n-Body Articulated Vehicle. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 123 (2001), September, S. 309–316
- [14] BOLZERN, P. ; LOCATELLI, A.: A comparative study of different solutions to the path-tracking problem for an articulated vehicle. In: *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications* Bd. 1. Glasgow, UK, September 2002, S. 427–434
- [15] BOOR, Carl de: *A Practical Guide to Splines*. New York, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2001
- [16] BOUCQUEY, A. M. V. H.: *Lenkvorrichtung für die Nachläuferachse eines Gelenkonnibusses*. Europäisches Patent EP 00011884 B1, 1980
- [17] BREMER, H.: *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. Stuttgart : Teubner-Verlag, 1988
- [18] BRÜMMER, W.: Untersuchung der Querdynamik des zwangsgeführten Doppelgelenk-Fahrzeugs / Universität Karlsruhe. 1979. – Diplomarbeit
- [19] BRONŠTEIN, I. N. ; SEMENDJAEV, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt am Main, Thun : Verlag Harri Deutsch, 1999
- [20] BUNDESMINISTERIUM DER JUSTIZ: *Straßenverkehrs-Zulassungs-Ordnung, §32d StvZO – Kurvenlaufeigenschaften*. [www.bundesrecht.juris.de/stvzo](http://www.bundesrecht.juris.de/stvzo), 2008
- [21] BURMEISTER, J.: Immer den Strichen nach. In: *Regionalverkehr* 4 (2001), S. 51–52
- [22] CANUDAS DE WIT, C. ; SICILIANO, B. (Hrsg.) ; VALAVANIS, K. P. (Hrsg.): *Trends in mobile robot and vehicle control*. Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 1998

- [23] CANUDAS DE WIT, C. ; NDOUDI-LIKOHO, A. D.: Nonlinear control for a convoy-like vehicle. In: *Automatica* 36 (2000), S. 457–462
- [24] CANUDAS DE WIT, C. ; NDOUDI-LIKOHO, A. D. ; MICAELLI, A.: Nonlinear control for a train-like vehicle. In: *The International Journal of Robotics Research* 16 (1997), S. 300–319
- [25] CERONE, V. ; CHINU, A. ; REGRUTO, D.: Experimental results in vision-based lane keeping for highway vehicles. In: *Proceedings of 2002 American Control Conference* Bd. 2. Anchorage, AK, USA, May 2002, S. 869–874
- [26] CERONE, V. ; MILANESE, D. M. R. M. Regruto: Combined Automatic Lane-Keeping and Driver’s Maneuvers through a Closed Loop Control Strategy. In: *Proceedings for the 5th IFAC Symposium on Advances in Automotive Control*. Seascape Resort, USA, August 2007
- [27] CHAIB, S. ; NETTO, M. ; MAMMAR, S.:  $H_\infty$ , PID and fuzzy control: a comparison of controllers for vehicle lane keeping. In: *IEEE Intelligent Vehicle Symposium*. Parma, Italy, 2004
- [28] CHOI, S. B.: The Design of a Look-Down Feedback Adaptive Controller for the Lateral Control of Front-Wheel-Steering Autonomous Highway Vehicles. In: *IEEE Trans. on Vehicular Technology* 49 (2000), Nr. 6, S. 2257–2269
- [29] CHUNG, T. D.: *Anhänger mit Lenksteuerung*. Offenlegungsschrift DE 2911098, September 1980
- [30] CITROËN: *AFIL-Spurassistent*. <http://www.citroen.de>, 2008
- [31] CLAAS KGAA: *Mehrachslenkung*. Deutsches Patent DE 19716201 A1, Oktober 1998
- [32] CZOMMER, R.: *Leistungsfähigkeit fahrzeugautonomer Ortungsverfahren auf der Basis von Map-Matching-Techniken*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2000
- [33] DAIMLERCHRYSLER AG: *Meß- und Steuerungssystem zur Querregelung aufeinanderfolgender Fahrzeuge und Verfahren hierzu*. Deutsches Patent DE 19919644 C2, November 2000
- [34] DE BRUIN, D.: *Lateral guidance of all-wheel Steered Multiple-Articulated Vehicles*, Technische Universiteit Eindhoven, Dissertation, June 2001

- [35] DE BRUIN, D. ; BOSCH, P. P. J. d.: Modelling and control of a double articulated vehicle with four steerable axles. In: *Proceedings of the American Control Conference*. San Diego, CA, USA, June 1999, S. 3250–3254
- [36] DE BRUIN, D. ; DAMEN, A. A. H. ; POGROMSKY, A. ; VAN DEN BOSCH, P. P. J.: Backstepping Control for Lateral Guidance of All-wheel Steered Multiple Articulated Vehicles. In: *2000 IEEE Intelligent Transportation Systems - Conference Proceedings*. Dearborn, MI, USA, October 2000, S. 95–100
- [37] DEELEN, K.: Phileas: Straßenbahn-Technologie auf Gummireifen. In: *Stadtverkehr* 51 (2006), Nr. 2, S. 39–40
- [38] DEUTSCH, V.: *Einsatzbereiche neuartiger Transportsysteme zwischen Bus und Bahn*, Bergische Universität Wuppertal, Dissertation, 2003
- [39] DIERCKX, P.: *Curve and Surface Fitting with Splines*. Oxford : Clarendon, 1995
- [40] DRONKA, S.: *Die Simulation gekoppelter Mehrkörper- und Hydraulik-Modelle mit Erweiterung für Echtzeitsimulation*. Aachen : Shaker-Verlag, 2004
- [41] EBERHARD, P.: *Zur Mehrkriterienoptimierung von Mehrkörpersystemen*. Düsseldorf : VDI Verlag, 1996
- [42] ECKERMANN, E.: *Die Achsschenkelenkung und andere Fahrzeug-Lenksysteme*. Deutsches Museum München, 1998
- [43] EL-ADEL, E. M. ; OULADSINE, M. ; RADOUANE, L.: Predictive steering control using Laguerre series representation. In: *Conference on Control Applications*. Istanbul, Turkey, June 2003, S. 439–445
- [44] EUBANK, R. L.: *Statistics: textbooks and monographs*. Bd. 157: *Nonparametric Regression and Spline Smoothing*. New York : Marcel Dekker, 1999
- [45] FLORY, L. E. ; GRAY, G. W. ; MOREY, R. E. ; PIKE, W. S. ; CAULTON: Electronic Techniques in a System of Highway Vehicle Control. In: *RCA Review* 23 (1962), S. 293–310
- [46] FORSCHUNGSGESELLSCHAFT FÜR STRASSEN- UND VERKEHRSWESEN: *RAS-L – Richtlinien für die Anlage von Straßen - Teil: Linienführung*. Berlin, Köln : FGSV Verlag, 1999

- 
- [47] GAO-ZHENHAI ; JIANG-LIYONG: Vehicle lane keeping system control with BP neural network. In: *China Mechanical Engineering* 16 (2005), Nr. 3, S. 272–277
- [48] GEHRING, O.: *Automatische Längs- und Querführung einer Lastkraftwagenkolonne*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2000
- [49] GENESYS ELEKTRONIK GMBH: *ADMA: Automotive Dynamic Motion Analyzer*. <http://www.genesys-offenburg.de>, 2008
- [50] GIPSER, M.: FTire, a New Fast Tire Model for Ride Comfort Simulations. In: *International ADAMS User's Conference*. Berlin, Germany, 1999
- [51] GOLDBECK, J. ; HUERTGEN, B. ; ERNST, S. ; KELCH, L.: Lane following combining vision and DGPS. In: *Image and Vision Computing* 18 (2000), S. 425–433
- [52] GOLDHOFER AG: *Homepage*. <http://www.goldhofer.de>, 2008
- [53] GREGOR, R.: *Fähigkeit zur Missionsdurchführung und Landmarkennavigation*, Universität der Bundeswehr München, Dissertation, 2002
- [54] GÖTTING, H.-H.: *Automatisiertes Fahren mit Nutzfahrzeugen / Götting KG*. 2001. – Forschungsbericht
- [55] GULDNER, J. ; TAN, H.-S.: *On Fundamental Issues Of Vehicle Steering Control For Highway / California Partners for Advanced Transit and Highways (PATH)*. 1997. – Forschungsbericht
- [56] GUO-WEN-WANG ; FUJIWARA, N. ; YUE-BAO: Feed-forward multilayer neural network model for vehicle lateral guidance control. In: *Advanced Robotics* 12 (1999), S. 735–753
- [57] HACKBUSCH, W. ; SCHWARZ, H. R. ; ZEIDLER, E.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart : Teubner Verlag, 2003
- [58] HACKENBERG, U. ; HEISSLING, B.: Die fahrdynamischen Leistungen des Fahrer-Fahrzeug-Systems im Straßenverkehr. In: *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift* 84 (1982), S. 341–345
- [59] HALFMANN, Ch. ; HOLZMANN, H.: *Adaptive Modelle für die Kraftfahrzeugdynamik*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2003
- [60] HELBIG, J.: *Robuste Regelungsstrategien am Beispiel der Pkw-Spurführung*. Düsseldorf : VDI Verlag, 2004 (Reihe 8 Nr. 1025)

- [61] HILLER, M.: *Mechanische Systeme*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1983
- [62] HINGWE, P. S.: *Robustness and Performance Issues in the Lateral Control of Vehicles in Automated Highway Systems*, University of California at Berkeley, Dissertation, 1997
- [63] HIROSE, Sh. ; MORISHIMA, A.: Design and Control of a Mobile Robot with an Articulated Body. In: *The International Journal of Robotics Research* 9 (1990), S. 99–114
- [64] HONDIUS, H.: Phileas, ein elektronisch geführter Spurbus. In: *Stadtverkehr* 47 (2002), Nr. 2, S. 6–14
- [65] HONDIUS, H.: B 7500 Bi-artic, der neue Doppelgelenkbus von Volvo. In: *Stadtverkehr* 51 (2006), S. 34–37
- [66] HONDIUS, H.: Phileas II. In: *Stadtverkehr* 52 (2007), Nr. 2, S. 13–18
- [67] INTEC GMBH: *SIMPACK Automotive+*. <http://www.simpack.com>, 2008
- [68] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. 3rd Edition. New York : Springer-Verlag, 1995
- [69] JANGHUN, P. ; SEONGRYONG, M. ; SEOKWOO, Ch. ; DOHWAN, R.: GPS error compensation algorithm using coordinates matching of vision system for land-vehicle navigation. In: *Proceedings of the SPIE - The International Society for Optical Engineering*. Providence, RI, USA, 28 Oct. 2003 (Intelligent Robots and Computer Vision)
- [70] JASCHKE, P.: *Lenkregler für Fahrzeuge mit hoher Schwerpunktlage*, TU Braunschweig, Dissertation, Juni 2002
- [71] JIE-JI ; YINONG-LI ; LING-ZHENG: Self-adjusting fuzzy logic control for vehicle lateral control. In: *2007 International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery* Bd. Vol. 2. Haikou, Hainan, China, August 2007, S. 614–618
- [72] KASPER, H.: *Die Klothoide als Trassierungselement*. Bonn : Ferd. Dummlers Verlag, 1954
- [73] KEHL, S. ; PÖSLER, W.-D. ; ZEITZ, M.: Querregelung eines Versuchsfahrzeugs entlang vorgegebener Bahnen. In: *at – Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 6, S. 306–313
- [74] KEHL, St. ; PÖSLER, W.-D. ; ZEITZ, M.: Querregelung eines PKWs entlang vorgegebener Bahnen. In: *GMA Kongress 2005 Automation als interdisziplinäre Herausforderung*. Baden-Baden, Germany : VDI-Verlag, Juni 2005 (VDI-Berichte 1883), S. 835–842

- 
- [75] KEHL, St. ; PÖLSLER, W.-D. ; ZEITZ, M.: Querregelung eines Versuchsfahrzeugs entlang vorgegebener Bahnen. In: *Steuerung und Regelung von Fahrzeugen und Motoren AUTOREG 2006*. Wiesloch, Germany : VDI-Verlag, März 2006 (VDI-Berichte 1931), S. 99–108
- [76] KESSLER, G. C. ; MASCHUW, J. P. ; ZAMBOU, N. ; BOLLIG, A.: Konzept zur Sollwertgenerierung und modellgestützten prädiktiven Regelung für die Querführung von Nutzfahrzeugkonvois. In: *at – Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 6, S. 298–305
- [77] KÖNIG, L. ; NEUBECK, J. ; WIEDEMANN, J.: Nichtlineare Lenkregelung zur automatischen Spurführung im querdynamischen Grenzbereich. In: *Steuerung und Regelung von Fahrzeugen und Motoren AUTOREG 2006*. Wiesloch, Germany : VDI-Verlag, März 2006 (VDI-Berichte 1931), S. 185–196
- [78] KÖNIG, L. ; NEUBECK, J. ; WIEDEMANN, J.: Nichtlineare Lenkregler für den querdynamischen Grenzbereich. In: *at – Automatisierungstechnik* 55 (2007), S. 314–321
- [79] KORTÜM, W. ; LUGNER, P.: *Systemdynamik und Regelung von Kraftfahrzeugen*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1993
- [80] KOUMBOULIS, F.N. ; SKARPETIS, M.G.: Robust control of cars with front and rear wheel steering. In: *IEEE Proceedings of Control Theory Applications* Bd. 149. Stevenage, United Kingdom, September 2002, S. 394–404
- [81] KRSTIC, M. ; KANELAKOUBOULOS, I. ; KOKOTOVIC, P.: *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York : JOHN WILLEY & SONS, INC., 1995
- [82] KRUPP INDUSTRIE-TECHNIK GMBH: *Lenkung für einen Fahrzeugkran*. Deutsches Patent DE 4221973 A1, 1992
- [83] LENAIN, R. ; THUILOT, B. ; CARIOU, C. ; MARTINET, P.: Mobile robot control in presence of sliding: application to agricultural vehicle path tracking. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA, December 2006, S. 1–6
- [84] LIU-XING-CHU ; ZHANG-JIAN-WU ; FEN, Liu: A four-wheel-steering nonlinear lateral dynamics model. In: *Journal of Shanghai Jiaotong University* 39 (2005), S. 1465–1469
- [85] LUGNER, P. ; PACEJKA, H.-B. ; PLOCHL, M.: Recent advances in tyre models and testing procedures. In: *Vehicle System Dynamics* 43 (2005), S. 413–436
- [86] MAGNUS, K.: *Dynamics of multibody systems*. Berlin : Springer Verlag, 1978

- [87] MAN NUTZFAHRZEUGE AG: *Anlenkung und Lenkung einer angetriebenen oder nicht angetriebenen starren Hinterachse eines Nutzfahrzeugs*. Deutsches Patent DE 29608229 U1, 1996
- [88] MARAHRENS, W. ; LANDSBERGER, K.: Großraumbusse auf der Hamburger MetroBus-Linie 5. In: *Stadtverkehr* 51 (2006), Nr. 2, S. 20–22
- [89] MAURICE, J. P. ; BERZERI, M. ; PACEJKA, H.-B.: Pragmatic Tyre Model for Short Wavelength Side Slip Variations. In: *Vehicle System Dynamics* 31 (1999), S. 65–94
- [90] MAYR, R.: *Regelungsstrategien für die automatische Fahrzeugführung*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2001
- [91] MÖBUS, R. ; ZOMOTOR, Z.: Constrained optimal control for lateral vehicle guidance. In: *2005 IEEE Intelligent Vehicles Symposium Proceedings*. Las Vegas, NV, USA, June 2005, S. 429–434
- [92] MENG YIN, F. ; XIAONA, F. ; MEILING, W. ; JIUHONG, R.: Study on data-fuzzy-based ALV lateral controller design and experiments. In: *2005 IEEE International Conference on Vehicular Electronics Safety Proceedings*. Shaanxi, China, October 2005, S. 171–175
- [93] MERCEDES-BENZ: *Telligent-Spurassistent*. <http://www.mercedes-benz.de>, 2008
- [94] MERZIGER, G. ; MÜHLBACH, G. ; WILLE, D. ; WIRTH, Th.: *Formeln und Hilfen zur höheren Mathematik*. Springer : Binomi Verlag, 2001
- [95] MICAELLI, A. ; LOUVEAU, D. F. S. F. Sabourin ; CANUDAS DE WIT, C. ; NDOUDI-LIKOHO, A.: Follow-the-leader Control for a train-like vehicle: implementation and experimental results / Int. Rep. CEA. 1997. – Forschungsbericht
- [96] MITSCHKE, M.: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2004
- [97] MSC SOFTWARE: *ADAMS/Tire*. <http://www.mscsoftware.com>, 2008
- [98] NETTO, M. S. ; CHAIB, S. ; MAMMAR, S.: Lateral adaptive control for vehicle lane keeping. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Boston, MA, USA, June 2004
- [99] OERTL, Ch.: On modelling contact and friction – calculation of tyre responses on uneven roads. In: *Proceedings of 2nd Colloquium on Tyre Models for Vehicle Analysis*, 1996

- 
- [100] PACEJKA, H.-B.: *Tyre and Vehicle Models*. Amsterdam, Boston, Heidelberg : Butterworth Heinemann, 2005
- [101] PACEJKA, H.-B. ; BESSELINK, I. J. M.: Magic Formula Tyre Model with Transient Properties. In: *Vehicle System Dynamics* 27 (1997), S. 234–249
- [102] PALKOVISC, M. E. ; PACEJKA, H.-B.: Modelling of the cornering characteristic of tyres on an uneven road surface: a dynamic version of the „Neuro-Tyre“. In: *International Journal of Vehicle Design* 15 (1994), S. 189–215
- [103] PERSSON, B. N. J.: Theory of rubber friction and contact mechanics. In: *Journal of Chemical Physics* 115 (2001), S. 3840–3861
- [104] POPP, K. ; SCHIEHLEN, W. O.: *Fahrzeugdynamik: eine Einführung in die Dynamik des Systems Fahrzeug – Fahrweg*. Stuttgart : Teubner-Verlag, 1993 (Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 70)
- [105] RAKSINCHAROENSAK, P. ; NAGAI, M. ; MOURI, H.: Investigation of automatic path tracking control using four-wheel steering vehicle. In: *Proceedings of the IEEE International Vehicle Electronics Conference 2001*. Tottori, Japan, September 2001, S. 73–77
- [106] RAVANI, B. ; LASKY, Ty A.: *Lateral Vehicle Control Apparatus and Method for Automated Highway Systems and Intelligent Cruise Control*. United States Patent US 5979581, November 1999
- [107] RIEKERT, P. ; SCHUNCK, T.E.: Zur Fahrmechanik des gummibereiften Kraftfahrzeugs. In: *Ingenieur-Archiv* XI (1940), S. 210–224
- [108] RO, P.I. ; KIM, H.: Four wheel steering system for vehicle handling improvement: a robust model reference control using the sliding mode. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* Bd. 210. London, 1996, S. 335–346
- [109] ROBERSON, R. E. ; SCHWERTASSEK, R.: *Dynamics of Multibody Systems*. London, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1988
- [110] SAMPEI, M. ; KOBAYASHI, T. ; TAJIMA, Y. ; SHIBUI, N.: Application of nonlinear control theory to path tracking control of articulated vehicles. In: *Advances in Control Education*. Tokyo, Japan, August 1995 (Proceedings of the IFAC Symposium), S. 29–32
- [111] SANO, S. ; FURUKAWA, Y. ; OGURA, M. ; ABE, M. ; OYAMA, Y.: *Lenkanlage für Vorder- und Hinterräder eines Fahrzeugs*. Deutsches Patent DE 3711618 A1, 1987

- [112] SCHMEITZ, A. J. C. ; JANSEN, S. T. H. ; PACEJKA, H.-B. ; DAVIS, J. C. ; KOTA, N. ; LIANG, C. G. ; LODEWIJKS, G.: Application of a semi-empirical dynamic tyre model for rolling over arbitrary road profiles. In: *International Journal of Vehicle Design* 36 (2004), S. 194–215
- [113] SCHMEITZ, A.-J.-C. ; PACEJKA, H.-B.: A semi-empirical, three-dimensional, tyre model for rolling over arbitrary road unevennesses. In: *18th IAVSD Symposium*. Kanagawa, Japan, August 2003
- [114] SCHWARZ, H.: *Einführung in die Systemtheorie nichtlinearer Regelungen*. Aachen : Shaker Verlag, 1999
- [115] SENGER, K.-H.: *Dynamik und Regelung allradgelenkter Fahrzeuge*. Düsseldorf : VDI Verlag, 1989
- [116] SETLUR, P. ; WAGNER, R. ; DAWSON, D. M. ; BRAGANZA, D.: A Trajectory Tracking Steer-by-Wire Control System for Ground Vehicles. In: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 55 (2006), S. 76–84
- [117] SHLADOVER, S. E.: The GM-PATH Platoon Scenario. In: *Intellimotion - Research Updates in Intelligent Transportation Systems* 6 (1997), S. 2–3
- [118] SÖHNITZ, I.: *Querregelung eines autonomen Straßenfahrzeugs*. Düsseldorf, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2001
- [119] SIMON, A.: *Führung eines autonomen Straßenfahrzeugs mit redundanten Sensorsystemen*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2003
- [120] SPLINT, J.: Phileas in Eindhoven - Stellenwert von Promotion, Innovation und Design. In: *Stadtverkehr* 51 (2006), Nr. 2, S. 18–19
- [121] STILLER, Chr. ; KAMMEL, S. ; DANG, Th. ; DUCHOW, Chr. ; HUMMEL, B.: GPS- und Kamera-basierte Fahrzeugführung durchs Gelände – ION im Grand Challenge. In: *at – Automatisierungstechnik* 55 (2007), S. 290–297
- [122] SVENDENIUS, J. ; GAFVERT, M.: A semi-empirical dynamic tire model for combined-slip forces. In: *Vehicle System Dynamics* 44 (2006), S. 189–208
- [123] TAI, M. ; TOMIZUKA, M.: Robust Lateral Control of Heavy Duty Vehicles: Final Report / University of California, Berkeley. 2003 (Final Report for Task Order 4201). – California PATH Research Report

- [124] THORPE, C. ; KANADE, T.: Vision and Navigation for the CMU Navlab. In: *Proceedings of SPIE*. Cambridge, Mass., Oct. 1986 (Mobile Robots), S. 261–266
- [125] TOYOTA: *Toyota's Approaches to ITS*. <http://www.toyota.co.jp>,
- [126] TOYOTA: *IMTS: Intelligent Multimode Transit System*. <http://www.toyota.co.jp>, 2008
- [127] TSAKIRIS, D. ; RIVES, P. ; SAMSON, C.: Applying visual servoing techniques to control non-holonomic mobile robots. In: *Proc. IEEE/RSJ/INRIA, New trends in Image-based Robot Servoing*, 1997
- [128] UEDA, S. ; IMACHO, N. ; HIRASAWA, M.: Automated Highway Systems Overview and Experimental Results. In: *Proc. of the 4th World Congress on Intelligent Transportation Systems*. Shanghai, China, June 1997
- [129] URSTÖGER, R.: *Lenksystem für ein mehrteiliges Straßenfahrzeug*. Europäisches Patent EP 00536432 A1, 1993
- [130] VELAT, S. J. ; JAESANG, L. ; JOHNSON, N. ; CRANE, C. D.: Vision based vehicle localization for autonomous navigation. In: *IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*. Jacksonville, FL, USA, 20-30 June 2007, S. 528–533
- [131] VERBAND DEUTSCHER VERKEHRSUNTERNEHMEN (VDV): *Busbahn – Möglichkeiten und Grenzen*. Köln : Beka-Verlag, 2005
- [132] VETTER, K.: *Untersuchung der Querdynamik von Gliederbussen / Universität Karlsruhe*. 1977. – Diplomarbeit
- [133] VLK, F.: *Fahrverhalten von Gelenkbussen*. Köln : Verlag TÜV Rheinland GmbH, 1987
- [134] WAGNER, S. ; BARTHOLOMÄUS, R. ; ZIPSER, S. ; BÄKER, B.: Mehrachslenkregelung für allrad-gelenkte Gelenkfahrzeuge. In: *Mechatronik 2007, VDI-Bericht Nr. 1971*. Wiesloch, Deutschland : VDI-Verlag, Mai 2007
- [135] WAGNER, S. ; BARTHOLOMÄUS, R. ; ZIPSER, S. ; BÄKER, B.: Modellierung von n-gliedrigen allradgelenkten Fahrzeugen als Grundlage für eine Spurführung. In: *AutoReg 2008, VDI-Bericht Nr. 2009*. Baden Baden, Deutschland : VDI-Verlag, Februar 2008, S. 197–206

- [136] WAGNER, S. ; BÄKER, B.: Ein neuartiger Spurführungsassistent für lange, allrad-gelenkte Straßenfahrzeuge. In: *Moderne Elektronik im Kraftfahrzeug*. Dresden, Deutschland : Expert-Verlag, Juni 2007
- [137] WAKAMATSU, K. ; AKUTA, Y. ; IKEGAYA, M. ; ASANUMA, N.: Adaptive Yaw Rate Feedback 4WS with Tire/Road Friction Coefficient Estimator. In: *Vehicle Dynamics* Bd. 27, 1997, S. 305–326
- [138] WEISE, G. ; DURTH, W.: *Straßenbau Planung und Entwurf*. Berlin : Verlag für Bauwesen, 1997
- [139] WEIWEN, D. ; MING, T. ; YONG, H. L.: An Adaptive Model Tracking Control for Vehicle-Trailer System. In: *IEEE Int. Conf. On Networking, Sensing and Control*. Tucson, AZ, 2005, S. 180–184
- [140] WIKIPEDIA: *Bombardier GLT*.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Bombardier\\_Guided\\_Light\\_Transit](http://en.wikipedia.org/wiki/Bombardier_Guided_Light_Transit), 2008
- [141] WIKIPEDIA: *Eisenbahn*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Eisenbahn>, 2008
- [142] WIKIPEDIA: *Gelenkbus*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Gelenkbus>, 2008
- [143] WIKIPEDIA: *Guided Bus*. [http://commons.wikimedia.org/wiki/Guided\\_bus](http://commons.wikimedia.org/wiki/Guided_bus), 2008
- [144] WIKIPEDIA: *Guidovia*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Guidovia>, 2008
- [145] WIKIPEDIA: *Metro Paris*. [http://de.wikipedia.org/wiki/Gummibereifte\\_U-Bahn](http://de.wikipedia.org/wiki/Gummibereifte_U-Bahn), 2008
- [146] WIKIPEDIA: *Spurbus*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Spurbus>, 2008
- [147] WIKIPEDIA: *Translohr*. <http://fr.wikipedia.org/wiki/Translohr>, 2008
- [148] WINSAUER, E.: *Lastkraftwagen oder Sattelaufzieger mit zwangsgelenkter Zusatzachse*. Offenlegungsschrift DE 3837981 A1, Mai 1990
- [149] WITTENBURG, J.: *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. Stuttgart : Teubner-Verlag, 1977
- [150] WONG, J. Y.: *Theory of Ground Vehicles*. 3rd Edition. New York : John Wiley, 2001
- [151] YOSHIDA, Y. ; QIANG-WANG ; OYA, M. ; OKUMURA, K.: Adaptive longitudinal velocity and lane keeping control of four-wheel-steering vehicles. In: *Proceedings of 46th SICE Annual Conference*. Takamatsu, Japan, 2007

- [152] YOU, S.-S. ; CHAI, Y.-H.: Multi-objective control synthesis: an application to 4WS passenger vehicles. In: *Mechatronics Int. J.* 9 (1999), S. 363–390
- [153] ZEGELAAR, P. W. A. ; PACEJKA, H.-B.: The In-Plane Dynamics of Tyres on Uneven Roads. In: *International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility* 25 (1996), S. 714–730



# Anhang B

## Fahrzeugparameter

### B.1 Achslastmessung und Schwerpunktberechnung

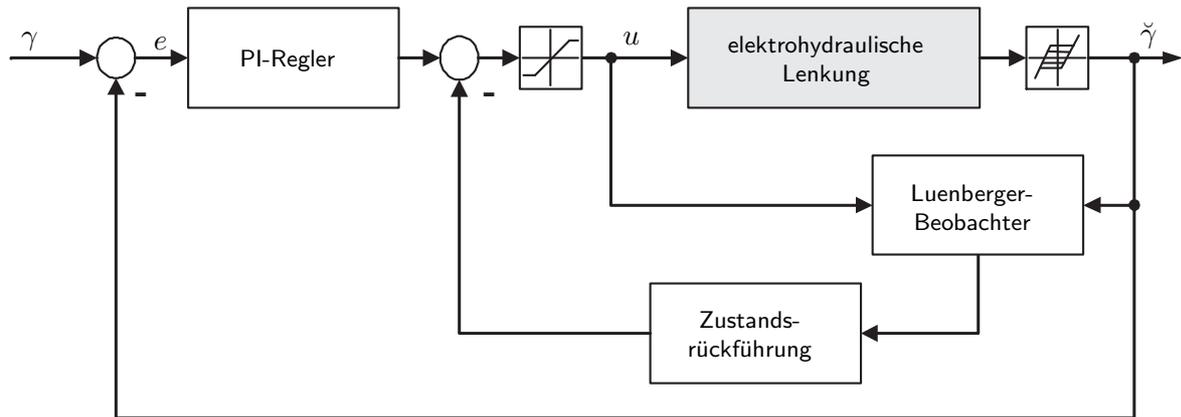
Die Parameter entstammen einem FEM-Modell der AutoTram. Die Längen und Massen wurden durch eine Achslastmessung verifiziert.

**Tabelle B.1:** Parameter des Versuchsfahrzeugs und des Simulationsmodells

Abmessungen	
Fahrzeugbreite	2.55 m
$l_0$	3.83 m
$l_1$	2.67 m
$l_{G_1}$	3.97 m
$l_{K_2}$	4.54 m
$l_2$	2.74 m
$l_{G_2}$	4.63 m
Leermassen	
$\tilde{m}_1$	11000 kg
$\tilde{m}_2$	7500 kg
$\tilde{m}_3$	7500 kg
Massenträgheitsmomente für $m_i = \tilde{m}_i$	
${}^z\tilde{I}_{K_1/\mathcal{K}_1}$	62000 kg m <sup>2</sup>
${}^z\tilde{I}_{K_2/\mathcal{K}_2}$	36000 kg m <sup>2</sup>
${}^z\tilde{I}_{K_3/\mathcal{K}_3}$	36000 kg m <sup>2</sup>

## B.2 Stellregelkreise der Lenkachsen

Die Leistungsfähigkeit der spurtreuen Mehrachslenkung beruht auf exakt eingestellten Lenkwinkeln  $\gamma$ . Daher werden für die drei Lenkachsen schnelle und dennoch überschwingfreie sowie stationär genaue Regler entworfen. Das Blockschaltbild der Stellregelkreise zeigt Bild B.1.



**Bild B.1:** Struktur der Stellregelkreise

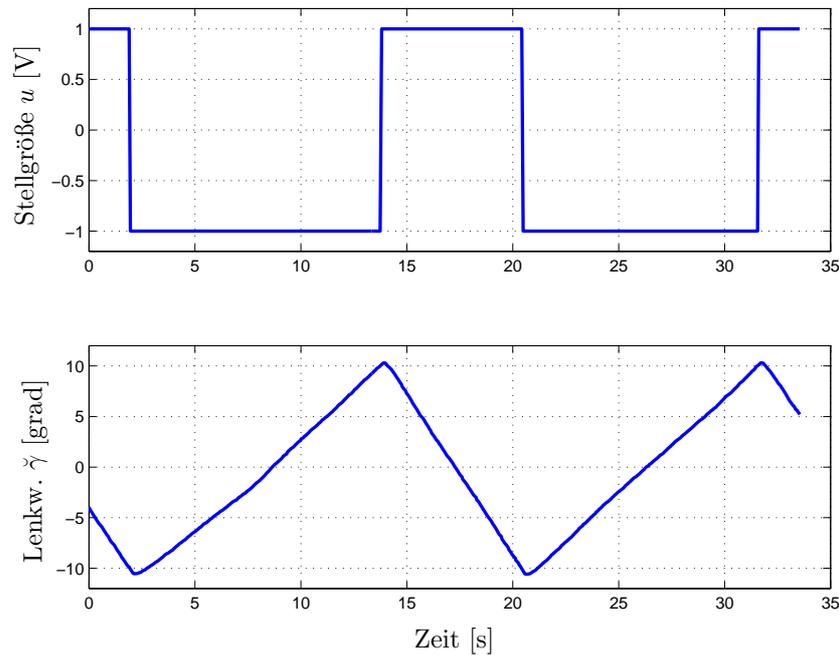
Die Parameter der Übertragungsfunktion der elektrohydraulischen Lenkung mit der Kolbenposition des Proportionalventils als Eingang und dem Lenkwinkel als Ausgang, nachfolgend als Regelstrecke  $G_P(s)$  bezeichnet, wurden experimentell bestimmt. Dazu wurden während der Fahrt verschiedene Stellgrößenverläufe  $u(t)$  aufgeschaltet und die Regelgröße  $\check{\gamma}(t)$  gemessen. Bild B.2 zeigt das charakteristische Verhalten der Regelstrecke bei sprunghaft veränderter Stellgröße. Auffällig ist, dass die Lenkgeschwindigkeit je nach Vorzeichen von  $\check{\gamma}$  variiert.

Dieses Verhalten lässt sich auf den inneren Aufbau des Hydraulikzylinders zurückführen. Sowohl die wirksamen Arbeitsflächen als auch das Volumen des Zylinders sind aufgrund der nicht durchgängigen Kolbenstange unterschiedlich groß. Wird ein konstanter Volumenstrom am Ausgang des Proportionalventils angenommen, so fährt der Hydraulikzylinder schneller ein als aus. Für die lineare Analyse ist es daher zweckmäßig, den Prozess in  $G_{P_L}(s)$  für  $\check{\gamma} \geq 0$  und  $G_{P_R}(s)$  für  $\check{\gamma} < 0$  zu zerlegen und die Prozessparameter für jede Lenkrichtung getrennt zu identifizieren.

Aufgrund der Streckenstruktur und des ermittelten E/A-Verhaltens wird als Übertragungsfunktion ein  $IT_1$ -Glied

$$G_{P_i}(s) = \frac{K_{P_i}}{s(1 + T_{1_i}s)} = \frac{b_i}{s^2 + a_i s} \quad \text{mit } i = L, R \quad (\text{B.1})$$

angesetzt. Die Parameter  $K_{P_i}$  und  $T_{1_i}$  lassen sich anhand von Messreihen und der Matlab-



**Bild B.2:** Ein-/ Ausgangsverhalten der elektrohydraulischen Lenkung

Funktion  $pem()$  identifizieren.

Die Ergebnisse der Identifikation zeigen, dass die elektrohydraulische Lenkung gut durch das lineare Modell (B.1) approximierbar ist. Die Lenkungsmodelle  $G_{P_L}$  und  $G_{P_R}$  unterscheiden sich dabei nur geringfügig in der Streckenverstärkung  $K_{P_i}$ . Zur Vereinfachung wird für den folgenden Reglerentwurf ein Streckenmodell verwendet, dessen Verstärkung das arithmetische Mittel von  $K_{P_L}$  und  $K_{P_R}$  ist.

Die Regelung einer  $IT_1$ -Strecke mittels P-Regler ist zwar grundsätzlich möglich, führt aber im konkreten Fall durch das Spiel am Streckenausgang zu bleibenden Regelabweichungen, die sich durch einen I-Anteil im Regler kompensieren lassen. Leider führt ein zusätzlicher I-Anteil zu relativ langen Nachstellzeiten und zu einem relativ trägen Einstellvorgang.

Das Streckenverhalten kann jedoch mit einer geeigneten Zustandsrückführung in ein für den Reglerentwurf günstigeres  $PT_2$ -Glied überführt werden. Die dafür notwendige Steuerbarkeit der Prozesses  $G_P(s)$  ist gegeben. Wird die Übertragungsfunktion (B.1) im Zustandsraum dargestellt, gilt mit der Stellgröße  $u$ , der Regelgröße  $y = \check{\gamma}$ , den Zuständen

$$x_1 = \check{\gamma}, \quad (\text{B.2})$$

$$x_2 = \dot{\check{\gamma}} \quad (\text{B.3})$$

und den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}: \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (\text{B.5})$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (\text{B.6})$$

Wird die Zustandsrückführung

$$u = \mathbf{f}^\top \mathbf{x} \quad (\text{B.7})$$

auf (B.5) angewendet, so gilt für das charakteristische Polynom zunächst:

$$\det(\mathbf{I}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{f}^\top) = s^2 + (a - bf_2)s - bf_1. \quad (\text{B.8})$$

Das  $\text{PT}_2$ -Glied soll einen doppelten Pol  $p$  besitzen. Ein Koeffizientenvergleich zeigt, dass das gewünschte charakteristische Polynom

$$(s - p)^2 = s^2 - 2ps + p^2 \quad (\text{B.9})$$

durch die Rückführverstärkungen

$$f_1 = \frac{-p^2}{b} \quad \text{und} \quad (\text{B.10})$$

$$f_2 = \frac{2p + a}{b} \quad (\text{B.11})$$

realisiert wird. Die Übertragungsfunktion der Strecke mit Zustandsrückführung lautet dann:

$$G_P^*(s) = \frac{b}{(s - p)^2}. \quad (\text{B.12})$$

Die Zustandsrückführung (B.7) setzt die Kenntnis des Zustandsvektors  $\mathbf{x}$  voraus. Der Zustand  $x_1$  wird direkt gemessen. Die Größe  $x_2$  wird dagegen mit einem Luenberger-Beobachter geschätzt.

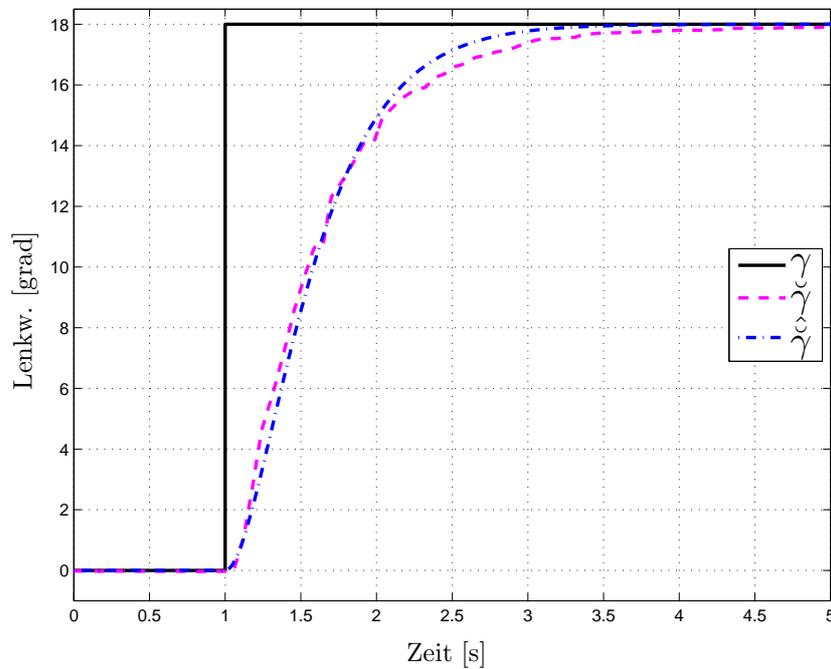
Das Spiel am Streckenausgang bewirkt auch bei  $G_P^*(s)$  eine bleibende Regelabweichung,

die jetzt durch einen PI-Regler

$$G_R(s) = \frac{K_R(s + \frac{1}{T_R})}{s} \quad (\text{B.13})$$

ausgeregelt werden kann. Die Nullstelle des PI-Reglers lässt sich so wählen, dass eine Polstelle von  $G_P^*(s)$  kompensiert wird. Für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises gilt dann:

$$G_\gamma^*(s) = \frac{K_R b}{s^2 - p s + b K_R}. \quad (\text{B.14})$$



**Bild B.3:** Sprungantworten der geregelten elektrohydraulischen Lenkung

Der geschlossene Regelkreis soll einen doppelten Pol  $p_g$  aufweisen. Der Koeffizientenvergleich des gewünschten charakteristischen Polynoms

$$(s - p_g)^2 = s^2 - 2p_g s + p_g^2 \quad (\text{B.15})$$

mit dem Nenner von (B.14) zeigt, dass dafür

$$p = 2p_g \quad \text{und} \quad (\text{B.16})$$

$$K_R = \frac{p_g^2}{b} \quad (\text{B.17})$$

angesetzt werden muss. Die Kompensation einer Polstelle von  $G_P^*(s)$  wird durch die Nachstellzeit

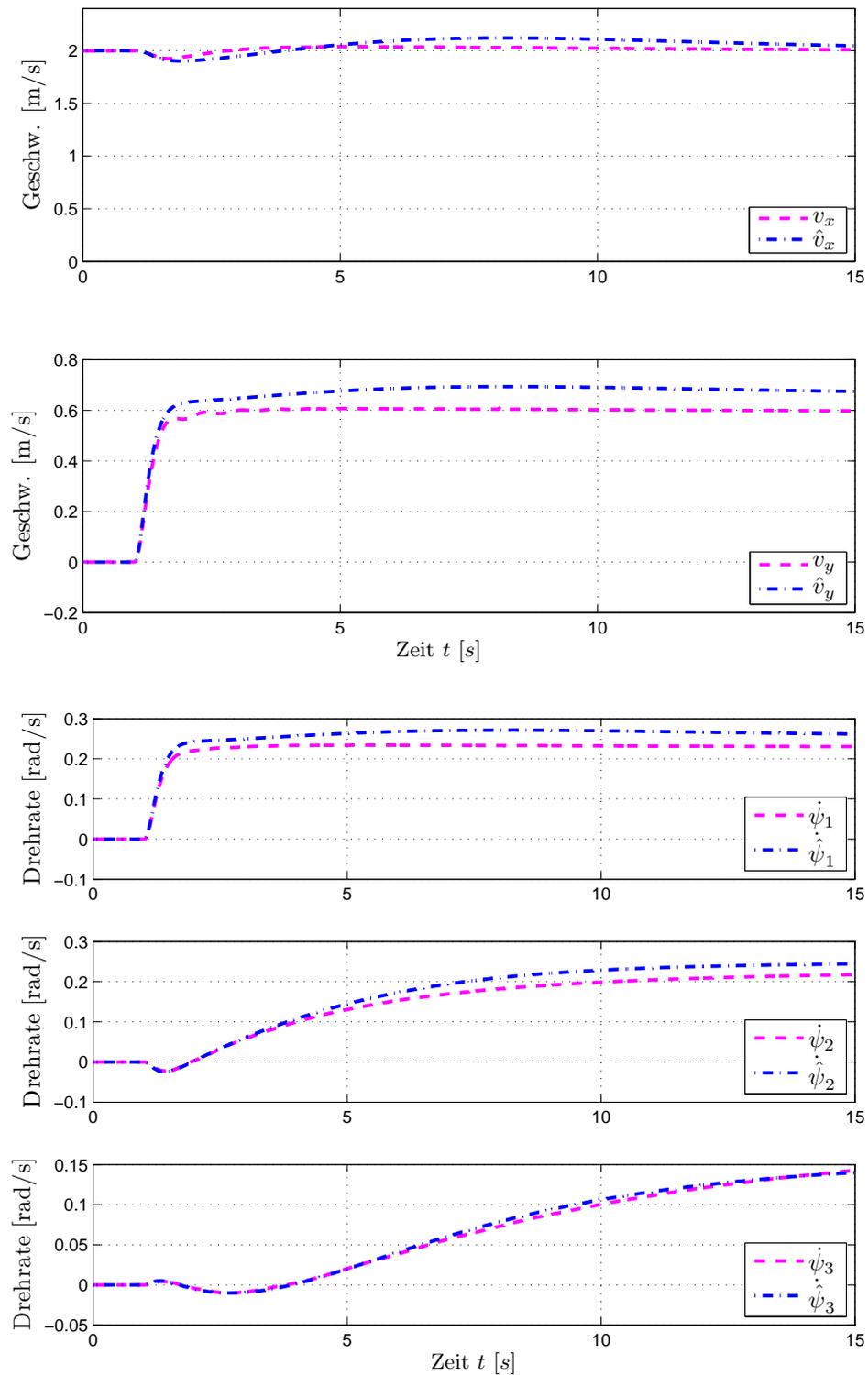
$$T_R = -\frac{1}{2p_g} \quad (\text{B.18})$$

des PI-Reglers erreicht. Der freie Entwurfsparameter  $p_g$  wird nun so gewählt, dass die Stellsignalbegrenzung bei einem Führungssprung von  $0^\circ$  auf  $20^\circ$  gerade erreicht wird. Die Sprungantworten des so geregelten Lenkungsmodells ( $\hat{\gamma}$ ) und der realen Strecke ( $\check{\gamma}$ ) zeigen eine gute Übereinstimmung (vgl. Bild B.3).

# **Anhang C**

## **Ergebnisse der Modellvalidierung**

### **C.1 Simulationsbasierte Validierung**



**Bild C.1:** Vergleich zwischen dreigliedrigem Simulations- und Entwurfsmodell ( $\hat{\cdot}$ ) bei sprunghaftem Einlenken der Achse  $A_0$  mit  $\tilde{\gamma}_0(t_1) = 40^\circ$  und  $v_x = 2 \text{ m/s}$

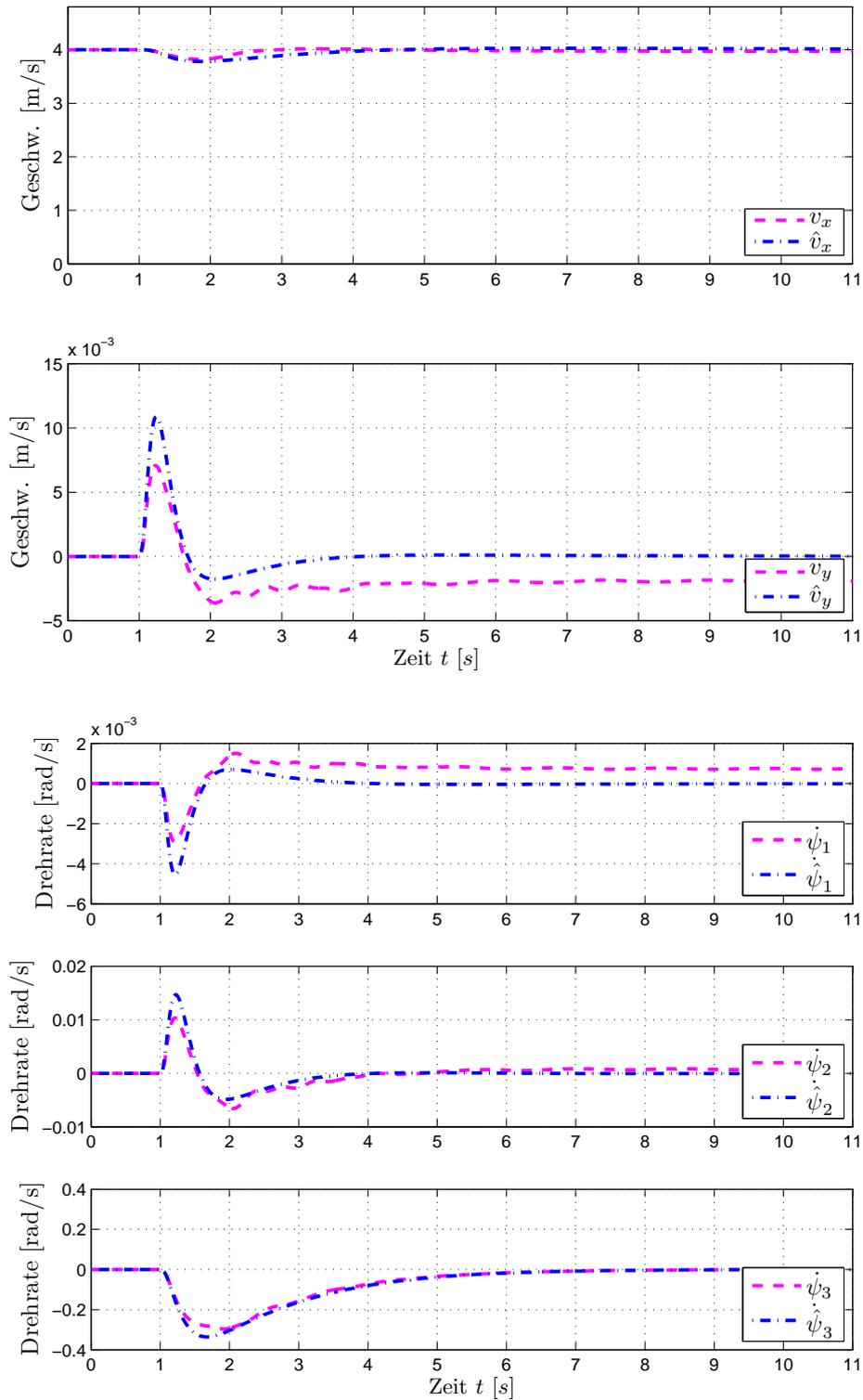
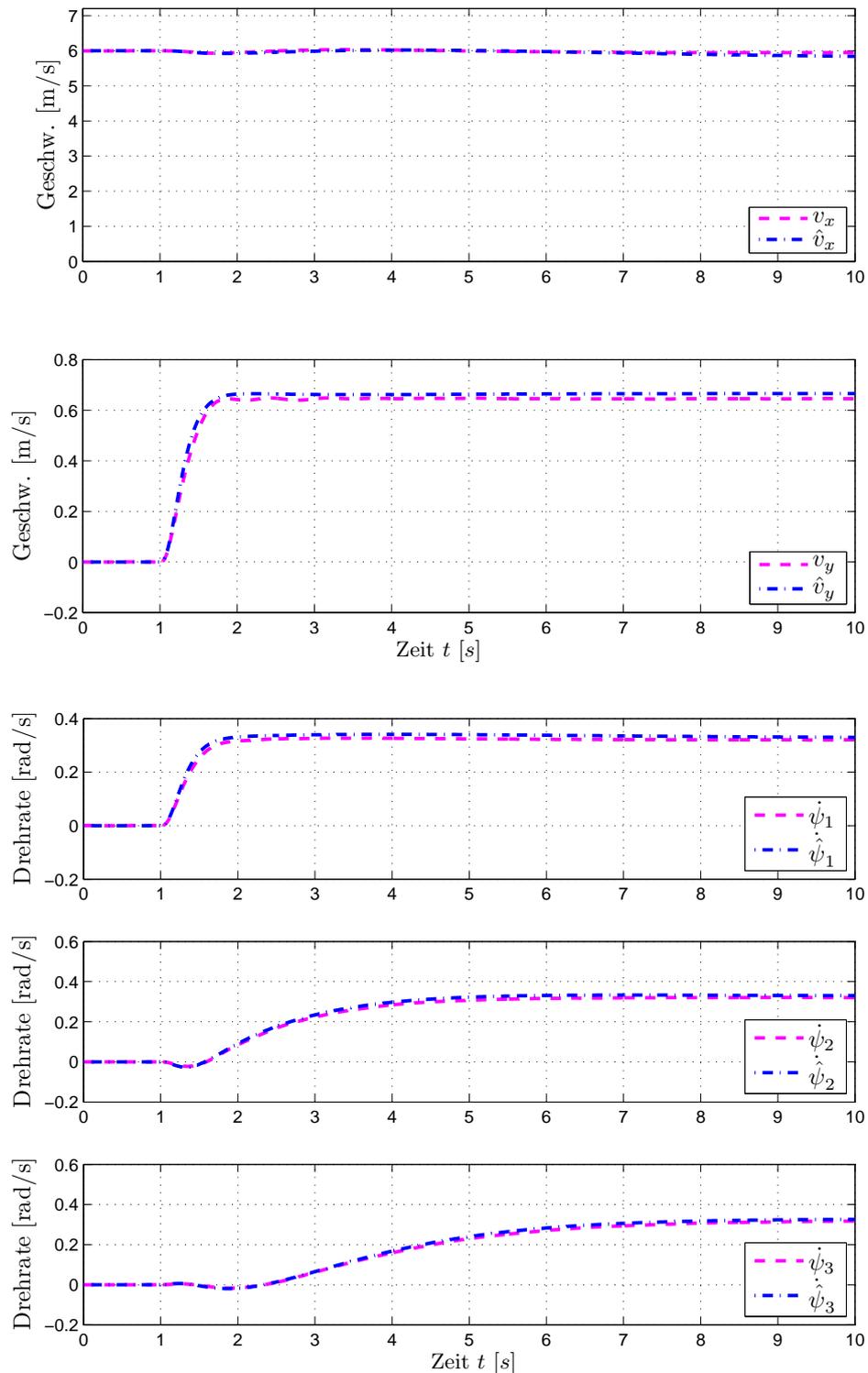
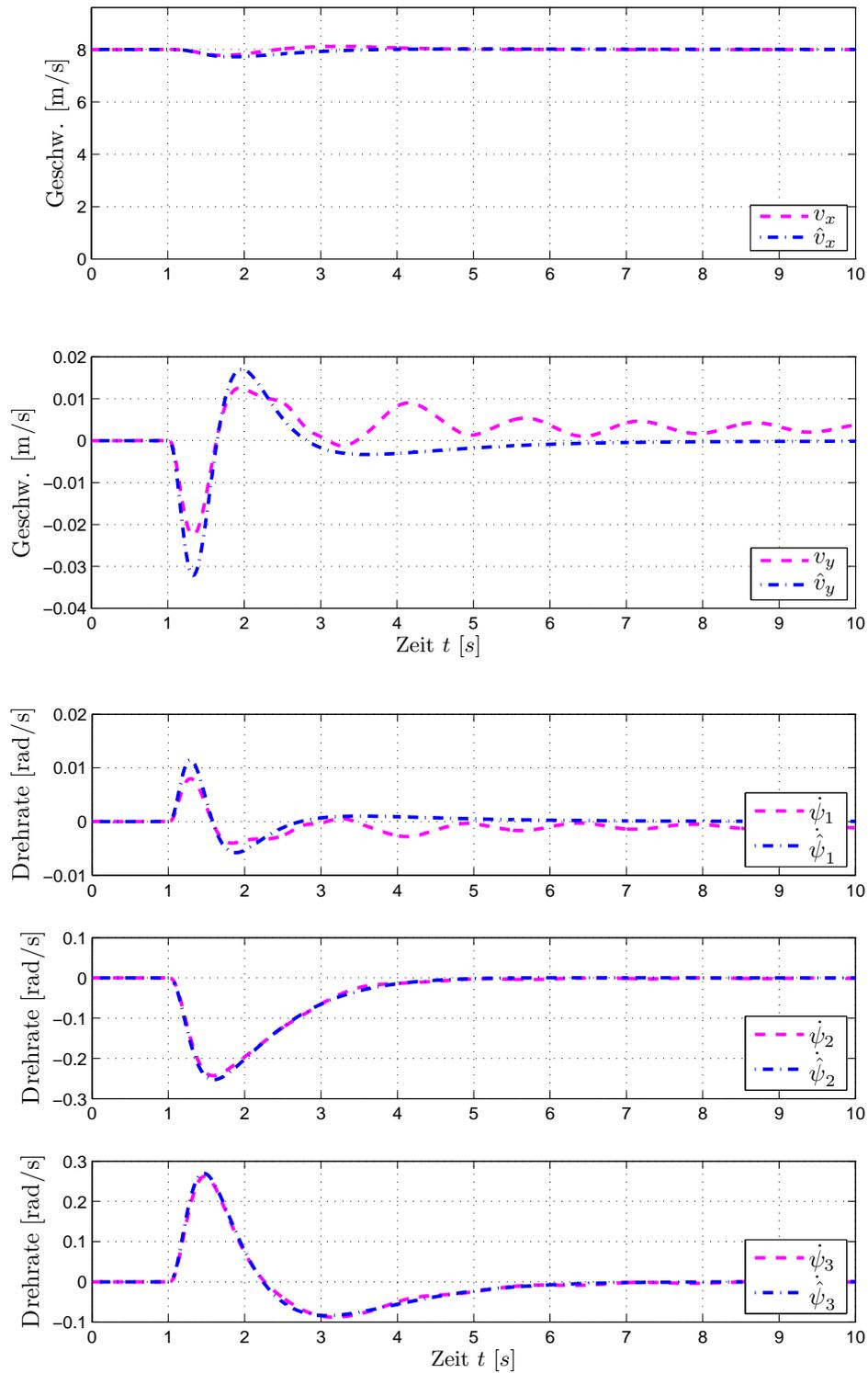


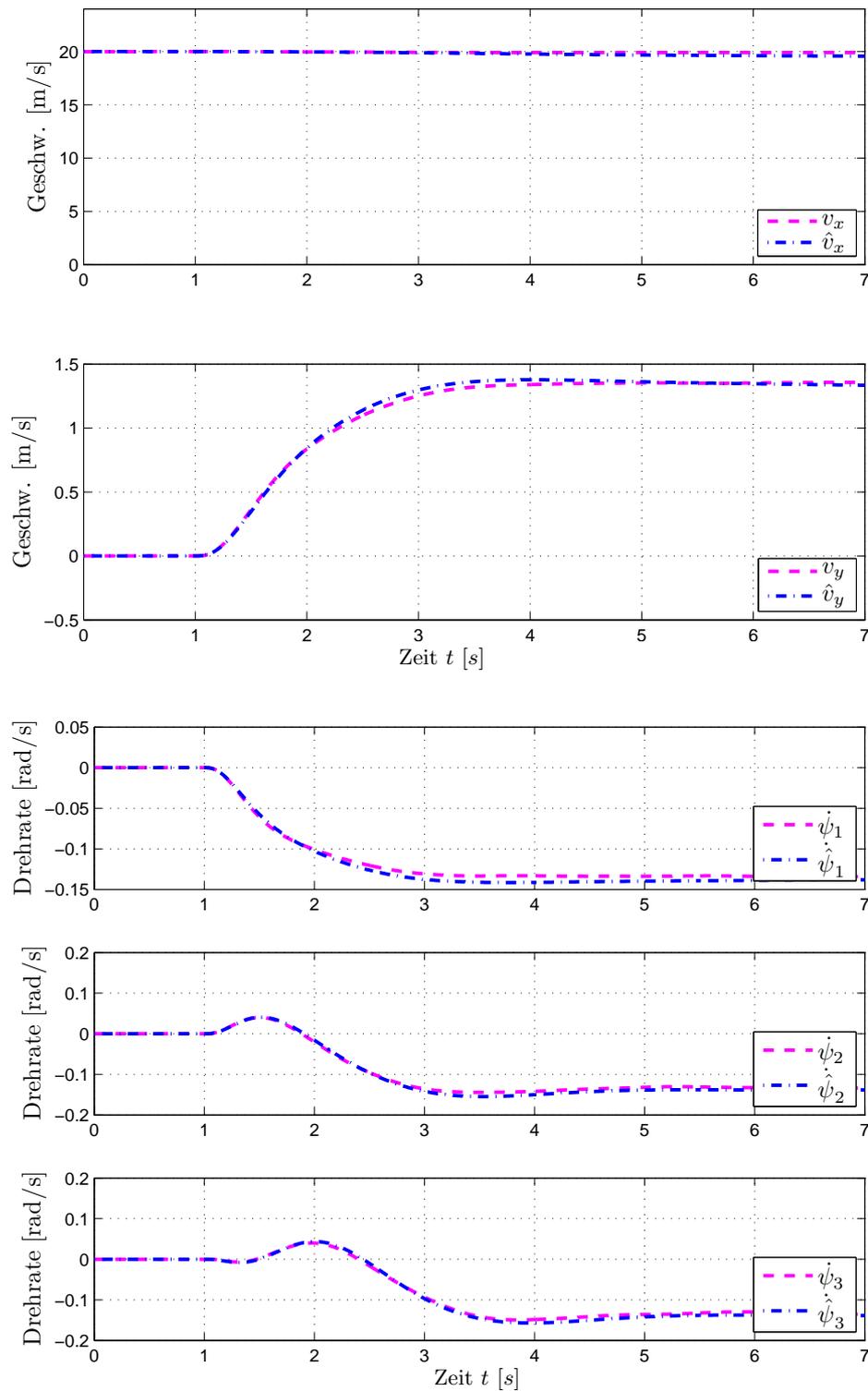
Bild C.2: Vergleich zwischen dreigliedrigem Simulations- und Entwurfsmodell ( $\hat{\cdot}$ ) bei sprunghaftem Einlenken der Achse  $A_3$  mit  $\tilde{\gamma}_3(t_1) = 40^\circ$  und  $v_x = 4$  m/s



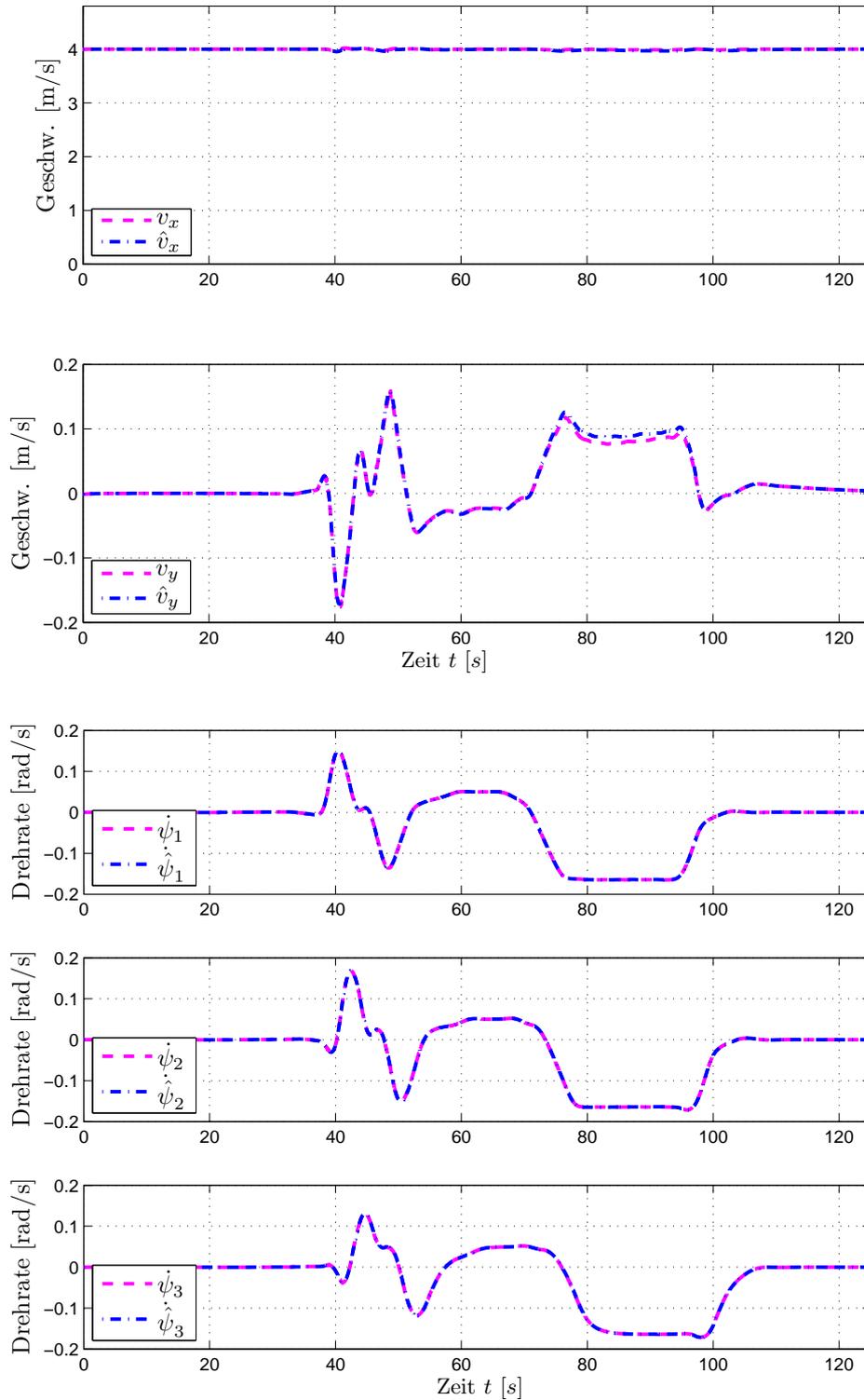
**Bild C.3:** Vergleich zwischen dreigliedrigem Simulations- und Entwurfsmodell ( $\hat{\cdot}$ ) bei sprunghaftem Einlenken der Achse  $A_0$  mit  $\tilde{\gamma}_0(t_1) = 20^\circ$  und  $v_x = 6 \text{ m/s}$



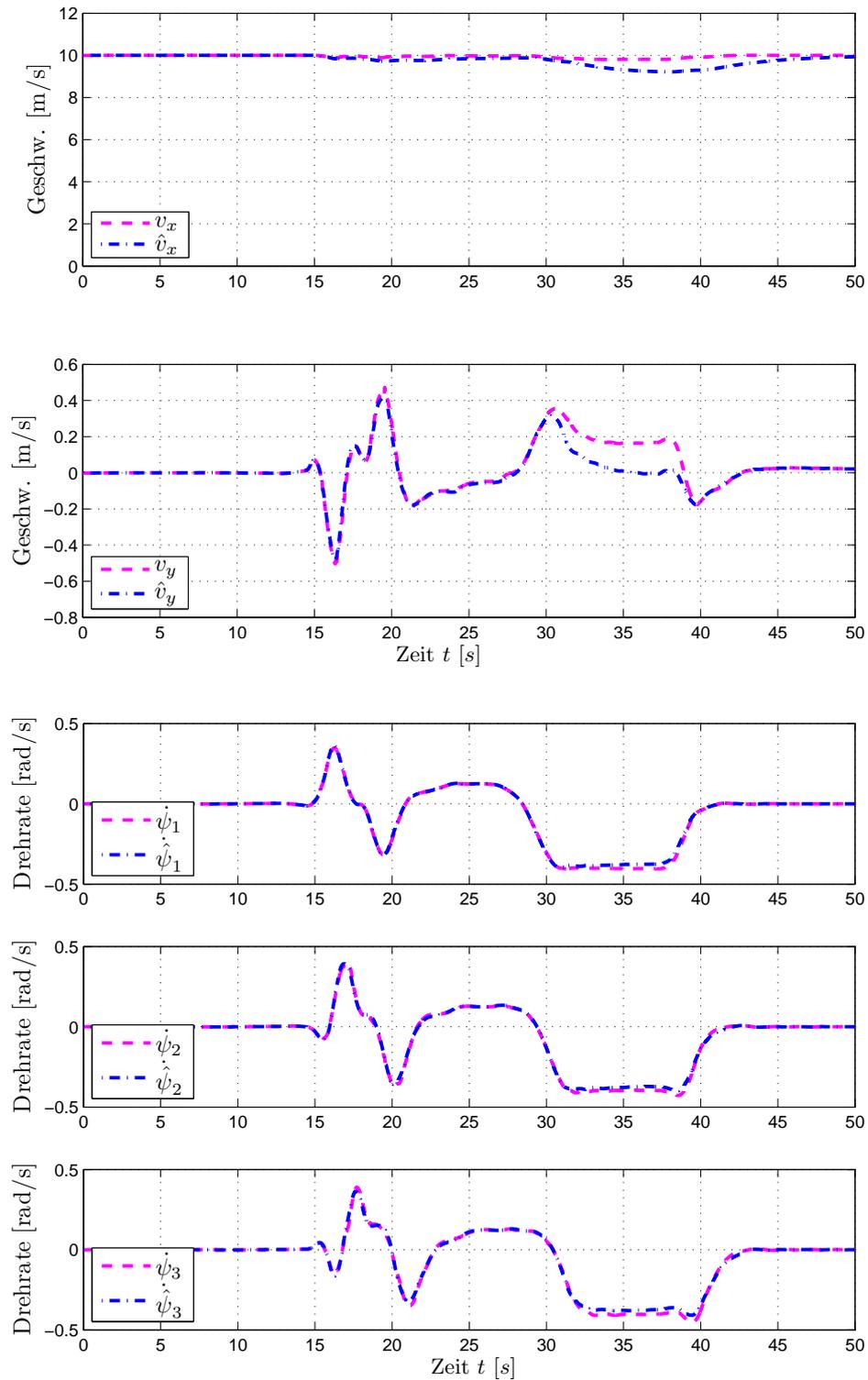
**Bild C.4:** Vergleich zwischen dreigliedrigem Simulations- und Entwurfsmodell ( $\hat{\cdot}$ ) bei sprunghaftem Einlenken der Achse  $A_2$  mit  $\tilde{\gamma}_2(t_1) = 20^\circ$  und  $v_x = 8 \text{ m/s}$



**Bild C.5:** Vergleich zwischen dreigliedrigem Simulations- und Entwurfsmodell ( $\hat{\cdot}$ ) bei sprunghaftem Einlenken der Achse  $A_1$  mit  $\tilde{\gamma}_1(t_1) = 2^\circ$  und  $v_x = 20 \text{ m/s}$



**Bild C.6:** Vergleich zwischen dreigliedrigem Simulations- und Entwurfsmodell ( $\hat{\cdot}$ ) anhand des Teststreckenverlaufs in Bild 4.1 bei  $v_x = 4$  m/s



**Bild C.7:** Vergleich zwischen dreigliedrigem Simulations- und Entwurfsmodell ( $\hat{\cdot}$ ) anhand des Teststreckenverlaufs in Bild 4.1 bei  $v_x = 10$  m/s

## C.2 Experimentelle Validierung

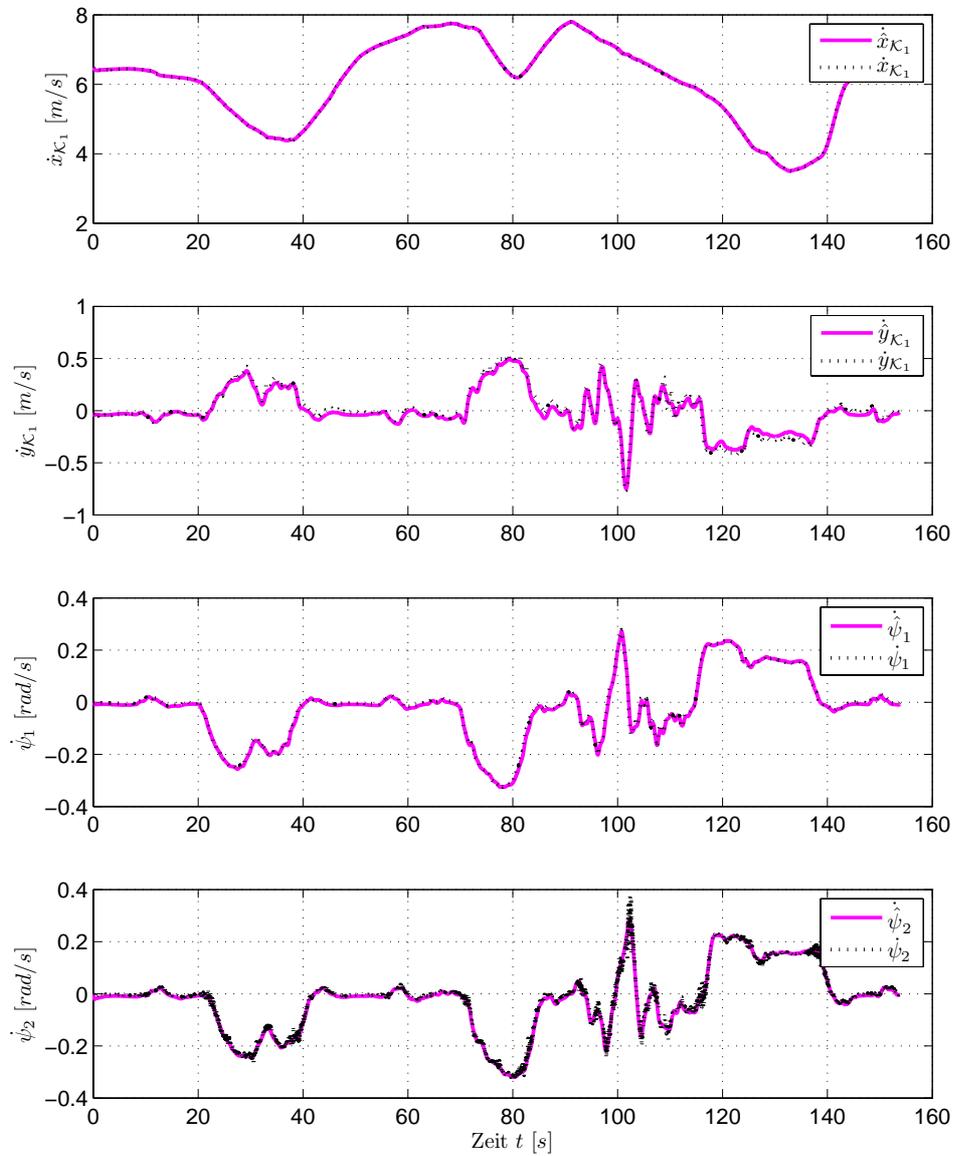
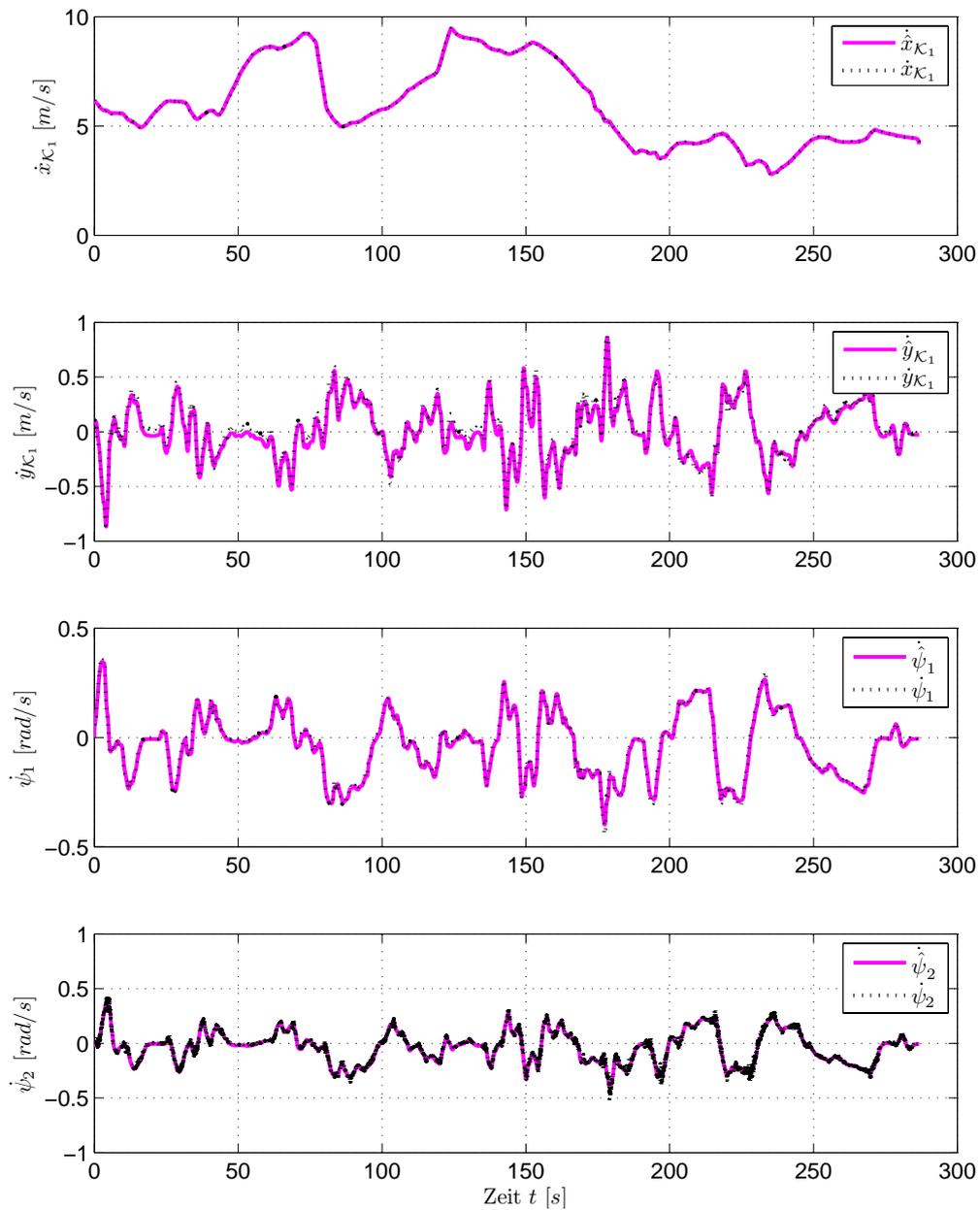
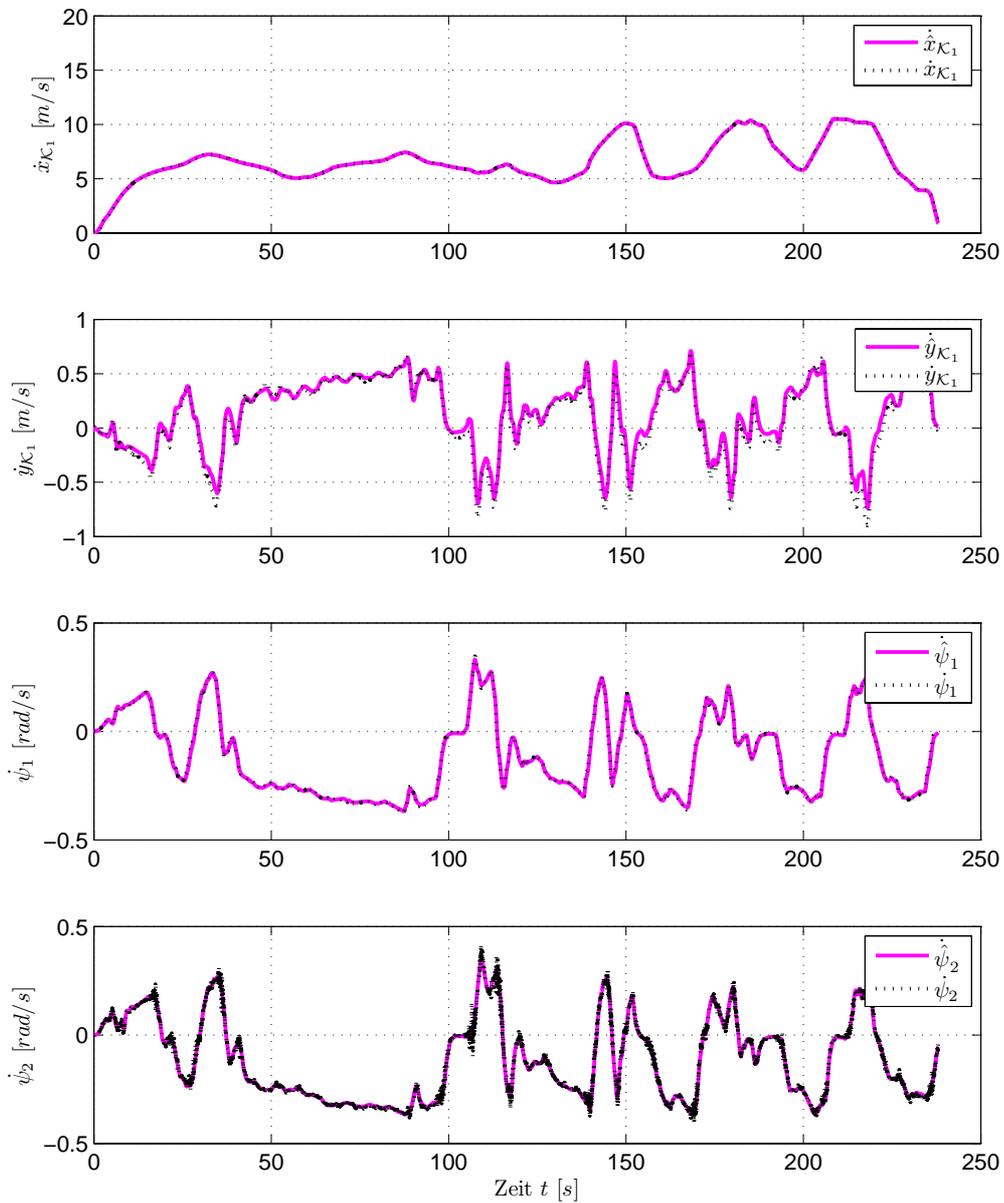


Bild C.8: Vergleich der verallgemeinerten Geschwindigkeiten des Entwurfsmodells und des Versuchsfahrzeugs



**Bild C.9:** Vergleich der verallgemeinerten Geschwindigkeiten des Entwurfsmodells und des Versuchsfahrzeugs



**Bild C.10:** Vergleich der verallgemeinerten Geschwindigkeiten des Entwurfsmodells und des Versuchsfahrzeugs



# Anhang D

## Versuchsergebnisse

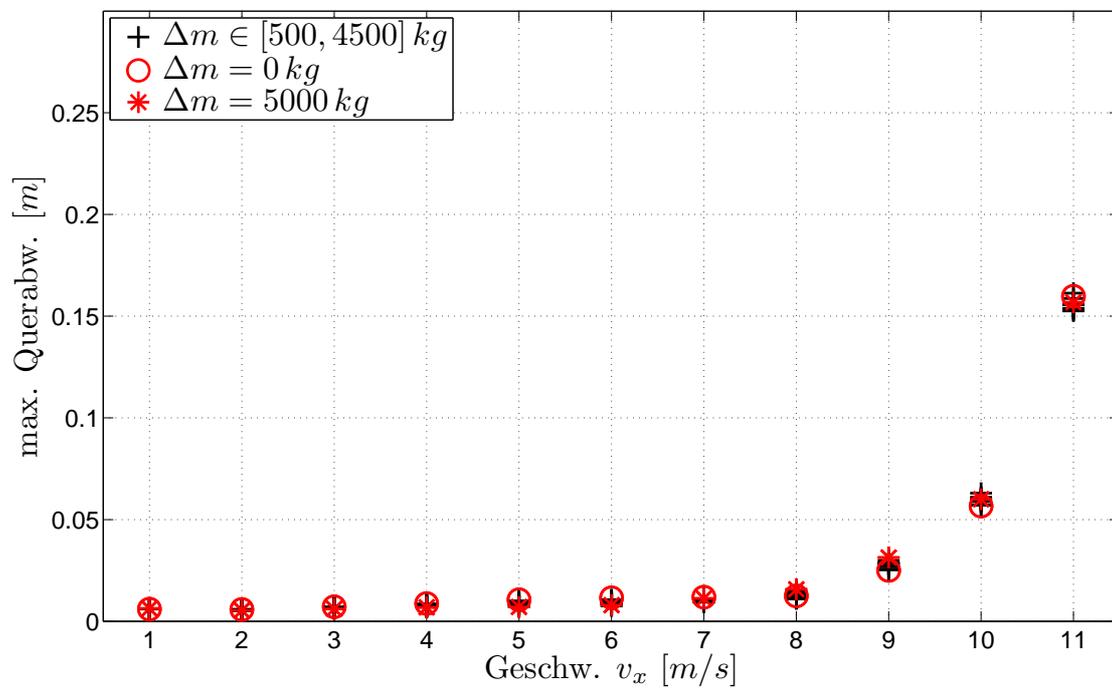
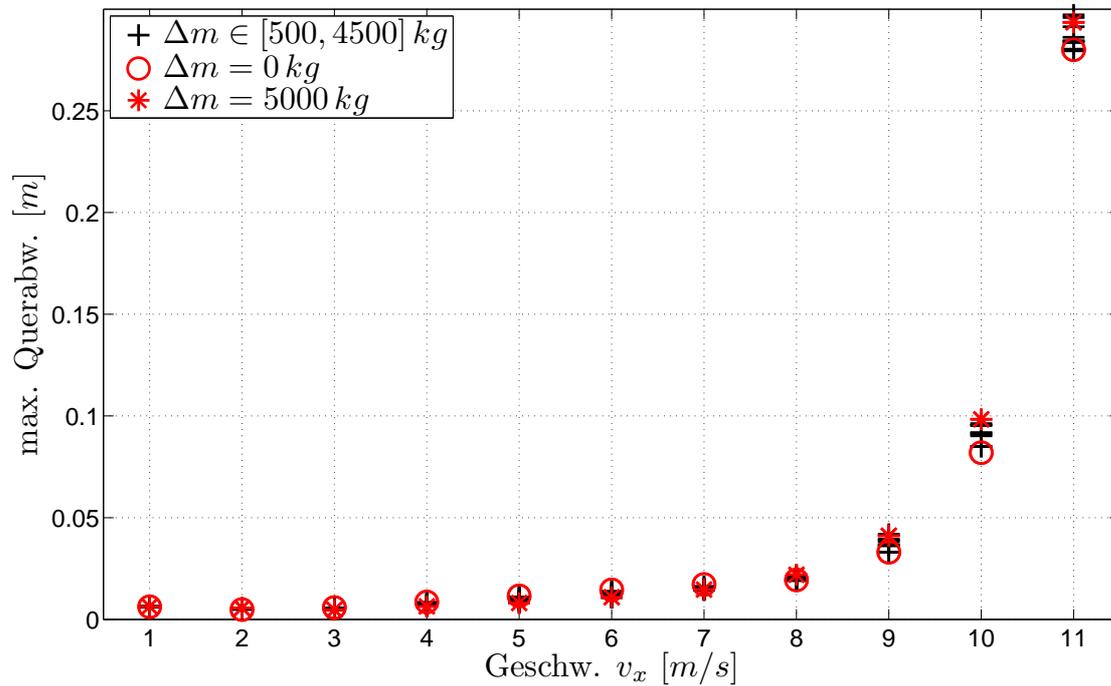
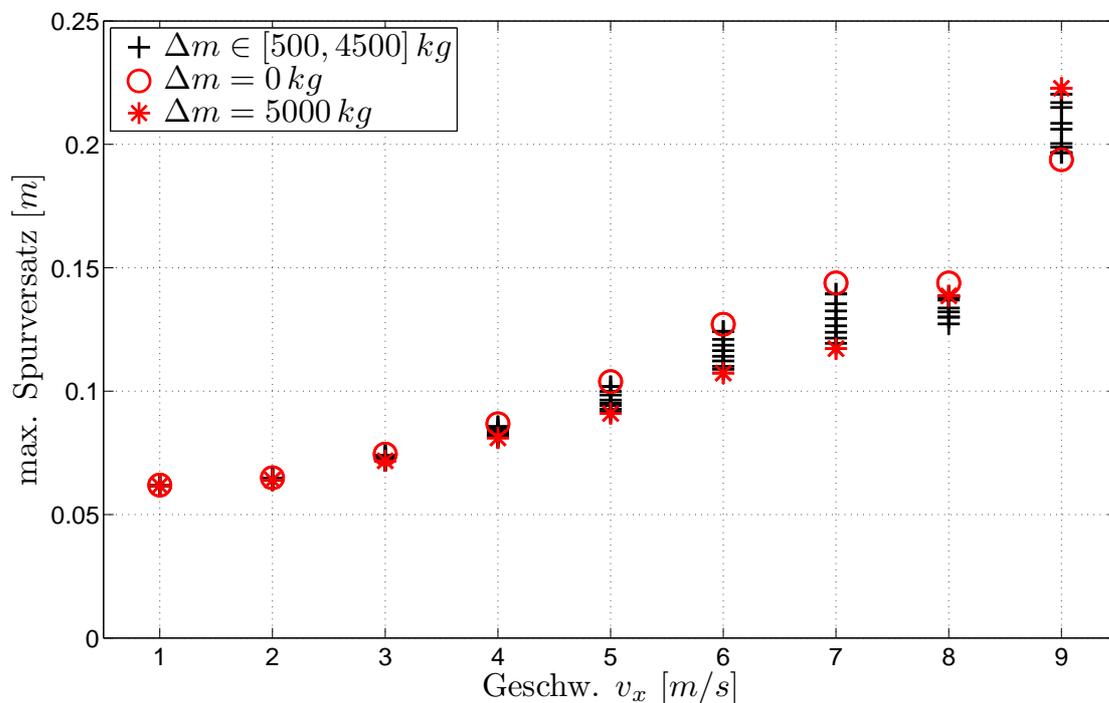


Bild D.1: Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte vom Sollweg mit Eingrößenreglern, Reibbeiwert  $\mu = 0.6$



**Bild D.2:** Maximale Querabweichung der Achsmittelpunkte vom Sollweg mit Mehrgrößenregler, Reibbeiwert  $\mu = 0.6$



**Bild D.3:** Maximaler Spurversatz der Achsmittelpunkte  $A_2$  und  $A_3$  vom Verlauf des Führungspunktes  $A_1$ , Reibbeiwert  $\mu = 0.6$

# Anhang E

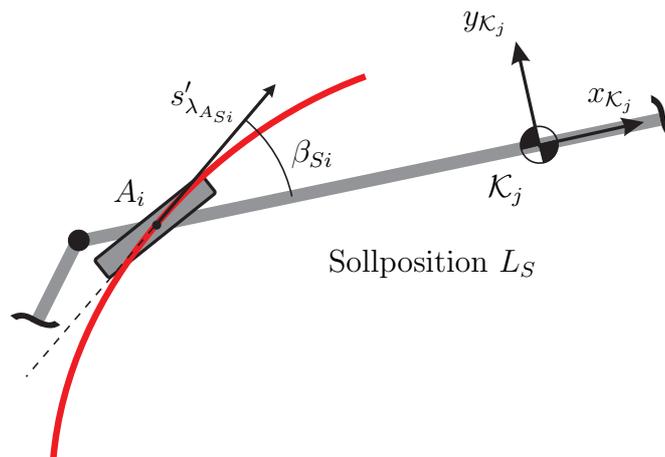
## Mathematische Anhänge

### E.1 Ergänzungen zur Sollgeschwindigkeits- und -beschleunigungsberechnung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Matrix  $\mathbf{H}$  (s. a. S. 77 ff) unter Berücksichtigung praktischer Randbedingungen stets regulär und daher die Gleichungssysteme (3.27) und (3.33) theoretisch lösbar sind. Der Nachweis wird unter der Voraussetzung geführt, dass für die Sollschwimmwinkel

$$\beta_{Si} \neq \frac{(2\zeta + 1)\pi}{2} \quad \text{mit } \zeta \in \mathbb{Z} \text{ und } i = 0, \dots, n \quad (\text{E.1})$$

gilt (vgl. Bild E.1). Diese Voraussetzung schränkt den Betrieb des Fahrzeugs praktisch nicht ein, da eine reine Seitwärtsbewegung in Richtung  $y_{\mathcal{K}_j}$  mit Lenkwinkelbeträgen  $< \pi/2$  nur bei Gleitreibung realisierbar ist.



**Bild E.1:** Winkel zwischen dem Vektor  $s'_{\lambda_{ASi}}$  und der Längsachse des zugehörigen Fahrzeugmoduls

**Vorbemerkungen** Aus der Voraussetzung (E.1) und

$$\sin \psi_{Sj} = 0 \iff \psi_{Sj} = \zeta\pi \quad \text{mit } \zeta \in \mathbb{Z} \text{ und } j = 1, \dots, n \quad (\text{E.2})$$

folgt unmittelbar:

$$\sin \psi_{Sj} = 0 \implies {}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} \neq 0 \quad \text{mit } j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ i & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{E.3a})$$

$${}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} = 0 \implies \sin \psi_{Sj} \neq 0 \quad \text{mit } j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ i & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{E.3b})$$

Damit folgt, dass die Tangente an der Sollwegtrajektorie bei  $\lambda_{ASi}$  eine von Null verschiedene Komponente in Richtung  $x_{\mathcal{I}}$  aufweist, wenn das zugehörige Fahrzeugmodul parallel zur  $x_{\mathcal{I}}$ -Achse ausgerichtet ist. Analog lässt sich für die parallele Ausrichtung zur  $y_{\mathcal{I}}$ -Achse zeigen, dass gilt:

$$\cos \psi_{Sj} = 0 \implies {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} \neq 0 \quad \text{mit } j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ i & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{E.4a})$$

$${}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} = 0 \implies \cos \psi_{Sj} \neq 0 \quad \text{mit } j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ i & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{E.4b})$$

Für die erste Ableitung der glatten Sollwegtrajektorie  $\mathbf{s}(\lambda)$  nach  $\lambda$  gilt stets:

$$|\mathbf{s}'(\lambda)| \neq 0. \quad (\text{E.5})$$

Daher ist für alle  $i = 0, \dots, n$

$${}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}}{}^2 + {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}}{}^2 \neq 0, \quad (\text{E.6})$$

sodass auch

$${}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} = 0 \implies {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} \neq 0 \quad \text{und} \quad (\text{E.7a})$$

$${}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} = 0 \implies {}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} \neq 0 \quad (\text{E.7b})$$

gelten muss.

Für reelle Winkel  $\psi$  gilt stets:

$$\cos \psi = 0 \implies \sin \psi \neq 0 \quad \text{und} \quad (\text{E.8a})$$

$$\sin \psi = 0 \implies \cos \psi \neq 0. \quad (\text{E.8b})$$

**Beweis** Nachfolgend wird gezeigt, dass unter der Voraussetzung (E.1) stets  $\det \mathbf{H} \neq 0$  gilt. Diese Eigenschaft ist notwendig und hinreichend für die Existenz von  $\mathbf{H}^{-1}$  und damit für die Lösbarkeit der Gln. (3.27) und (3.33) (s. S. 77 ff).

Die Matrix  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times 2(n+1)}$ ,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathfrak{b}'_{\lambda_{AS0}} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sin \psi_{S1} & -l_0 \sin \psi_{S1} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{z}'_{\lambda_{AS0}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \cos \psi_{S1} & l_0 \cos \psi_{S1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathfrak{b}'_{\lambda_{AS1}} & 0 & \dots & 0 & -\sin \psi_{S1} & l_1 \sin \psi_{S1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathfrak{z}'_{\lambda_{AS1}} & 0 & \dots & 0 & \cos \psi_{S1} & -l_1 \cos \psi_{S1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{b}'_{\lambda_{AS2}} & \dots & 0 & \vdots & l_{G_1} \sin \psi_{S1} & (l_2 + l_{K_2}) \sin \psi_{S2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{z}'_{\lambda_{AS2}} & \dots & 0 & \vdots & -l_{G_1} \cos \psi_{S1} & -(l_2 + l_{K_2}) \cos \psi_{S2} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & (l_{G_2} + l_{K_2}) \sin \psi_{S2} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & -(l_{G_2} + l_{K_2}) \cos \psi_{S2} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathfrak{b}'_{\lambda_{ASn}} & -\sin \psi_{S1} & l_{G_1} \sin \psi_{S1} & (l_{G_2} + l_{K_2}) \sin \psi_{S2} & \dots & (l_n + l_{K_n}) \sin \psi_{S_n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathfrak{z}'_{\lambda_{ASn}} & \cos \psi_{S1} & -l_{G_1} \cos \psi_{S1} & -(l_{G_2} + l_{K_2}) \cos \psi_{S2} & \dots & -(l_n + l_{K_n}) \cos \psi_{S_n} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.9})$$

lässt sich zunächst durch Tauschen von Spalten in die Form einer unteren Blockdreiecksmatrix überführen:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix}
 -\sin \psi_{S1} & \mathbf{s}'_{\lambda AS0} & -l_0 \sin \psi_{S1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \cos \psi_{S1} & \mathbf{z}'_{\lambda AS0} & l_0 \cos \psi_{S1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 -\sin \psi_{S1} & 0 & l_1 \sin \psi_{S1} & \mathbf{s}'_{\lambda AS1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \cos \psi_{S1} & 0 & -l_1 \cos \psi_{S1} & \mathbf{z}'_{\lambda AS1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & 0 & l_{G_1} \sin \psi_{S1} & 0 & (l_2 + l_{K_2}) \sin \psi_{S2} & \mathbf{s}'_{\lambda AS2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & 0 & -l_{G_1} \cos \psi_{S1} & 0 & -(l_2 + l_{K_2}) \cos \psi_{S2} & \mathbf{z}'_{\lambda AS2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & 0 & (l_{G_2} + l_{K_2}) \sin \psi_{S2} & 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -(l_{G_2} + l_{K_2}) \cos \psi_{S2} & 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 -\sin \psi_{S1} & 0 & l_{G_1} \sin \psi_{S1} & 0 & (l_{G_2} + l_{K_2}) \sin \psi_{S2} & 0 & \dots & (l_n + l_{K_n}) \sin \psi_{S_n} & \mathbf{s}'_{\lambda AS_n} \\
 \cos \psi_{S1} & 0 & -l_{G_1} \cos \psi_{S1} & 0 & -(l_{G_2} + l_{K_2}) \cos \psi_{S2} & 0 & \dots & -(l_n + l_{K_n}) \cos \psi_{S_n} & \mathbf{z}'_{\lambda AS_n}
 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.10})$$

Zu beachten ist, dass die Determinante ihr Vorzeichen ändert, wenn zwei Zeilen oder zwei Spalten miteinander vertauscht werden. Der Betrag der Determinante ändert sich dabei nicht. Somit gilt

$$|\det \mathbf{H}| = |\det \tilde{\mathbf{H}}| \quad \text{und} \quad \det \mathbf{H} \neq 0 \iff \det \tilde{\mathbf{H}} \neq 0. \quad (\text{E.11})$$

Für eine untere Blockdreiecksmatrix

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & & \mathbf{0} \\ \dots & \ddots & \\ \dots & \dots & \mathbf{D}_n \end{pmatrix} \quad (\text{E.12})$$

mit den Diagonalblöcken

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} -\sin \psi_{S1} & {}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS0}} & -l_0 \sin \psi_{S1} & 0 \\ \cos \psi_{S1} & {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS0}} & l_0 \cos \psi_{S1} & 0 \\ -\sin \psi_{S1} & 0 & l_1 \sin \psi_{S1} & {}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS1}} \\ \cos \psi_{S1} & 0 & -l_1 \cos \psi_{S1} & {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS1}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\text{E.13})$$

$$\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} (l_i + l_{K_i}) \sin \psi_{Si} & {}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} \\ -(l_i + l_{K_i}) \cos \psi_{Si} & {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} \end{pmatrix} \quad (i = 2, \dots, n) \quad (\text{E.14})$$

gilt:

$$\det \tilde{\mathbf{H}} = \prod_{i=1}^n \det \mathbf{D}_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{E.15})$$

Die Determinante von  $\tilde{\mathbf{H}}$  ist demnach genau dann ungleich Null, wenn alle  $\det \mathbf{D}_i$  ungleich Null sind.

Für die Matrix  $\mathbf{D}_1$  gilt:

$$\det \mathbf{D}_1 = -(l_0 + l_1)({}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS0}} \cos \psi_{S1} + {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS0}} \sin \psi_{S1})({}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS1}} \cos \psi_{S1} + {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS1}} \sin \psi_{S1}) \quad (\text{E.16})$$

und für alle weiteren Matrizen:

$$\det \mathbf{D}_i = (l_i + l_{K_i})({}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} \cos \psi_{Si} + {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{ASi}} \sin \psi_{Si}) \quad (i = 2, \dots, n). \quad (\text{E.17})$$

Der erste Faktor der Determinanten ist ungleich Null, da alle Längenparameter aufgrund der technischen Randbedingungen größer Null sind. Es ist daher zu zeigen, dass für alle

$i = 0, \dots, n$  gilt:

$${}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} \cos \psi_{S_j} + {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} \sin \psi_{S_j} \neq 0 \quad \text{mit } j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ i & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{E.18})$$

Aus (E.3), (E.4), (E.7) und (E.8) folgt:

$$({}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} = 0) \vee (\cos \psi_{S_j} = 0) \implies ({}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} \neq 0) \wedge (\sin \psi_{S_j} \neq 0) \quad \text{und} \quad (\text{E.19})$$

$$({}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} = 0) \vee (\sin \psi_{S_j} = 0) \implies ({}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} \neq 0) \wedge (\cos \psi_{S_j} \neq 0). \quad (\text{E.20})$$

Daher gilt:

$${}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} \cos \psi_{S_j} = 0 \implies {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} \sin \psi_{S_j} \neq 0 \quad \text{und} \quad (\text{E.21a})$$

$${}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} \sin \psi_{S_j} = 0 \implies {}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} \cos \psi_{S_j} \neq 0. \quad (\text{E.21b})$$

Somit ist die Ungleichung (E.18) immer erfüllt, wenn einer der beiden Summanden gleich Null ist. Zusätzlich ist zu zeigen, dass die Ungleichung (E.18) auch dann erfüllt ist, wenn *beide* Summanden *ungleich* Null sind. Dieser Nachweis erfolgt indirekt, indem die Annahme

$${}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} \cos \psi_{S_j} + {}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}} \sin \psi_{S_j} = 0 \quad (\text{E.22})$$

zu einem Widerspruch geführt wird:

Aus Gl. (E.22) folgt:

$$\tan \psi_{S_j} = -\frac{{}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}}}{{}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}}}. \quad (\text{E.23})$$

Wird der Winkel  $\alpha_i$  als Richtung des Vektors  $\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}}$  im Inertialsystem  $\mathcal{I}$  eingeführt, gilt

$$\tan \alpha_i = \frac{{}^2\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}}}{{}^1\mathbf{s}'_{\lambda_{AS_i}}} \quad (\text{E.24})$$

und nach dem Einsetzen in Gl. (E.23):

$$\tan \psi_{S_j} = \frac{-1}{\tan \alpha_i} = \tan \left( \alpha_i + \frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{E.25})$$

Diese Gleichung ist für alle

$$\alpha_i = \psi_{Sj} + \frac{(2\zeta + 1)\pi}{2} \quad \text{mit } \zeta \in \mathbb{Z} \quad (\text{E.26})$$

erfüllt. Mit dem Sollschwimmwinkel  $\beta_{Si}$  gilt jedoch

$$\alpha_i = \psi_{Sj} + \beta_{Si}, \quad (\text{E.27})$$

sodass mit der Voraussetzung (E.1) folgt:

$$\alpha_i \neq \psi_{Sj} + \frac{(2k + 1)\pi}{2}. \quad (\text{E.28})$$

Diese Ungleichung steht im Widerspruch zur Lösung der Gl. (E.22), sodass die Ungleichung (E.18) auch dann stets erfüllt ist, wenn beide Summanden ungleich Null sind.

Daraus folgt, dass alle  $\det \mathbf{D}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und somit auch  $\det \tilde{\mathbf{H}}$  sowie  $\det \mathbf{H}$  ungleich Null sind und demnach die Inverse  $\mathbf{H}^{-1}$  existiert.

## E.2 Ergänzungen zur Sollseitenkraftberechnung

In diesem Abschnitt wird die theoretische Lösbarkeit des Gleichungssystems (3.38) für zwei- und dreigliedrige Fahrzeuge nachgewiesen, indem jeweils  $\det \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1} \neq 0$  gezeigt wird. Die Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1}$  hängt von der Fahrzeuggeometrie, den Massen und Trägheitsmomenten der Fahrzeugmodule und den Knickwinkeln  $\Delta\psi_i = \psi_{i+1} - \psi_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) ab. Im Falle eines zweigliedrigen Fahrzeugs gilt für die Determinante mit  $m = m_1 + m_2$  und dem Knickwinkel  $\Delta\psi_1 = \psi_2 - \psi_1$ :

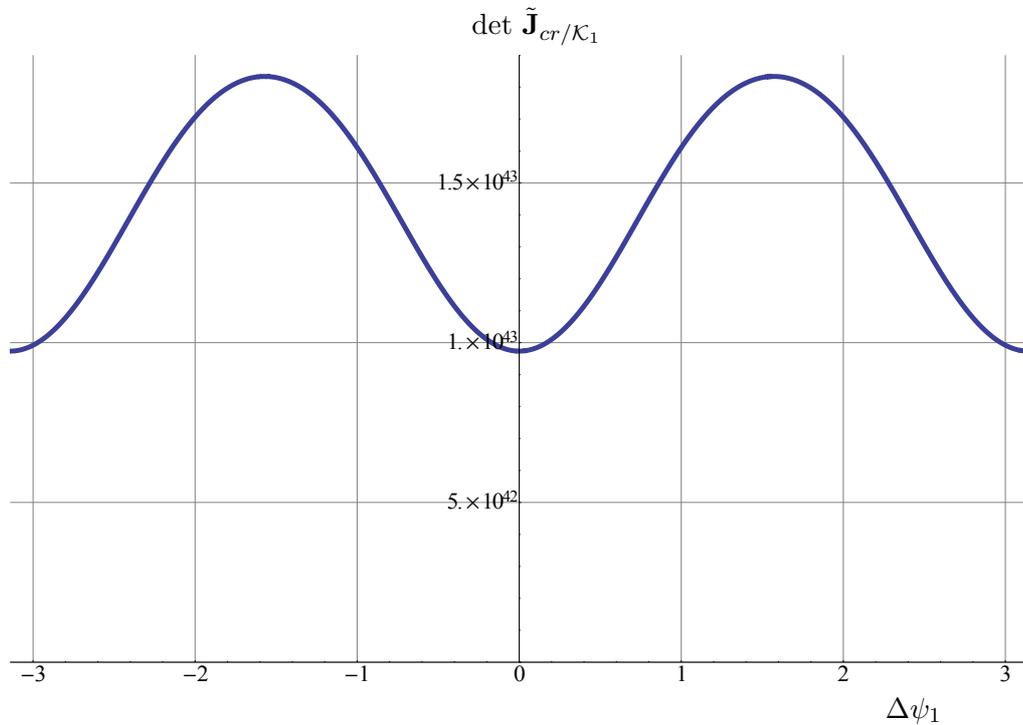
$$\begin{aligned} \det \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\mathcal{K}_1} = & 1/8 (l_0 + l_1) (2l_2 m + 2l_{K_2} (m_1 + m_2 \cos^2 \Delta\psi_1)) \\ & \left( 2 {}^z I_{K_1/\mathcal{K}_1} m (l_{K_2}^2 m_1 m_2 + {}^z I_{K_2/\mathcal{K}_2} m) + \right. \\ & \left. 2l_{G_1}^2 m_1 m_2 (\sin^2 \Delta\psi_1 l_{K_2}^2 m_1 m_2 + {}^z I_{K_2/\mathcal{K}_2} m) \right)^2. \quad (\text{E.29}) \end{aligned}$$

Die Massen  $m_i$ , die Trägheitsmomente  ${}^z I_{K_i/\mathcal{K}_i}$  sowie die Längen  $l_0, l_1, l_2$  und  $l_{K_2}$  sind stets  $> 0$ . Für die Quadrate der trigonometrischen Funktionen gilt  $\sin^2 \Delta\psi_1 \geq 0$  und  $\cos^2 \Delta\psi_1 \geq 0$ . Wird zur weiteren Vereinfachung  $\sin^2 \Delta\psi_1 = 0$  und  $\cos^2 \Delta\psi_1 = 0$  gesetzt, lässt sich die

Determinante nach unten wie folgt abschätzen:

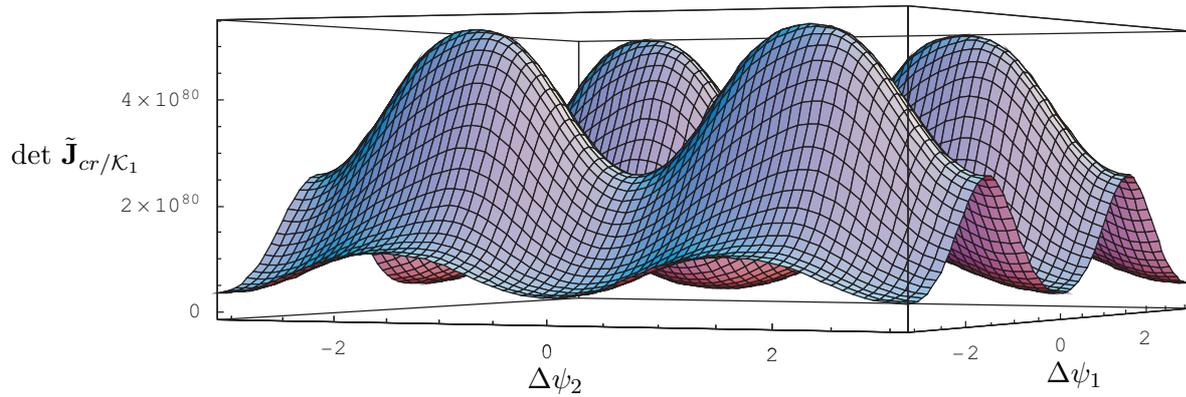
$$\det \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\kappa_1} > 1/8 (l_0 + l_1) (2l_2 m + 2l_{K_2} m_1) \left( 2 {}^z I_{K_1/\kappa_1} m (l_{K_2}^2 m_1 m_2 + {}^z I_{K_2/\kappa_2} m) + 2l_{G_1}^2 m_1 m_2 {}^z I_{K_2/\kappa_2} m \right)^2. \quad (\text{E.30})$$

In dieser Gleichung sind alle Terme und Faktoren  $> 0$ , sodass auch  $\det \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\kappa_1} > 0$  gilt. Folglich ist die theoretische Lösbarkeit des Gleichungssystems (3.38) für ein zweigliedriges Fahrzeug gesichert. Bild E.2 zeigt beispielhaft den periodischen Verlauf von  $\det \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\kappa_1}$  für die Parameter in Tabelle B.1 (S. 137) in Abhängigkeit von  $\Delta\psi_1$ .



**Bild E.2:** Determinante von  $\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\kappa_1}$  in Abhängigkeit vom Knickwinkel  $\Delta\psi_1$

Der Nachweis für dreigliedrige Fahrzeuge erfolgt in gleicher Weise. Bild E.3 zeigt beispielhaft den periodischen Verlauf von  $\det \tilde{\mathbf{J}}_{cr/\kappa_1}$  für die Parameter in Tabelle B.1 in Abhängigkeit von  $\Delta\psi_1$  und  $\Delta\psi_2$ . Dabei wurde angenommen, dass die Parameter des zweiten und dritten Fahrzeugmoduls identisch sind.



**Bild E.3:** Determinante von  $\tilde{\mathbf{J}}_{cr/\kappa_1}$  in Abhängigkeit von den Knickwinkeln  $\Delta\psi_1$  und  $\Delta\psi_2$