Skalenübergreifende Modellierung und Simulation des mechanischen Verhaltens von textilverstärktem Polypropylen unter Nutzung der XFEM

Der Fakultät Maschinenwesen
der Technischen Universität Dresden
zur
Erlangung des akademischen Grades
Doktoringenieur (Dr.-Ing.)
vorgelegte Dissertation

Dipl.-Ing. Markus Kästner
geboren am 8. Februar 1980 in Rochlitz

Tag der Einreichung: 30. Juni 2009
Tag der Verteidigung: 4. Dezember 2009

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Volker Ulbricht
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Hufenbach

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörpermechanik der Technischen Universität Dresden im Rahmen des durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft finanzierten Sonderforschungsbereiches 639 und wurde von der Fakultät Maschinenwesen als Dissertation angenommen.

Mein besonderer Dank gilt meinem akademischen Lehrer Prof. Dr.-Ing. habil. V. Ulbricht, der mich während dieser Zeit stets unterstützt, in außergewöhnlicher Form gefördert und mir Anregung und Gelegenheit zur Verwirklichung eigener Ideen gegeben hat.

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. W. Hufenbach für das Interesse an meiner Arbeit und die Bereitschaft zur Übernahme des zweiten Gutachtens. Als Sprecher des Sonderforschungsbereiches 639 hat er meinen Werdegang – auch durch die Aufnahme in das integrierte Graduiertenkolleg – geprägt und gefördert. Den am SFB beteiligten Kollegen danke ich für die gute Zusammenarbeit und die interessanten Einblicke in andere Fachgebiete.

Am Institut für Festkörpermechanik fand ich eine ideale Arbeitsumgebung vor. Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. H. Balke danke ich für die Motivation zur kritischen Hinterfragung elementarer Zusammenhänge der Technischen Mechanik und Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. K.-H. Modler für die Förderung meiner Arbeit. Meinen Kollegen danke ich für die Unterstützung, für interessante fachliche und nichtfachliche Diskussionen, Geburtstagsrunden, Fahrradtouren und für viele andere gemeinsame Erlebnisse. Ein spezieller Dank gilt Dr.-Ing. Jörg Brummund, der mir stets als Ratgeber und Diskussionspartner zur Verfügung stand. Meinem Kollegen Dr.-Ing. Georg Haasemann danke ich für die freundschaftliche Aufnahme in sein Arbeitszimmer und Herrn Dipl.-Ing. Martin Obst für den offenen wissenschaftlichen Gedankenaustausch. Mit ihren kreativen Ideen zur Probenherstellung, Versuchsdurchführung und mikromechanischen Simulation lieferten Frau Dr.-Ing. Karin Thielsch, Herr Dr.-Ing. Van Bac Pham und Herr Dipl.-Inf. Swen Blobel zahlreiche Impulse für meine Arbeit. Frau Dr.-Ing. Thielsch danke ich außerdem für die Auswertung der ARAMIS-Daten. Den Kollegen der Arbeitsgruppe Betriebsfestigkeit unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. habil. K.-G. Eulitz bin ich für die Bereitschaft, ihre Prüfmaschinen in die Hände eines Theoretikers zu geben, sehr dankbar.

Durch die Bereitstellung von Probekörpern ermöglichten Herr Prof. Dr. rer. nat. habil. G. Heinrich vom Leibniz-Institut für Polymerforschung und Dipl.-Ing. Christian Paul und Dipl.-Ing. Mirko Schade vom Institut für Texilmaschinen und textile Hochleistungswerkstofftechnik die Durchführung der Versuche an verstärktem und unverstärktem Polypropylen.

Schließlich danke ich meiner Familie für die Förderung und dir – liebe Katja – für deine Geduld und Unterstützung.

Dresden, im März 2010 Markus Kästner

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis . . . viii
Tabellenverzeichnis . . . viii
Glossar . . . ix
Abkürzungsverzeichnis . . . x
Symbolverzeichnis . . . xi

1 Einführung 1
1.1 Motivation und Zielstellung . . . 1
1.2 Faser-Kunststoff-Verbunde mit textiler Verstärkungsstruktur . . . 3

2 Skalenübergreifende kontinuumsmechanische Modellierung 5
2.1 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik . . . 5
2.1.1 Kinematik . . . 5
2.1.2 Bilanzgleichungen . . . 6
2.1.3 Materialgleichungen . . . 9
2.2 Klassifizierung von Materialverhalten und Materialmodellen . . . 11
2.2.1 Klassifizierung des mechanischen Materialverhaltens . . . 11
2.2.2 Klassen mechanischer Materialmodelle . . . 13
2.2.3 Eigenschaften geschwindigkeitsabhängiger und -unabhängiger Funktionale und Korrespondenzprinzip . . . 14
2.3 Mehrskalige Modellbildung und Berechnung des effektiven Materialverhaltens . . . 18
2.3.1 Skalenübergang – Mittelwerte, Äquivalenzkriterium und Randbedingungen . . . 22
2.3.2 Berechnung des effektiven linear elastischen Materialverhaltens . . . 26
2.3.3 Berechnung des effektiven nichtlinearen Materialverhaltens . . . 30

3 Phänomenologie des Materialverhaltens von Polypropylen 35
3.1 Experimentelle Untersuchung des Materialverhaltens von Polypropylen . . . 35
3.1.1 Messtechnik und Probekörper . . . 35
3.1.2 Versuchsprogramm . . . 36
3.1.3 Vorversuche . . . 38
3.1.4 Materialverhalten bei monotonen Belastungen . . . 40
3.1.5 Materialverhalten bei nichtmonotonen Belastungen . . . 44
3.2 Strukturelle Ursachen des beobachteten Materialverhaltens . . . 46
3.2.1 Morphologische Struktur . . . 46
3.2.2 Strukturelle Ursachen des mechanischen Verhaltens . . . 47

4 Modellierung des Materialverhaltens von Polypropylen 51
4.1 Einachsige lineare Viskoelastizität . . . 51
4.1.1 Dreiparametermodell . . . 52
4.1.2 Verallgemeinertes MAXWELL-Modell . . . 54

4.1.3 Parameteridentifikation linear viskoelastischer Spektren . . . 56
4.2 Einachsiges viskoplastisches Materialmodell für Polypropylen . . . 60
4.2.1 Materialmodell der Gleichgewichtsrelation . . . 60
4.2.2 Linear viskoelastisches Überspannungsmodell . . . 63
4.2.3 Nichtlinear viskoelastisches Überspannungsmodell . . . 65
4.2.4 Bewertung der Modelleigenschaften . . . 68
4.3 Mehrachsiges Materialmodell und FE-Implementierung . . . 70
4.3.1 Mehrachsige Verallgemeinerung des Materialmodells . . . 70
4.3.2 Einbindung des Materialmodells in eine physikalisch nichtlineare FE-Berechnung 77
4.3.3 Spannungsalgorithmus und algorithmisch konsistenter Tangentenmodul . . . 82
4.3.4 Validierung des Materialmodells . . . 86

5 Modellierung repräsentativer Volumenelemente mittels XFEM 89
5.1 Grundzüge der XFEM . . . 89
5.1.1 Anreicherung des Verschiebungsansatzes . . . 89
5.1.2 Lokalisierung von Grenzflächen . . . 91
5.1.3 Wahl der Anreicherungsfunktion für Materialgrenzen . . . 92
5.2 Formulierung von X-Elementen mit erweitertem Verschiebungsansatz . . . 93
5.2.1 X-Element . . . 95
5.2.2 Numerische Integration . . . 99
5.2.3 Mechanisches Verhalten von X-Elementen und Wahl der Integrationsordnung . 101
5.2.4 2X-Element . . . 105
5.3 Automatisierte Modellgenerierung . . . 106
5.3.1 Vorgehen . . . 106
5.3.2 Zerlegung des Integrationsbereichs und Identifikation der Materialgrenzen . . . 108
5.3.3 Assemblierung des Gleichungssystems . . . 113
5.3.4 Periodische Verschiebungsrandbedingungen für Homogenisierung . . . 117

6 Simulation des effektiven Materialverhaltens des Verbundes und experimentelle Verifikation 119
6.1 Simulation des effektiven Materialverhalten eines GF-PP-Verbundes mit unidirektionaler Verstärkung . . . 120
6.1.1 Effektives linear elastisches Materialverhalten . . . 120
6.1.2 Effektives inelastisches Materialverhalten . . . 123
6.2 Simulation des effektiven Materialverhaltens eines GF-PP-Verbundes mit Gewebeverstärkung . . . 125
6.2.1 Effektives linear elastisches Materialverhalten . . . 127
6.2.2 Effektives inelastisches Materialverhalten . . . 129

7 Zusammenfassung und Ausblick 131

A Fensterverfahren von EMRI und TSCHOEGL 145

B Analyse des Informationsgehalts realer Relaxationsversuche 149

Abbildungsverzeichnis

1.1 Zielstellung der Arbeit . . . 2
1.2 Beispiele für textile Verstärkungsstrukturen . . . 4

2.1 Zur Ermittlung von Gleichgewichtszuständen aus Relaxations- und Kriechversuchen . 11
2.2 Vier Klassen des Materialverhaltens . . . 12
2.3 Beispiele für rheologische Modelle der vier Klassen des Materialverhaltens . . . 14
2.4 Relative einachsige Dehnungsgeschichte . . . 15
2.5 Statische Fortsetzung einer beliebigen einachsigen Dehnungsgeschichte . . . 15
2.6 Verzögerte einachsige Dehnungsgeschichte . . . 16
2.7 Ermittlung des effektiven Materialverhaltens eines homogenen Ersatzkontinuums . . . 18
2.8 Schliffbild eines unidirektionalen Verbundes und Varianten von RVE-Modellen . . . 20
2.9 Mehrskalige Betrachtung des hierarchischen Werkstoffaufbaus von textilverstärktem Polypropylen . . . 20
2.10 Schliffbild eines mehrlagigen gewebeverstärkten Verbundes; Kennzeichnung des mesoskopisch als homogen betrachteten Rovingbereichs . . . 21
2.11 RVE und lokales Koordinatensystem . . . 22
2.12 Verformungsverhalten unter periodischen Randbedingungen . . . 24
2.13 Masterknoten zur Aufbringung der Randbedingungen für die Homogenisierung . . . 26
2.14 Beanspruchungszustände $\bar{\varepsilon}^{kl}$ zur Berechnung des effektiven elastischen Steifigkeitstensors $\bar{\mathbf{C}}$ . . . 29
2.15 Zugversuche bei verschiedenen Orientierungen $0° \leq \alpha \leq 90°$ der textilen Verstärkungsstruktur . . . 31
2.16 Transformation des makroskopischen einachsigen Spannungszustandes zur Aufbringung der Randbedingungen auf das RVE . . . 32

3.1 Versuchsaufbau und Einspannung der Probekörper . . . 36
3.2 Geometrie der Probekörper nach DIN EN ISO 3167 . . . 36
3.3 Vergleich von Nenn- und mit ARAMIS bestimmter Dehnung, Auswirkung auf den Spannungs-Dehnungsverlauf . . . 37
3.4 Systematik der Versuche . . . 38
3.5 Ergebnisse der Zugversuche bei Geschwindigkeiten von 1 und 100 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ . . . 39
3.6 In monotonen Zugversuchen mit konstanter Geschwindigkeit ermittelte Spannungs-Dehnungskurven für verschiedene Entnahmerichtungen der Probekörper . . . 40
3.7 Vergleich charakteristischer Spannungs-Dehnungskurven monotoner Zugversuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten . . . 41
3.8 Vergleich der gemittelten Spannungs-Dehnungskurven monotoner Zugversuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten bis zu einer maximalen Dehnung von $\varepsilon = 0,05$ . . . 42
3.9 Spannungs- und Temperatur-Zeitverläufe für zwei Relaxationsversuche mit Haltezeiten von 48 bzw. 58h . . . 43
3.10 Zur Ermittlung der Gleichgewichtsrelation . . . 44
3.11 Zyklischer Versuch mit Zwischenrelaxationen bei 10 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ . . . 45
3.12 Vergleich von zwei zyklischen Versuchen mit Zwischenrelaxationen bei 10 und 100 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ 45
3.13 Zyklische Versuch bei 10 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ . . . 46
3.14 Taktizität von Polypropylen . . . 48

3.15 Belastung und zugehöriger Spannungs-Zeitverlauf für Relaxationsversuch 48
3.16 Mikromechanische Motivation des viskoelastischen Materialverhaltens anhand eines Makromoleküls, vgl.Tobolsky (1967) 49

4.1 Dreiparametermodell der linearen Viskoelastizität 52
4.2 Verlauf des normierten Überspannungsanteils der Relaxationsfunktion 54
4.3 Verallgemeinertes MAXWELL-Modell 55
4.4 Dehnungs-Zeitverlauf eines realen Relaxationsversuchs 56
4.5 Beschränkung der zur Identifikation genutzten Daten 58
4.6 Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit auf Ergebnis der Parameteridentifikation . . . 59
4.7 Rheologisches Modell der endochronen Plastizität 60
4.8 Spannungs-Dehnungsverhalten eines endochronen Modells bei zyklischer Belastung . 61
4.9 Modellierung der Gleichgewichtshysterese durch ein endochrones Modell 62
4.10 Rheologisches Modell der Parallelschaltung von nichtlinearer Feder und endochronem Modell 62
4.11 Erweiterung des endochronen Modells durch ein nichtlinear elastisches Teilmodell - Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort 63
4.12 Rheologisches Gesamtmodell 63
4.13 Parameteridentifikation aus Relaxationsversuch - Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort 64
4.14 Parameteridentifikation aus Relaxations- und Zugversuch - Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort 65
4.15 Darstellung der Viskositäten als Funktion der Dehnung 66
4.16 Parameterstudie zum Einfluss der überspannungsabhängigen Viskositätsfunktion . . . 67
4.17 Vorhersage von Zugversuchen mit verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten bei Verwendung der spannungsabhängigen Viskositätsfunktion nach (4.45) - Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort 68
4.18 Bewertung der Modelleigenschaften in Relaxationsversuchen und Be- und Entlastungversuchen mit Haltezeiten – Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort 69
4.19 Bewertung der Modelleigenschaften bei zyklischer Beanspruchung - Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort 70
4.20 Darstellung des Verlaufs der Querkontraktionszahl für monotone Zug- und Relaxationsversuche 75
4.21 Iterative Lösung mittels NEWTON-RAPHSON-Verfahren 80
4.22 Prinzipieller Ablauf einer nichtlinearen FE-Rechnung 82
4.23 Simulation verschiebungsgesteuerter Zugversuche 86
4.24 Simulation kraftgesteuerter Zugversuche 87
4.25 Simulation von Relaxations- und Schubversuchen 88

5.1 X-Elemente und Knoten mit zusätzlichen Freiheitsgraden im Verlauf einer Materialgrenze 90
5.2 Identifikation von Grenzflächen mittels Parameterfunktion 91
5.3 Verzerrungssprung an einer Materialgrenze 92
5.4 Verlauf möglicher Anreicherungsfunktionen zur Modellierung des Verzerrungssprungs innerhalb eines ebenen zweidimensionalen finiten Elements 93
5.5 Verlauf der partiellen Ableitungen der Anreicherungsfunktion bei verschiedenen Verläufen der Materialgrenze innerhalb eines ebenen zweidimensionalen finiten Elements 94

5.6 Isoparametrisches Achtknotenelement . . . 95
5.7 Verzerrungsfreie Starrkörperbewegungen des X-Elements . . . 99
5.8 Geometrie der zur Integration genutzten Tetraeder in natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\eta}$ . . . 100
5.9 Aus zwei Materialien zusammengesetzter Stab der Länge l_0 . . . 102
5.10 Varianten der numerischen Integration in einem Stabelement mit erweitertem Verschiebungsansatz . . . 103
5.11 Verschiebungsverläufe in einem Stabelement mit erweitertem Verschiebungsansatz . . . 104
5.12 Deformationsverhalten des X-Elements . . . 104
5.13 Gebiet mit mehr als einer Materialgrenze . . . 106
5.14 Automatisierte Generierung eines XFEM-Modells . . . 107
5.15 Geometrische Unterteilung des Elementbereichs in $n^{\mathrm{M}} = 3$ Materialbereiche . . . 108
5.16 Fallunterscheidungen bei der automatisierten Generierung eines XFEM-Modells . . . 109
5.17 Vergleich von DELAUNAY- und VORONOI-Zerlegung für eine gegebene Punktmenge $\mathcal{P}$ 109
5.18 Diskretisierung der geometrischen Materialbereiche und Zerlegung in tetraederförmige Integrationsgebiete . . . 110
5.19 Ebene Materialgrenzfläche . . . 111
5.20 Zur Sicherung einer kompatiblen Tetraederzerlegung der Materialbereiche . . . 112
5.21 Approximation im Fall doppelt gekrümmter Materialgrenzflächen . . . 113
5.22 Sicherung der Kompatibilität des Verschiebungsfeldes bei beliebigen Konfigurationen von gewöhnlichen finiten Elementen, X- und 2X-Elementen . . . 114
5.23 Periodische Randbedingungen für zusätzliche Verschiebungsfreiheitsgrade . . . 117

6.1 Probekörper nach DIN EN ISO 527-4 . . . 119
6.2 Geometrie und numerische Modelle des RVE eines UD-Verbundes . . . 120
6.3 Vergleich der mit FEM und XFEM berechneten sechs Deformationsmoden $\bar{\varepsilon}^{kl}$ zur Bestimmung der effektiven elastischen Steifigkeiten, Darstellung der lokalen Spannungsfelder $\sigma_{kl}(\mathbf{y})$ . . . 121
6.4 Vergleich des berechneten effektiven linear elastischen Materialverhaltens mit experimentell bestimmten Spannungs-Dehungskurven für verschiedene Belastungsrichtungen 122
6.5 Zugversuch in Querrichtung des unidirektional verstärkten Polypropylens - Vergleich zwischen der Simulation und den experimentell für verschiedene Dehnraten ermittelten Spannungs-Dehnungskurven . . . 124
6.6 Zugversuch unter 45 Grad zur Verstärkungsrichtung des UD-Verbundes - Vergleich zwischen der Simulation und den experimentell für verschiedene Dehnraten ermittelten Spannungs-Dehnungskurven . . . 125
6.7 Einfluss der in Dickenrichtung gewählten Randbedingungen auf das Simulationsergebnis für Zugversuche senkrecht zur Faserrichtung . . . 126
6.8 Idealisierte Geometrie der Verstärkungsstruktur und XFEM-Modell . . . 126
6.9 Simulation von sechs Deformationsmoden $\bar{\varepsilon}^{kl}$ zur Bestimmung der effektiven elastischen Steifigkeiten, Darstellung der lokalen Spannungsfelder $\sigma_{kl}(\mathbf{y})$ . . . 128
6.10 Vergleich des berechneten effektiven linear elastischen Materialverhaltens mit experimentell bestimmten Spannungs-Dehungskurven für verschiedene Belastungsrichtungen 129
6.11 Zugversuch unter 45 Grad zu den Orthotropieachsen des gewebeverstärkten Verbundes - Vergleich zwischen der Simulation und den experimentell für verschiedene Dehnraten ermittelten Spannungs-Dehnungskurven . . . 130

6.12 Darstellung der lokalen Spannungsfelder für einen Zugversuch unter 45 Grad zu den Orthotropieachsen des gewebeverstärkten Verbundes 130

A.1 Diskretes Relaxationsspektrum und Relaxationsfunktionen 146

B.1 Auswirkung einer zu kurzen Messzeit bzw. einer nicht ausreichenden Auflösung des Messsignals 149
B.2 Ergebnis der Parameteridentifikation bei einer Belastungsgeschwindigkeit $v_{\mathrm{Trav}} = 100 \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}}$ 150
B.3 Ergebnis der Parameteridentifikation bei höheren Belastungsgeschwindigkeiten 151
B.4 Analyse des Einflusses der Versuchsgeschwindigkeit auf den Informationsgehalt von realen Relaxationsversuchen mittels kontinuierlicher Spektren 152

Tabellenverzeichnis

2.1 Indextransformation für VOIGT-Notation 27

5.1 Fallunterscheidung zur Bestimmung des Elementtyps und Zuweisung der Materialparameter 108

Glossar

amorph	Völlig ungeordnete, unregelmäßige Werkstoffstruktur	47
Duroplast	Polymer, das aus stark vernetzten Makromolekülen besteht	46
Elastizität	Geschwindigkeitsunabhängiges Materialverhalten ohne Hysterese	12
Fading Memory	Eigenschaft des Funktionals der Überspannung; Einfluss der Dehnungsgeschichte nimmt ab, je weiter das Ereignis zurückliegt	14
Filament	Einzelfaser; Durchmesser im Mikrometerbereich	3
Geschwindigkeitsabhängigkeit	Materialeigenschaft; Abweichung eines mit endlicher Dehnrate bestimmten Spannungs-Dehnungsverlaufs von der Gleichgewichtsrelation	12
Gewebe	Textiles Halbzeug mit rechtwinkligen Fadenkreuzungen	3
Gleichgewichtshysterese	Materialeigenschaft; Hysterese der Gleichgewichtsrelation für zyklische Belastungen	12
Gleichgewichtsrelation	Menge aller Gleichgewichtsspannungen in einem deformationsgesteuerten Experiment	12
Gleichgewichtszustand	Zustand, gegen den ein passives System bei unveränderten äußeren Bedingungen strebt	11
inelastisch	Von der Verzerrungsgeschichte abhängiges Materialverhalten	13
Isotropie	Form der Materialsymmetrie, bei der das Materialverhalten richtungsunabhängig ist	28
kristallin	Geordnete, regelmäßige Werkstoffstruktur	47
Makroskala	Skalenebene für mehrskalige Betrachtung des Verbundes; Verbundstruktur und Bauteil	1
Mesoskala	Skalenebene für mehrskalige Betrachtung des Verbundes; konsolidierte Filamentstränge (Rovings) und reine Matrixbereiche	1
Mikroskala	Skalenebene für mehrskalige Betrachtung des Verbundes; elementare Verbundbestandteile Filament und Matrix	1
Orthotropie	Form der Materialsymmetrie mit drei zueinander senkrechten Symmetrieebenen	27

Plastizität	Geschwindigkeitsunabhängiges Materialverhalten mit Hysterese	12
Roving	Filamentstrang mit mehreren Tausend Filamenten	3
teilkristallin	Werkstoffstruktur bestehend aus kristallinen und amorphen Bereichen	47
Thermoplast	Polymer, das aus unvernetzten, linearen oder verzweigten Makromolekülen besteht	46
transversale Isotropie	Form der Materialsymmetrie, bei der das Materialverhalten eine Vorzugsrichtung aufweist, in der Ebene senkrecht zu dieser Vorzugsrichtung jedoch richtungsunabhängig ist	27
Überspannung	Spannungsdifferenz zwischen den zu ein und derselben Dehnung gehörenden Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtszuständen	12
Viskoelastizität	Geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten ohne Gleichgewichtshysterese	13
Viskoplastizität	Geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten mit Gleichgewichtshysterese	13

Abkürzungsverzeichnis

CT	Computertomografie	119
FEM	Finite-Elemente-Methode	2
FKV	Faser-Kunststoff-Verbunde	1
GF	Glasfaser	1
PP	Polypropylen	1
RVE	repräsentatives Volumenelement	2
UD	unidirektional	119
XFEM	erweiterte Finite-Elemente-Methode	2

Allgemeine Notation

a	Skalar
$\mathbf{a}$	Tensor 1. Stufe (Vektor)
$\underline{\mathbf{a}}$	Vektor
$\mathbf{A}$	Tensor 2. Stufe
$\mathbf{A}^{\text{dev}}$	Deviator
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$	Matrix
$[\mathbf{A}]$	Matrixdarstellung der Koordinaten einer tensoriellen Größe
$\hat{(\,)}$	Diskrete Werte einer Feldgröße, z. B. Knoten- oder Messwerte
$(\,)^T$	Transposition
$(\,)^{-1}$	Inverse
$\det(\mathbf{A})$	Determinante
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Einfach verjüngendes Produkt
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	Doppelt verjüngendes Produkt
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Kreuzprodukt
$\|\|\mathbf{A}\|\|$	Norm einer tensoriellen Größe
$\|\mathbf{a}\|$	Betrag
$\dot{(\,)}$	Zeitableitung
$\frac{\partial(\,)}{\partial a} = (\,)_{,a}$	Partielle Ableitung
$\boldsymbol{\nabla}(\,)$	Gradient
$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\,)$	Divergenz
$\bar{(\,)}$	Effektive Größe des Ersatzkontinuums
$\langle\,\rangle$	Auf das Volumen des RVE bezogener Mittelwert

Symbolverzeichnis

A^{y_i}	Flächeninhalt der i-ten Seitenfläche des RVE	26
A_0	Querschnittsfläche der Probe im Ausgangszustand	36
α_G	Materialparameter des mehrachsigen nichtlinear elastischen Modells	72
α_K	Materialparameter des mehrachsigen nichtlinear elastischen Modells	72
α	Materialparameter des einachsigen nichtlinear elastischen Modells	61
$\hat{\mathbf{a}}_i$	Vektor der zusätzlichen Freiheitsgrade des i-ten Knotens	89
$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}}$	Matrix der partiellen Ableitungen der Formfunktionen	97
$\underline{\underline{\mathbf{B}}}$	Verzerrungs-Verschiebungsmatrix	77
β_G	Materialparameter des mehrachsigen endochronen Modells	72
β_K	Materialparameter des mehrachsigen endochronen Modells	72
β	Materialparameter des einachsigen endochronen Modells	60
$\hat{\mathbf{b}}_i$	Vektor der zusätzlichen Freiheitsgrade des i-ten Knotens in einem 2X-Element	105

$\bar{\mathbf{C}}$	$\bar{C}_{ijkl}$	Effektiver Steifigkeitstensor	28
${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{i}$		Materialtangentensteifigkeitsmatrix des i-ten Iterationsschritts	80
$\bar{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^{\mathrm{V}}$		Effektive Steifigkeitsmatrix in VOIGTscher Notation	29
$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\mathrm{V}}$		Steifigkeitsmatrix in VOIGTscher Notation	27
$\mathbf{C}$	C_{ijkl}	Steifigkeitstensor vierter Stufe	27
c_{n_z}		Größte im Zugversuch zu identifizierende Relaxationsstärke	59
c_i		Relaxationsstärke des i-ten MAXWELL-Elements	52
$\underline{\mathbf{c}}$		Vektor der Relaxationsstärken	59
δ_H		Vektornorm des materiellen Verschiebungsgradienten	6
δ_{i}		Spezifische innere Dissipationsleistung	9
$\hat{\underline{\mathbf{d}}}$		Elementverschiebungsvektor	77
d		Charakteristische Länge einer Inhomogenität	18
E_1		Federsteifigkeit des einachsigen nichtlinear elastischen Modells	61
E_2		Federsteifigkeit des einachsigen endochronen Modells	62
$\bar{E}_{11}^{45}$		Effektiver E-Modul in x_1-Richtung; Zugversuch unter 45 Grad zur lokalen Koordinatenrichtung y_1	122
$\bar{E}_{11}$		Effektiver E-Modul in x_1-Richtung	122
$\bar{E}_{22}$		Effektiver E-Modul in x_2-Richtung	122
$\bar{E}_{33}$		Effektiver E-Modul in x_3-Richtung	122
E		Elastizitätsmodul	51
${}^{t+\Delta t}\Delta\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i}$		Verzerrungsinkrement des i-ten Iterationsschritts	84
$\dot{\varepsilon}_0$		Dehnrate im Belastungspfad eines Relaxationsversuchs	56
$\dot{\varepsilon}$		Dehnrate	12
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor	8
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$		Virtueller Verzerrungstensor	8
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ij}$		Deformationsmoden zur Berechnung effektiver elastischer Steifigkeiten	28
$\mathbf{e}$	e_{ij}	Deviator des Verzerrungstensors	71
$\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$		Virtueller effektiver Verzerrungstensor	22
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$		Effektiver Verzerrungstensor	22
ε^{e}		Elastische Dehnung	52
ε_{q}		Querdehnung	35
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\tilde{\varepsilon}_{ij}$	Effektiver Verzerrungstensor in gedrehtem RVE-Koordinatensystem	32
$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t}$		Relative Verzerrungsgeschichte	14
$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t+\delta}$		Relative Darstellung der statischen Fortsetzung einer beliebigen Verzerrungsgeschichte	15
$\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\delta}$		Statische Fortsetzung einer beliebigen Verzerrungsgeschichte	15
$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$		Vektordarstellung des Verzerrungstensor für FE-Formulierung	77
$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t\alpha}$		Verzögerte relative Verzerrungsgeschichte	16

$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{V}}$		Vektordarstellung des Verzerrungstensors in VOIGTscher Notation	27
$\boldsymbol{\varepsilon}$	ε_{ij}	Infinitesimaler Verzerrungstensor	6
$\tilde{\eta}_G^i$		Deviatorischer Anteil der nichtlinearen Viskositätsfunktion des i-ten viskosen Elements	73
$\tilde{\eta}_K^i$		Volumetrischer Anteil der nichtlinearen Viskositätsfunktion des i-ten viskosen Elements	73
$\hat{\eta}$		In einem Zugversuch bestimmte Viskosität	57
$\tilde{\eta}_i$		Nichtlineare Viskositätsfunktion des i-ten viskosen Elements	71
$\boldsymbol{\eta}$		Natürliche Tetraederkoordinaten	100
η_i		Viskosität des i-ten MAXWELL-Elements	51
F		Anreicherungsfunktion	89
$\mathbf{F}^{y_i}$		Kraftvektor eines Masterknotens zur Steuerung der Deformation des RVE	25
$\mathfrak{F}^{\mathrm{eq}}$		Funktional der Gleichgewichtsspannung	13
$\mathfrak{F}^{\mathrm{ov}}$		Funktional der Überspannung	13
$\mathfrak{F}$		Spannungsfunktional	10
f		Spezifische freie Energie	9
f^{end}		Spezifische freie Energie des endochronen Modells	75
$\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{e}}$		Vektor der äußeren Knotenlasten	78
f^{e}		Spezifische freie Energie des nichtlinear elastischen Teilmodells	72
$\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{i}}$		Vektor der inneren Knotenlasten	78
$f^{\mathrm{ov},i}$		Spezifische freie Energie des i-ten nichtlinear viskosen Elements	75
$\mathbf{f}$		Volumenkraftdichte	6
$\hat{\varphi}_i$		Knotenwerte der Parameterfunktion zur Lokalisierung einer Materialgrenze	91
φ		Parameterfunktion zur Lokalisierung einer Materialgrenze	91
G_1		Schubmodul des mehrachsigen nichtlinear elastischen Modells	72
G_2		Schubmodul des mehrachsigen endochronen Modells	72
G_i^{ov}		Schubmodul des i-ten nichtlinear viskosen Elements	73
Γ		Materialgrenze	91
H		Entropiezufuhr	8
$\mathbf{H}$		Materieller Verschiebungsgradient	5
$\mathcal{I}_{kl}$		Menge der gemeinsamen Eckpunkte der Materialbereiche k und l	110
$\mathbf{I}$	δ_{ij}	Einheitstensor	28
$\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square}$		Jacobimatrix des Achtknotenelements	96
$\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\triangle}$		Jacobimatrix des Tetraeders	100
$J^{\square}$		Determinante der Jacobimatrix des Achtknotenelements	97
$J^{\triangle}$		Determinante der Jacobimatrix des Tetraeders	100

K_1		Kompressionsmodul des mehrachsigen nichtlinear elastischen Modells	72
K_2		Kompressionsmodul des mehrachsigen endochronen Modells	72
$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}}^{\mathrm{E}}$		Elementtangentensteifigkeitsmatrix	94
K_i^{ov}		Kompressionsmodul des i-ten nichtlinear viskosen Elements	73
${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}}^{i}$		Tangentensteifigkeitsmatrix des i-ten Iterationsschritts	79
$\mathcal{K}$		Materieller Körper	5
k_0		Materialparameter der nichtlinearen Viskositätsfunktion	66
$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$		Operatormatrix für diskrete Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen	96
L		Charakteristische Länge eines Bauteils	18
l		Charakteristische Länge des RVE	19
λ		Charakteristische Länge der Belastung eines Bauteils	18
l_{mess}		Messlänge der Probe, entspricht Abstand der Klemmen im Ausgangszustand	36
$\mathbf{l}_P$		Drehimpulsvektor bzgl. des Punktes P	7
M^{y_i}		Masterknoten zur Steuerung der Deformation des RVE	25
m		Masse	5
N_i		Formfunktion des i-ten Knotens	77
$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{N}}}}}$		Matrix der Formfunktionen	77
$\mathbf{n}^{\Gamma}$		Normalenvektor der Materialgrenze	93
n^{G}		Anzahl der Materialgrenzen in einem Element	107
n^{Int}		Anzahl der Integrationspunkte in einem Tetraeder	101
$n^{\mathrm{K,E}}$		Anzahl der Knoten eines Elements	77
n^{K}		Anzahl der Knoten	89
n^{M}		Anzahl der Materialbereiche in einem Element	107
n^{R}		Anzahl der Rovings in einem RVE-Modell	106
n^{S}		Anzahl der Rovings die von einem Element geschnitten werden	107
n^{T}		Anzahl der Tetraeder in einem Element	94
ν		Querkontraktionszahl	73
n_{v}		Anzahl der MAXWELL-Elemente	54
$\mathbf{n}$	n_i	Nach außen gerichteter Normaleneinheitsvektor an der Oberfläche des materiellen Körpers	6
$\mathcal{P}$		Zufallsverteilte Punktmenge in der Ebene	109
P_{e}		Mechanische Leistung der am materiellen Körper angreifenden äußeren Lasten	8
P_{i}		Spannungsleistung	8
$\mathbf{p}$		Impulsvektor	6
$\mathcal{Q}_i^{\mathrm{M}}$		Menge der Eckpunkte des i-ten Materialbereichs	110

Q		Dem materiellen Körper von außen zugeführter Wärmestrom	8
$\mathbf{q}^{\text{end}}$	q_{ij}^{end}	Tensorielle innere Variable des endochronen Modells	71
q^{end}		Innere Variable des einachsigen endochronen Modells	60
$\mathbf{q}_i$		Innere Variable, Zustandsvariable	10
$\mathbf{q}^{\text{ov},i}$	$q_{ij}^{\text{ov},i}$	Tensorielle innere Variable des i-ten MAXWELL-Elements	71
q_i^{ov}		Innere Variable des i-ten MAXWELL-Elements	52
$\mathbf{q}$		Wärmestromdichtevektor	8
R'^{ov}		Gedächtnisfunktion	53
R^{ov}		Überspannungsanteil der Relaxationsfunktion	53
R		Relaxationsfunktion	52
ρ		Dichte	6
r		Wärmequelle im Inneren des materiellen Körpers	8
Σ		Entropieproduktion	8
S		Entropie des materiellen Körpers	8
${}^{t+\Delta t}\underline{\Delta\boldsymbol{\sigma}}^{i}$		Spannungsinkrement des i-ten Iterationsschritts	80
s_0		Materialparameter der nichtlinearen Viskositätsfunktion	66
s		Zeitdifferenz zwischen dem aktuellen und einem in der Vergangenheit liegenden Zeitpunkt	14
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$		Effektiver Spannungstensor	22
$\mathbf{s}$	s_{ij}	Deviator des Spannungstensors	71
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{end}}$	σ_{ij}^{end}	Spannungstensor des endochronen Modells	71
σ^{end}		Spannung des einachsigen endochronen Modells	60
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{eq}}$		Gleichgewichtsspannung	11
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{e}}$	σ_{ij}^{e}	Spannungstensor des nichtlinear elastischen Modells	71
σ^{e}		Spannung des einachsigen nichtlinear elastischen Modells	61
σ_{i}		Spezifische Entropieproduktion	9
$\hat{\sigma}$		Gemessene Spannung in einem Zugversuch	57
σ_i^{ov}		Überspannung des i-ten MAXWELL-Elements	54
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{ov},i}$	$\sigma_{kl}^{\text{ov},i}$	Überspannungstensor des i-ten MAXWELL-Elements	71
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{ov}}$		Überspannung	12
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	$\tilde{\sigma}_{ij}$	Effektiver Spannungstensor in gedrehtem RVE-Koordinatensystem	32
$\underline{\boldsymbol{\sigma}}$		Vektordarstellung des Spannungstensors für FE-Formulierung	77
$\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{V}}$		Vektordarstellung des Spannungstensors in VOIGTscher Notation	27
$\boldsymbol{\sigma}$	σ_{ij}	(CAUCHYscher) Spannungstensor	7
s_{Trav}		Traversenweg	35
s		Spezifische Entropie	9
T		Kinetische Energie des materiellen Körpers	8
Δt_0		Zeitdauer der Lastapplikation eines Relaxationsversuchs	56

Δt		Zeitschrittweite	78
$\tilde{\tau}_i$		Verschobene Relaxationszeit des i-ten viskosen Elements	66
τ_i		Relaxationszeit des i-ten MAXWELL-Elements	54
$\underline{\boldsymbol{\tau}}$		Vektor der Relaxationszeiten	59
τ		Zeitvariable zur Beschreibung der zurückliegenden Verzerrungsgeschichte	10
$\mathbf{t}^{\Gamma}$		Tangentenvektor der Materialgrenze	93
$t_{\mathrm{h_{ZR}}}$		Verkürzte Haltezeit für zyklische Versuche mit Zwischenrelaxationen	43
ϑ		Absolute Temperatur	9
t_{h}		Haltezeit im Relaxationsversuch	42
t_k^{o}		Obere Intervallgrenze für Parameteridentifikation nach EMRI und TSCHOEGL	57
t_k^{u}		Untere Intervallgrenze für Parameteridentifikation nach EMRI und TSCHOEGL	57
$\mathbf{t}$	t_i	Spannungsvektor an der Oberfläche des materiellen Körpers	6
U		Innere Energie des materiellen Körpers	8
${}^{t+\Delta t}\Delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^i$		Verschiebungsinkrement des i-ten Iterationsschritts	80
$\underline{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}}}$		Vektordarstellung des Verschiebungsgradienten bzgl. der natürlichen Koordinaten	97
$\underline{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}}$		Vektordarstellung des Verschiebungsgradienten	96
${}^{t+\Delta t}\delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^i$		Verschiebungszuwachs des i-ten Iterationsschritts	79
$\delta\mathbf{u}$		Virtueller Verschiebungsvektor	8
$\mathbf{u}^{y_i}$		Verschiebungsvektor eines Masterknotens zur Steuerung der Deformation des RVE	25
$\mathbf{u}^{\mathrm{P}}$		Vektor der periodischen Randverschiebungen	24
u		Spezifische innere Energie	8
$\hat{\mathbf{u}}_i$		Verschiebungsvektor des i-ten Knotens	89
$\underline{\hat{\mathbf{u}}}$		Verschiebungsvektor des Gesamtmodells	78
$\mathbf{u}$	u_i	Verschiebungsvektor	5
V^{E}		Elementvolumen	94
V_i^{T}		Volumen des i-ten Tetraederbereichs	94
$\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{S}}$		Vektor der Schnittvolumina	107
V_Y		Volumen des RVE	22
V		Volumen	5
v_{F}		Faservolumengehalt	120
$\mathbf{v}$		Geschwindigkeitsvektor	6
δW		Virtuelle Arbeit	8
δW_{e}		Virtuelle Arbeit der äußeren Lasten	8
δW_{i}		Virtuelle Arbeit der inneren Lasten	8
δW_{t}		Virtuelle Arbeit der Trägheitslasten	8

$\mathbf{X}$		Materieller Ortsvektor	5
$\boldsymbol{\xi}$		Natürliche Elementkoordinaten	95
$\mathbf{x}$		Räumlicher Ortsvektor	5
Y		RVE	22
$\mathbf{y}$	y_i	Lokale RVE-Koordinaten	22
$\boldsymbol{\zeta}$		Natürliche Koordinaten für Approximation einer Materialgrenze	112
z		Bogenlänge	16

1 Einführung

Verbundwerkstoffe

Verbundwerkstoffe bieten durch die Kombination von zwei oder mehr verschiedenen konstitutiven Bestandteilen die Möglichkeit, Werkstoffe zu entwickeln, deren Eigenschaften präzise an die Anforderungen der jeweiligen Anwendung angepasst sind. Eine Klasse von Verbundwerkstoffen, die aufgrund ihrer guten mechanischen Eigenschaften in einem immer größer werdenden Spektrum technischer Anwendungen zum Einsatz kommt, sind Faser-Kunststoff-Verbunde (FKV). Bei diesem Verbundwerkstoff werden hochfeste und -steife Verstärkungsfasern in einer polymeren Matrix eingebettet. Dabei nutzt man die Eigenschaft zahlreicher Werkstoffe, als Faser eine deutlich höhere Steifigkeit und insbesondere Festigkeit aufzuweisen als in kompakter Form. Zur Herstellung schalenförmiger Bauteile kommen dabei häufig Faserbündel zum Einsatz, die zu einem textilen Halbzeug weiterverarbeitet worden sind.

1.1 Motivation und Zielstellung

Motivation

Da das mechanische Verhalten von FKV mit textiler Verstärkungsstruktur entscheidend durch die Eigenschaften der einzelnen Komponenten und durch die Geometrie der Faserverstärkung bestimmt wird, führt die Bewertung verschiedener Werkstoffvarianten auf der Basis einer experimentellen Charakterisierung des mechanischen Verhaltens des Verbundes zu einem erheblichen Aufwand.
Um den Umfang der experimentellen Untersuchungen zukünftig auf Versuche an den Verbundkomponenten beschränken zu können, wird in dieser Arbeit eine skalenübergreifende Modellierung und Simulation des Werkstoffverhaltens vorgeschlagen, die ausgehend von den konstitutiven Eigenschaften der Verbundbestandteile (Mikroskala) und ihrer geometrischen Anordnung im Verbund (Mesoskala) die Vorhersage des effektiven Materialverhaltens des Verbundwerkstoffs (Makroskala) ermöglicht (Abb. 1.1). Zur besseren Ausschöpfung des Leichtbaupotenzials ist dabei neben der Vorhersage effektiver elastischer Kennwerte auch die Simulation des resultierenden inelastischen Materialverhaltens erforderlich.
Eine wesentliche Ursache für Nichtlinearitäten des Materialverhaltens von Verbundwerkstoffen stellen Schädigungsprozesse dar, die Gegenstand zahlreicher aktueller Forschungsarbeiten sind. Weiterhin ist davon auszugehen, dass sich das inelastische Materialverhalten der polymeren Matrices auch auf den faserverstärkten Verbund auswirkt. In Hufenbach (2007) wird z. B. eine deutliche Dehnratenabhängigkeit der Steifigkeit von glasfaserverstärkten Epoxydharzen beschrieben, insbesondere dann, wenn die Belastung nicht in Richtung der Verstärkungsfasern erfolgt. Dieser Effekt sollte sich für den hier betrachteten Thermoplast Polypropylen noch verstärken.

Zielstellung

Zielstellung dieser Arbeit ist daher die Entwicklung und Anwendung einer skalenübergreifenden Methodik zur Simulation des effektiven mechanischen Verhaltens textilverstärkter Verbunde. Der Einfluss des inelastischen Verhaltens des Matrixmaterials auf den Verbundwerkstoff soll anhand verschiedener Glasfaser (GF)-Polypropylen (PP)-Verbunde untersucht werden.
Zur Umsetzung der vorgeschlagenen Berechnungsstrategie ist entsprechend Abb. 1.1 zunächst die experimentelle Untersuchung und mathematische Modellierung des mechanischen Verhaltens der Verbundkomponenten erforderlich. Während für die Glasfasern isotropes, linear elastisches Materialverhalten vorausgesetzt wird, führt die experimentelle Charakterisierung von Polypropylen auf ein iso-

tropes, viskoplastisches Materialverhalten, dessen Modellierung den ersten Schwerpunkt der Arbeit bildet.

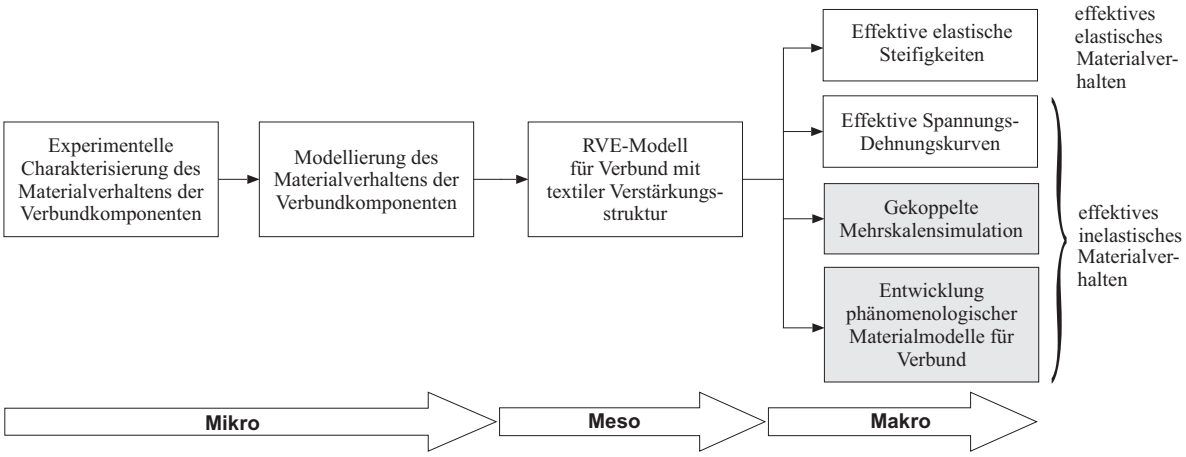


Abbildung 1.1: Zielstellung der Arbeit

Neben den Materialmodellen der Verbundkomponenten wird für die Berechnung des effektiven mechanischen Verhaltens ein Modell ihrer geometrischen Anordnung innerhalb des Verbundes benötigt. Während für einfache, kugelförmige oder elliptische Einschlüsse analytische Lösungen für die lokalen Spannungs- und Verzerrungsfelder vorliegen, ist aufgrund der textilen Verstärkung die numerische Modellierung eines charakteristischen Ausschnitts der Werkstoffstruktur erforderlich, der als repräsentatives Volumenelement (RVE) bezeichnet wird. Dabei führt die Komplexität der inneren Struktur des Werkstoffs zu einem erheblichen Aufwand bei der Erstellung der erforderlichen Modelle, wenn die gewöhnliche Finite-Elemente-Methode (FEM) eingesetzt wird. Im zweiten Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit wird daher die erweiterte Finite-Elemente-Methode (XFEM) zur Modellierung von Verbundwerkstoffen adaptiert. Sie ermöglicht durch die lokale Anreicherung des Verschiebungsansatzes der FEM die Modellierung von Steifigkeitssprüngen unter Verwendung eines regelmäßigen Berechnungsnetzes. Die Erstellung der XFEM-Modelle erfolgt ausgehend von der dreidimensionalen Geometrie der Verstärkungsstruktur des RVE mithilfe einer Routine zur automatischen Modellgenerierung.
Die damit zur Verfügung stehenden RVE-Modelle werden unter Nutzung entsprechender Randbedingungen und Äquivalenzkritierien, die aus der Homogenisierungstheorie folgen, zur Simulation des effektiven elastischen und inelastischen Materialverhaltens des Verbundes eingesetzt. Neben der Berechnung effektiver Spannungs-Dehnungskurven für homogene Beanspruchungszustände bilden diese RVE-Modelle auch die Grundlage für Verfahren der gekoppelten Mehrskalensimulation im Fall inhomogener Beanspruchungen (vgl. Kapitel 2). Die aus der skalenübergreifenden Modellierung und Simulation folgenden Erkenntnisse können außerdem in die Entwicklung mikromechanisch motivierter, phänomenologischer Materialgesetze für den Verbund einfließen (Abb. 1.1).

Gliederung der Arbeit

Nach einer Einführung zu FKV mit textiler Verstärkung werden in Kaptitel 2 die wesentlichen Grundlagen der Berechnung des effektiven mechanischen Verhaltens von Verbundwerkstoffen behandelt. In Kapitel 3 wird anschließend die experimentelle Charakterisierung des unverstärkten Polypropylens in monotonen Zug-, Relaxations- und zyklischen Versuchen beschrieben. Die auf der Grundlage dieser Experimente durchgeführte Formulierung eines phänomenologischen Materialmodells für

Polypropylen ist Inhalt von Kapitel 4. Das Kapitel 5 gibt einen Überblick zur XFEM-Modellierung von Verbundwerkstoffen mit komplexer textiler Verstärkung. Schließlich werden die Methoden zur Berechnung des effektiven Materialverhaltens mit der erweiterten Finiten-Elemente-Methode und den Materialmodellen der Verbundbestandteile kombiniert und zur Simulation des Materialverhaltens von zwei Werkstoffbeispielen angewendet (Kapitel 6). Die Verifikation der Berechnungsergebnisse erfolgt anhand experimenteller Daten für den Verbund. Abschließend werden die wesentlichen Erkenntnisse der Arbeit in Kapitel 7 zusammengefasst. Dabei wird auch auf weiterführende Fragestellungen hingewiesen.

1.2 Faser-Kunststoff-Verbunde mit textiler Verstärkungsstruktur

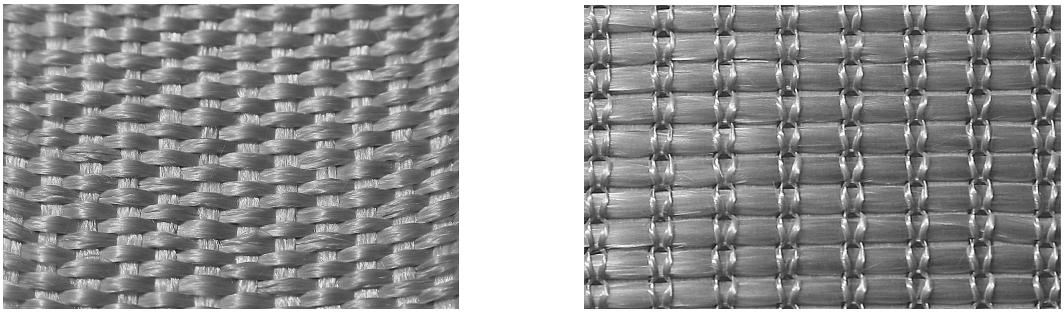
Faserwerkstoffe

Faser-Kunststoff-Verbunde kombinieren Verstärkungsfasern mit einer polymeren Matrix. Wie eingangs erwähnt, nutzt man dabei die Eigenschaft zahlreicher Werkstoffe, in Faserform eine deutlich höhere Steifigkeit und Festigkeit aufzuweisen als in kompakter Form. Dies ist bei polymeren Werkstoffen hauptsächlich auf die Ausrichtung der Molekülketten während des Herstellungsprozesses der Fasern, bei kristallinen Materialien dagegen auf eine Verringerung der Defekthäufigkeit zurückzuführen.
Glasfasern verbinden gute mechanische Eigenschaften mit niedrigen Kosten und werden deshalb, mit Ausnahme von Hochleitstungsverbundwerkstoffen, häufig als Verstärkung in FKV eingesetzt. Hauptbestandteil der Glasfaser ist, neben anderen Oxiden, Siliziumoxid. Im Herstellungsprozess werden die Oxide aufgeschmolzen und die Fasern durch eine Lochplatte abgezogen. Während des Abziehens trägt man Schlichten zum Schutz der Filamentoberfläche und zur Beeinflussung der späteren Faser-Matrix-Grenzflächen auf. Die Einzelfasern mit Durchmessern zwischen 3 und 25µm werden schließlich zu Filamentsträngen zusammengefasst, aufgewickelt und getrocknet. Je nach Zusammensetzung der Oxidmischung unterscheidet man verschiedene Fasertypen, die sich auch in ihren Eigenschaften unterscheiden. Glasfasern besitzen eine hohe Festigkeit, aber geringe Steifigkeit. Aufgrund ihrer amorphen Struktur sind sie im Unterschied zu anderen Verstärkungsfasern isotrop.
Für Anwendungen in denen die Steifigkeit der Glasfasern nicht ausreichend ist, verwendet man meist Kohlefasern, die aus verschiedenen Vorstufen, Fasern aus Polyacrylnitril oder Petroleum, durch schrittweise Wärmebehandlung zur Erhöhung des Kohlenstoffgehalts gewonnen werden. Die zwischen 4 und 11µm starken Fasern bestehen aus einzelnen Graphenschichten. Starke kovalente Kohlenstoffbindungen innerhalb dieser Schichten bestimmen die Eigenschaften der Kohlefaser in entscheidendem Maße. Deshalb variieren Festigkeit und Steifigkeit abhängig von der Ausrichtung der Graphenschichten in der Faser in einem breiten Spektrum.
Neben diesen beiden hauptsächlich eingesetzten Faserarten existieren eine Vielzahl anwendungsspezifischer Verstärkungsfasern. So wird die hohe Zähigkeit von Aramidfasern in stoßartig belasteten Bauteilen zur Sicherung der Bauteilintegrität und Verbesserung der Energieabsorption genutzt. Weitere Fasertypen sind Polymer-, Keramik-, Metall- und Naturfasern (Åström (1997)).
Bereits während des Herstellungsprozesses werden die auch als Filamente bezeichneten, nur wenige Mikrometer starken Einzelfasern ohne Drehung zu glatten Filamentsträngen, dem sogenannten Garn, zusammengefasst. Ab einer Feinheit von 68tex wird das Garn auch als Roving bezeichnet. Dabei gibt die Tex-Zahl die längenspezifische Masse des Garns bzw. Rovings in Gramm je Kilometer an. Eine weitere wichtige charakteristische Größe ist die Anzahl der Filamente, die in einem Roving enthalten sind. Sie wird mit der sogenannten k-Zahl angegeben.

Textile Halbzeuge

Zur Herstellung flächenförmiger Bauteile werden Rovings häufig zu textilen Halbzeugen weiterverarbeitet. Bei Geweben erfolgt die textile Flächenbildung durch rechtwinklige Verkreuzung von Rovings

mindestens zweier Fadensysteme (Abb. 1.2(a)). Da die Rovings infolge der Fadenkreuzungen in Wellenform verlaufen, weisen gewebeverstärkte Verbunde gegenüber einer unidirektionalen Verstärkung schlechtere mechanische Eigenschaften auf. Gestricke werden durch die Verbindung von zu Schlaufen verformten Fäden gebildet. Durch die Kombination des maschenförmigen Gestricks mit gestreckten Verstärkungsfäden (Abb. 1.2(b)) können uni-, bi- und multiaxial verstärkte Gestricke erzeugt werden (Offermann u. a. (2005)). Vorteile dieser Verstärkungsstrukturen sind die gegenüber Geweben höhere Beanspruchbarkeit, die auf den geradlinigen Rovingverlauf zurückzuführen ist, sowie die gute Drapierbarkeit, die durch die zwischen den Maschen verschiebbaren Verstärkungsfäden ermöglicht wird. Außerdem führt der die einzelnen Schichten in Dickenrichtung verbindende Maschenfaden zu einem erhöhten Widerstand gegen Delamination (Hufenbach (2007)).



(a) Gewebe (b) Gestrick

Abbildung 1.2: Beispiele für textile Verstärkungsstrukturen

Matrixwerkstoffe

Da Rovings oder textile Verstärkungsstrukturen nur begrenzt als Konstruktionswerkstoffe einsetzbar sind, wird durch die Einbettung in ein Matrixmaterial ein kompakter Werkstoff hergestellt. Neben der Fixierung der Verstärkungsfäden bestehen die Hauptaufgaben der Matrix in der Lastverteilung innerhalb des Verbundes sowie in der Sicherung der Beständigkeit des Werkstoffs gegen Umwelteinflüsse.
Zur Einbettung der Rovings kommen bei FKV verschiedene Kunststoffe zur Anwendung. Aufgrund ihrer guten mechanischen Eigenschaften werden häufig duroplastische Matrices eingesetzt. Sie sind im Ausgangszustand im Allgemeinen flüssig und weisen eine niedrige Viskosität auf. Dies ermöglicht eine gute Benetzung und Durchtränkung der Verstärkungsfasern. Durch Mischen mit einem Härter und weiteren Zusatzstoffen wird das chemische Aushärten aktiviert.
Im Gegensatz dazu sind Thermoplaste bei Raumtemperatur fest und müssen durch Erwärmung geschmolzen werden. Die im Vergleich zu den Duroplasten höhere Viskosität der Schmelze erschwert dabei den Benetzungsvorgang. Im Vergleich zu den steifen aber spröden Duroplasten sind Thermoplaste deutlich zäher, weisen jedoch häufig ein ausgeprägtes inelastisches Materialverhalten auf. Ihre, durch die Schmelzbarkeit bedingte, Umformbarkeit lässt Thermoplaste für die Anwendung in der Serienfertigung attraktiv werden (Ehrenstein (2006), vgl. 3.2.1).

2 Skalenübergreifende kontinuumsmechanische Modellierung

Kontinuum

Die Modellierung des Verbundwerkstoffs erfolgt in dieser Arbeit auf der Grundlage der Kontinuumsmechanik, d. h. einer Feldtheorie, bei der physikalische Prozesse durch Feldgrößen, die Funktionen von Ort und Zeit sind, beschrieben werden. Im Rahmen dieser Theorie bleibt der innere Aufbau der Materie unberücksichtigt. Stattdessen wird die Modellvorstellung eines strukturlosen Kontinuums verwendet. Dieses Modell wird bei der hier für Verbundwerkstoffe vorgeschlagenen mehrskaligen Modellbildung auf verschiedenen Skalen angewendet (vgl. 2.3).
Im Mittelpunkt der Kontinuumsmechanik steht der materielle Körper $\mathcal{K}$, der aus einer Menge materieller Elemente oder Teilchen besteht (Truesdell und Noll (2004); Haupt (2002)) und dessen Bewegung unter dem Einfluss äußerer Belastungen untersucht wird. Der Körper $\mathcal{K}$ besitzt die Masse m, das Volumen V und ist durch seine Oberfläche $O = \partial V$ von der Umgebung abgegrenzt.

2.1 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

Grundgleichungen

Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik lassen sich in drei Gruppen einordnen. Die Geometrie der Bewegung wird durch die kinematischen Beziehungen beschrieben, Bilanzgleichungen erfassen die Änderungen des Zustandes des materiellen Körpers infolge von Flüssen über seine Grenzen sowie infolge von Quellen oder Senken in seinem Inneren. Sie sind allgemein gültige Beziehungen. Die individuellen Stoffeigenschaften werden schließlich mithilfe der Materialgleichungen erfasst.

2.1.1 Kinematik

Konfiguration

Der materielle Körper nimmt im Verlauf der Bewegung verschiedene Zustände an, die als Konfigurationen bezeichnet werden. Da die mathematische Beschreibung von $\mathcal{K}$ sowie der ablaufenden physikalischen Prozesse eine Identifikation der materiellen Teilchen erforderlich macht, ist es zweckmäßig, zum Zeitpunkt t_0 eine Referenzkonfiguration festzulegen. Der Ortsvektor $\mathbf{X}$ eines materiellen Teilchens in der Referenzkonfiguration dient dann als Bezeichner.
In der zeitlichen Abfolge verschiedener Konfigurationen nimmt das materielle Teilchen $\mathbf{X}$ unterschiedliche Raumpunkte $\mathbf{x}$ ein. Die aktuelle Konfiguration zum Zeitpunkt t wird dabei als Momentankonfiguration bezeichnet. Eine Darstellung der Bewegung von $\mathbf{X}$ ist durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(\mathbf{X}, t\right) \quad \text{mit} \quad \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\right) \neq 0 \tag{2.1}$$

gegeben, für seine Verschiebung folgt

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{X}, t\right) = \mathbf{x}\left(\mathbf{X}, t\right) - \mathbf{X}. \tag{2.2}$$

Kleine Deformationen

Im Folgenden soll für die Norm des Verschiebungsgradienten $\mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}$

$$\delta_H = \| \mathbf{H} \| = \sqrt{\mathbf{H} : \mathbf{H}} \ll 1 \tag{2.3}$$

gelten, d. h. es erfolgt eine Beschränkung auf kleine Deformationen und Rotationen. Des Weiteren soll der Betrag der Verschiebungen klein gegenüber einer charakteristischen Länge l_c des betrachteten Körpers $\frac{|\mathbf{u}(\mathbf{X},t)|}{l_c} \ll 1$ sein. Anhand der Definition des Verschiebungsvektors erkennt man in diesem Fall, dass Referenz- und Momentankonfiguration für kleine Verschiebungen sehr dicht beieinander liegen. Daher ist eine Unterscheidung zwischen der EULERschen und LAGRANGEschen Betrachtungsweise nicht erforderlich. Die Feldgleichungen werden in Abhängigkeit vom räumlichen Ortsvektor $\mathbf{x}$ und der Zeit t formuliert. Die Deformation eines materiellen Teilchens kann in diesem Fall durch die linearisierten Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^T\right) \tag{2.4}$$

beschrieben werden. Dabei ist $\boldsymbol{\varepsilon}$ der infinitesimale Verzerrungstensor.

2.1.2 Bilanzgleichungen

Globale und lokale Bilanzen

Zusätzlich zur Geometrie der Bewegung müssen die Änderungen weiterer physikalischer Zustandsgrößen des materiellen Körpers $\mathcal{K}$ quantifiziert werden. Dies erfolgt durch die Bilanzgleichungen, die in globaler Form für den gesamten Körper oder in lokaler Form für ein materielles Teilchen formuliert werden können. Der Übergang von globalen zu lokalen Bilanzen ist möglich, wenn die ausreichende Stetigkeit der Feldgrößen und die Gültigkeit der Bilanzen für beliebige Teilgebiete des materiellen Körpers vorausgesetzt werden. Für das mechanische Feldproblem sind die Bilanzen der Masse, des Impulses und des Drehimpulses von Bedeutung.

Massebilanz

Die Masse

$$m = \int_V \rho \, dV \tag{2.5}$$

ist eine Eigenschaft des materiellen Körpers und ein Maß für dessen Trägheit und Schwere. Bei fehlendem Masseaustausch über die Oberfläche und fehlenden Massequellen oder -senken im Inneren des Körpers, wie hier für den Festkörper vorausgesetzt wird, ist die zeitliche Änderung der Masse $\dot{m} = 0$.

Impulsbilanz

Der Impulsvektor

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{v}\rho \, dV \tag{2.6}$$

ist eine globale Größe zur Beschreibung des kinetischen Zustandes des materiellen Körpers $\mathcal{K}$. In Gleichung (2.6) bezeichnet $\mathbf{v}$ den Geschwindigkeitsvektor. Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der Summe aller auf den Körper von außen einwirkenden Oberflächen- $\mathbf{t}$ und Volumenkräfte $\mathbf{f}$. Dies wird mathematisch durch die Impulsbilanz

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \mathbf{v}\rho \, dV = \int_{\partial V} \mathbf{t} \, dA + \int_V \mathbf{f}\rho \, dV \tag{2.7}$$

ausgedrückt.
Zwischen dem Spannungsvektor $\mathbf{t}$ an der Oberfläche des materiellen Körpers besteht dabei über den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ des Oberflächenelements ein linearer Zusammenhang

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \forall \, \mathbf{x} \in \partial V \tag{2.8}$$

zum Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, der den Spannungszustand im Inneren des Körpers beschreibt. Unter den oben genannten Voraussetzungen zur Stetigkeit und Gültigkeit der Bilanzen für beliebige Teilgebiete folgt die lokale Form der Impulsbilanz

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}\rho = \dot{\mathbf{v}}\rho \quad \forall\, \mathbf{x} \in V, \tag{2.9}$$

die auch als 1. CAUCHYsche Bewegungsgleichung bezeichnet wird. Für den Sonderfall der Statik geht Gleichung (2.9) in die Gleichgewichtsbedingungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}\rho = \mathbf{0} \quad \forall\, \mathbf{x} \in V \tag{2.10}$$

über.

Drehimpulsbilanz

Der Drehimpulsvektor

$$\mathbf{l}_P = \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \times \mathbf{v}\rho \, dV \tag{2.11}$$

stellt neben dem Impuls eine weitere globale Größe zur Charakterisierung des kinetischen Zustandes von $\mathcal{K}$ dar. Dabei ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich der Momentenwirkung der am Körper angreifenden Oberflächen- und Volumenkräfte bezüglich eines gewählten Punktes P mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}_P$. Damit folgt für die globale Drehimpulsbilanz in einem Kontinuum ohne Momentendichten

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \times \mathbf{v}\rho \, dV = \int_{\partial V} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \times \mathbf{t} \, dA + \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \times \mathbf{f}\rho \, dV, \tag{2.12}$$

deren lokale Konsequenz unter Voraussetzung der Erfüllung der Impulsbilanz (2.9) die Symmetrie des Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \, \forall\, \mathbf{x} \in V \tag{2.13}$$

ist. In den globalen Bilanzaussagen der Impuls- und Drehimpulsbilanz können zusätzlich zu den Oberflächen- und Volumenkräften auch diskrete Einzellasten berücksichtigt werden.

Prinzip der virtuellen Arbeit

Die Formulierung numerischer Methoden zur Lösung mechanischer Randwertaufgaben kann ausgehend von Leistungs- oder Arbeitsprinzipien erfolgen, die aus der folgenden Standardargumentation der Variationsrechnung abgeleitet werden. Sind $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})$ kontinuierliche Vektorfelder, dann gilt

$$\int_V \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}) \, dV = 0 \tag{2.14}$$

für beliebige $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})$, wenn

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \, \forall\, \mathbf{x} \in V. \tag{2.15}$$

Durch Multiplikation der lokalen Form der Impulsbilanz (2.9) mit einer Funktion $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})$ und Integration über das Volumen V des Körpers sowie Berücksichtigung der Drehimpulsbilanz durch die Symmetrie des Spannungstensors (2.13), erhält man in Form des D'ALEMBERTschen Prinzips

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\zeta} + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\zeta})^T\right) dV = \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\zeta} \, dA + \int_V \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \boldsymbol{\zeta} \, dV \tag{2.16}$$

die Möglichkeit, die mechanischen Bilanzgleichungen als eine skalare Gleichung zu formulieren (Haupt (2002)). Interpretiert man die Funktion $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})$ als ein virtuelles, d. h. kinematisch zulässiges, infinitesimales Verschiebungsfeld $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$, das die kinematischen Randbedingungen und Stetigkeitsforderungen

hinsichtlich der Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (2.4) erfüllt, ergeben die Integrale in (2.16) die virtuelle Arbeit der inneren Lasten

$$\delta W_{\mathrm{i}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{u})^T\right)\, dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV, \tag{2.17}$$

der äußeren Lasten

$$-\delta W_{\mathrm{e}} = \int_{\partial V} \mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}\, dA + \int_V \rho\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}\, dV \tag{2.18}$$

und der Trägheitslasten

$$-\delta W_{\mathrm{t}} = \int_V \rho\dot{\mathbf{v}}\cdot\delta\mathbf{u}\, dV. \tag{2.19}$$

Für den Fall der Statik ($\delta W_{\mathrm{t}} = 0$) folgt daraus das Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta W = \delta W_{\mathrm{i}} + \delta W_{\mathrm{e}} = 0. \tag{2.20}$$

Es fordert die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen in Form einer skalaren Gleichung. Das Prinzip der virtuellen Arbeit wird in Abschnitt 4.3.2 zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen der nichtlinearen FEM angewendet.

Energiebilanz

Während der Bewegung ändert sich infolge der einwirkenden äußeren Lasten auch der energetische Zustand des materiellen Körpers. Die Bilanz der mechanischen Energie

$$P_{\mathrm{e}} = \dot{T} + P_{\mathrm{i}}, \tag{2.21}$$

quantifiziert die Umwandlung der Leistung der äußeren Lasten in die kinetische Energie T des Körpers und die Spannungsleistung P_{i} in seinem Inneren. Sie ist allerdings keine unabhängige Gleichung, sondern folgt als direkte Konsequenz aus der Impuls- und Drehimpulsbilanz.
Erfahrungsgemäß wird ein Teil der Spannungsleistung im Körper als innere Energie U gespeichert, während der andere Teil in nichtmechanische Energie umgewandelt oder in Form von Wärme an die Umgebung abgegeben wird. Werden andere nichtmechanische Energien von der Betrachtung ausgeschlossen, folgt mit der Definition einer positiven Wärmezufuhr Q der erste Hauptsatz der Thermodynamik

$$P_{\mathrm{e}} + Q = \dot{T} + \dot{U}, \tag{2.22}$$

der die Äquivalenz der von außen zugeführten mechanischen Leistung und Wärme und der zeitlichen Änderungen von kinetischer und innerer Energie des materiellen Körpers beschreibt. Die Wärmezufuhr Q erfolgt dabei einerseits über die Oberfläche des Körpers in Form des Wärmestromdichtevektors $\mathbf{q}$ und andererseits aus Wärmequellen r im Inneren des Körpers. Unter Berücksichtigung von (2.9) und (2.13) ergibt sich die Bilanz der inneren Energie in lokaler Form

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + r. \tag{2.23}$$

Dabei sind u die spezifische innere Energie und das Produkt von Spannung und Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ die spezifische innere Leistung oder Spannungsleistung.

Entropiebilanz

Gemäß der Entropiebilanz ist die zeitliche Änderung $\dot{S}$ der Entropie gleich der Summe aus der Entropiezufuhr H und der Entropieproduktion Σ im Inneren des Körpers, die ein Maß für die Umkehrbarkeit

eines physikalischen Prozesses darstellt. Die praktische Anwendung der Entropiebilanz erfolgt in der Form der Ungleichung

$$\Sigma = \dot{S} - H \geq 0. \tag{2.24}$$

Ist die Entropieproduktion Σ während eines Prozesses größer als Null, ist dieser irreversibel. Der Grenzfall der Reversibilität, d. h. des Gleichheitszeichens, tritt nur bei idealisierten Prozessen auf. Eine negative Entropieproduktion ist aus physikalischer Sicht nicht zulässig, da dies der Erfahrung widerspricht, dass mechanische Energie zwar vollständig in nichtmechanische Energie umgewandelt werden kann, eine vollständige Umkehrung jedoch nicht möglich ist. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik (2.24) liefert damit eine Einschränkung für die Realisierbarkeit eines Prozesses.
Zur Konkretisierung der Bilanzaussage wird angenommen, dass die Entropiezufuhr nur durch Wärmezufuhr Q bei der absoluten Temperatur ϑ erfolgt. Wird dabei unterstellt, dass der Entropiestromdichtevektor parallel zum Wärmestromdichtevektor $\mathbf{q}$ ist und Entropie infolge der Wärmequelle r im Inneren des Körpers zugeführt wird, ergibt sich aus (2.24) unter Berücksichtigung der Bilanz der inneren Energie (2.23) die folgende lokale Darstellung der Entropieungleichung

$$\vartheta\sigma_\mathrm{i} = -\dot{u} + \vartheta\dot{s} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\vartheta}{\vartheta} \geq 0, \tag{2.25}$$

die als CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung bezeichnet wird. Dabei sind σ_i die spezifische Entropieproduktion und s die spezifische Entropie. Mit der spezifischen freien oder HELMHOLTZschen Energie

$$f = u - \vartheta s \tag{2.26}$$

kann die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung als

$$\vartheta\sigma_\mathrm{i} = -\dot{f} - \dot{\vartheta}s + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\vartheta}{\vartheta} \geq 0 \tag{2.27}$$

angegeben werden. Sie vereinfacht sich im isothermen Fall ($\vartheta = \vartheta_0 = \text{konst.}$, $\boldsymbol{\nabla}\vartheta = \mathbf{0}$, $\dot{\vartheta} = 0$) zu

$$\delta_\mathrm{i} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{f} \geq 0. \tag{2.28}$$

Dabei ist die Spannungsleistung $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ die an einem materiellen Teilchen pro Zeiteinheit geleistete mechanische Arbeit. Während eines physikalischen Prozesses wird nur ein Teil dieser Spannungsleistung in freie Energie umgewandelt, die reversibel in mechanische Arbeit umgesetzt werden kann. Die Differenz und damit das Produkt $\delta_\mathrm{i} = \vartheta\sigma_\mathrm{i}$ kann daher als spezifische innere Dissipationsleistung interpretiert werden.

2.1.3 Materialgleichungen

Notwendigkeit von Materialgleichungen

Die bisher diskutierten Gleichungen zur Beschreibung der Bewegung eines materiellen Körpers sowie zur Bilanzierung der Änderungen der Zustandsgrößen stellen allgemeingültige Beziehungen dar, die nicht von den speziellen Stoffeigenschaften abhängig sind. Erfahrungsgemäß wird das Deformationsverhalten eines realen Körpers unter der Wirkung äußerer Belastungen aber durch seinen Werkstoff beeinflusst. Die Berücksichtigung dieses Einflusses erfolgt in der Kontinuumsmechanik durch Materialgleichungen. Sie stellen Modelle dar, die das reale Materialverhalten in einer bestimmten Näherung wiedergeben. Entsprechend der Philosophie der kontinuumsmechanischen Modellbildung bleibt dabei

die innere Struktur der Materie unberücksichtigt.
Die physikalische Notwendigkeit zur Berücksichtigung der Stoffeigenschaften bei der Beschreibung des Deformationsverhaltens wird aus mathematischer Sicht zudem anhand der Differenz zwischen der Anzahl der zur Verfügung stehenden Feldgleichungen und den zu bestimmenden Feldvariablen deutlich. Für das mechanische Feldproblem sind sechs weitere Gleichungen in Form der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen zu formulieren. Zur vollständigen Formulierung des Anfangs-Randwertproblems sind außerdem Anfangs- und Randbedingungen anzugeben.

Prinzipien der Materialtheorie

Die im Rahmen dieser Arbeit verwendete allgemeine Form der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen ist als Funktional

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \underset{\tau \leq t}{\mathfrak{F}} \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\right] \tag{2.29}$$

gegeben, das den Einfluss der gesamten Deformationsgeschichte $\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)$ eines materiellen Teilchens auf den aktuellen Spannungszustand beschreibt. Trotz ihrer allgemeinen Form erfüllt die Gleichung (2.29) drei grundlegende Prinzipien der Materialtheorie. Da keine in der Zukunft liegenden Zeitpunkte berücksichtigt werden, ist zum einen die Erfüllung des Prinzips des Determinismus gewährleistet. Das Prinzip der lokalen Wirkung wird in Form des einfachen Materials berücksichtigt. Durch die Beschreibung der Deformation mit dem infinitesimalen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ haben nur Gradienten erster Ordnung und damit nur direkt benachbarte materielle Teilchen Einfluss auf das Materialverhalten. Interessant ist dabei die Unsymmetrie von (2.29) hinsichtlich der Berücksichtigung von Raum und Zeit (Haupt (2002)). Als wesentliche Konsequenz aus dem Prinzip der materiellen Objektivität (Truesdell und Noll (2004)) tritt in (2.29) außerdem keine explizite Zeitabhängigkeit auf. Durch die Beschränkung auf kleine Rotationen und Verschiebungen ist eine weitere Diskussion der verwendeten Spannungs- und Verzerrungsmaße hinsichtlich Objektivität nicht erforderlich.
Mithilfe des Funktionals (2.29) kann ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen beschrieben werden. Dies wird nachfolgend als materielle oder physikalische Nichtlinearität bezeichnet.

Implizite Darstellung

Neben der expliziten Form von Gleichung (2.29) können die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen auch implizit durch

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \mathbf{q}_1(t), \ldots, \mathbf{q}_n(t)\right) \tag{2.30}$$

angegeben werden. Dabei wird der Einfluss der zurückliegenden Lastgeschichte durch zusätzliche innere Variablen $\mathbf{q}_i$ abgebildet. Zur vollständigen Beschreibung des Materialverhaltens sind konstitutive Gleichungen für die zeitliche Änderung der Zustandsvariablen $\mathbf{q}_i$ zu formulieren. Dies erfolgt durch ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{q}}_i(t) = \dot{\mathbf{q}}_i\left(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \mathbf{q}_1(t), \ldots, \mathbf{q}_n(t)\right), \tag{2.31}$$

die als Evolutionsgleichungen bezeichnet werden. Ihre mathematische Struktur sowie die Anzahl der inneren Variablen hängt von dem zu modellierenden Materialverhalten ab. Vorzugsweise werden dabei physikalisch interpretierbare innere Variablen gewählt. Die Evolutionsgleichungen liefern somit eine phänomenologische Beschreibung der in der Materiestruktur ablaufenden Prozesse und ermöglichen die systematische Formulierung eines Materialmodells.
Durch Integration der Evolutionsgleichungen und Einsetzen in die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen kann das aus (2.30) und (2.31) bestehende vollständige Materialmodell in eine explizite Darstellung entsprechend Gleichung (2.29) überführt werden. Da die erforderliche Zeitintegration im Allgemeinen nicht geschlossen ausführbar sein wird, ist die Äquivalenz von expliziter und impliziter Darstellung formaler Natur. Aus Sicht der hier angestrebten numerischen Materialmodellierung stellt dies jedoch

keine Einschränkung dar.
Die Ableitung von Materialgleichungen kann vorrangig auf theoretischem Wege erfolgen. Dabei wird mithilfe von Bilanzgleichungen und allgemeinen Prinzipien der Materialtheorie ein Rahmen für die konstitutiven Beziehungen vorgegeben. Über zusätzliche konstitutive Annahmen wird dann die konkrete Form der Gleichungen bestimmt (Altenbach und Altenbach (1994)). Hier wird dagegen eine induktive Ableitung anhand von experimentellen Befunden angewendet. Die erhaltenen Gleichungen sind anschließend auf thermomechanische Konsistenz, d. h. Kompatibilität mit der Entropieungleichung, zu prüfen.

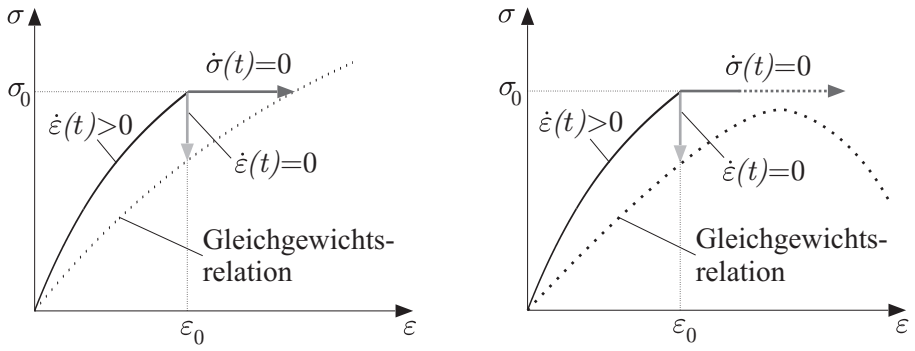
2.2 Klassifizierung von Materialverhalten und Materialmodellen

Zur systematischen Entwicklung eines Materialmodells ist es sinnvoll, das experimentell beobachtete Materialverhalten zu klassifizieren. Die Einteilung erfolgt nach bestimmten Materialeigenschaften. Im Folgenden wird ein Vorschlag von Haupt (1993) verwendet, dessen Klassifizierung auf der Beobachtung von Gleichgewichtszuständen beruht.

2.2.1 Klassifizierung des mechanischen Materialverhaltens

Gleichgewichtszustände

In Bezug auf das phänomenologische Werkstoffverhalten ist unter einem solchen Gleichgewichtszustand ein zeitlich konstanter Spannungs- und Deformationszustand zu verstehen, gegen den das System bei unveränderter äußerer Belastung strebt. Beispiele sind die Endpunkte der Spannungsrelaxation bei konstant gehaltener Dehnung ε_0 und der Dehnungszunahme bei konstanter Spannung σ_0 in Kriechversuchen (Abb. 2.1).



(a) Verfestigendes Verhalten der Gleichgewichtsrelation

(b) Entfestigendes Verhalten der Gleichgewichtsrelation

Abbildung 2.1: Zur Ermittlung von Gleichgewichtszuständen aus Relaxations- und Kriechversuchen

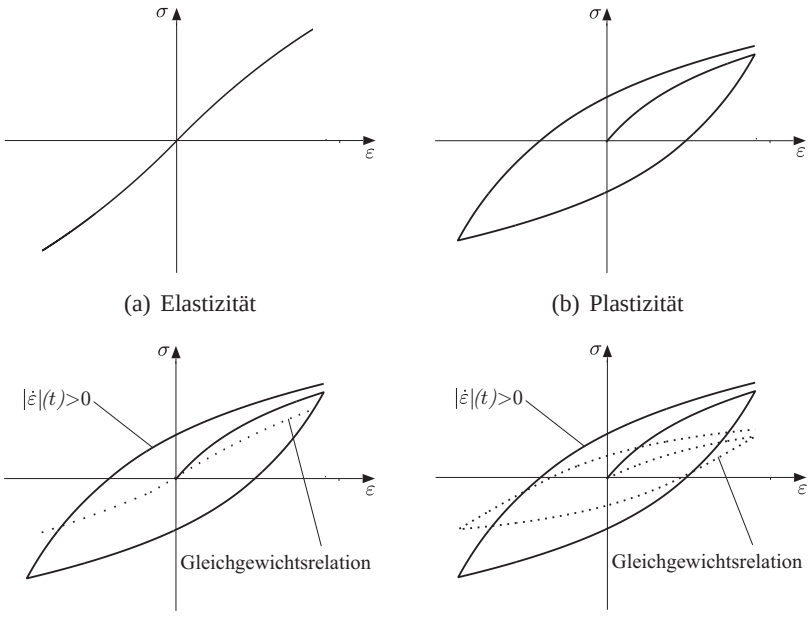
Die in realen Experimenten mit ausreichender, aber endlicher Haltezeit erreichten Endwerte können als asymptotische Näherung für einen Gleichgewichtszustand angesehen werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Begriff Gleichgewichtszustand ausschließlich für die in Relaxationsexperimenten ermittelten, zeitlich konstanten Spannungswerte verwendet. Motiviert ist dies durch den in Abb. 2.1(b) dargestellten Fall, in dem durch das Kriechexperiment, trotz Existenz einer Gleichgewichtsrelation, kein Gleichgewichtszustand festgestellt werden kann. Derartige Spannungszustände werden nachfolgend als Gleichgewichtsspannung $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{eq}}$ bezeichnet.

Gleichgewichtsrelation

Die Menge aller zu einem deformationsgesteuerten Experiment gehörenden Gleichgewichtsspannungen bildet die Gleichgewichtsrelation. Theoretisch kann die Gleichgewichtsrelation durch unendlich langsame Versuche bestimmt werden. Die in Abschnitt 3.1.4 dargestellten experimentellen Ergebnisse zeigen jedoch, dass Spannungs-Dehnungskurven, die durch Versuche mit sehr geringen Dehnraten $|\dot{\varepsilon}| > 0$ bestimmt wurden, stets oberhalb der Endpunkte der Relaxation liegen. Praktisch können demzufolge nur diskrete Punkte der Gleichgewichtsrelation mithilfe von Relaxationsexperimenten ermittelt werden. Ihre Verbindung liefert eine Näherung für die Gleichgewichtsrelation.

Klassifizierung

Unterscheiden sich die bei verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten ermittelten Spannungs-Dehnungskurven, wird das Materialverhalten als geschwindigkeitsabhängig bezeichnet. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit stellt eine charakteristische Materialeigenschaft dar. Die zwischen dem in einem Experiment mit endlicher Dehnrate $|\dot{\varepsilon}| > 0$ gemessenen Spannungs-Dehnungsverlauf und der Gleichgewichtsrelation festzustellende Differenz heißt Überspannung $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}$.
Die zweite wesentliche Materialeigenschaft wird durch die Gestalt der Gleichgewichtsrelation in zyklischen Versuchen bestimmt. Tritt hierbei eine Hysterese auf, wird diese als Gleichgewichtshysterese bezeichnet.
Mit den beiden wesentlichen Materialeigenschaften der Geschwindigkeitsabhängigkeit und der Gleichgewichtshysterese ist eine zweckmäßige Klassifizierung der grundlegenden Phänomenologie des Materialverhaltens möglich (Abb. 2.2). Da die experimentellen Befunde im Allgemeinen nicht eindeutig sein werden, sind dabei Idealisierungen erforderlich.



(a) Elastizität (b) Plastizität

(c) Viskoelastizität (d) Viskoplastiztät

Abbildung 2.2: Vier Klassen des Materialverhaltens

Für das geschwindigkeitsunabhängige Materialverhalten sind keine Unterschiede zwischen den bei verschiedenen Dehnraten aufgezeichneten Spannungs-Dehnungskurven vorhanden. Man unterscheidet:

- *Elastizität:* Geschwindigkeitsunabhängig ohne Hysterese (Abb. 2.2(a)),
- *Plastizität:* Geschwindigkeitsunabhängig mit Hysterese (Abb. 2.2(b)).

Für das geschwindigkeitsabhängige Materialverhalten ist das Auftreten einer Hysterese im Spannungsverlauf dagegen kein eindeutiges Klassifizierungsmerkmal, da die Spannungsantwort verschieden von der Gleichgewichtsrelation ist. Deren Gestalt ist zusätzlich zu untersuchen. Demnach unterscheidet man:

- *Viskoelastizität:* Geschwindigkeitsabhängig ohne Gleichgewichtshysterese (Abb. 2.2(c)) ,
- *Viskoplastizität:* Geschwindigkeitsabhängig mit Gleichgewichtshysterese (Abb. 2.2(d)).

2.2.2 Klassen mechanischer Materialmodelle

Elastizität

Den oben genannten experimentell beobachteten Materialverhalten sind entsprechende Materialmodelle zugeordnet, für die eine Spezialisierung der allgemeinen Form des Spannungsfunktionals (2.29) vorgenommen werden kann. Im Fall der Elastizität hat die Lastgeschichte keinen Einfluss auf den aktuellen Spannungswert, d. h. es treten weder Geschwindigkeitsabhängigkeit noch Gleichgewichtshysterese auf. Aus mathematischer Sicht geht das allgemeine Spannungsfunktional in eine Funktion

$$\boldsymbol{\sigma}\left(t\right) = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{eq}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(t)\right) \tag{2.32}$$

des aktuellen Deformationszustandes $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ über. Gleichung (2.32) beschreibt deshalb ein spontanes Materialverhalten. Eine Änderung des Verzerrungszustandes führt sofort zu einer Änderung des Spannungszustandes. Bedingt durch die nicht vorhandene Geschwindigkeitsabhängigkeit ist jeder Spannungszustand ein Gleichgewichtszustand $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{eq}}$. Im Gegensatz zum elastischen Material wird das Verhalten der drei verbleibenden Klassen als inelastisch bezeichnet, es hängt von der Verzerrungsgeschichte ab.

Plastizität

Im Fall der Plastizität ist der aktuelle Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}\left(t\right)$ wegen der charakteristischen geschwindigkeitsunabhängigen Hysterese bei zyklischen Belastungen ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional

$$\boldsymbol{\sigma}\left(t\right) = \underset{\tau \leq t}{\mathfrak{F}^{\mathrm{eq}}}\left[\boldsymbol{\varepsilon}\left(\tau\right)\right]. \tag{2.33}$$

der gesamten Verzerrungsgeschichte $\boldsymbol{\varepsilon}\left(\tau\right)$. Dies wird als perfektes Gedächtnis bezeichnet.

Viskoelastizität

Die Theorie der Viskoelastizität beschreibt ein geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten ohne Gleichgewichtshysterese. Eine spezielle Form der allgemeinen Materialgleichung besteht deshalb aus einem elastischen Anteil zur Abbildung der Gleichgewichtsrelation $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{eq}}$ und einem Funktional $\mathfrak{F}^{\mathrm{ov}}$ zur Modellierung des geschwindigkeitsabhängigen Verhaltens

$$\boldsymbol{\sigma}\left(t\right) = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{eq}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(t)\right) + \underset{\tau \leq t}{\mathfrak{F}^{\mathrm{ov}}}\left[\boldsymbol{\varepsilon}\left(\tau\right)\right]. \tag{2.34}$$

Dabei besitzt das Funktional $\mathfrak{F}^{\mathrm{ov}}$, wie in Abschnitt 2.2.3 näher erläutert wird, Relaxations- bzw. nachlassende Gedächtniseigenschaften (Haupt (1993, 2002)), d. h. es strebt für konstante Verzerrungen oder sehr langsame Prozesse asymptotisch gegen Null.

Viskoplastizität

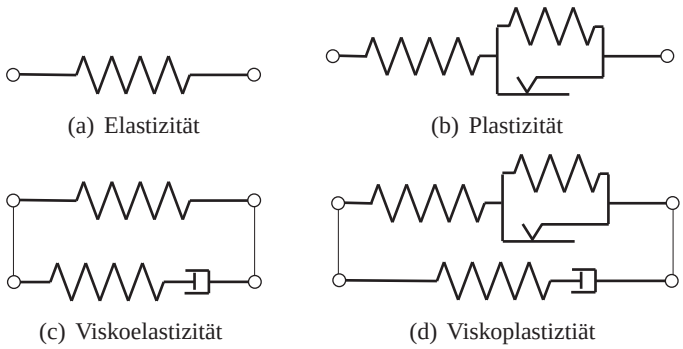
Das Spannungsfunktional der Viskoplastizität kombiniert dehnratenabhängiges Materialverhalten mit einer Gleichgewichtshysterese entsprechend dem plastischen Materialverhalten. Im Gegensatz zur Viskoelastizität ist daher der Gleichgewichtsanteil durch ein Funktional $\mathfrak{F}^{\mathrm{eq}}$ zu beschreiben

$$\boldsymbol{\sigma}\left(t\right) = \underset{\tau \leq t}{\mathfrak{F}^{\mathrm{eq}}}\left[\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\right] + \underset{\tau \leq t}{\mathfrak{F}^{\mathrm{ov}}}\left[\boldsymbol{\varepsilon}\left(\tau\right)\right]. \tag{2.35}$$

Aufgrund der Relaxationseigenschaft des geschwindigkeitsabhängigen Funktionals $\mathfrak{F}^{\mathrm{ov}}$ kann das plastische Materialverhalten als asymptotischer Grenzfall der Viskoplastizität interpretiert werden.
Weitere Vereinfachungen und Einschränkungen der allgemeinen anisotropen Spannungsfunktionale (2.32)-(2.35) sind durch die Berücksichtigung von Symmetrien des Materialverhaltens sowie durch kinematische Zwangsbedingungen, wie der Inkompressibilität, möglich.

Rheologische Modelle

Für die vier grundlegenden Materialmodelle können einfache schematische Darstellungen in Form von rheologischen Modellen nach Abb. 2.3 angegeben werden. Durch die unterschiedliche Schaltung von Grundelementen und der ihnen zugrundeliegenden Materialgleichungen können beliebig komplizierte einachsige Materialmodelle konstruiert werden. Dieses Vorgehen wird bei der Entwicklung einer konstitutiven Beschreibung für Polypropylen in Kapitel 4 genutzt. Dabei dienen Federelemente zur Abbildung elastischen Materialverhaltens. Dämpferelemente repräsentieren das geschwindigkeitsabhängige Verhalten und Reibelemente symbolisieren geschwindigkeitsunabhängige Hysteresen. Alle Grundelemente sind masselos.



(a) Elastizität (b) Plastizität

(c) Viskoelastizität (d) Viskoplastiztiät

Abbildung 2.3: Beispiele für rheologische Modelle der vier Klassen des Materialverhaltens

2.2.3 Eigenschaften geschwindigkeitsabhängiger und -unabhängiger Funktionale und Korrespondenzprinzip

Fading Memory

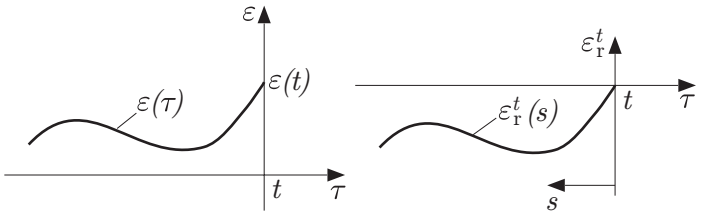
Nach der Vorstellung der vier grundlegenden Kategorien des mechanischen Verhaltens sollen im Folgenden die Eigenschaften des Funktionals der Überspannung

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}(t) = \underset{\tau \leq t}{\mathfrak{F}^{\mathrm{ov}}} \left[\boldsymbol{\varepsilon}\left(\tau\right)\right] \tag{2.36}$$

diskutiert werden. Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt wurde, beschreibt das Funktional $\mathfrak{F}^{\mathrm{ov}}$ ein Materialverhalten, dessen Spannungsantwort zum Zeitpunkt t umso geringer von einem in der Vergangenheit liegenden Verzerrungszustand $\boldsymbol{\varepsilon}\left(\tau\right)$ beeinflusst wird, je weiter dieser Zustand zurückliegt. Diese charakteristische Eigenschaft wird als nachlassendes Gedächtnis oder auch Fading Memory bezeichnet. Sie ermöglicht die Modellierung geschwindigkeitsabhängiger Materialphänomene sowie der Spannungsrelaxation bei konstant gehaltener Deformation. Die zugrundeliegende Theorie geschwindigkeitsabhängiger Funktionale mit Fading-Memory-Eigenschaften wird in Coleman und Noll (1960) sowie Haupt (2002) erläutert. Zur mathematischen Beschreibung wird das Überspannungsfunktional in Abhängigkeit von einer Verzerrungsgeschichte

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t}\left(s\right) = \boldsymbol{\varepsilon}\left(t-s\right) - \boldsymbol{\varepsilon}\left(t\right) \;\forall\; s \geq 0 \tag{2.37}$$

relativ zum Zeitpunkt t bzw. dem aktuellen Verzerrungszustand $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ betrachtet. Damit folgen für den aktuellen Zeitpunkt t entsprechend Abb. 2.4 $s = 0$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t}(0) = 0$.



(a) Dehnungsgeschichte (b) Relative Dehnungsgeschichte

Abbildung 2.4: Relative einachsige Dehnungsgeschichte

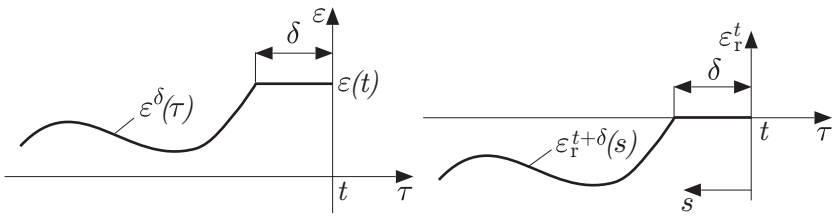
Statische Fortsetzung

Die Untersuchung der Relaxationseigenschaften des Funktionals der Überspannung erfordert die Betrachtung der Spannungsantwort auf die statische Fortsetzung

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\delta}(\tau) = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(t) & \text{für} \quad t-\delta \leq \tau \leq t \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\tau+\delta) & \text{für} \quad -\infty < \tau < t-\delta \end{cases} \tag{2.38}$$

einer beliebigen Deformationsgeschichte um die Zeitdifferenz δ entsprechend Abb. 2.5, wodurch der zurückliegende Verzerrungsprozess weiter in die Vergangenheit geschoben wird. Die Realisierung einer solchen Belastung in experimentellen Untersuchungen erfolgt durch Relaxationsversuche oder den Einbau von Haltezeiten (Zwischenrelaxationen) in den Deformationsprozess. Für die relative Darstellung der statischen Fortsetzung gilt

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t+\delta}(s) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{für} \quad 0 \leq s < \delta \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t}(s-\delta) & \text{für} \quad \delta \leq s < \infty \end{cases} . \tag{2.39}$$



(a) (b)

Abbildung 2.5: Statische Fortsetzung einer beliebigen einachsigen Dehnungsgeschichte

Damit das Funktional $\mathfrak{F}^{\mathrm{ov}}$ für eine konstant gehaltenene Verzerrung die Relaxation der Überspannung

$$\lim_{\delta \to \infty} \mathfrak{F}^{\mathrm{ov}} \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t+\delta}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(t) \right] = \mathbf{0}. \tag{2.40}$$

beschreibt, muss es ausreichende Kontinuitätseigenschaften (vgl. Haupt (2002)) bezüglich der als Gedächtnisnorm bezeichneten, gewichteten relativen Verzerrungsgeschichte

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t}(s)\|_{h} = \left[\int_{0}^{\infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t}(s)\|^{2} h^{2}(s) ds\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.41}$$

besitzen. Dabei ist $h(s)$ eine für große s monoton fallende Einflussfunktion, die weiter zurückliegenden Deformationsereignissen eine geringere Wichtung erteilt. Unter Voraussetzung der weiterhin notwendigen Normierung

$$\mathfrak{F}^{\mathrm{ov}}\left[\mathbf{0}, \boldsymbol{\varepsilon}(t)\right] = \mathbf{0} \tag{2.42}$$

relaxiert die Überspannung für die statische Fortsetzung mit der Eigenschaft $\lim_{\delta\to\infty} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t+\delta}(s) = \mathbf{0}$ auf den Wert Null und das Funktional besitzt die geforderte Relaxationseigenschaft (2.40). In Abschnitt 4.1.1 wird diese Eigenschaft für die einachsige lineare Viskoelastiztität nachgewiesen.

Verzögerte Prozesse

Die degressive Wichtung weiter zurückliegender Deformationsereignisse führt neben der Spannungsrelaxation auch zur Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens. Je langsamer der Dehnungsprozess der verzögerten relativen Verzerrungsgeschichte (Abb. 2.6)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{t\alpha}(s) = \boldsymbol{\varepsilon}(t - \alpha s) - \boldsymbol{\varepsilon}(t) \;\; \forall\, s \geq 0 \tag{2.43}$$

durchlaufen wird, d. h. je größer der Verzögerungsfaktor α ist, desto weiter liegen einzelne Dehnungsereignisse zurück und desto geringer ist ihr Einfluss auf den aktuellen Spannungszustand.

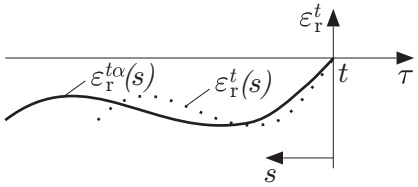


Abbildung 2.6: Verzögerte einachsige Dehnungsgeschichte

Geschwindigkeitsunabhängigkeit

Im Gegensatz zum Funktional der Überspannung, bei dem weiter zurückliegende Ereignisse der Deformationsgeschichte eine geringere Auswirkung auf den momentanen Spannungszustand besitzen, beeinflusst bei einem geschwindigkeitsunabhängigen Materialverhalten der gesamte zurückliegende Deformationsprozess die aktuelle Spannung unverändert stark. Das Material zeichnet sich durch ein perfektes Gedächtnis aus, Relaxationseffekte sind ausgeschlossen. Die zur Modellierung eines derartigen Verhaltens erforderliche Geschwindigkeitsunabhängigkeit des Funktionals der Gleichgewichtsspannung $\mathfrak{F}^{\mathrm{eq}}$ ist durch die Verwendung einer Bogenlängendarstellung der Verzerrungsgeschichte gewährleistet.
Eine Definition der Bogenlänge in der Form

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left\|\boldsymbol{\varepsilon}'(\tau)\right\| \, d\tau \quad \text{mit} \quad (\,)' = \frac{d(\,)}{d\tau} \tag{2.44}$$

$$\dot{z}(t) = \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\| = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{kl}(t)\dot{\varepsilon}_{kl}(t)} \tag{2.45}$$

entspricht einer akkumulierten Dehnung und erfüllt die allgemeinen Anforderungen an eine Bogenlängendarstellung

1. $\dot{z}(t) > 0$ für $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \neq \mathbf{0}$,
2. $\dot{z}(t) = 0$ für $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{0}$ und
3. $\dot{z}(t) \to |\alpha|\, \dot{z}(t)$ für $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \to \alpha \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$.

Die vollständige mathematische Beschreibung des zeitlichen Verzerrungsverlaufs $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ ist durch die Bogenlängendarstellung des Verzerrungstensors $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(z)$ und die Bogenlänge $z(t)$ gegeben

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \left\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(z), z(t)\right\}. \tag{2.46}$$

Während durch $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(z)$ eine Zuordnung zwischen Bogenlänge und dem Zustand im Verzerrungsraum erfolgt, beschreibt $\dot{z}(t)$ die Geschwindigkeit mit der verschiedene Punkte der Bogenlängendarstellung durchlaufen werden.
Damit die Gleichgewichtsspannung geschwindigkeitsunabhängig ist, muss im Spannungsfunktional

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \underset{\tau \leq t}{\mathfrak{F}} \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\right] = \underset{\tau \leq t}{\mathfrak{F}} \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\zeta),\ \zeta(\tau)\right]. \tag{2.47}$$

die Abhängigkeit von $\zeta(\tau)$ verschwinden

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \underset{\zeta \leq z(t)}{\mathfrak{F}^{\mathrm{eq}}} \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\zeta)\right]. \tag{2.48}$$

Dadurch enthält das Spannungsfunktional keine Informationen darüber, wie schnell die Bogenlänge durchlaufen wird. Das Materialverhalten ist geschwindigkeitsunabhängig.
Durch die Substitution von t durch $z(t)$ kann aus einem beliebigen, geschwindigkeitsabhängigen Spannungsfunktional der Viskoelastizität ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional zur Modellierung plastischen Materialverhaltens erzeugt werden. Dies wird als Korrespondenzprinzip bezeichnet (Haupt (2002)). Die konkrete Anwendung wird in Abschnitt 4.2.1 durch Nutzung des Korrespondenzprinzips zur Überführung eines linear viskoelastischen Materialmodells in ein endochrones Modell (Valanis (1971b,a); Khan und Huang (1995)) der Plastizität demonstriert. Dabei wird das Korrespondenzprinzip auf die implizite Darstellung der konstitutiven Beziehungen angewendet, indem die Evolutionsgleichungen (2.31) der inneren Variablen $\mathbf{q}_i$

$$\bar{\mathbf{q}}_i'(z) = \bar{\mathbf{q}}_i'\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(z), \bar{\mathbf{q}}_1(z), \ldots, \bar{\mathbf{q}}_n(z)\right) \tag{2.49}$$

als Funktionen der Bogenlänge formuliert werden. Deren Lösungen sind geschwindigkeitsunabhängige Funktionale. Deutlich wird dies anhand der Untersuchung der zeitlichen Änderung der inneren Variablen. Durch Anwendung der Kettenregel folgt

$$\dot{\mathbf{q}}_i(t) = \bar{\mathbf{q}}_i'\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(z), \bar{\mathbf{q}}_1(z), \ldots, \bar{\mathbf{q}}_n(z)\right) \dot{z}(t). \tag{2.50}$$

Tritt keine Änderung des Verzerrungszustandes auf, muss entsprechend der Eigenschaften der Bogenlänge $\dot{z}(t) = 0$ gelten. In diesem Fall ist keine Änderung der inneren Variablen ($\dot{\mathbf{q}}_i(t) = 0$) und damit auch keine Relaxation möglich.

Die in diesem Abschnitt erläuterten Grundlagen der kontinuumsmechanischen Beschreibung und Modellierung des Materialverhaltens kommen im Rahmen der skalenübergreifenden Simulation des Materialverhaltens von Verbundwerkstoffen auf unterschiedlichen Skalen der hierarchischen Werkstoffstruktur zum Einsatz.

2.3 Mehrskalige Modellbildung und Berechnung des effektiven Materialverhaltens

Effektives Materialverhalten

Bei der numerischen Simulation des mechanischen Verhaltens von Bauteilen aus Verbundwerkstoffen ergibt sich eine grundlegende Problemstellung. Einerseits wird das Materialverhalten des Verbundes durch die Eigenschaften seiner Komponenten, der Materialgrenzflächen und der Geometrie der Verstärkungsstruktur bestimmt, andererseits ist es im Hinblick auf Modellierungsaufwand und Rechenzeit nicht sinnvoll, Details der heterogenen Materialstruktur des Verbundes im Rahmen eines Bauteilmodells zu berücksichtigen. Für die Strukturanalyse wird der inhomogene Verbundwerkstoff daher durch ein homogenes Ersatzkontinuum ersetzt, dessen Eigenschaften das effektive Verhalten des Verbundes auf der Bauteilebene mit ausreichender Genauigkeit wiedergeben. Voraussetzung für diese Art der Modellierung ist, dass sich die charakteristischen Längen der Inhomogenitäten d, des Bauteils L sowie der Belastungen des Bauteils λ deutlich voneinander unterscheiden

$$d \ll L;\ d \ll \lambda. \tag{2.51}$$

Die Materialparameter für ein solches makroskopisches Materialmodell sind zum Teil durch Versuche an Probekörpern aus Verbundmaterial bestimmbar. Allerdings ist zur experimentellen Charakterisierung des im Allgemeinen anisotropen, effektiven Materialverhaltens ein erheblicher Aufwand erforderlich. Eine besondere Herausforderung stellt dabei die Ermittlung von Kennwerten für die Dickenrichtung des Verbundes dar, die insbesondere für die Simulation schlagartiger Beanspruchungen senkrecht zur Bauteiloberfläche benötigt werden. Da das makroskopische Materialverhalten durch die konstitutiven Eigenschaften der Verbundkomponenten und durch ihre Anordnung im Verbund bestimmt wird, muss bei Veränderung eines dieser Merkmale zudem die gesamte experimentelle Untersuchung des Verbundes wiederholt werden.

Homogenisierung

Um den Umfang der experimentellen Materialcharakterisierung in Zukunft reduzieren zu können, wird im Rahmen dieser Arbeit die rechnerische Vorhersage des effektiven Materialverhaltens auf der Basis konstitutiver und geometrischer Eigenschaften der inneren Struktur des heterogenen Verbundes angewendet – ein Vorgehen, das als Homogenisierung bezeichnet wird (Abb. 2.7). Dabei existie-

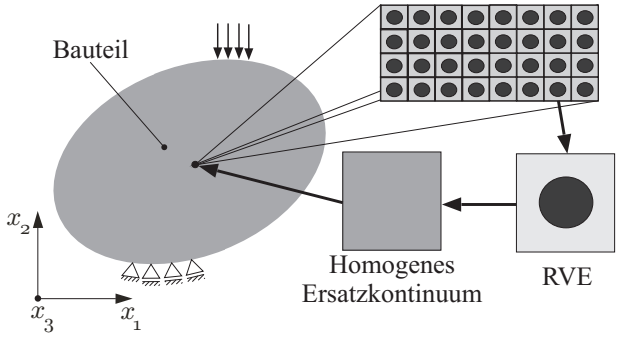


Abbildung 2.7: Ermittlung des effektiven Materialverhaltens eines homogenen Ersatzkontinuums

ren verschiedene Homogenisierungsverfahren, die sich in der Art des Skalenübergangs, der Modellierung der heterogenen Materialstruktur und der Berechnung des lokalen Materialverhaltens unterscheiden. Die Anwendung von analytischen Verfahren, die auf der Basis von Konzentrationstensoren einen Zusammenhang zwischen dem makroskopischen Beanspruchungszustand und den mikroskopischen

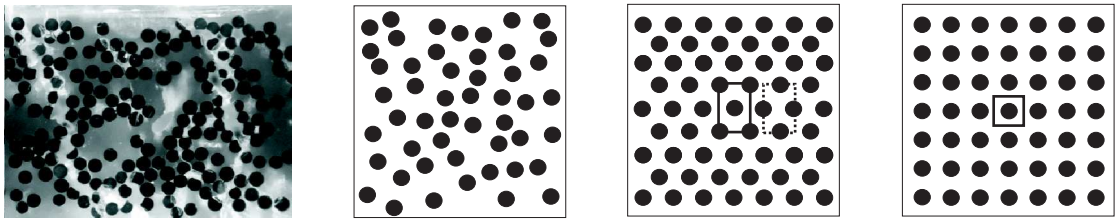
Spannungs- und Verzerrungsfeldern herstellen, bleibt dabei auf geometrisch einfache Mikrostrukturen beschränkt. Abhängig von den Annahmen zu den lokalen Verzerrungs- und Spannungsfeldern, liefern diese Verfahren Schätzwerte oder Schranken für das effektive makroskopische Materialverhalten. In diese Gruppe lassen sich beispielsweise die VOIGT-REUSS-Schranken, das MORI-TANAKA-Modell (Mori und Tanaka (1973); Benveniste (1987)) oder das selbstkonsistente Modell (Kröner (1958)) einordnen (Pierard (2006)).
Aufgrund der komplexen textilen Verstärkungsstrukturen erfolgt hier die FE-Modellierung eines für die Verbundstruktur typischen Ausschnitts, dem sogenannten repräsentativen Volumenelement (RVE). Bei der Anwendung eines derartigen FE-basierten Homogenisierungsverfahrens entsteht durch die erforderliche numerische Modellierung der lokalen Materialstruktur innerhalb des RVE ein z. T. erheblicher Aufwand, andererseits können durch die detaillierten FE-Modelle praktisch beliebige Phänomene des lokalen Materialverhaltens und der Interaktion der Vebundkomponenten abgebildet werden. Aus den Simulationsergebnissen des lokalen Verhaltens des RVE kann, nach Definition geeigneter Mittelwerte und Äquivalenzkriterien zur Verknüpfung des mechanischen Verhaltens zweier aufeinanderfolgender Skalen, das effektive Materialverhalten des Verbundes berechnet werden.
Dadurch bleiben die experimentelle Charakterisierung und die konstitutive Modellierung auf die Verbundkomponenten beschränkt. Im Idealfall kann auf bestehende Materialmodelle und bereits vorhandene experimentelle Daten zurückgegriffen werden. Experimentelle Untersuchungen an Verbundproben sind bei dieser Form der mehrskaligen Modellierung im Idealfall lediglich zur Validierung der Simulationsergebnisse erforderlich. Bei der Materialmodellierung der Verbundkomponenten wird vorausgesetzt, dass die kleinsten charakteristischen Längen noch immer die Anwendbarkeit der Kontinuumsmechanik und ihrer phänomenologischen Materialmodelle erlauben.

Varianten von RVE

Abhängig von der inneren Struktur des Verbundes sind unterschiedliche Varianten eines RVE denkbar. Besitzt der Verbund eine regellose innere Struktur, wie es beispielsweise bei partikelverstärkten Polymeren der Fall ist, sollte das RVE eine ausreichende Anzahl von statistisch verteilten Partikeln enthalten, um einen repräsentativen Ausschnitt abzubilden. Für die charakteristische Länge des RVE l gilt in diesem Fall

$$d \ll l \ll L. \tag{2.52}$$

Trotz der regellosen Anordnung sollten quantifizierbare Eigenschaften, wie Volumenanteil der Verstärkung oder Form und Orientierung der Partikel durch das RVE-Modell wiedergegeben werden. Ausführliche Untersuchungen zu Auswahl und Größe des RVE sind in Gusev (1997); Kanit u. a. (2003) zu finden.
Neben der bereits genannten Variante eines stochastischen RVE-Modells, kann es für regellose Strukturen sinnvoll sein, diese durch idealisierte regelmäßige Anordnungen zu ersetzen. Ein typisches Beispiel dafür stellt die Faseranordnung in unidirektional verstärkten Verbunden dar (Abb. 2.8). Neben dem in Abb. 2.8(b) gezeigten RVE mit statistischer Faserverteilung, werden häufig idealisierte, reguläre Faseranordnungen zur Bestimmung effektiver Eigenschaften herangezogen. Abhängig von den getroffenen Annahmen zur Verteilung der Filamente ergeben sich bei gleichem Faservolumengehalt unterschiedliche Ergebnisse für die effektiven Materialeigenschaften. Während die hexagonale Anordnung in Abb. 2.8(c) zu einem transversal isotropen effektiven Materialverhalten (vgl. 2.3.2) führt, ist das Materialverhalten für die quadratische Anordnung in Abb. 2.8(d) in der dargestellten Ebene senkrecht zur Faser nicht richtungsunabhängig.
In regelmäßigen Faseranordnungen kann eine sogenannte Einheitszelle als kleinste wiederkehrende Einheit identifiziert werden (Abb. 2.8(c),2.8(d)), deren periodische Fortsetzung in der Ebene die Verstärkungsstruktur selbst ergibt. Für derartige periodische Strukturen kann bei Verwendung periodischer



(a) Schliffbild

(b) RVE mit statistischer Faserverteilung

(c) RVE mit idealisierter, hexagonaler Faseranordnung

(d) RVE mit idealisierter, quadratischer Faseranordnung

Abbildung 2.8: Schliffbild eines unidirektionalen Verbundes und Varianten von RVE-Modellen

Randbedingungen (s. Abschnitt 2.3.1) ein RVE in Form einer Einheitszelle ($d \approx l$) gewählt werden, da die Anzahl der Einheitszellen innerhalb des RVE in diesem Fall das Ergebnis der Homogenisierung nicht beeinflusst. Damit kann der Modellierungsaufwand gegenüber einem statistischen RVE deutlich verringert werden. Textilverstärkte Materialien weisen im Allgemeinen ebenfalls eine solche regelmäßige innere Struktur auf.

Skalen

Das hier betrachtete textilverstärkte Polypropylen ist aufgrund seines hierarchischen Werkstoffaufbaus prädestiniert für die Anwendung der Homogenisierungstechnik. Allerdings besitzt der textilverstärkte Verbund drei charakteristische Skalenebenen (Abb. 2.9), so dass zur Berechnung des Verbundverhaltens ein zweistufiges Homogenisierungsverfahren erforderlich ist.

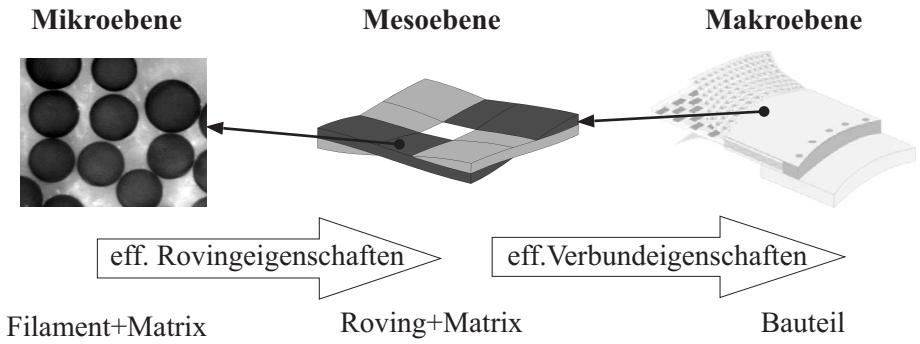


Abbildung 2.9: Mehrskalige Betrachtung des hierarchischen Werkstoffaufbaus von textilverstärktem Polypropylen

Mesoskopisch betrachtet, besteht der Verbund im kompakten Zustand aus den mit Matrix durchtränkten und konsolidierten Rovings der textilen Verstärkungsstruktur. Weil der Durchmesser eines einzelnen Filaments lediglich wenige Mikrometer beträgt und damit deutlich unter den charakteristischen Abmessungen der textilen Verstärkungsstruktur liegt, wird der konsolidierte Roving in einem mesoskopischen RVE als homogenes Kontinuum modelliert. Zusätzlich zu diesen Bereichen mit einem hohen Faservolumengehalt existieren mit Matrix gefüllte Hohlräume, die keine Fasern enthalten (Abb. 2.10).
Da die Eigenschaften des Rovings durch die aus einzelnen Filamenten, Matrixbereichen und Grenzflächen bestehende Mikrostruktur bestimmt werden, ergibt sich folgende hierarchische Unterteilung der heterogenen Verbundstruktur in drei Skalenebenen:

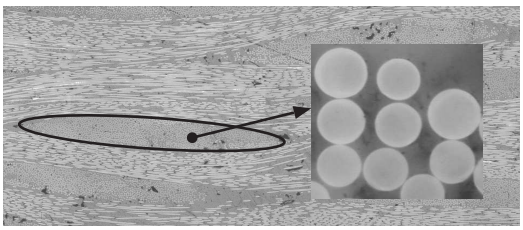


Abbildung 2.10: Schliffbild eines mehrlagigen gewebeverstärkten Verbundes; Kennzeichnung des mesoskopisch als homogen betrachteten Rovingbereichs

- *Mikroskala*: in Matrix eingebettete Filamente $(d_{\text{Mikro}} \approx 1 \ldots 100\mu\text{m})$,
- *Mesoskala*: konsolidierte Rovings der texilen Verstärkungsstruktur und reine Matrixbereiche $(d_{\text{Meso}} \approx 100\mu\text{m} \ldots 10\text{mm})$,
- *Makroskala*: Bauteil $(d_{\text{Makro}} > 10\text{mm})$.

Die in Klammern genannten charakteristischen Abmessungen der einzelnen Skalen sind Richtwerte. Sie werden für die Mikroebene, sofern keine anderen Einschlüsse auftreten, durch den Durchmesser der Filamente bestimmt. Als typische Faserdurchmesser können für Glasfasern $20\mu\text{m}$ und für Kohlefasern $7\mu\text{m}$ angenommen werden. Die charakteristischen Längen der Mesoebene entsprechen den äußeren Abmessungen der Einheitszelle der textilen Verstärkungsstruktur. Aufgrund der Vielfalt der möglichen Verstärkungen kann hier nur ein grober Richtwert angegeben werden.

Effektive Eigenschaften

Die Vorhersage des makroskopischen Materialverhaltens erfolgt schließlich mithilfe eines zweistufigen Homogenisierungsverfahrens

1. Mikro $\rightarrow$ Meso: Berechnung effektiver Eigenschaften des konsolidierten Rovings,
2. Meso $\rightarrow$ Makro: Berechnung effektiver Eigenschaften des Verbundes.

Dabei ist zu beachten, dass für den Skalenübergang von der Meso- zur Makroebene, aufgrund der häufig platten- oder schalenförmigen Verbundstrukturen, die Forderung $d_{\text{Meso}} \ll L$ im Allgemeinen in der Ebene, aber nicht in Dickenrichtung erfüllt ist. Dadurch wirkt sich die innere Struktur des Verbundwerkstoffs für bestimmte Belastungen wie Biegung und Torsion direkt auf das makroskopische Materialverhalten aus – ein Einfluss der durch das hier angewendete Homogenisierungsverfahren nicht erfasst werden kann. Um das Strukturverhalten bei Biegung und Torsion korrekt abzubilden, sind angepasste Homogenisierungsmethoden zur Berechnung effektiver Kennwerte makroskopischer Strukturmodelle (Platten- oder Schalensteifigkeiten, Geers u. a. (2007)) oder erweiterter Kontinuumsmodelle (COSSERAT-Kontinua, Forest und Sab (1998); Forest u. a. (1999); Haasemann (2008)) zu verwenden. Da im Rahmen dieser Arbeit das Verhalten der Verbundstruktur in Zugversuchen experimentell untersucht und simuliert wird, ist eine derartige Erweiterung nicht erforderlich. Der in diesen Experimenten näherungsweise vorliegende ebene Spannungszustand wird durch die Wahl der Randbedingungen (vgl. Abschnitt Abb. 2.3.2) für die Homogenisierung berücksichtigt.
Um Verwechslungen zu vermeiden, wird zur Darstellung der Grundlagen der Homogenisierung, die unabhängig von dem konkreten Skalenübergang gültig sind, der Begriff des effektiven Materialverhaltens zur Kennzeichnung des homogenen Ersatzkontinuums verwendet. Die Bezeichnung makroskopisches Materialverhalten kennzeichnet effektive Eigenschaften der Bauteilebene.

2.3.1 Skalenübergang – Mittelwerte, Äquivalenzkriterium und Randbedingungen

Mittelwerte

Für den Übergang von den lokal veränderlichen Materialeigenschaften des heterogenen Verbundwerkstoffs zu einem homogenen Ersatzkontinuum wird ein physikalisch sinnvolles Äquivalenzkriterium benötigt. Da dieses Kriterium den durch die effektiven Spannungen $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ und Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ gekennzeichneten Beanspruchungszustand in einem Materiepunkt $\mathbf{x}$ des homogenen Ersatzkontinuums mit den von den lokalen Koordinaten $\mathbf{y}$ abhängigen Spannungs- $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$ und Verzerrungsfeldern $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})$ innerhalb des RVE verknüpft, ist zunächst die Festlegung geeigneter Mittelwerte der lokalen Feldgrößen erforderlich. Effektive Beanspruchungen und Materialparameter werden im folgenden Abschnitt durch einen Querstrich gekennzeichnet.

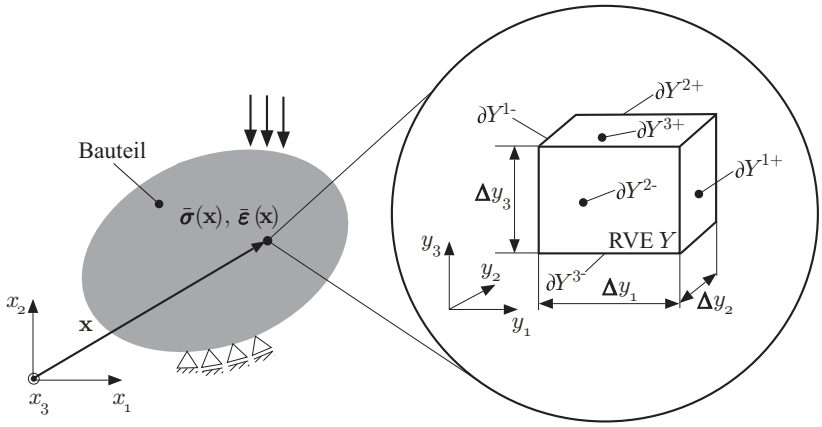


Abbildung 2.11: RVE und lokales Koordinatensystem

Eine Möglichkeit zur Definition eines Vergleichswertes für den Verzerrungszustand des RVE ist durch den Volumenmittelwert

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{V_Y} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})\, dV \tag{2.53}$$

des lokalen Verzerrungsfeldes $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})$ gegeben, wobei V_Y das Volumen eines RVE Y mit den Abmessungen Δy_1, Δy_2 und Δy_3 ist. Analog dazu können das Volumenmittel

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{V_Y} \int_Y \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})\, dV \tag{2.54}$$

des lokalen Spannungsfeldes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$ und der Volumenmittelwert der Arbeit der inneren Lasten

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{V_Y} \int_Y \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})\, dV \tag{2.55}$$

definiert werden.

Äquivalenzkriterium

Mithilfe dieser Mittelwerte kann ein Kriterium für die Gleichwertigkeit von lokalem und effektivem Materialverhalten formuliert werden. Hill (1963, 1972) postuliert mit der Äquivalenz

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) : \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \rangle \tag{2.56}$$

der virtuellen Arbeit der effektiven inneren Lasten $\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und des zugehörigen lokalen Mittelwertes $\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) : \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \rangle$ ein Kriterium, das auch als HILL-MANDEL-Bedingung bezeichnet wird.
Ziel der Homogenisierung ist es nun, das lokale Verhalten innerhalb des RVE für eine, durch die Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ oder Spannungen $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ vorgegebene, effektive Beanspruchung numerisch zu simulieren. Mittels geeigneter Randbedingungen ist in dem RVE ein lokaler Beanspruchungszustand zu erzeugen, für den die Mittelwerte der lokalen Verzerrungs- und Spannungsfelder

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{V_Y} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})\, dV \tag{2.57}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{V_Y} \int_Y \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})\, dV \tag{2.58}$$

den zugehörigen Effektivwerten $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ entsprechen.
Dazu ist es zweckmäßig, die zur Mittelwertbildung verwendeten Volumenintegrale in Oberflächenintegrale zu überführen, so dass der Mittelwert unabhängig von den Feldern im Inneren des RVE ist und lediglich durch die Verschiebungen und Spannungsvektoren auf dem Rand des RVE bestimmt wird. Ersetzt man den Verzerrungstensor mithilfe der linearen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (2.4)

$$\langle \varepsilon_{ij}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{2V_Y} \int_Y (u_{i,j} + u_{j,i})\, dV, \tag{2.59}$$

kann der erhaltene Ausdruck in

$$\langle \varepsilon_{ij}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{2V_Y} \int_{\partial Y} (u_i n_j + u_j n_i)\, dA \tag{2.60}$$

überführt werden, so dass der Mittelwert vollständig durch die Randverschiebungen des RVE definiert ist. Die Überführung in ein Oberflächenintegral ist dabei an kartesische Koordinaten gebunden, da anderenfalls die Definition des Mittelwertes von den verwendeten Koordinaten abhängt und damit nicht mehr eindeutig ist.
Im Fall des Spannungstensors ergibt sich durch Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes

$$\langle \sigma_{ij}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{V_Y} \int_Y \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V_Y} \int_Y (\sigma_{kj} y_i)_{,k}\, dV = \frac{1}{V_Y} \int_{\partial Y} \sigma_{kj} y_i n_k dA, \tag{2.61}$$

ein Ausdruck für den Mittelwert des lokalen Spannungsfeldes

$$\langle \sigma_{ij}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{V_Y} \int_{\partial Y} t_j y_i dA \tag{2.62}$$

der nur von den Spannungsvektoren $\mathbf{t}$ am Rand des RVE bestimmt wird. Dabei ist die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen (2.10) im Inneren des RVE vorauszusetzen, wobei Volumenlasten nicht betrachtet werden.

Randbedingungen

Durch die Gleichungen (2.60) und (2.62) ist der Zusammenhang zwischen den Randgrößen, die in der Simulation vorzugeben sind, und den resultierenden Volumenmittelwerten der Verzerrungen und Spannungen gegeben. Um ein konsistentes Homogenisierungsverfahren zu erhalten, müssen die Randbedingungen sichern, dass die Mittelwerte den zugehörigen effektiven Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und Spannungen

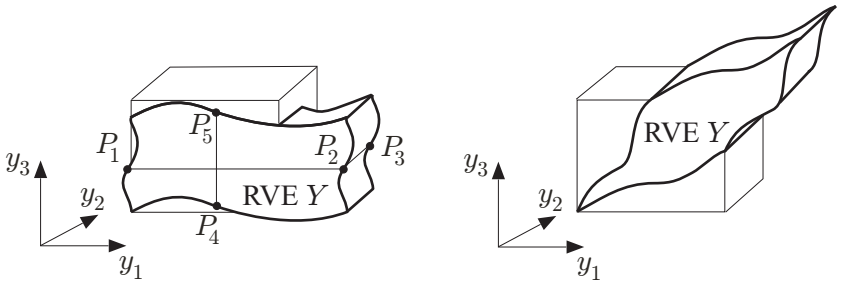
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ entsprechen. Weiterhin ist das Kriterium der Äquivalenz von lokalem und effektivem Beanspruchungszustand in Form der HILL-MANDEL-Bedingung (2.56) durch die Randbedingungen einzuhalten. Diese Forderungen können durch drei Arten von Randbedingungen erfüllt werden:

- Vorgabe eines effektiven Spannungszustandes $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ durch konstante Spannungsvektorrandbedingungen
$$\mathbf{t}(\mathbf{y}) = \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad \forall\, \mathbf{y} \in \partial Y, \tag{2.63}$$
- Vorgabe eines effektiven Verzerrungszustandes $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ durch
  - lineare Verschiebungsrandbedingungen
$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{y} \quad \forall\, \mathbf{y} \in \partial Y, \tag{2.64}$$
  - periodische Verschiebungs- und antiperiodische Spannungsvektorrandbedingungen
$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}(\mathbf{y}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^{\mathrm{P}}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{u}^{\mathrm{P}} \text{ periodisch} \\ \mathbf{t} \text{ antiperiodisch} \end{array}\right\} \forall\, \mathbf{y} \in \partial Y, \tag{2.65}$$

wobei $\mathbf{n}$ den Auswärtsnormaleneinheitsvektor, $\mathbf{t}$ den Spannungsvektor auf dem Rand des RVE und $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ bzw. $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ den vorzugebenden effektiven Beanspruchungszustand bezeichnen.
Die periodischen Randbedingungen nach (2.65) unterscheiden sich von den linearen Verschiebungsrandbedingungen durch einen periodischen Anteil des Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}^{\mathrm{P}}$. Zur Sicherung der kinematischen Kompatibilität zweier benachbarter Einheitszellen muss für die $\mathbf{u}^{\mathrm{P}}$ auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des RVE $\mathbf{y}^{i+} \in \partial Y^{i+}$ und $\mathbf{y}^{i-} \in \partial Y^{i-}$ (vgl. Abb. 2.11)

$$\mathbf{u}^{\mathrm{P}}\left(\mathbf{y}^{i+}\right) = \mathbf{u}^{\mathrm{P}}\left(\mathbf{y}^{i-}\right) \tag{2.66}$$

gelten. Damit ergeben sich für die in der Prinzipskizze von Abb. 2.12(a) eingezeichneten Punkte die Zwangsbedingungen $\mathbf{u}^{\mathrm{P}}(P_1) = \mathbf{u}^{\mathrm{P}}(P_2) = \mathbf{u}^{\mathrm{P}}(P_3)$ sowie $\mathbf{u}^{\mathrm{P}}(P_4) = \mathbf{u}^{\mathrm{P}}(P_5)$. Durch Symmetrien in



(a) Periodische Randverschiebung bei Zugbelastung

(b) Periodische Randverschiebung bei Schubbelastung

Abbildung 2.12: Verformungsverhalten unter periodischen Randbedingungen

der lokalen Materialstruktur werden die periodischen Anteile der Randverschiebungen bei Belastung normal zu den Grenzflächen des RVE in vielen Fällen nicht angesprochen. Sie können meist nur unter Schubbelastung (Abb. 2.12(b)) beobachtet werden.

Randbedingungseinfluss

Im Allgemeinen erhält man, abhängig vom Typ der verwendeten Randbedingungen unterschiedliche Ergebnisse für das effektive Materialverhalten. Verschiebungsrandbedingungen führen in der Regel zu einem steiferen Verformungsverhalten als Spannungsvektorrandbedingungen, während die Ergebnisse bei periodischen Randbedingungen zwischen diesen beiden Varianten liegen. Das mit den verschiedenen Randbedingungen berechnete effektive Materialverhalten ist generell von der Größe des als repräsentativ angesehenen Materialausschnitts abhängig (Pierard (2006)).
Für die hier betrachteten Verbundwerkstoffe wird auf der Mikro- und Mesoebene eine periodische Materialstruktur angenommen. Das RVE entspricht, unter Verwendung periodischer Verschiebungsrandbedingungen und der sich automatisch einstellenden antiperiodischen Spannungen an der Oberfläche des RVE, einer Einheitszelle. In diesem Fall ist das Ergebnis der Homogenisierung unabhängig davon, wie viele Einheitszellen das RVE enthält. Werden dagegen Verschiebungs- oder Spannungsvektorrandbedingungen genutzt, nähern sich die so berechneten effektiven Kennwerte mit zunehmender Anzahl von Einheitszellen innerhalb des RVE dem mit periodischen Randbedingungen ermittelten Verhalten an (Drago und Pindera (2007)).

Effektives Materialverhalten

Das gesuchte effektive Materialverhalten erhält man aus der Lösung der lokalen Randwertaufgabe und der anschließenden Berechnung des nicht durch die Randbedingungen vorgegebenen Mittelwertes. Bei Verwendung von Spannungsvektorrandbedingungen ist $\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \rangle$ zu bestimmen, bei linearen oder periodischen Verschiebungsrandbedingungen entsprechend $\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \rangle$. Das lokale Randwertproblem wird dabei durch die Gleichgewichtsbedingungen (2.10) ohne Berücksichtigung von Volumenkraftdichten $\sigma_{ij,i} = 0$, die Symmetrie des Spannungstensors (2.13), die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (2.4) und die konstitutiven Gleichungen der Verbundbestandteile sowie durch die gewählten Randbedingungen definiert.
Da die Auswertung der Spannungsfelder nach (2.54) bei der Modellierung des lokalen Feldproblems mittels FEM von der gewählten Elementformulierung sowie der Geometrie jedes Elements abhängig ist, sollte zur Berechnung des Spannungsmittels auf das Oberflächenintegral (2.62) zurückgegriffen werden. Eine besonders effiziente Möglichkeit zur Aufbringung der periodischen Randbedingungen und zur Ermittlung des effektiven Materialverhaltens ist durch die Einführung von Haupt- oder Masterknoten M^{y_1}, M^{y_2} und M^{y_3} zur Kontrolle der Deformation des RVE gegeben (Abb. 2.13).
Durch die Formulierung einer linearen Zwangsbedingung

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{y}^{i+}\right) - \mathbf{u}\left(\mathbf{y}^{i-}\right) = \mathbf{u}^{y_i} \tag{2.67}$$

ist es möglich, die Relativverschiebungen von zwei gegenüberliegenden Randflächen des RVE durch die Verschiebung $\mathbf{u}^{y_i}$ eines einzelnen Masterknotens zu kontrollieren. Damit ist das Verschiebungsfeld des RVE-Randes bis auf den zellperiodischen Anteil, der als Ergebnis der FE-Berechnung folgt, eindeutig festlegt.
Führt man im Prinzip der virtuellen Arbeit (2.20) in Abschnitt 2.1.2 die an diesen Hauptknoten verrichtete virtuelle Arbeit $\sum_{i=1}^{3} \mathbf{F}^{y_i} \cdot \delta\mathbf{u}^{y_i}$ ein, so folgt für verschiebungsgesteuerte Lastfälle ohne zusätzliche äußere Belastungen

$$\int_Y \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV - \sum_{i=1}^{3} \mathbf{F}^{y_i} \cdot \delta\mathbf{u}^{y_i} = 0. \tag{2.68}$$

Wertet man Gleichung (2.68) unter Voraussetzung periodischer Randverschiebungen (2.65) aus, erkennt man, dass die Reaktionskräfte $\mathbf{F}^{y_1}$, $\mathbf{F}^{y_2}$ und $\mathbf{F}^{y_3}$ an den Masterknoten direkt zur Bestimmung der mittleren Spannung genutzt werden können. Aufgrund der kinematischen Kopplung stehen diese Reaktionskräfte im Gleichgewicht mit dem Integral über die Spannungsvektoren an den zugeordneten

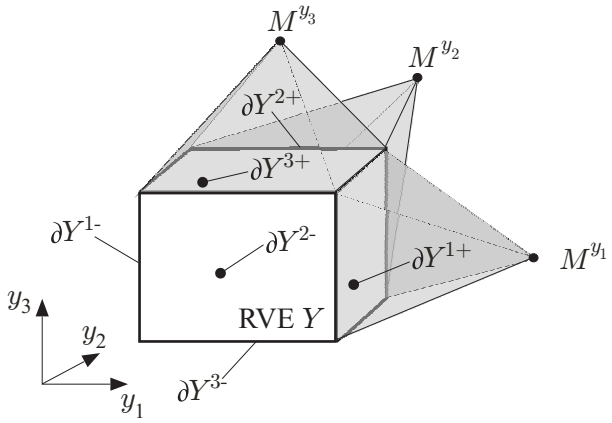


Abbildung 2.13: Masterknoten zur Aufbringung der Randbedingungen für die Homogenisierung

Randflächen des RVE

$$\mathbf{F}^{y_i} = \int_{\partial Y^{i+}} \mathbf{t} dA. \tag{2.69}$$

Für die periodischen Randbedingungen folgt neben (2.69) auch die in (2.65) angegebene Forderung antiperiodischer Spannungsvektoren an zugeordneten Randflächen des RVE als Gleichgewichtsbedingung aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit.
Aus Gleichung (2.62) erhält man unter Voraussetzung eines RVE mit parallelen Seitenflächen und Berücksichtigung von (2.69) schließlich den gesuchten Zusammenhang zwischen Spannungsmittelwert und Reaktionskraft

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{F_j^{y_i}}{A^{y_i}};\ A^{y_1} = \Delta y_2 \Delta y_3;\ A^{y_2} = \Delta y_1 \Delta y_3;\ A^{y_3} = \Delta y_1 \Delta y_2, \tag{2.70}$$

wobei A^{y_i} die Flächeninhalte der Randflächen des RVE sind. Die effektive Materialantwort in Form des Spannungsmittelwertes folgt damit direkt als Ergebnis der FE-Berechnung.

2.3.2 Berechnung des effektiven linear elastischen Materialverhaltens

Einführung

In den bisherigen Ausführungen zur Homogenisierung wurden keine Aussagen zur Art des Materialverhaltens der Verbundkomponenten oder eines effektiven Materialmodells getroffen. Im allgemeinen Fall des sowohl lokal als auch global nichtlinearen Materialverhaltens ist es in der Regel sehr aufwendig, eine geschlossene Formulierung für ein effektives Materialmodell anzugeben. Deshalb erfolgt die Vorhersage des effektiven mechanischen Verhaltens in diesem Fall durch die Berechnung effektiver Spannungs-Dehnungskurven für ausgewählte Beanspruchungen oder durch eine gekoppelte Mehrskalensimulation, bei der das Materialverhalten in jedem Integrationspunkt des makroskopischen Strukturmodells durch die Spannungsantwort eines lokalen, mikro- oder mesoskopischen RVE-Modells bestimmt wird (s. Abschnitt 2.3.3).
Kann das Verhalten der Komponenten dagegen als linear elastisch angenommen werden und enthält das RVE-Modell auch sonst keine Nichtlinearitäten, sind mithilfe der Homogenisierung die Parameter des HOOKEschen Gesetzes zur Beschreibung des anisotropen, linear elastischen effektiven Materialverhaltens direkt bestimmbar. Die dazu notwendigen Berechnungen werden in diesem Abschnitt beschrieben.

HOOKEsches Gesetz

Die konstitutive Gleichung zur Beschreibung des linear elastischen Materialverhaltens der Komponenten und des Verbundes ist für den isothermen Fall durch das HOOKEsche Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.71}$$

mit dem Elastizitätstensor vierter Stufe $\mathbf{C}$ gegeben. Durch die Symmetrien des Elastizitätstensors

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk};\ C_{ijkl} = C_{klij} \tag{2.72}$$

reduziert sich die Anzahl der unabhängigen elastischen Kennwerte von ursprünglich $3^4 = 81$ auf 21. Unter Berücksichtigung dieser Symmetrien erfolgt für praktische Berechnungen die Überführung der Tensornotation (2.71) in eine Vektor-Matrixschreibweise

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{V}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\mathrm{V}} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{V}}, \tag{2.73}$$

die auch als VOIGTsche Notation bezeichnet wird. Die entsprechende Transformation der Indizes fasst Tab. 2.1 zusammen. Zu beachten ist, dass in der Vektor-Matrixschreibweise die Schubverzerrungen $\varepsilon_4 = \gamma_{23}, \varepsilon_5 = \gamma_{31}, \varepsilon_6 = \gamma_{12}$ verwendet werden.

Tabelle 2.1: Indextransformation für VOIGT-Notation

Tensorindex	11	22	33	23	13	12
Vektornotation	1	2	3	4	5	6

Materialsymmetrien

Zur Beschreibung des linear elastischen Materialverhaltens der Verbundkomponenten, aber auch des Verbundes selbst, ist aufgrund von Symmetrien in der Materialstruktur eine weitere Reduzierung der unabhängigen elastischen Kennwerte möglich. Für diese Arbeit sind insbesondere die Sonderfälle des orthotropen, transversal isotropen und isotropen Verhaltens von Bedeutung.
Fallen die Schnittlinien der Symmetrieebenen, die sogenannten Orthotropieachsen, mit den Koordinatenachsen zusammen, lautet die Matrixdarstellung des verallgemeinerten HOOKEschen Gesetzes für orthotropes Materialverhalten

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \tag{2.74}$$

Es verbleiben lediglich neun, von Null verschiedene, unabhängige elastische Kennwerte. Im Gegensatz zur allgemeinen Anisotropie gehen alle Kopplungseffekte zwischen den Normal- und Schubbeanspruchungen sowie zwischen den verschiedenen Schubspannungen und Schubverzerrungen verloren.
Eine weitere Reduzierung der unabhängigen Elastizitätskonstanten ist für die transversale Isotropie möglich. Dabei besitzen die Materialeigenschaften des Werkstoffs eine Vorzugsrichtung, während das Verhalten in der senkrecht dazu stehenden Ebene richtungsunabhängig ist. Zeigt die Vorzugsrichtung

entlang der x_1-Achse, ergeben sich zusätzlich zum orthotropen Verhalten die Symmetriebedingungen $C_{22} = C_{33}$, $C_{12} = C_{13}$, $C_{55} = C_{66}$ sowie $C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \tag{2.75}$$

Dadurch reduziert sich die Anzahl der von Null verschiedenen, unabhängigen Materialparameter auf fünf. Ein derartiges Materialverhalten wird beispielsweise zur Beschreibung einer unidirektional verstärkten Laminatschicht oder eines konsolidierten Rovings verwendet.
Die höchste Form der Materialsymmetrie wird als Isotropie bezeichnet und führt zu einem richtungsunabhängigen Materialverhalten. Bedingt durch das in alle Richtungen gleiche Längsdehn- und Querdehn- sowie Schubverhalten ergeben sich die Zwangsbedingungen $C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $C_{12} = C_{13} = C_{23}$ sowie $C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \tag{2.76}$$

Damit verbleiben lediglich zwei unabhängige elastische Konstanten, die in Form des Elastizitätsmoduls E und der Querkontraktionszahl ν angebbar sind (Altenbach u. a. (1996)).

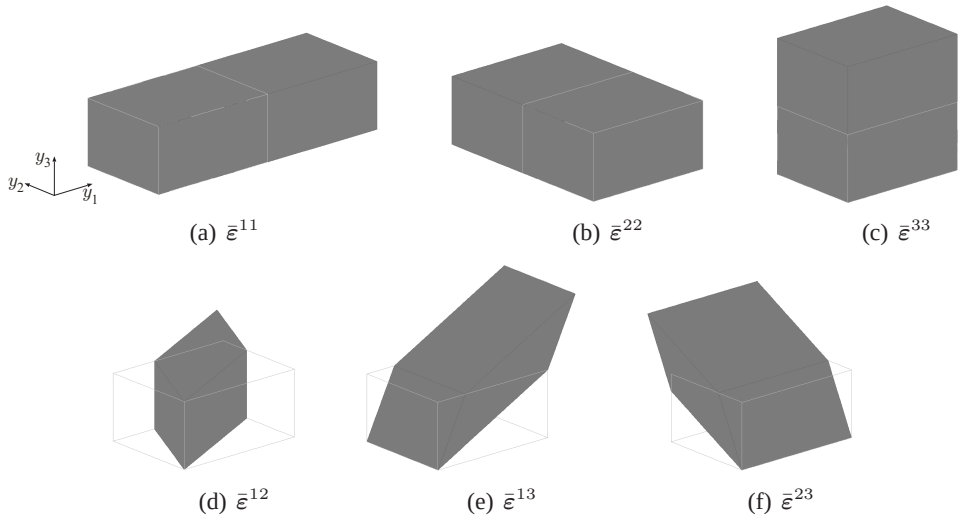
Homogenisierung

Im Rahmen der mehrskaligen Modellierung des linear elastischen Materialverhaltens wird die heterogene Materialstruktur des Verbundwerkstoffs durch ein homogenes Kontinuum mit dem effektiven Steifigkeitstensor $\bar{\mathbf{C}}$ ersetzt, dessen Koordinaten durch Anwendung des im vorigen Abschnitt beschriebenen Homogenisierungsverfahrens berechnet werden sollen.
Nach der Identifikation eines für die periodische Werkstoffstruktur repräsentativen Volumenelements und der Erstellung eines entsprechenden FE-Modells sind durch periodische Verschiebungsrandbedingungen (2.65) eine ausreichende Anzahl von effektiven Verzerrungszuständen $\bar{\varepsilon}$ vorzugeben. Aus der Lösung der zugehörigen lokalen Feldprobleme können anschließend die gesuchten effektiven Materialeigenschaften $\bar{\mathbf{C}}$ bestimmt werden. Um eine effiziente Berechnung zu ermöglichen, werden die Verschiebungsrandbedingungen so gewählt, dass für jeden Beanspruchungszustand $\bar{\varepsilon}^{kl}$ eine Koordinate des effektiven Verzerrungsvektors der VOIGTschen Notation einer Einheitsverzerrung entspricht, während alle anderen Effektivwerte Null sind

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{2.77}$$

Abbildung 2.14 zeigt die daraus folgenden sechs unabhängigen Deformationszustände $\bar{\varepsilon}^{kl}$.
Infolge der vorgegebenen Einheitsverzerrungen entsprechen die effektiven Steifigkeiten $\bar{\mathbf{C}}$ den Mittelwerten der Spannung

$$\left\langle \sigma_{ij}\left(\bar{\varepsilon}^{kl}\right)\right\rangle = \bar{\sigma}_{ij}\left(\bar{\varepsilon}^{kl}\right) = \bar{C}_{ijmn}\bar{\varepsilon}_{mn}^{kl} = \bar{C}_{ijmn}\frac{1}{2}(\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{nk}) = \bar{C}_{ijkl}. \tag{2.78}$$



(a) $\bar{\varepsilon}^{11}$ (b) $\bar{\varepsilon}^{22}$ (c) $\bar{\varepsilon}^{33}$

(d) $\bar{\varepsilon}^{12}$ (e) $\bar{\varepsilon}^{13}$ (f) $\bar{\varepsilon}^{23}$

Abbildung 2.14: Beanspruchungszustände $\bar{\varepsilon}^{kl}$ zur Berechnung des effektiven elastischen Steifigkeitstensors $\bar{\mathbf{C}}$

Die zu ermittelnden effektiven Steifigkeiten $\bar{\mathbf{C}}$ können daher nach Lösung der zu den Deformationsmoden $\bar{\varepsilon}^{kl}$ gehörenden, lokalen Randwertprobleme aus den Spannungsfeldern $\boldsymbol{\sigma}\left(\bar{\varepsilon}^{kl}\right)$ bestimmt werden

$$\bar{C}_{ijkl} = \left\langle \sigma_{ij}\left(\bar{\varepsilon}^{kl}\right)\right\rangle = \frac{1}{V_Y}\int\limits_Y \sigma_{ij}\left(\bar{\varepsilon}^{kl}\right)\, dV. \tag{2.79}$$

Zur Berechnung des Spannungsmittelwertes werden entsprechend (2.70) die Reaktionskräfte an den Hauptknoten verwendet, so dass sich die effektiven Steifigkeiten aus

$$\bar{C}_{ijkl} = \frac{F_j^{y_i}\left(\bar{\varepsilon}^{kl}\right)}{A^{y_i}} \tag{2.80}$$

ergeben. Durch Auswertung der sechs Deformationsmoden $\bar{\varepsilon}^{kl}$ können alle 21 unabhängigen Koordinaten der Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{\bar{\mathbf{C}}}}^{\mathrm{V}}$ der VOIGTschen Notation bestimmt werden

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \bar{\varepsilon}^{11} & \bar{\varepsilon}^{22} & \bar{\varepsilon}^{33} & \bar{\varepsilon}^{23} & \bar{\varepsilon}^{13} & \bar{\varepsilon}^{12} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{l} F_1^{y_1} \\ F_2^{y_2} \\ F_3^{y_3} \\ F_3^{y_2} \\ F_3^{y_1} \\ F_2^{y_1} \end{array} \rightarrow & \left[\begin{array}{cccccc} \bar{C}_{11} & & & & & \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & & \text{sym.} & & \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & & & \\ \bar{C}_{41} & \bar{C}_{42} & \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44} & & \\ \bar{C}_{51} & \bar{C}_{52} & \bar{C}_{53} & \bar{C}_{54} & \bar{C}_{55} & \\ \bar{C}_{61} & \bar{C}_{62} & \bar{C}_{63} & \bar{C}_{64} & \bar{C}_{65} & \bar{C}_{66} \end{array}\right]. \end{array} \tag{2.81}$$

Aufgrund der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{\bar{\mathbf{C}}}}^{\mathrm{V}} = \underline{\underline{\bar{\mathbf{C}}}}^{\mathrm{V}^T}$ sind zur Berechnung der effektiven Steifigkeiten nicht alle Kombinationen von Reaktionskräften und Deformationsmoden auszuwerten. Allerdings ermöglicht die Berechnung jedes Elements der Steifigkeitsmatrix die Überprüfung der Symmetrie und damit eine Verifizierung der Berechnungsergebnisse.

2.3.3 Berechnung des effektiven nichtlinearen Materialverhaltens

Einführung

Im Gegensatz zu dem im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Vorgehen bei linear elastischem Materialverhalten ist im nichtlinearen Fall in der Regel kein Materialmodell zur Beschreibung des anisotropen inelastischen Verhaltens des Verbundes verfügbar, dessen Parameter aus der Analyse des lokalen Deformationsverhaltens bestimmt werden können. Häufig unterscheidet sich zudem das effektive Materialverhalten zum Teil deutlich von dem der Verbundbestandteile, so dass die in den lokalen Modellen verwendeten konstitutiven Gleichungen nicht in verallgemeinerter Form für den Verbund anwendbar sind. Benötigt werden daher Homogenisierungsverfahren, die eine Vorhersage ohne Annahmen zu einem effektiven Materialmodell ermöglichen.
Kann ein makroskopisch homogener Beanspruchungszustand vorausgesetzt werden, ist eine numerische Untersuchung der Auswirkungen physikalischer Nichtlinearitäten der Mikro- und Mesoskala auf das effektive Materialverhalten durch die Berechnung effektiver Spannungs-Dehnungskurven für einen makroskopischen Materiepunkt ausreichend. Soll dagegen eine makroskopisch inhomogene Beanspruchung simuliert werden, ist zur Lösung der globalen Randwertaufgabe das Materialverhalten in jedem Materiepunkt zu bestimmen. Erfolgt die Strukturanalyse mittels FEM, sind für jeden Integrationspunkt sowohl die effektive Spannungsantwort als auch die Materialtangentensteifigkeit anhand eines lokalen RVE-Modells zu berechnen.

FE-Simulation

Eine Möglichkeit zur Ermittlung effektiver Spannungs-Dehnungskurven, die unabhängig von den lokalen Materialeigenschaften angewendet werden kann, stellt eine physikalisch nichtlineare FE-Simulation dar. Dazu wird der makroskopische Beanspruchungszustand $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ oder $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ mittels der Randbedingungen (2.63)-(2.65) auf das RVE übertragen und das lokale Materialverhalten in einer inkrementellen FE-Rechnung simuliert. Die resultierende effektive Materialantwort ist aus den Mittelwerten der lokalen Verzerrungs- (2.60) und Spannungsfelder (2.62) zu bestimmen.
In dieser Arbeit soll ein derartiges Vorgehen zur Simulation des Materialverhaltens von textilverstärktem Polypropylen angewendet und die berechneten effektiven Spannungs-Dehnungskurven den experimentellen Ergebnissen gegenübergestellt werden (s. Kapitel 6). Aufgrund der Periodizität der lokalen Materialstruktur werden analog zum linearen Fall RVE in Form einer Einheitszelle verwendet.

Randbedingungen für Zugversuche

In den zu simulierenden Zugversuchen liegt ein dreiachsiger effektiver Verzerrungszustand

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \bar{\varepsilon},\ \bar{\varepsilon}_{22} \neq 0,\ \bar{\varepsilon}_{33} \neq 0,\ \bar{\varepsilon}_{ij} = 0 \text{ sonst} \tag{2.82}$$

vor, wobei die Längsdehnung $\bar{\varepsilon}$ in verschiebungs- oder dehnungsgeregelten Versuchen vorgeben wird, während sich die Werte der Querdehnungen abhängig vom Materialverhalten einstellen. Im Gegensatz dazu ist der Spannungszustand aufgrund der freien Probenränder einachsig

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}, \bar{\sigma}_{ij} = 0 \text{ sonst.} \tag{2.83}$$

Da für die eingesetzten Flachproben die periodische Fortsetzbarkeit einer Einheitszelle der textilen Verstärkungsstruktur nur in der Probenebene vorausgesetzt werden kann, wird in Dickenrichtung die Spannungsvektorrandbedingung

$$\mathbf{t} = \mathbf{0}\ \forall\ \mathbf{y}\ \in\ \partial Y^{3+} \cup \partial Y^{3-} \tag{2.84}$$

verwendet, um den in dieser Richtung vorliegenden spannungsfreien Rand abzubilden. In der Probenebene ist die Einheitszelle dagegen in die periodisch fortgesetzte Materialstruktur eingebettet, so dass zur Sicherung der Kompatibilität nach wie vor die Periodizität der Randverschiebungen

$$\mathbf{u}^{\mathrm{P}}\left(\mathbf{y}^{i+}\right) = \mathbf{u}^{\mathrm{P}}\left(\mathbf{y}^{i-}\right)\ \forall\, i = 1, 2 \tag{2.85}$$

zu fordern ist.

Unter Anwendung dieser Randbedingungen erfolgt die Simulation von Zugversuchen, in denen das Verhalten des Verbundes für unterschiedliche Orientierungen α der Verstärkungsstruktur relativ zur Belastungsrichtung untersucht werden soll (Abb. 2.15). Für den Fall einer Belastung senkrecht zu den

$\alpha = 0°/90°$

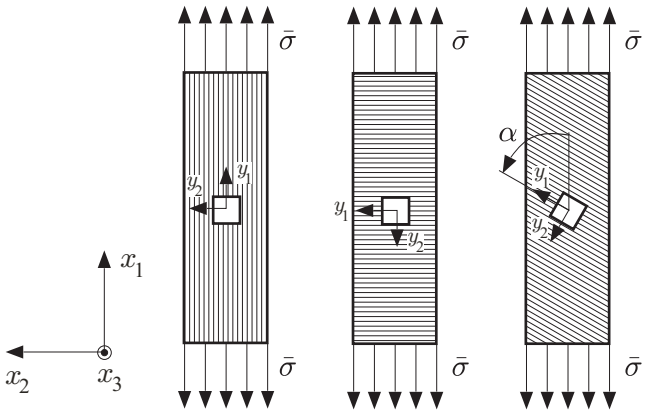


Abbildung 2.15: Zugversuche bei verschiedenen Orientierungen $0° \leq \alpha \leq 90°$ der textilen Verstärkungsstruktur

Grenzflächen des quaderförmigen RVE erfolgt die Vorgabe der makroskopischen Dehnung $\bar{\varepsilon}$ durch die Verschiebungen $\mathbf{u}^{y_1}$ und $\mathbf{u}^{y_2}$ der beiden Hauptknoten M^{y_1} und M^{y_2}

$$\alpha = 0° \quad : \quad u_1^{y_1} = \bar{\varepsilon}\Delta y_1;\; u_2^{y_1} = u_3^{y_1} = 0 \tag{2.86}$$

$$\alpha = 90° \quad : \quad u_2^{y_2} = \bar{\varepsilon}\Delta y_2;\; u_1^{y_2} = u_3^{y_2} = 0. \tag{2.87}$$

Die in beiden Fällen quer zur Belastungsrichtung geltende makroskopische Spannungsfreiheit wird durch das Verschwinden der Reaktionskräfte

$$\alpha = 0° \quad : \quad \mathbf{F}^{y_2} = \int\limits_{\partial Y^{2+}} \mathbf{t} dA = \mathbf{0} \tag{2.88}$$

$$\alpha = 90° \quad : \quad \mathbf{F}^{y_1} = \int\limits_{\partial Y^{1+}} \mathbf{t} dA = \mathbf{0} \tag{2.89}$$

an den Hauptknoten gesichert.

Soll zur Simulation von Zugversuchen für $0° < \alpha < 90°$ ein und dasselbe RVE verwendet werden, ist der makroskopische Beanspruchungszustand in das gegenüber dem globalen $\{\mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{x_2}, \mathbf{e}_{x_3}\}$ um den Winkel α gedrehte lokale Koordinatensystem $\{\mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{y_2}, \mathbf{e}_{y_3}\}$ zu transformieren (Abb. 2.15). Infolge der im makroskopischen Zugversuch vorliegenden gemischten Randbedingungen sind die auftretenden Querdehnungen abhängig vom Materialverhalten und der Verzerrungstensor daher nicht vollständig bekannt, so dass die Transformation für $\bar{\varepsilon}$ nicht ausführbar und eine verschiebungsgesteuerte Simulation nicht möglich ist. Zur Belastung des RVE für Winkel $0° < \alpha < 90°$ wird stattdessen der durch die gemessene Spannungsantwort $\bar{\sigma}$ eindeutig bestimmte einachsige Spannungszustand

$0 < \alpha < 90°$

$$[\bar{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

nach Transformation in das lokale Koordinatensystem (Abb. 2.16)

$$\tilde{\sigma}_{ij} = c_{ik} c_{jl} \bar{\sigma}_{kl} \quad \text{mit} \quad [\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

analog zu (2.70) über die Kräfte an den Hauptknoten

$$F_j^{y_i} = \tilde{\sigma}_{ij} A^{y_i} \tag{2.92}$$

auf das RVE aufgebracht. Zur Darstellung effektiver Spannungs-Dehnungskurven ist anschließend der

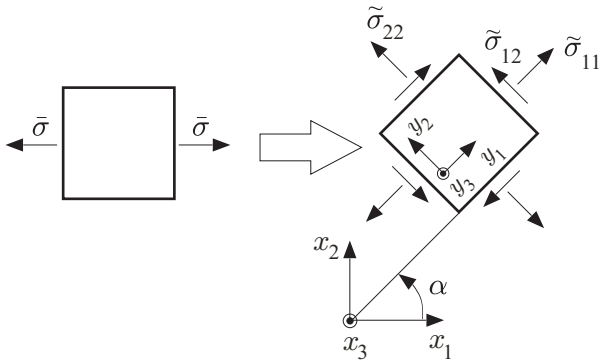


Abbildung 2.16: Transformation des makroskopischen einachsigen Spannungszustandes zur Aufbringung der Randbedingungen auf das RVE

Verzerrungszustand des RVE

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = \frac{u_1^{y_1}}{\Delta y_1} \tag{2.93}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{22} = \frac{u_2^{y_2}}{\Delta y_2} \tag{2.94}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_1^{y_2}}{\Delta y_2} + \frac{u_2^{y_1}}{\Delta y_1}\right) \tag{2.95}$$

aus den Verschiebungen der Hauptknoten in lokalen Koordinaten zu bestimmen und in das globale Koordinatensystem der Probe zu transformieren.

Affine Formulierung

Neben der FE-basierten Formulierung des lokalen, physikalisch nichtlinearen Randwertproblems sind in der Literatur alternative Berechnungsverfahren zu finden. Eine Möglichkeit stellt die affine Formulierung (Masson u. a. (2000); Doghri und Friebel (2005); Pierard und Doghri (2006)) dar. Durch eine Linearisierung der im allgemeinen Fall viskoplastischen lokalen Materialgleichungen für die Umgebung des aktuellen Beanspruchungszustandes erfolgt dabei zunächst die Rückführung auf ein linear thermoviskoelastisches Materialgesetz und durch die anschließende Anwendung der LAPLACE-CARSON-Transformation die Überführung in ein thermoelastisches Ersatzproblem. Damit ist die Anwendung bekannter Homogenisierungsverfahren für linear elastisches Materialverhalten möglich. Zur Berechnung des effektiven Materialverhaltens ist allerdings die Rücktransformation in den Spannungs-Verzerrungsraum durch eine inverse LAPLACE-CARSON-Transformation erforderlich. Konkrete Beispiele für die Anwendung sind in Pierard (2006) zu finden. Aufgrund der dort betrachteten Inhomogenitäten in Form geometrisch einfacher Einschlüsse, erfolgt die Homogenisierung für das Ersatzproblem

nicht durch eine FE-Simulation des lokalen Verhaltens sondern unter Nutzung der analytischen MORI-TANAKA-Methode. Einerseits wird dadurch die Effizienz des Verfahrens erhöht, andererseits ergeben sich aufgrund der Verwendung des ESHELBY-Tensors neben den geometrischen Einschränkungen auch Limitierungen hinsichtlich der Anisotropie des Materialverhaltens der Verbundbestandteile.

Variationsformulierung

Ein weiterer Lösungsansatz für das nichtlineare Homogenisierungsproblem ist in Willis (1989); Castaneda (1991); Miehe (2002) zu finden. Ausgehend von einer Potenzialformulierung der lokalen konstitutiven Beziehungen tritt die Minimierung des zugehörigen Effektivwertes des Potenzials an die Stelle des Äquivalenzkriteriums (2.56) für die virtuelle innere Arbeit. Durch eine FE-Diskretisierung der Mikrostruktur können die zur Berechnung der Effektivwerte der Spannung und der globalen Steifigkeitsmatrix erforderlichen Ableitungen der Potenzialfunktion zur Verfügung gestellt werden.

Gekoppelte Mehrskalensimulation

Die zur Berechnung effektiver Spannungs-Dehnungskurven verwendeten Methoden sind Voraussetzung für die Simulation makroskopisch inhomogener Beanspruchungszustände durch eine gekoppelte Mehrskalensimulation. Dabei wird das Materialverhalten in jedem Integrationspunkt des makroskopischen Berechnungsmodells aus einem RVE-Modell der lokalen Materialstruktur berechnet. Für die nichtlineare FE-Analyse des globalen Strukturmodells ist dabei, wie oben erwähnt, zusätzlich zur Berechnung der effektiven Spannungsantwort die Ermittlung der Materialtangentensteifigkeit (vgl. Abschnitt 4.3.2) erforderlich. Wird die lokale Materialstruktur durch ein physikalisch nichtlineares FE-Modell abgebildet, kann die Materialtangente beispielsweise durch Kondensation der Steifigkeitsmatrix des lokalen FE-Modells (Kouznetsova (2002); Miehe und Koch (2002)) gewonnen werden.
Obwohl die gekoppelte mehrskalige Strukturanalyse numerisch sehr aufwendig ist, da zur korrekten Modellierung des prozessabhängigen Materialverhaltens neben der Lösung des lokalen Feldproblems für jeden Integrationspunkt auch die Lastgeschichte zu speichern ist, bietet sie durch den Verzicht auf die Definition eines makroskopischen Materialmodells ein großes Anwendungspotenzial. Eine Reduzierung des rechnerischen Aufwands ist durch adaptive Berechnungsstrategien, bei denen die Anwendung der gekoppelten Simulation nur in Teilbereichen des Strukturmodells erfolgt, sowie durch eine Parallelisierung der Lösungen von lokalem und globalem Feldproblem möglich.
Für die im Rahmen dieser Arbeit erforderliche Simulation von Zugversuchen wird unter der Annahme eines makroskopisch homogenen Beanspruchungszustandes auf die gekoppelte mehrskalige Simulation verzichtet. Die Berechnung effektiver Spannungs-Dehnungskurven auf der Basis einer FE-Simulation und der Vergleich mit experimentellen Befunden dienen dabei der Verfizierung der physikalisch nichtlinearen RVE-Modelle, die später auch im Rahmen einer gekoppelten Mehrskalensimulation Anwendung finden können.

3 Phänomenologie des Materialverhaltens von Polypropylen

3.1 Experimentelle Untersuchung des Materialverhaltens von Polypropylen

Ziel der im Folgenden beschriebenen Untersuchungen ist die experimentelle Charakterisierung des inelastischen Materialverhaltens von Polypropylen (PP). Die Versuchsergebnisse dienen dabei der Klassifizierung der Phänomenologie des Materialverhaltens, der Entwicklung konstitutiver Beziehungen sowie der Identifikation der erforderlichen Materialparameter.

3.1.1 Messtechnik und Probekörper

Versuchsaufbau

Die geringe Steifigkeit von PP ermöglicht die Durchführung sämtlicher Versuche auf einer elektromechanischen Prüfmaschine mit einer Maximalkraft von $F_{\max} = 5\text{kN}$, die mit einer mechanischen Spannvorrichtung für Flachproben ausgerüstet ist (Abb. 3.1). Die Verschiebungsgeschwindigkeit der Traverse kann in einem Bereich von $0,005 \ldots 500 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$ geregelt werden.
Zur Messung der Dehnung kommt das ebenfalls in Abb. 3.1 erkennbare, auf der Grauwertkorrelation beruhende, optische Messsystem ARAMIS zum Einsatz. Es ermöglicht eine berührungslose, flächenhafte Bestimmung des Verzerrungszustands. Die Proben sind dazu mit einer stochastischen Grauwertverteilung zu versehen. Während der zum Teil mehrere Tage dauernden Relaxationsversuche erfolgt zudem die Aufzeichnung des Verlaufs der Umgebungstemperatur mittels eines digitalen Temperaturmessgeräts.

Probenmaterial

Das Rohmaterial zur Gewinnung der Probekörper in Form von spritzgegossenen Platten mit einer Dicke von 4mm wurde vom Leibniz Institut für Polymerforschung (IPF) Dresden zur Verfügung gestellt. Daraus erfolgte die Fertigung genormter Schulterproben des Typs A nach DIN EN ISO 3167 durch Wasserstrahlschneiden. Die Schnittkanten wurden zur Verringerung der Rauheit der Oberfläche mit feinem Sandpapier nachbearbeitet. Die Geometrie der Probekörper ist in Abb. 3.2 dargestellt.

Homogenität der Beanspruchung

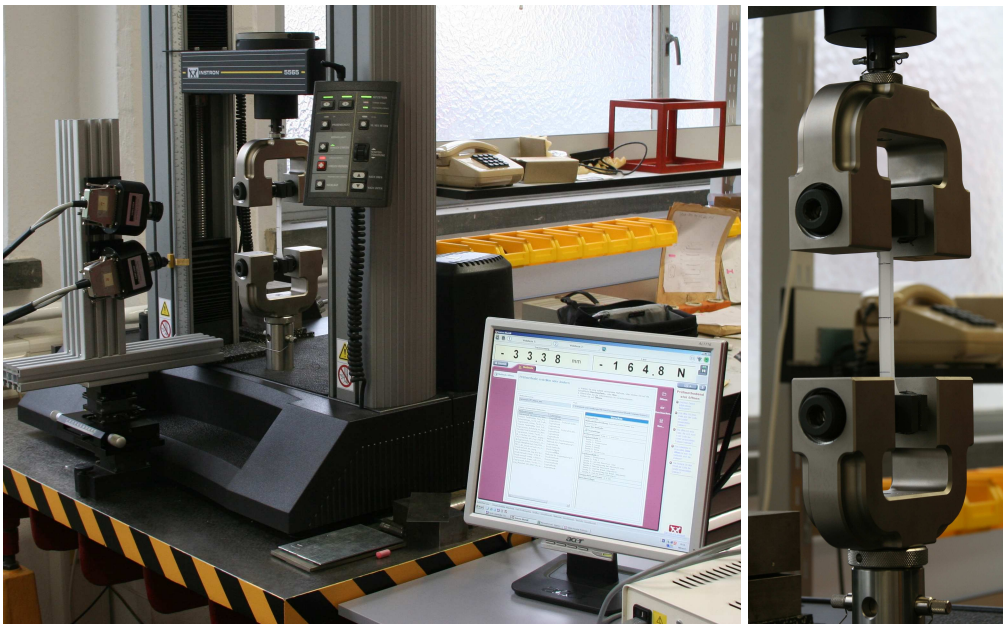
Während der experimentellen Charakterisierung des Materialverhaltens werden homogene Beanspruchungszustände vorausgesetzt. Die Kontrolle der Homogenität des Verzerrungszustands in der Probe mittels ARAMIS zeigt, dass mit Ausnahme der gekrümmten Bereiche in der Nähe der Einspannung näherungsweise von einem homogenen mehrachsigen Deformationszustand

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{\text{q}}, \varepsilon_{ij} = 0 \text{ sonst} \tag{3.1}$$

und einem einachsigen Spannungszustand

$$\sigma_{11} = \sigma, \sigma_{ij} = 0 \text{ sonst} \tag{3.2}$$

ausgegangen werden kann. Vergleicht man die mittels ARAMIS aus einem Messbereich in der Mitte des Probekörpers bestimmten mittleren Dehnungen mit der aus dem Verhältnis von Traversenweg s_{Trav}



(a) Versuchsaufbau (b) Einspannung

Abbildung 3.1: Versuchsaufbau und Einspannung der Probekörper

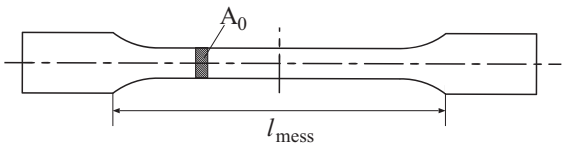


Abbildung 3.2: Geometrie der Probekörper nach DIN EN ISO 3167

und Messlänge l_{mess} bestimmten Nenndehnung

$$\varepsilon = \frac{s_{\text{Trav}}}{l_{\text{mess}}}, \tag{3.3}$$

sind entsprechend Abb. 3.3 nur geringe Unterschiede feststellbar. Für die Untersuchung der Phänomenologie des Materialverhaltens ist daher die Berechnung der Dehnung nach Gleichung (3.3) ausreichend. Wie in Abb. 3.3(b) gezeigt ist, unterscheiden sich die aus beiden Varianten bestimmten Spannungs-Dehnungskurven nur gerinfügig. Die Spannung

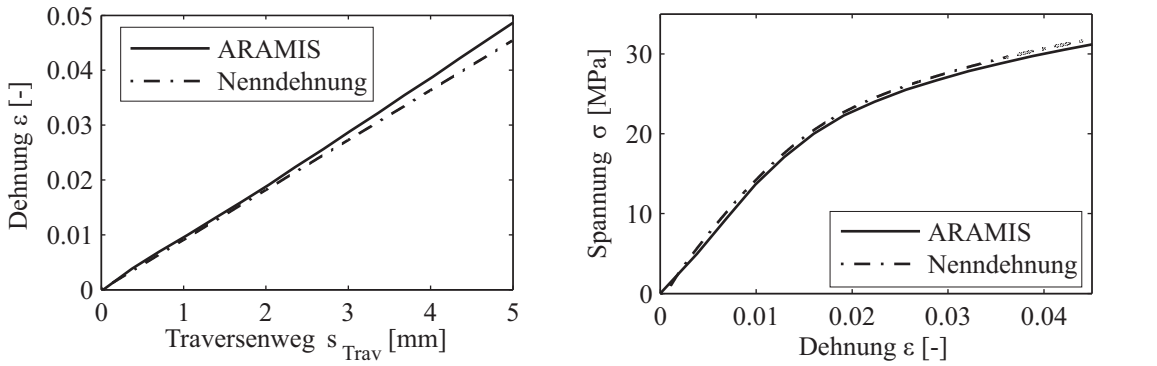
$$\sigma = \frac{F}{A_0} \tag{3.4}$$

in der Probe wird dabei als Nennspannung aus der gemessenen Prüfkraft F und der Querschnittsfläche A_0 der Probe im Ausgangszustand berechnet.

3.1.2 Versuchsprogramm

Zielstellung

Mithilfe des beschriebenen Versuchsaufbaus sollen die wesentlichen Phänomene des Materialverhal-



(a) Vergleich der Dehnungen

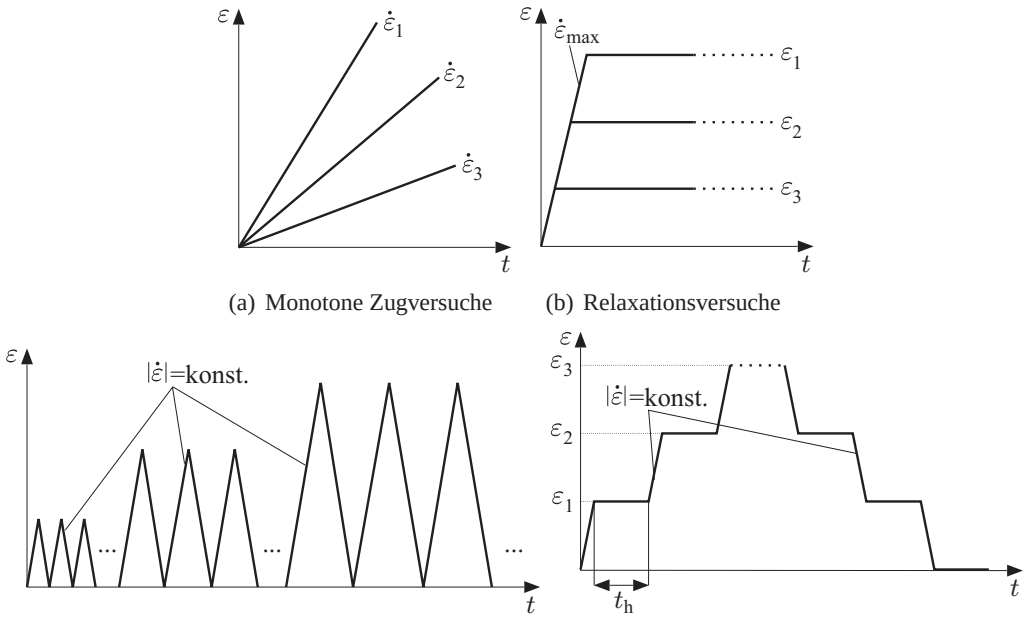
(b) Vergleich der resultierenden Spannungs-Dehnungsverläufe

Abbildung 3.3: Vergleich von Nenn- und mit ARAMIS bestimmter Dehnung, Auswirkung auf den Spannungs-Dehnungsverlauf

tens analysiert und die Struktur eines Materialmodells motiviert werden. Die Systematik der Versuche muss dazu an das zu untersuchende Material und die zu identifizierenden Eigenschaften angepasst sein. Aufgrund der gewählten Klassifizierung des Materialverhaltens, die in Abschnitt 2.2.1 beschrieben wurde, stehen hierbei die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens und das Vorhandensein einer Gleichgewichtshysterese im Mittelpunkt der experimentellen Untersuchungen. Da in dieser Arbeit der Einsatz des Polymers als Matrix eines Verbundwerkstoffs für strukturelle Anwendungen, in denen nur kleine Verformungen zugelassen sind, betrachtet wird, kann der Schwerpunkt der Versuche auf einen Dehnungsbereich von $|\varepsilon| \leq 5\%$ beschränkt werden. Zur prinzipiellen Charakterisierung des Materialverhaltens werden jedoch auch Experimente im Bereich großer Deformationen durchgeführt.
Da zunächst nur das mechanische Verhalten bestimmt werden soll, erfolgt die Versuchsdurchführung unter näherungsweise konstanten Umgebungsbedingungen. Dabei liegt die Raumtemperatur von $\vartheta = 293\text{K}$ deutlich oberhalb der Glasübergangstemperatur $\vartheta_\text{g} = 253\text{K}$ von PP, so dass auch bei geringen Temperaturschwankungen keine wesentliche Änderung der Phänomenologie des Materialverhaltens zu erwarten ist.

Versuche

Zur Einordnung des mechanischen Verhaltens von PP werden zunächst monotone, verschiebungsgesteuerte Zugversuche mit konstanter Geschwindigkeit durchgeführt (Abb. 3.4(a)). Unterscheiden sich die bei verschiedenen Dehnraten $\dot{\varepsilon}_1 > \dot{\varepsilon}_2 > \dot{\varepsilon}_3$ ermittelten Spannungs-Dehnungskurven, ist dies ein Hinweis auf die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens. Relaxationsversuche bei unterschiedlichen Dehnungen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ (Abb. 3.4(b)) dienen zur Quantifizierung der Geschwindigkeitsabhängigkeit. Dabei ist zu beachten, dass in den Experimenten keine ideale, sprungförmige Belastung realisiert werden kann. Der Einfluss der endlichen Versuchsgeschwindigkeit auf die Parameterermittlung des Modells der Überspannung wird in Anhang B diskutiert.
Die Ergebnisse der Zug- und Relaxationsversuche erlauben jedoch noch keine eindeutige Klassifizierung, da das Materialverhalten bei Entlastung nicht untersucht wird und daher keine Aussage zur Existenz einer Hysterese getroffen werden kann. Das Versuchprogramm ist deshalb durch zyklische Versuche (Abb. 3.4(c)) zu ergänzen. Da die Materialklassifizierung nach HAUPT im Wesentlichen auf der Betrachtung von Gleichgewichtszuständen beruht, werden die Zyklen durch Haltezeiten zur Relaxation der geschwindigkeitsabhängigen Überspannung unterbrochen (Abb. 3.4(d)). Die Verbindung der



(a) Monotone Zugversuche (b) Relaxationsversuche

(c) Zyklische Versuche (d) Zyklische Versuche mit Haltezeiten

Abbildung 3.4: Systematik der Versuche

bei unterschiedlichen Dehnungen ermittelten diskreten Gleichgewichtszustände liefert eine Näherung für die Gleichgewichtsrelation.
Abhängig von den in diesen Standardversuchen erzielten Ergebnissen können zur Klärung bestimmter Abhängigkeiten des Materialverhaltens weitere Experimente sinnvoll sein.

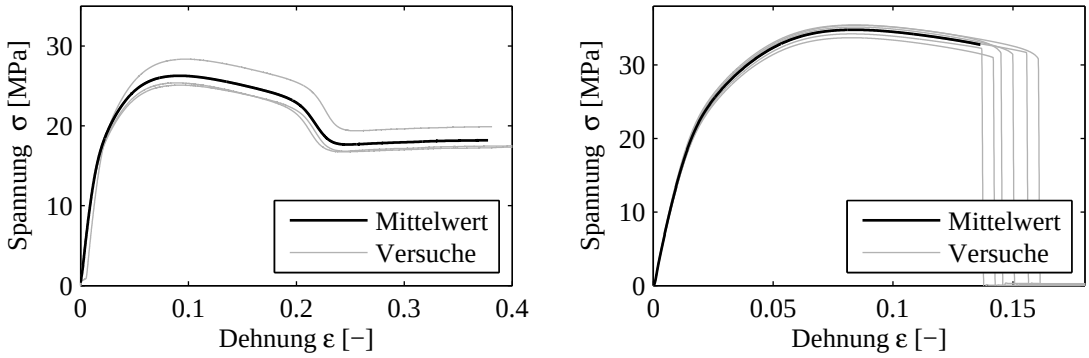
3.1.3 Vorversuche

Versuchsgeschwindigkeiten

Die Festlegung konkreter Versuchsbedingungen erfolgt zu Beginn der experimentellen Untersuchungen durch exemplarische Versuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten innerhalb des Messbereichs der Prüfmaschine. Da am oberen Ende des Geschwindigkeitsbereichs bei $500\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ bereits deutliche Trägheitseffekte zu erkennen sind, werden $100\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ als höchste Geschwindigkeit ausgewählt. Als untere Grenze soll zunächst eine Geschwindigkeit von $1\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ dienen.
Aus den in Abb. 3.5 dargestellten Spannungs-Dehnungskurven ist eine deutliche, reproduzierbare Geschwindigkeitsabhängigkeit zu erkennen. Damit sind die gewählten Versuchsgeschwindigkeiten zur Charakterisierung des Materialverhaltens geeignet. Zur Identifikation der Materialparameter werden die Versuche durch Experimente bei 0,1 und $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ ergänzt, so dass ein Geschwindigkeitsbereich von vier Dekaden erfasst wird. Bezogen auf die Messlänge von 110mm ergeben sich Dehnraten von $\dot{\varepsilon} = 1,5 \cdot 10^{-5} \ldots 1,5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{s}}$.

Eigenschaften der Probekörper

In weiteren Vorversuchen soll die Vergleichbarkeit der mit verschiedenen Probekörpern erzielten Ergebnisse analysiert werden. Die Untersuchungen erfolgen durch Versuche an Proben, die ein und derselben Polypropylenplatte entnommen werden. Durch die ermittelten Ergebnisse können Rückschlüsse auf die Homogenität der gegossenen Platten und die Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften gezogen werden. Die Proben werden dazu in verschiedenen Richtungen aus dem Plattenmaterial herausgeschnitten. Anhand einer Markierung auf der Platte, die die Orientierung während des Gießens



(a) Zugversuche 1 mm/min

(b) Zugversuche 100 mm/min

Abbildung 3.5: Ergebnisse der Zugversuche bei Geschwindigkeiten von 1 und 100 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$

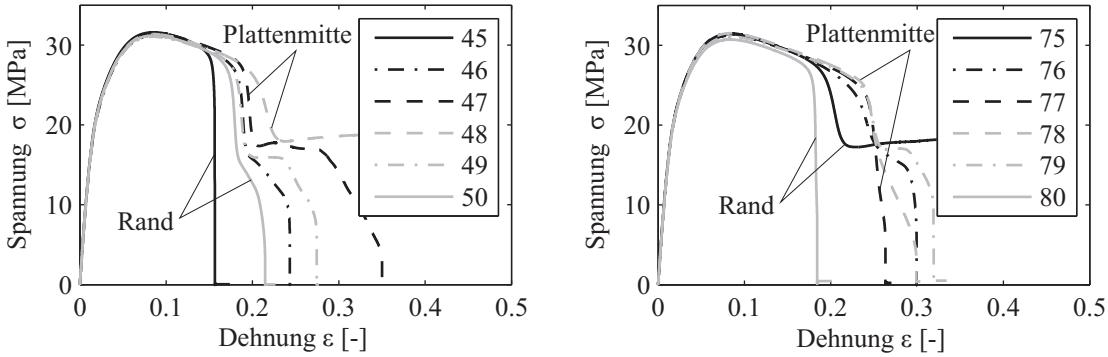
kennzeichnet, kann zwischen Proben unterschieden werden, die in Längs- oder Querrichtung entnommenen worden sind. Die Versuchsgeschwindigkeit beträgt in allen Fällen 10 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$.

Längsrichtung

Das Spannungs-Dehnungsverhalten der in Längsrichtung entnommenen Proben ist in Abb. 3.6(a) dargestellt. Zu erkennen ist der Anstieg der Spannung in der Probe bis zu einem Maximum, das bei einer Dehnung von ungefähr zehn Prozent erreicht wird. Während im Verhalten der einzelnen Proben bis zu einer Dehnung von $\varepsilon = 0,15$ nur geringe Abweichungen zu verzeichnen sind, treten nach dem Beginn der Einschnürung deutliche Unterschiede auf. So ist der auf die beginnende Einschnürung zurückzuführende Abfall der Nennspannung unterschiedlich stark ausgeprägt.
Berücksichtigt man die ursprüngliche Anordnung der einzelnen Proben in der Polypropylenplatte (vgl. Abb. 3.6(a)), so erkennt man, dass das Versagen der aus der Plattenmitte entnommenen Probekörper erst nach Einschnürung und inelastischer Deformation eintritt. Die am Rand der Platte liegenden Proben zeigen dagegen ein spröderes Verhalten. Ihre nach der Einschnürung erreichte bleibende Verformung ist wesentlich geringer als bei den aus der Plattenmitte entnommenen Probekörpern.
Diese Unterschiede lassen auf eine Inhomogenität der zur Verfügung gestellten Polypropylenplatten schließen, die vermutlich aus dem Erstarrungs- und Abkühlungsprozess während der Herstellung resultiert. Allerdings ist festzustellen, dass sich die Auswirkungen der Inhomogenität auf den Bereich $\varepsilon > 0,15$ beschränken und daher für das hier im Mittelpunkt stehende Verhalten bei kleinen Deformationen ohne Bedeutung sind.

Querrichtung

Ähnliche Aussagen können für die in Querrichtung herausgeschnittenen Probekörper (Abb. 3.6(b)) getroffen werden. Auch hier sind bis zu einer Dehnung von zirka fünfzehn Prozent keine signifikanten Abweichungen zwischen den einzelnen Proben erkennbar. Wesentliche Unterschiede im Materialverhalten sind auf die Einschnürung und die Ausprägung der bleibenden Deformation beschränkt. Anders als in Längsrichtung ist keine Symmetrie des Materialverhaltens zur Plattenmitte zu erkennen. Stattdessen weisen die beiden äußeren Proben die Extremwerte der Bruchdehnung auf. Dabei wirken sich geringe Unterschiede der Materialeigenschaften bei der Geschwindigkeit von 10 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ besonders deutlich aus, da diese in einem Übergangsbereich zwischen dem spröden Bruch bei 100 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ und der ausgeprägten inelastischen Deformation bei 1 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ liegt.
Anhand des Vergleichs von Längs- und Querrichtung wird deutlich, dass die Spannungs-Dehnungskurven für beide Probenorientierungen im Dehnungsbereich $\varepsilon = [0;\ 0,15]$ praktisch identisch sind. Für Versuche mit moderaten Dehnungen muss daher nicht auf die Entnahmerichtung der Proben geachtet



(a) Längsrichtung (b) Querrichtung

Abbildung 3.6: In monotonen Zugversuchen mit konstanter Geschwindigkeit ermittelte Spannungs-Dehnungskurven für verschiedene Entnahmerichtungen der Probekörper

werden.

3.1.4 Materialverhalten bei monotonen Belastungen

In diesem Abschnitt wird das Materialverhalten in verschiebungsgesteuerten, monotonen Zugversuchen bei verschiedenen Geschwindigkeiten mit und ohne Haltezeiten zur Ermittlung von Gleichgewichtszuständen experimentell untersucht.

Zugversuche

Bereits in den Vorversuchen zur Festlegung des zu untersuchenden Geschwindigkeitsbereichs konnte eine signifikante Geschwindigkeitsabhängigkeit festgestellt werden. Zum Vergleich des Materialverhaltens in monotonen Zugversuchen mit konstanter Dehnrate nach Abb. 3.4(a)), die bei Geschwindigkeiten von 1, 10 und $100\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ durchgeführt werden, sind in Abb. 3.7 drei exemplarische Spannungs-Dehnungskurven dargestellt, deren Verlauf als charakteristisch für die jeweilige Belastungsgeschwindigkeit angesehen werden kann.

Mit Erhöhung der Versuchsgeschwindigkeit ist eine deutliche, nicht proportionale Zunahme der Spannung verbunden. Gleichzeitig nehmen Bruchdehnung und inelastische Deformation ab. Die bei einer Geschwindigkeit von $100\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ untersuchten Prüfkörper versagen bei einer Dehnung von 15 Prozent bereits kurz nach Erreichen der maximalen Nennspannung.

Im Gegensatz dazu kann bei $1\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ bis zu einem Traversenweg von 80mm kein Bruch der Probe festgestellt werden. Nach der Ausbildung einer Einschnürung im oberen Drittel der Probe, deren Lage durch die Inhomogenität der Materialeigenschaften infolge des Herstellungs- und Abkühlungsprozesses bedingt ist, wächst der eingeschnürte Bereich kontinuierlich an. Dabei fällt auch die unterschiedliche Transparenz der beiden Bereiche der Probe auf.

Die Längenänderung der Probe nach Beginn der Einschnürung ist auf die Zunahme der inelastischen Deformation in zwei räumlich eng begrenzten Prozesszonen an den Enden der bereits ausgebildeten Einschnürung zurückzuführen, die einen inhomogenen Deformationszustand aufweisen. Die Vergrößerung der Einschnürung bei Zunahme des Traversenweges erfolgt durch Verschiebung der Prozesszonen bei näherungsweise konstanter Last und kann bei einer Versuchsgeschwindigkeit von $1\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ die gesamte Probe umfassen.

Wie in Abschnitt 3.1.3 bereits erläutert wurde, ist die Reproduzierbarkeit des bei einer Geschwin-

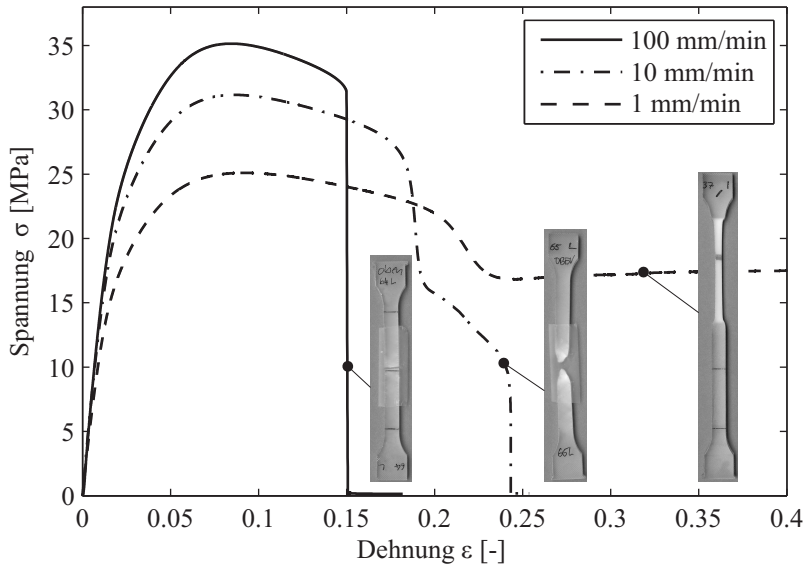


Abbildung 3.7: Vergleich charakteristischer Spannungs-Dehnungskurven monotoner Zugversuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten

digkeit von $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ beobachteten Verhaltens im Vergleich zu den beiden anderen Geschwindigkeiten eingeschränkt, da diese Prüfgeschwindigkeit im Übergangsbereich von sprödem zu duktilem Versagen liegt und deshalb geringe Inhomogenitäten der Materialeigenschaften besonders große Auswirkungen haben. Dennoch ist sowohl bezüglich des erreichten Spannungsniveaus als auch des Deformationsverhaltens eine deutliche Abgrenzung gegenüber dem Spannungs-Dehnungsverhalten bei 1 bzw. $100\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ gegeben. Obwohl im Gegensatz zu der bei $100\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ geprüften Probe eine deutliche inelastische Deformation zu erkennen ist, kann sich in den meisten Fällen keine stabile Prozesszone ausbilden.
Auch im Bereich kleiner Dehnungen $\varepsilon \leq 0,05$, der im Mittelpunkt der Arbeit steht, ist die nichtproportionale Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens deutlich zu erkennen. Abbildung 3.8 stellt dazu die Mittelwerte der bei Geschwindigkeiten von 1, 10 und $100\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ ermittelten Spannungs-Dehnungskurven einander vergleichend gegenüber.

Relaxationsversuche

Nach dem prinzipiellen Nachweis der Geschwindigkeitsabhängigkeit in monotonen Zugversuchen ist für die in den Materialmodellen angestrebte Trennung von geschwindigkeitsabhängiger Überspannung und geschwindigkeitsunabhängigem Gleichgewichtsanteil (vgl. 2.2.2) eine angepasste Versuchsdurchführung erforderlich. Unter der Voraussetzung der Existenz von Gleichgewichtszuständen (vgl. 2.2.3) ermöglichen Relaxationsversuche die separate experimentelle Untersuchung der geschwindigkeitsabhängigen Überspannung. Die Spannungswerte am Ende der Relaxation stellen Näherungswerte für diskrete Punkte der Gleichgewichtsrelation dar. Da die Materialphänomene, die zur Relaxation der Spannung bei konstanter Dehnung führen, auch die Geschwindigkeitsabhängigkeit verursachen, sind Relaxationsversuche zur vollständigen Charakterisierung des Materialverhaltens und zur späteren Parameteridentifikation eines Materialmodells der Überspannung von großer Bedeutung.
In einem idealen Relaxationsversuch wird der Probekörper einer sprunghaften Dehnungsänderung ausgesetzt. In der Realität ist eine derartige ideale Belastung jedoch nicht zu realisieren. Die hier als Relaxationsversuche bezeichneten Experimente stellen deshalb die statische Fortsetzung eines monotonen

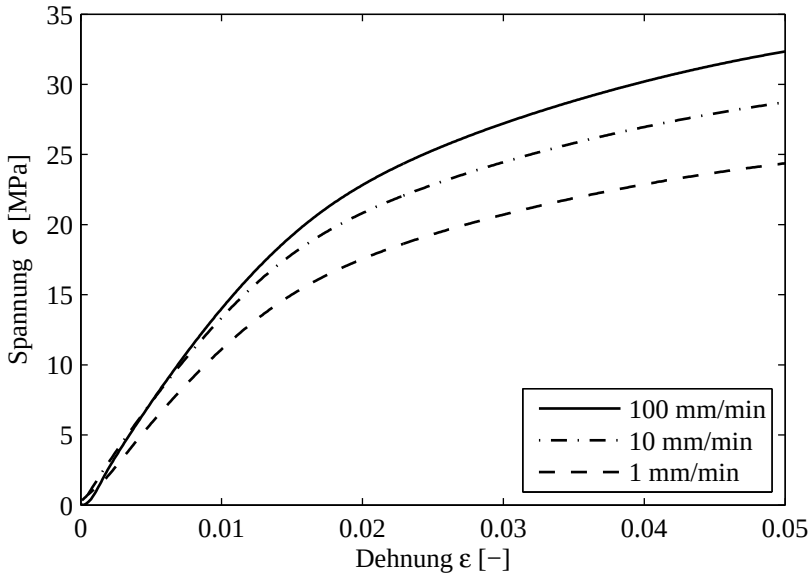


Abbildung 3.8: Vergleich der gemittelten Spannungs-Dehnungskurven monotoner Zugversuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten bis zu einer maximalen Dehnung von $\varepsilon = 0,05$

Zugversuchs mit konstanter Dehnrate (Abb. 3.4(b)) dar. Die in beliebigen Lastgeschichten integrierten Haltezeiten Abb. 3.4(d) werden als Zwischenrelaxationen bezeichnet und dienen der Ermittlung der Gleichgewichtsrelation.
In Abb. 3.9 sind die zeitlichen Änderungen der Spannung sowie die aufgezeichneten Umgebungstemperaturen für zwei Relaxationsversuche mit Haltezeiten t_h von 48 bzw. 58 Stunden dargestellt.
Die Belastung der Proben wird durch einen Zugversuch mit der maximalen Geschwindigkeit von 500 $\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}}$ aufgebracht. Nach Erreichen eines Traversenweges von $s_\mathrm{Trav} = 5\mathrm{mm}$ wird die Verschiebung konstant gehalten und der Spannungs-Zeitverlauf aufgezeichnet. In beiden Versuchen ist dabei eine ausgeprägte Spannungsrelaxation zu erkennen. Ausgehend von einem starken Spannungsabfall, nimmt die zeitliche Änderung der Spannung während des Versuchs deutlich ab, bis die Relaxation nach 58 Stunden Haltezeit für die angestrebte Materialmodellierung als abgeschlossen und der erreichte Spannungswert als Gleichgewichtsspannung betrachtet werden kann.
Besonders auffällig sind die in beiden Versuchen beobachtbaren Abweichungen von einem monotonen Spannungs-Zeitverlauf, die durch die im Tagesverlauf auftretende Schwankung der Umgebungstemperatur $\Delta\vartheta_\mathrm{U} < 5\mathrm{K}$ hervorgerufen werden. Dabei ist von einer Überlagerung der Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften und der thermischen Ausdehnung der Probe auszugehen.

Gleichgewichtsrelation

Zur experimentellen Ermittlung der gesamten Gleichgewichtsrelation existieren, wie bereits in Abschnitt 2.2.1 erwähnt wurde, zwei Möglichkeiten. Eine Näherung der Gleichgewichtsrelation könnte theoretisch durch kontinuierliche Versuche mit einer sehr geringen Versuchsgeschwindigkeit bestimmt werden. Diese Art der Versuchsdurchführung bedeutet, dass die Überspannung in jedem Punkt der Spannungs-Dehnungskurve relaxiert sein muss, damit der gemessene Spannungsverlauf einer Gleichgewichtskurve entspricht.
Aufgrund der langen beobachteten Relaxationszeiten des untersuchten PP ist die bei kontinuierlicher Versuchsdurchführung mit einer endlichen Geschwindigkeit bestimmte Kennlinie nur eine schlechte

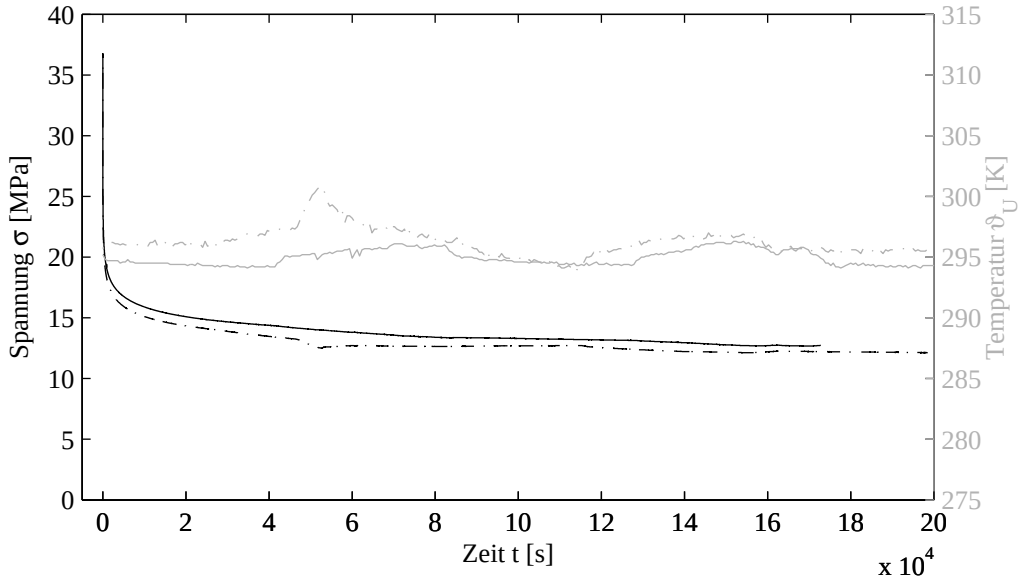


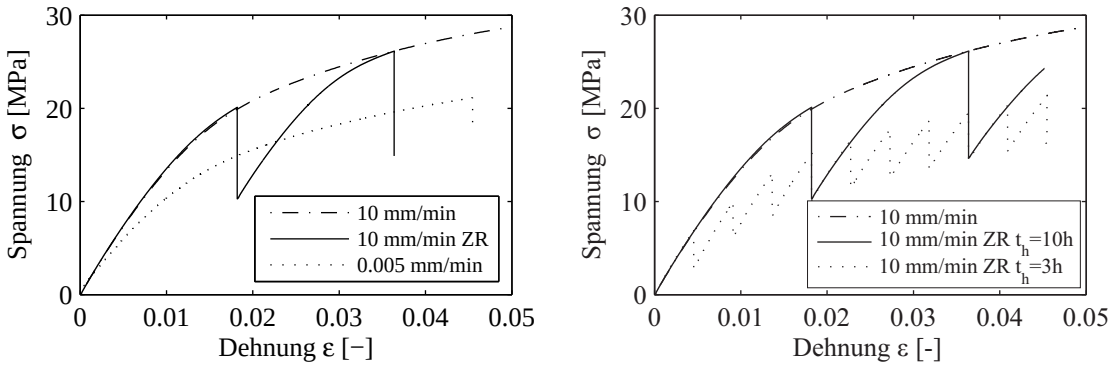
Abbildung 3.9: Spannungs- und Temperatur-Zeitverläufe für zwei Relaxationsversuche mit Haltezeiten von 48 bzw. 58h

Näherung für die Gleichgewichtsrelation. Abbildung 3.10(a) zeigt zur Veranschaulichung neben der mittleren Spannungs-Dehnungskurve $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ auch die für die minimale Geschwindigkeit von $0{,}005\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ ermittelte Kennlinie, sowie den durch zwei je zehnstündige Zwischenrelaxationen bei Traversenwegen von zwei und vier Millimetern unterbrochenen Zugversuch mit $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$. Es ist erkennbar, dass die bei der kleinsten mit der verfügbaren Prüfeinrichtung realisierbaren Versuchsgeschwindigkeit ermittelte Spannungs-Dehnungskurve deutlich über den Endpunkten der Zwischenrelaxationen liegen. Aus diesen Beobachtungen ist zu schlussfolgern, dass mit der bestehenden Versuchstechnik eine kontinuierliche Messung der Gleichgewichtsrelation nicht möglich ist. Es können lediglich diskrete Punkte ermittelt werden. Aus praktischen Gründen sind bei der Durchführung von Zugversuchen mit Zwischenrelaxationen Haltezeiten von 48 Stunden und mehr nicht vertretbar. Für die Wahl einer geeigneten verkürzten Haltezeit $t_{\text{h}_{\text{ZR}}}$ wird deshalb

Zwischenrelaxationen

$$\Delta\sigma_R\left(t_{\text{h}_{\text{ZR}}}\right) = 0,9 \cdot \Delta\sigma_R\left(t_{\text{h}} = 48\text{h}\right) \tag{3.5}$$

festgelegt, d. h. bei Erreichen der reduzierten Haltezeit sind 90 Prozent der Überspannung relaxiert. Für das vorliegende Material führt diese Bedingung auf $t_{\text{h}_{\text{ZR}}}$=3h. In Abb. 3.10(b) ist ein derartiger, mit einer Geschwindigkeit von 10 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ durchgeführter, Versuch dargestellt. Die Ermittlung diskreter Gleichgewichtszustände erfolgt für verschiedene Traversenwege mit einem Abstand von $\Delta s_{\text{Trav}} = 0,5\text{mm}$. Zur Interpretation der Ergebnisse sind außerdem die mittlere Spannungs-Dehnungskurve für kontinuierliche Versuchsführung sowie der bereits beschriebene Versuch mit zwei Haltezeiten von je zehn Stunden abgebildet. Anhand der grafischen Darstellung wird deutlich, dass die Spannung in dem durch die Strich-Punktlinie gekennzeichneten Versuch sich nach dem Ende einer Haltezeit wieder der Spannungs-Dehnungskurve des kontinuierlichen Versuchs nähert. In dem durch eine größere Anzahl von Haltezeiten unterbrochenen Versuch ist dies bedingt durch die dichte Folge der Zwischenrelaxationen nicht möglich.



(a) Ermittlung der Gleichgewichtsrelation bei kontinuierlicher Versuchsdurchführung

(b) Vergleich monotoner Zugversuche mit und ohne Haltezeiten bei $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$

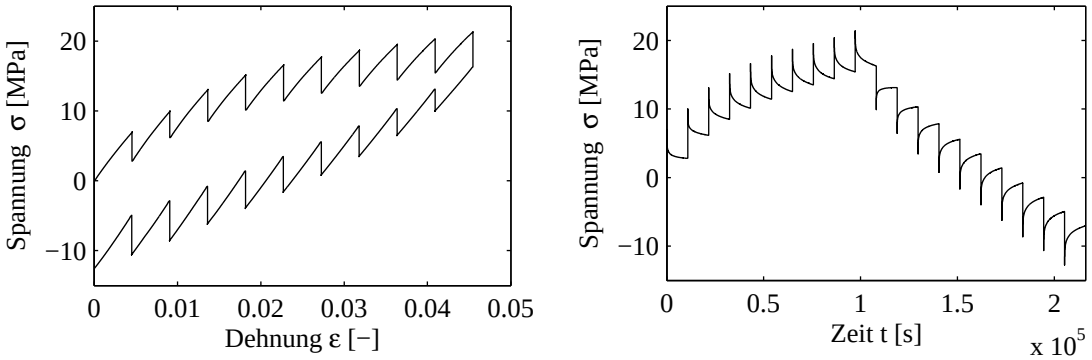
Abbildung 3.10: Zur Ermittlung der Gleichgewichtsrelation

Vergleicht man die beiden Versuche mit Zwischenrelaxationen, so ist erkennbar, dass die nach Haltezeiten von t_{h} =10h bzw. $t_{\text{h}_{\text{ZR}}}$=3h erreichten Spannungswerte praktisch identisch sind und die Anstiege der Spannung bei Erhöhung der Dehnung gut übereinstimmen.
Durch die dichte Abfolge von Haltezeiten in dem Versuch mit $t_{\text{h}_{\text{ZR}}}$=3h können wichtige Aussagen zum Relaxationsverhalten des Materials gewonnen werden. Bereits bei der ersten Haltezeit bei $s_{\text{Trav}} = 0,5\text{mm}$ bzw. $\varepsilon = 0,0045$ ist eine deutliche Spannungsrelaxation zu erkennen. Dies lässt darauf schließen, dass eine Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens ab Belastungsbeginn auftritt. Vergleicht man die bei unterschiedlichen Dehnungen nach dem Ende der jeweiligen Haltezeit gemessenen Spannungsanstiege, so sind keine signifikanten Unterschiede zu verzeichnen. Für die Materialmodellierung wird daher davon ausgegangen, dass das geschwindigkeitsabhängige Materialverhalten unabhängig von der Dehnung ist.

3.1.5 Materialverhalten bei nichtmonotonen Belastungen

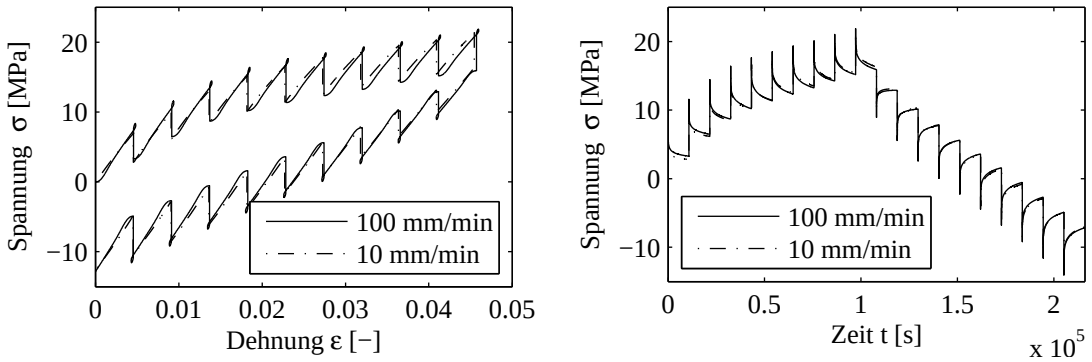
Be- und Entlastung

Bisher wurden lediglich diskrete Punkte des Belastungspfades der Gleichgewichtsrelation experimentell bestimmt. Zur Einordnung des Materialverhaltens ist jedoch eine Bewertung der Gleichgewichtshysterese und deshalb eine Untersuchung des Relaxationsverhaltens bei Entlastung erforderlich. Eine dazu geeignete Versuchsdurchführung ist in Abb. 3.4(d) dargestellt. Für die Zwischenrelaxationen der im Folgenden beschriebenen Versuche wird ebenfalls die verkürzte Haltezeit von $t_{\text{h}_{\text{ZR}}}$=3h verwendet. Entsprechend der Festlegung der Relaxationszeit nach Gleichung (3.5) sollten bei einem Traversenweg von $s_{\text{Trav}} = 5.0\text{mm}$ ungefähr 90 Prozent der geschwindigkeitsabhängigen Überspannung relaxiert sein. Abbildung 3.11 zeigt die Spannungs-Dehnungs- und Spannungs-Zeitkurven eines derartigen Versuchs, der mit einer Belastungsgeschwindigkeit von $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ durchgeführt wurde. In Abb. 3.12 werden die bei einer Geschwindigkeit von $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ erzielten Ergebnisse denen eines gleichartigen Versuches gegenübergestellt, der bei $100\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ durchgeführt wurde. Aufgrund des geringen Abstands zwischen den einzelnen Haltezeiten weisen beide Kurvenverläufe keine gravierenden Unterschiede auf.
Als wesentliches Ergebnis der zyklischen Versuche mit Zwischenrelaxationen ist aufgrund der Richtung der Spannungsrelaxation in Be- und Enlastungspfad festzustellen, dass eine von Null verschiedene Gleichgewichtsrelation existieren muss. Der Abstand der für gleiche Dehnungen bei Be- und Entlas-



(a) Spannungs-Dehnungsverlauf (b) Spannungs-Zeitverlauf

Abbildung 3.11: Zyklischer Versuch mit Zwischenrelaxationen bei 10 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$



(a) Spannungs-Dehnungsverlauf (b) Spannungs-Zeitverlauf

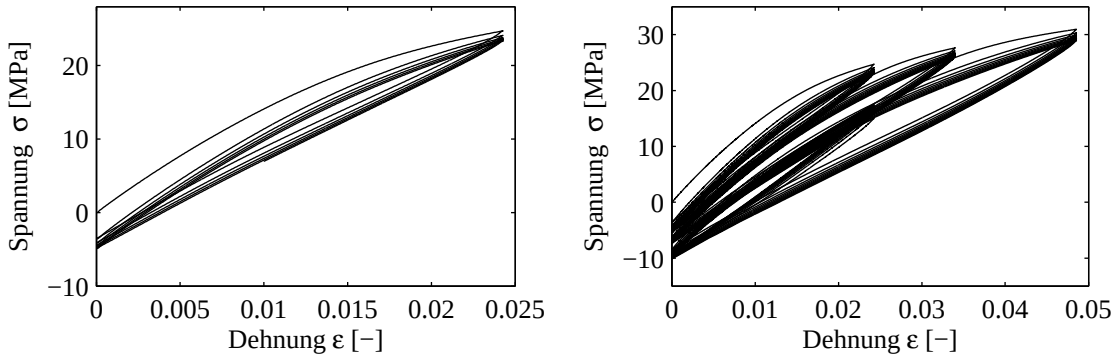
Abbildung 3.12: Vergleich von zwei zyklischen Versuchen mit Zwischenrelaxationen bei 10 und $100\frac{\text{mm}}{\text{min}}$

tung bestimmten Abbruchpunkte deutet dabei auf die Existenz einer Gleichgewichtshysterese hin. Die Verbindung der Endpunkte der Zwischenrelaxationen ergibt eine schwach gekrümmte, sehr flach verlaufende Gleichgewichtsrelation mit geringer Hysterese. Berücksichtigt man die Tatsache, dass die Relaxation nach einer Haltezeit von drei Stunden noch nicht komplett abgeschlossen ist (vgl. Abb. 3.11), ist davon auszugehen, dass die Ausprägung der Gleichgewichtshysterese geringer sein wird. Da die bei kontinuierlicher Versuchsführung gemessenen Spannungswerte (Abb. 3.10(b)) deutlich höher als die hier erreichten Gleichgewichtswerte sind, wird das Materialverhalten des untersuchten PP wesentlich von der geschwindigkeitsabhängigen Überspannung bestimmt.

Zyklische Versuche

Den Abschluss der experimentellen Charakterisierung bilden zyklische Versuche im Bereich $\varepsilon \geq 0$. Da aufgrund des inelastischen Materialverhaltens auch bei positiven Dehnungen Druckspannungen auftreten können, erfolgt die Durchführung der Versuche unter Verwendung einer Knickstütze, die das Ausknicken der Probekörper behindert.
Abbildung 3.13(a) zeigt einen weggesteuerten Versuch mit 10 Zyklen und einer konstanten Ampli-

tude von $s_{\text{Trav}_1} = 2,5\text{mm}$. Die Spannungswerte der Erstbelastungskurve liegen dabei deutlich über



(a) Versuch mit konstanter Amplitude

(b) Versuch mit variabler Amplitude

Abbildung 3.13: Zyklische Versuch bei $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$

denen der folgenden Zyklen. Betrachtet man die Werte der Spannung in den Umkehrpunkten, ist ein Absinken der Extremwerte der Spannung zu beobachteten. Außerdem kann eine sukzessive Verkleinerung der Hysterese festgestellt werden. Da die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zyklen auftretende Änderung jeweils geringer wird, nähert sich das Materialverhalten einer stationären Hysterese an.
In dem in Abb. 4.19(a) dargestellten Versuch wurde die Probe durch weitere zehn Zyklen bei $s_{\text{Trav}_2} = 5,0\text{mm}$ und $s_{\text{Trav}_3} = 7,5\text{mm}$ belastet. Bei erstmaliger Erhöhung der Dehnung bis zur jeweils nächsten Amplitude ist analog zur Erstbelastung bei $s_{\text{Trav}_1} = 2,5\text{mm}$ eine deutlich höhere Spannung als in den Folgezyklen zu beobachten. Dabei wächst mit Zunahme der Dehnungsamplitude auch die Hysterese an.

3.2 Strukturelle Ursachen des beobachteten Materialverhaltens

Einführung

Obwohl die kontinuumsmechanische Modellierung des Materialverhaltens mittels phänomenologischer konstitutiver Beziehungen ohne Betrachtung der Vorgänge im Inneren der Materie erfolgt, kann die Kenntnis der molekularen Ursachen des Materialverhaltens dessen Interpretation erleichtern und die Formulierung eines Materialmodells motivieren. Der folgende Abschnitt gibt deshalb einen Überblick zur Materialstruktur thermoplastischer Polymere sowie zu ihrem Einfluss auf das mechanische Verhalten.

3.2.1 Morphologische Struktur

Polymere

Polymere bestehen aus kettenförmigen Makromolekülen, deren Elementarbestandteile sogenannte Monomere sind. Neben dem Molekülaufbau bestimmt insbesondere die Vernetzung der Makromoleküle untereinander die Eigenschaften des Kunststoffs. Ein Polymer, das nur lineare oder schwach verzweigte Molekülketten aufweist, die nicht miteinander vernetzt sind, heißt Thermoplast. Bilden die Verzweigungen der Makromoleküle ein weitmaschiges Netz von Verknüpfungen, wird das Polymer aufgrund der ausgeprägten Fähigkeit zu reversiblen Deformationen als Elastomer bezeichnet. Mit zunehmender Vernetzung nimmt die elastische Verformbarkeit ab, das Material verhält sich spröde. Derartige Polymere werden Duromere oder Duroplaste genannt.

Neben den mechanischen Eigenschaften bestimmt die Vernetzung der Makromoleküle auch die Schmelzbarkeit der Polymere. Während die unvernetzten Thermoplaste schmelzbar sind, führt die stärkere Vernetzung bei Elastomeren und Duromeren zum Verlust dieser Eigenschaft (Menges u. a. (2002)).

Morphologische Struktur

Die morphologische Struktur bezeichnet das Gefüge eines Werkstoffs. Dabei unterscheidet man zwischen Nahordnung und Textur. Die Nahordnung ist die Struktur auf molekularer Ebene zwischen benachbarten Polymermolekülen. Sie kann von kristallin (regelmäßig) bis amorph (unregelmäßig) reichen. Oberhalb der molekularen Ebene können sich weitere Ordnungen ergeben, diese werden unter dem Begriff Textur zusammengefasst. Bei Polymeren entstehen Texturen z. B. durch die Anordnung kristalliner und amorpher Bereiche. Sie können mithilfe von Röntgenbeugungsexperimenten bestimmt werden.
Voraussetzung für die Ausbildung einer idealen kristallinen Struktur sind Molekülketten mit einem regelmäßigen Aufbau, der ein geordnetes Aneinanderlegen ermöglicht. Bei Kunststoffen tritt ein solcher idealer Zustand, bedingt durch die langen Makromoleküle, nicht auf. Stattdessen existieren kristalline und amorphe Bereiche nebeneinander - eine Struktur, die als teilkristallin bezeichnet wird. Dabei führt das Vorhandensein von zwei Phasen mit deutlich verschiedenen Eigenschaften zu einem gegenüber rein amorphen Polymeren komplexeren Materialverhalten.
Die Vorstellung, dass teilkristalline Polymere aus kristallinen Bereichen bestehen, die in regelloser Form in einer Matrix ungeordneter Molekülketten eingebettet sind, entspricht nicht der Realität. Vielmehr erfolgt die reale Kristallbildung durch die lamellenartige Faltung von Makromolekülen und geht sternförmig von einem Kristallisationskeim aus. Gemeinsam mit amorphen Bereichen bilden diese Lamellen sogenannte Sphärolite. Die aus verschiedenen Keimen entstehenden Sphärolite ergeben die Textur des Polymers.

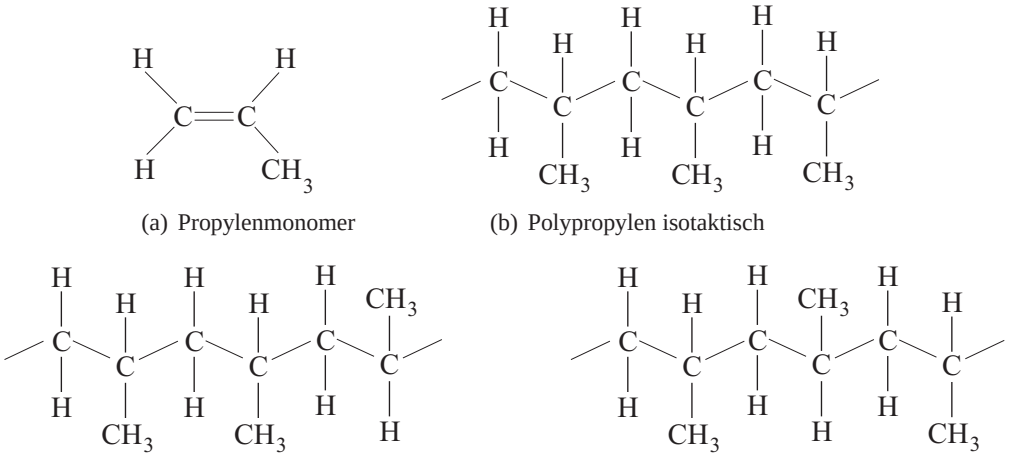
Polypropylen

Das hier untersuchte PP ist ein thermoplastisches Polymer. Die Verbindung einzelner Makromoleküle erfolgt im Wesentlichen durch Verhakungen, wobei die langen, regelmäßigen Molekülketten zumindest bereichsweise eine hohe Packungsdichte ermöglichen. Bei der Erstarrung der Schmelze ausgehend von Kristallisationskeimen entstehen die oben beschriebenen Sphärolite mit kristallinen und amorphen Bereichen.
Die Makromoleküle von PP bestehen aus dem Monomer Propylen C_3H_6 (Abb. 3.14(a)). Abhängig von der Anordnung des Substituenten CH_3 ergeben sich Polypropylene verschiedener Taktizität (Abb. 3.14), die trotz identischer Grundbausteine deutlich unterschiedliche Eigenschaften besitzen. Offensichtlich fördert die regelmäßige Struktur der Molekülketten des isotaktischen PP (Abb. 3.14(b)) die Ausbildung kristalliner Bereiche, so werden Kristallinitätsgrade von bis zu 65 Prozent beobachtet. Im Gegensatz dazu liegt die ataktische Variante (Abb. 3.14(c)) nur in amorpher Form vor. Bedeutende Unterschiede ergeben sich auch hinsichtlich der mechanischen Eigenschaften. Während die Elastizitätsmoduln von ataktischem und isotaktischem PP im Bereich von 1000 bis 1500MPa liegen, erreicht die syndiotaktische Form (Abb. 3.14(d)) lediglich 400MPa (Schwarz (2004)). Bei dem hier untersuchten PP handelt es sich um ein teilkristallines, isotaktisches PP.

3.2.2 Strukturelle Ursachen des mechanischen Verhaltens

Relaxationsversuch

Das Materialverhalten von Polymeren unterscheidet sich bei Raumtemperatur aufgrund ihrer morphologischen Struktur zum Teil deutlich von dem metallischer Werkstoffe. Exemplarisch dafür soll das Verhalten von PP in einem idealen Relaxationsversuch diskutiert werden. In einem solchen Experiment wird der Probekörper zum Zeitpunkt t_0 durch eine anschließend konstant gehaltene Dehnung ε_0 belastet (Abb. 3.15). Das Aufbringen der makroskopischen Verformung führt im Material, unter der Annahme einer idealen Versuchsdurchführung, zunächst zu einem sprunghaften Anstieg der Spannung

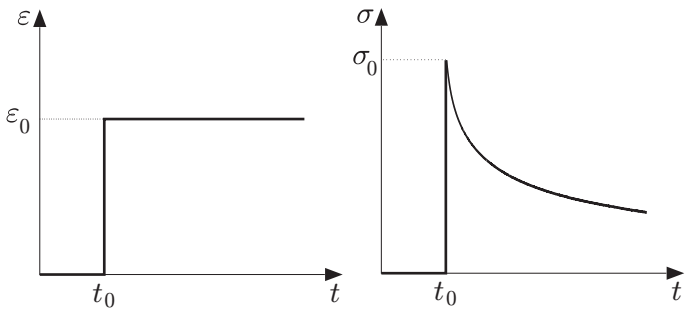


(a) Propylenmonomer (b) Polypropylen isotaktisch

(c) Polypropylen ataktisch (d) Polypropylen syndiotaktisch

Abbildung 3.14: Taktizität von Polypropylen

auf den Wert σ_0 zum Zeitpunkt t_0 (Abb. 3.15(b)). Im weiteren Verlauf zeigt sich trotz konstanter Dehnung ein Abfall der Spannung. Die Ursache für dieses Verhalten ist, wie nachfolgend erläutert wird, in der Struktur des Materials zu suchen.

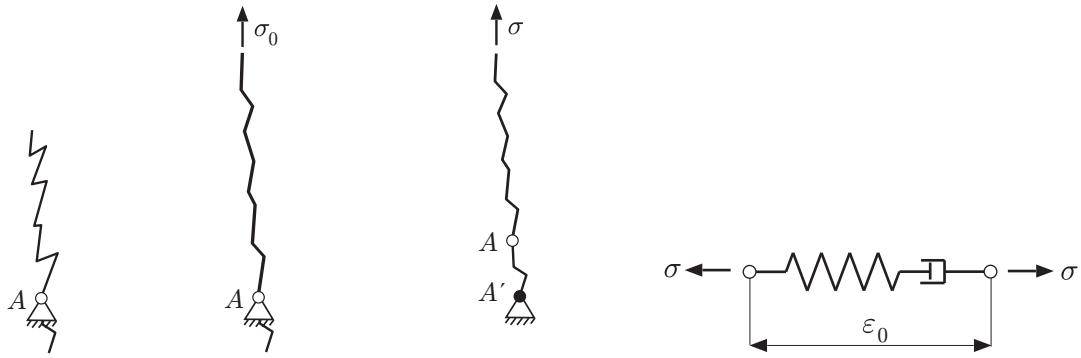


(a) Dehnungs-Zeitverlauf (b) Spannungs-Zeitverlauf

Abbildung 3.15: Belastung und zugehöriger Spannungs-Zeitverlauf für Relaxationsversuch

Amorphe Polymere

Im unbelasteten Zustand ist das in Abb. 3.16 vereinfacht skizzierte Makromolekül im Punkt A mit anderen hier nicht dargestellten Molekülen verbunden. Bei Deformation des Netzwerks von Makromolekülen, werden die Molekülketten gedehnt (Abb. 3.16(b)). Im Versuch ist eine spontane Spannung σ_0 messbar.
Da sich infolge der Wärmebewegung jedoch ständig Verknüpfungen zwischen den Makromolekülen lösen und an anderer Stelle (A') neu bilden, kommt es zu einer lokalen Entlastung der gedehnten Molekülketten, die makroskopisch als Absinken bzw. Relaxation der Spannung $\sigma(t)$ registriert werden kann (Abb. 3.16(c)) – ein Mechanismus der bei amorphen Polymeren besonders stark ausgeprägt ist.
Diese Erkenntnisse liefern die mikromechanische Motivation für ein rheologisches Modell zur Abbildung des Materialverhaltens, das aus einer Reihenschaltung von Feder und Dämpfer besteht und als MAXWELL-Element bezeichnet wird (Abb. 3.16(d)). Das sprunghafte Aufbringen einer Dehnung ε_0



(a) Unbelastet (b) Belastet (c) Spannungsrelaxation (d) MAXWELL-Element

Abbildung 3.16: Mikromechanische Motivation des viskoelastischen Materialverhaltens anhand eines Makromoleküls, vgl.Tobolsky (1967)

führt zunächst zur Deformation der Feder, während das Dämpferelement keinen Beitrag zur spontanen Deformation liefert. Dies entspricht der Verformung der Molekülketten. Ähnlich dem Lösen und der Neubildung von Verknüpfungen im Netzwerk der Makromoleküle führt die allmählich einsetzende Deformation des Dämpferelements zu einer Enlastung der Feder und damit zur Abnahme bzw. Relaxation der Spannung $\sigma(t)$.

Temperatur-Zeit-verschiebung

Neben der Spannungsrelaxation ist durch den Einfluss der Wärmebewegung auf das Netzwerk der Molekülketten auch die ausgeprägte Temperaturabhängigkeit des mechanischen Verhaltens von Polymeren zu erklären. Beispielsweise führt eine Erhöhung der Temperatur zu einer Beschleunigung der Relaxationsvorgänge, eine Tatsache die zur Reduktion des zeitlichen Aufwands für einen Relaxationsversuch genutzt werden kann. Dieses Prinzip wird als Temperatur-Zeitverschiebung bezeichnet. Zu beachten ist dabei, dass durch Temperaturveränderungen auch andere temperaturaktivierte Mechanismen an Einfluss gewinnen und das Versuchsergebnis beeinflussen können.

Kristalline Polymere

Das Relaxationsverhalten von kristallinen Mikrostrukturen ist im Vergleich zu dem amorpher Polymere deutlich komplexer, insbesondere dann, wenn sich die Kristallinität im Verlauf des Relaxationsexperiments verändert. Dadurch wird auch die Gültigkeit der Temperatur-Zeitverschiebung eingeschränkt. Da der Spannungsabfall für kristallines PP deutlich geringer ist als für die amorphe Variante, ist davon auszugehen, dass der Einfluss der amorphen Phase in teilkristallinem PP das Relaxationsverhalten dominiert (Tobolsky (1967)). Deshalb wird an dieser Stelle auf eine weitere Diskussion der Eigenschaften der kristallinen Phase verzichtet.

4 Modellierung des Materialverhaltens von Polypropylen

Einführung

Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Polymeren erfolgt meist mittels phänomenologischer Materialmodelle. In der Literatur finden sich zahlreiche Vorschläge sowohl für kleine als auch große Deformationen (Simo (1987); Arruda u. a. (1995); Kaliske und Rothert (1997); Lion (1997a,b); Reese und Govindjee (1998); Keck (1998); Miehe und Keck (2000); Drozdov (1998); Drozdov und Christiansen (2003, 2007b,a); Drozdov u. a. (2009)). In einigen dieser Modelle werden die konstitutiven Gleichungen aus einem Modell des lokalen Netzwerks von Polymerketten (Arruda und Boyce (1993b,a); Heinrich und Kaliske (1997); Kaliske und Heinrich (1999)) motiviert. Die Abbildung spezieller Phänomene des Materialverhaltens wie dem Mullins-Effekt stellt einen weiteren Schwerpunkt der in der Literatur verzeichneten Arbeiten dar (Govindjee und Simo (1992); Lion (1996, 1997a); Ogden und Roxburgh (1999); Drozdov (2009)).
Inhalt dieses Kapitels ist die Formulierung eines derartigen phänomenologischen, thermodynamisch konsistenten Materialmodells für PP, das die wesentlichen im Experiment beobachtbaren Phänomene des Materialverhaltens abbilden kann. Neben der ausgeprägten Geschwindigkeitsabhängigkeit und dem damit in Verbindung stehenden Relaxationsverhalten ist eine Gleichgewichtshysterese zu modellieren. Entsprechend der in Abschnitt 2.2.1 eingeführten Klassifizierung ist dazu ein viskoplastisches Materialmodell erforderlich.
Ausgehend von der Analyse der strukturellen Ursachen des Materialverhaltens im vorigen Kapitel werden zunächst Modelle der linearen Viskoelastizität zur mathematischen Beschreibung des geschwindigkeitsabhängigen Materialverhaltens sowie ein Verfahren zur Identifikation viskoelastischer Spektren untersucht.
Die Formulierung des konkreten viskoplastischen Materialmodells für PP erfolgt unter Nutzung eines endochronen Plastizitätsmodells zur Modellierung der Gleichgewichtshysterese und eines verallgemeinerten MAXWELL-Modells der linearen Viskoelastizität zur Abbildung des geschwindigkeitsabhängigen Materialverhaltens. Die Erweiterung um eine überspannungsabhängige Viskositätsfunktion ermöglicht die Beschreibung der in den Experimenten beobachteten nichtlinearen Geschwindigkeitsabhängigkeit.
Zur Anwendung im Rahmen der mehrskaligen Modellierung textilverstärkter Thermoplaste wird das einachsige Materialmodell schließlich für mehrachsige Beanspruchungen verallgemeinert und in ein FE-Programm implementiert.

4.1 Einachsige lineare Viskoelastizität

MAXWELL-Element

Wie bereits in Abb. 3.16 anhand der Analogie zwischen dem Verhalten eines Makromoleküls und dem MAXWELL-Modell gezeigt wurde, kann die bei konstanter Deformation beobachtete Spannungsrelaxation durch eine einfache Reihenschaltung von Feder- und Dämpferelement modelliert werden. Nach einer ausreichend langen Haltezeit erreicht die viskose Dehnung des Dämpfers den Wert der Gesamtdehnung und die Spannung des MAXWELL-Elements relaxiert auf den Gleichgewichtswert $\sigma = 0$. Die

Beschreibung einer von Null verschiedenen Gleichgewichtsrelation ist beispielsweise durch die Parallelschaltung einer Feder möglich (Abb. 4.1). An dem daraus resultierenden Dreiparametermodell sollen die Grundlagen der linearen Viskoelastizitätstheorie erläutert werden.

4.1.1 Dreiparametermodell

Implizite Darstellung

Die implizite Darstellung der Materialgleichungen (vgl. Abschnitt 2.1.3) des Dreiparametermodells ergibt sich aus den Spannungs-Dehnungsbeziehungen der einachsigen rheologischen Grundelemente der linearen Feder $\sigma_{\mathrm{F}} = E\varepsilon$ mit der Federsteifigkeit E und des linearen Dämpfers $\sigma_{\mathrm{D}} = \eta\dot{\varepsilon}$ mit der Viskosität η_i unter Beachtung des mechanischen Gleichgewichts und der Kinematik, die durch das rheologische Modell in Abb. 4.1 gegeben sind. Da nur das Materialverhalten des Dämpfers abhängig von

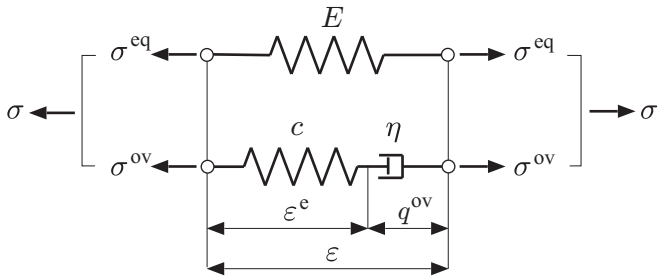


Abbildung 4.1: Dreiparametermodell der linearen Viskoelastizität

der Dehnrate ist, entspricht das rheologische Modell einer Aufteilung der Spannung in die geschwindigkeitsunabhängige Gleichgewichtsspannung der Feder σ^{eq} und die geschwindigkeitsabhängige Überspannung des MAXWELL-Elements σ^{ov}

$$\sigma = \sigma^{\mathrm{eq}} + \sigma^{\mathrm{ov}}. \tag{4.1}$$

Aus den Dehnungen der Federelemente ergeben sich die Spannungen

$$\sigma^{\mathrm{eq}} = E\varepsilon, \tag{4.2}$$
$$\sigma^{\mathrm{ov}} = c\left(\varepsilon - q^{\mathrm{ov}}\right), \tag{4.3}$$

wobei die Feder des MAXWELL-Elements um die elastische Differenzdehnung $\varepsilon^{\mathrm{e}} = \varepsilon - q^{\mathrm{ov}}$ verformt wird. Aus der Bedingung, dass innerhalb des MAXWELL-Elements die Spannungen in Feder und Dämpfer aufgrund der Reihenschaltung gleich groß sein müssen $\sigma^{\mathrm{ov}} = c\left(\varepsilon - q^{\mathrm{ov}}\right) = \eta\dot{q}^{\mathrm{ov}}$ folgt die erforderliche Evolutionsgleichung

$$\dot{q}^{\mathrm{ov}} = \frac{\sigma^{\mathrm{ov}}}{\eta} = \frac{c}{\eta}\left(\varepsilon - q^{\mathrm{ov}}\right) \tag{4.4}$$

für die innere Variable q^{ov}. Anhand der grafischen Darstellung des rheologischen Modells ist dabei anschaulich klar, dass es sich um eine innere Variable des Dehnungstyps handelt, die als viskose Dehnung interpretiert werden kann. Durch die Gleichungen (4.1) bis (4.4) ist somit eine vollständige Beschreibung des einachsigen, linear viskoelastischen Materialverhaltens des Dreiparametermodells in impliziter Form gemäß (2.30) und (2.31) gegeben.

Explizite Darstellung

Die implizite Darstellung der konstitutiven Gleichungen kann für beliebige Modelle der linearen Viskoelastizitätstheorie in die explizite Darstellung

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} R(t-\tau) d\tau \tag{4.5}$$

überführt werden, wobei die Eigenschaften des Materialmodells vollständig durch die Relaxationsfunktion $R(t)$ beschrieben werden. Sie entspricht der Spannungsantwort auf eine zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgebrachte Einheitsdehnung. Das Integral in (4.5) ist physikalisch als Überlagerung der Spannungsantworten auf die Änderungen der Dehnung über die gesamte Dehnungsgeschichte $\varepsilon(\tau)\ \forall\ \tau \leq t$ zu interpretieren. Gleichung (4.5) wird daher auch als BOLTZMANNsches Superpositionsintegral bezeichnet. Die spezielle Form der Relaxationsfunktion ist abhängig von der Schaltung der rheologischen Grundelemente.
Für das Dreiparametermodell folgt unter Voraussetzung einer spannungsfreien Ausgangskonfiguration $\sigma^{\text{ov}}(-\infty) = 0$ die spezielle explizite Darstellung der konstitutiven Beziehungen in Form des Funktionals der Überspannung

$$\sigma^{\text{ov}}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} c e^{-\frac{c}{\eta}(t-\tau)} d\tau. \tag{4.6}$$

Für die Gesamtspannung erhält man aus (4.1) und (4.2) unter der Berücksichtigung von $\varepsilon(-\infty) = 0$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \Big(\underbrace{E + c e^{-\frac{c}{\eta}(t-\tau)}}_{R_{3\text{P}}} \Big) d\tau \tag{4.7}$$

mit der speziellen Relaxationsfunktion $R_{3\text{P}}$ des Dreiparametermodells.

Fading Memory

Abschließend soll die in Abschnitt 2.2.3 erläuterte Eigenschaft des nachlassenden Gedächtnis oder auch Fading Memory am Funktional der Überspannung der einachsigen linearen Viskoelastizität nachgewiesen werden. Dazu stellt man das Funktional der Überspannung (4.6) in Abhängigkeit von der relativen Dehnungsgeschichte $\varepsilon_{\text{r}}^{t}$ gemäß (2.37) mit $s = t - \tau$ dar

$$\sigma^{\text{ov}}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} R^{\text{ov}}(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{\infty} \frac{d\varepsilon_{\text{r}}^{t}(s)}{ds} R^{\text{ov}}(s) ds. \tag{4.8}$$

Dabei bezeichnet R^{ov} den Überspannungsanteil der Relaxationsfunktion. Nach partieller Integration

$$\sigma^{\text{ov}}(t) = \left[\varepsilon_{\text{r}}^{t}(s) R^{\text{ov}}(s)\right]_{\infty}^{0} - \int_{\infty}^{0} \varepsilon_{\text{r}}^{t}(s) R'^{\text{ov}}(s) ds \tag{4.9}$$

erhält man wegen $\varepsilon_{\text{r}}^{t}(0) = 0$ und $R^{\text{ov}}(\infty) = 0$

$$\sigma^{\text{ov}}(t) = \int_{0}^{\infty} \varepsilon_{\text{r}}^{t}(s) R'^{\text{ov}}(s) ds. \tag{4.10}$$

Die Ableitung R^{ov} des Überspannungsanteils der Relaxationsfunktion $R^{\mathrm{ov}}(s)$ wird als Gedächtnisfunktion bezeichnet und besitzt die Eigenschaft

$$\lim_{s\to\infty} R'^{\mathrm{ov}}(s) = 0. \tag{4.11}$$

Durch die Wichtung mit der Gedächtnisfunktion R'^{ov}, deren Betrag eine monoton fallende Funktion sei, nimmt der Einfluss der relativen Dehnungsgeschichte $\varepsilon_{\mathrm{r}}^{t}(s)$ ab, je länger diese zurückliegt. Das Funktional der Überspannung verschwindet deshalb asymptotisch für die statische Fortsetzung $\varepsilon_{\mathrm{r}}^{t+\delta}$ beliebiger Dehnungsgeschichten und zeichnet sich daher durch die Fading-Memory- oder Relaxationseigenschaft aus (Haupt (2002)). Die Gedächtnisfunktion des Dreiparametermodells kann mit

$$R'^{\mathrm{ov}}_{\mathrm{3P}}(s) = -\frac{c^2}{\eta} e^{-\frac{c}{\eta}s} \tag{4.12}$$

angegeben werden. Gilt für das als Relaxationszeit bezeichnete Verhältnis $\tau = \frac{\eta}{c} > 0$, dann besitzt die Funktion die oben genannten Eigenschaften.
Obwohl das Materialmodell in einem Relaxationsversuch eine zeitliche Änderung der Spannung bei konstanter Dehnung und damit eine scheinbare Zeitabhängigkeit beschreibt, liegt keine explizite Zeitabhängigkeit der konstitutiven Beziehungen vor, da nur die Zeitdifferenz s als unabhängige Variable im Funktional der Überspannung vorkommt. Dadurch wird das Prinzip der materiellen Objektivität nicht verletzt.

4.1.2 Verallgemeinertes MAXWELL-Modell

Grenzen des Dreiparametermodells

Zwar kann das bisher betrachtete Dreiparametermodell die Grundzüge des viskoelastischen Materialverhaltens abbilden, es ist jedoch durch die Verwendung eines einzelnen MAXWELL-Elements nur bedingt zur Beschreibung des ausgeprägten Relaxationsverhaltens von Polypropylen geeignet, da der aktive Bereich eines solchen Elements auf die Umgebung der Relaxationszeit τ beschränkt ist (Abb. 4.2).

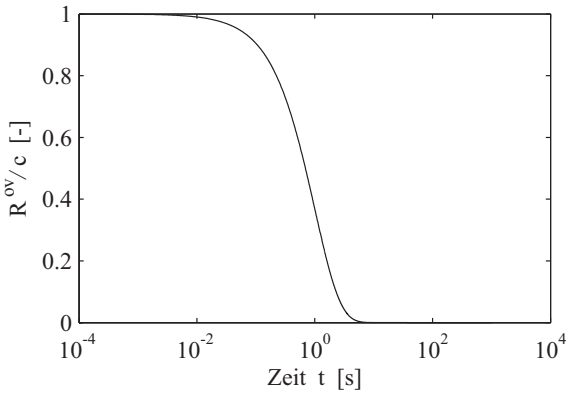


Abbildung 4.2: Verlauf des normierten Überspannungsanteils der Relaxationsfunktion

Verallgemeinertes Maxwellmodell

Um die, in den experimentellen Untersuchungen beobachtete, über mehrere Dekaden ablaufende Spannungsrelaxation zu modellieren, ist eine Erweiterung des Modells erforderlich. Dies ist in systematischer Form durch den Übergang von einem Dreiparameter- zu einem $(2n_{\mathrm{v}}+1)$-Parametermodell

möglich, das neben der linearen Feder eine Parallelschaltung von n_v MAXWELL-Elementen mit je zwei Parametern enthält (Abb. 4.3). Die Gesamtspannung setzt sich aus der Spannung σ^eq des Federelements

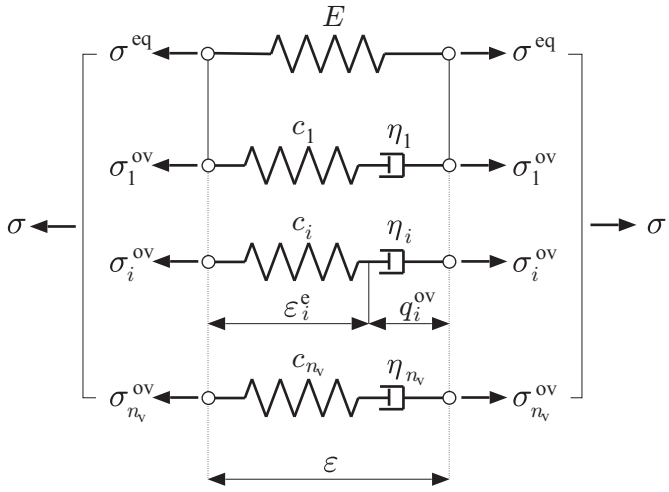


Abbildung 4.3: Verallgemeinertes MAXWELL-Modell

und den geschwindigkeitsabhängigen Überspannungen σ_i^ov der n_v MAXWELL-Elemente

$$\sigma = \sigma^\mathrm{eq} + \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} \sigma_i^\mathrm{ov} \tag{4.13}$$

zusammen. Die implizite Darstellung der konstitutiven Beziehungen des verallgemeinerten MAXWELL-Modells lautet

$$\sigma = E\varepsilon + \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} c_i \left(\varepsilon - q_i^\mathrm{ov}\right), \tag{4.14}$$

$$\dot{q}_i^\mathrm{ov} = \frac{c_i}{\eta_i}\left(\varepsilon - q_i^\mathrm{ov}\right). \tag{4.15}$$

Durch Integration dieses Systems linearer Differenzialgleichungen erhält man die explizite Darstellung

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} \int_{-\infty}^{t} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} c_i e^{-\frac{1}{\tau_i}(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \left[E + \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} c_i e^{-\frac{1}{\tau_i}(t-\tau)}\right] d\tau \tag{4.16}$$

mit der Relaxationsfunktion des $(2n_\mathrm{v}+1)$-Parametermodells

$$R(t) = E + \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} c_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}. \tag{4.17}$$

Die Menge $\left\{c_i, \tau_i = \frac{\eta_i}{c_i}, i = 1 \ldots n_\mathrm{v}\right\}$ der Relaxationsstärken und -zeiten im Überspannungsanteil der Relaxationsfunktion (4.17)

$$R^\mathrm{ov}(t) = \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} c_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}. \tag{4.18}$$

bildet dabei ein diskretes Relaxationsspektrum, das die geschwindigkeitsabhängigen Eigenschaften des verallgemeinerten MAXWELL-Modells vollständig beschreibt.

4.1.3 Parameteridentifikation linear viskoelastischer Spektren

Identifikation aus Relaxationsversuchen

Das verallgemeinerte MAXWELL-Modell stellt im Rahmen dieser Arbeit den Ausgangspunkt für die Modellierung des geschwindigkeitsabhängigen Materialverhaltens von PP dar. Zur Anpassung des Modellverhaltens an das experimentell ermittelte Materialverhalten sind die Parameter des diskreten Spektrums zu identifizieren. Dabei besitzen Relaxationsversuche eine besondere Bedeutung, da diese Art der Versuchsführung eine Trennung der geschwindigkeitsabhängigen und -unabhängigen Materialeigenschaften ermöglicht.
Gerlach und Matzenmiller (2005) bewerten verschiedene Methoden hinsichtlich ihrer Eignung zur Identifikation der diskreten Relaxationsspektren. Von den untersuchten Algorithmen liefern Regularisierungsmethoden und das Fensterverfahren nach Emri und Tschoegl (1993, 1994, 1995) die besten Ergebnisse (Gerlach (2003)). An dieser Stelle kommt das letztgenannte Verfahren zur Anwendung. Es ermöglicht durch die gezielte Ausnutzung der Eigenschaft des verallgemeinerten MAXWELL-Modells, dass jeweils nur eine begrenzte Anzahl von MAXWELL-Elementen aktiv zur Spannungsrelaxation beitragen, eine effiziente Berechnung des diskreten Relaxationsspektrums. Die Parameteridentifikation erfolgt dabei durch die rekursive Berechnung der zu einem a priori festgelegten Satz von Relaxationszeiten τ_i gehörenden Relaxationsstärken c_i, wobei die Wahl der größten ($\tau_{\max}$) und kleinsten ($\tau_{\min}$) Relaxationszeiten des zu identifizierenden Spektrums durch die Haltezeit t_h des Relaxationsversuchs bzw. die zeitliche Auflösung des Messsignals Δt_M bestimmt werden. Eine Beschreibung der Funktionsweise des Algorithmus sowie Untersuchungen zum Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit, der Haltezeit und der Abtastung des Messsignals auf das Ergebnis der Parameteridentifikation sind in den Anhängen A bzw. B zu finden.

Identifikation aus Zugversuchen

Da ein idealer Dehnungssprung in realen Relaxationsexperimenten nicht realisiert werden kann (Abb. 4.4), kommt es infolge der endlichen Dehnrate $\dot{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0/\Delta t_0$ zu einer fehlerhaften Identifikation der zu kurzen Relaxationszeiten gehörenden Relaxationsstärken (vgl. Anhang B). Um diese Modellparameter mit höherer Genauigkeit bestimmen zu können, wird das Verfahren von EMRI und TSCHOEGL in dieser Arbeit derart modifiziert, dass auch Informationen aus monotonen Zugversuchen mit konstanter Dehnrate zur Identifikation verwendet werden können.

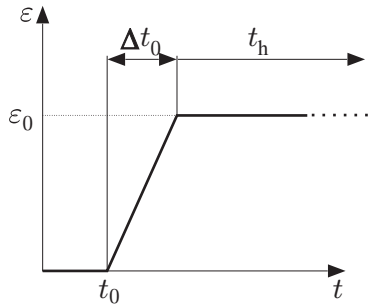


Abbildung 4.4: Dehnungs-Zeitverlauf eines realen Relaxationsversuchs

Ausgangspunkt für die Modifikation ist die Spannungsantwort des verallgemeinerten MAXWELL-Mo-

dells in einem Zugversuch mit konstanter Dehnrate $\dot{\varepsilon}_0$

$$\sigma(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left[Et + \sum_i^{n_\mathrm{v}} c_i \tau_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right], \tag{4.19}$$

wobei die Funktion

$$\eta(t) = \sum_i^{n_\mathrm{v}} c_i \tau_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right), \tag{4.20}$$

als zeitlich veränderliche Viskositätsfunktion interpretiert werden kann.
Es ist zu erkennen, dass der aktive Bereich eines einzelnen MAXWELL-Elements in Analogie zur Relaxationsfunktion $R^{\mathrm{ov}}(t)$ (vgl. Abb. 4.2) auf die Umgebung der Zeitkonstante τ_i begrenzt ist. Diese Eigenschaft wird im Folgenden zur Adaption des Fensterverfahrens für Zugversuche genutzt.
Zur Bestimmung des diskreten Spektrums ist zunächst der Überspannungsanteil der Materialantwort zu bestimmen. Da im Gegensatz zur Identifikation aus Relaxationsversuchen der Gleichgewichtswert der Spannung während des Zugversuchs nicht konstant ist, müssen an dieser Stelle das für die Gleichgewichtsrelation verwendete Materialmodell sowie dessen Parameter bekannt sein. Damit ergeben sich die zur Identifikation genutzten Messwerte der Viskositätsfunktion

$$\hat{\eta}(t_j) = \frac{1}{\dot{\varepsilon}_0} \left[\hat{\sigma}(t_j) - \sigma^{\mathrm{eq}}(t_j) \right] \tag{4.21}$$

aus dem gemessenen Spannungsverlauf $\hat{\sigma}(t_j)$ und der Spannungsantwort des Materialmodells der Gleichgewichtsrelation $\sigma^{\mathrm{eq}}(t_j)$ zum Zeitpunkt t_j. Die Herleitung einer Gleichung zur Berechnung der k-ten Relaxationsstärke erfolgt durch Minimierung des Quadrats

$$F_k = \sum_{j=j_k^{\mathrm{u}}}^{j_k^{\mathrm{o}}} \left[\hat{\eta}(t_j) - \eta(t_j) \right]^2, \tag{4.22}$$

der zwischen dem Messwert $\hat{\eta}(t_j)$ und der Modellantwort $\eta(t_j)$ im Intervall $\left[t_k^{\mathrm{u}};\ t_k^{\mathrm{o}} \right]$ auftretenden Abweichung, wobei j_k^{u} und j_k^{o} die den Intervallgrenzen zugeordneten Indizes der diskreten Messwerte sind.
Betrachtet man den aktiven Bereich des k-ten MAXWELL-Elements, so sind die Beiträge aller MAXWELL-Elemente bis $k-1$ von Null auf den konstanten Wert $c_i \tau_i$ angestiegen, während alle Elemente ab $k+1$ unverändert keinen Beitrag zur Viskosität liefern. Damit erhält man folgende Näherungsformel für die Viskositätsfunktion

$$\eta(t) \approx \sum_{i=1}^{k-1} c_i \tau_i + c_k \tau_k \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}} \right) + 0 \quad \forall\, t_k^{\mathrm{u}} \leq t < t_k^{\mathrm{o}}. \tag{4.23}$$

Zur Sicherung der Genauigkeit des Algorithmus sind die Annahmen hinsichtlich der als aktiv zu berücksichtigenden MAXWELL-Elemente anhand der Analyse des Verlaufs der Kernfunktion $e^{\frac{t}{\tau_i}}$ des i-ten MAXWELL-Elements zu präzisieren. Da der aktive Bereich des i-ten Maxwellelements bei ca. $10^{-2} \cdot \tau_i$ beginnt (vgl. Abb. 4.2), wird im Gegensatz zu (4.23) in der implementierten Version des Algorithmus lediglich der Einfluss der viskosen Elemente vernachlässigt, deren Relaxationszeiten mindestens zwei Dekaden größer sind, als die des zu identifizierenden Elements

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \tau_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) + c_k \tau_k \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}} \right) + \sum_{i=k+1}^{i_{\max}} c_i \tau_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad \forall\, t_k^{\mathrm{u}} \leq t < t_k^{\mathrm{o}} \tag{4.24}$$

mit

$$i_{\max} = \begin{cases} k+3 & \text{für} \quad k+3 \leq n_{\mathrm{v}} \\ n_{\mathrm{v}} & \text{für} \quad k+3 > n_{\mathrm{v}} \end{cases} \tag{4.25}$$

Für die Relaxationsstärke c_k erhält man aus der Minimierung von F_k und Einsetzen von (4.24) die Bestimmungsgleichung

$$c_k = \frac{1}{\tau_k} \frac{\sum_{j=j_k^{\mathrm{u}}}^{j_k^{\mathrm{o}}} \left[\hat{\eta}(t_j) - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \tau_i \left(1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_i}}\right) - \sum_{i=k+1}^{i\max} c_i \tau_i \left(1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_i}}\right) \right] \left(1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_k}}\right)}{\sum_{j=j_k^{\mathrm{u}}}^{j_k^{\mathrm{o}}} \left(1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_k}}\right)^2}. \tag{4.26}$$

Die Berechnung erfolgt beginnend mit der kleinsten Relaxationszeit und endet mit der Identifikation der zur größten im Zugversuch zu bestimmenden Relaxationszeit gehörenden Relaxationsstärke c_{n_z}. Der in einem ersten Durchlauf ermittelte Satz von Relaxationsstärken wird analog zum ursprünglichen Verfahren durch die rekursive Anwendung bis zum Erreichen eines Abbruchkriteriums verbessert.

Festlegung der Grenzen

Zur vollständigen Definition des Identifikationsalgorithmus sind schließlich die Grenzen t_k^{u} und t_k^{o}, die das Zeitintervall in dem $\eta(t)$ durch (4.24) approximiert werden kann und damit das Fenster der zur Identifikation genutzten Daten bestimmen, festzulegen. Das dazu verwendete Kriterium ergibt sich aus dem Vergleich der Anstiege

$$D_k^{\mathrm{tran}} = -\frac{d}{d \log\left(\frac{t}{\tau_k}\right)} e^{-\frac{t}{\tau_k}} = \ln 10 \frac{t}{\tau_k} e^{-\frac{t}{\tau_k}}. \tag{4.27}$$

von drei aufeinanderfolgenden Kernfunktionen $e^{\frac{t}{\tau_{k-1}}}$,$e^{\frac{t}{\tau_k}}$ und $e^{\frac{t}{\tau_{k+1}}}$ (Abb. 4.5).

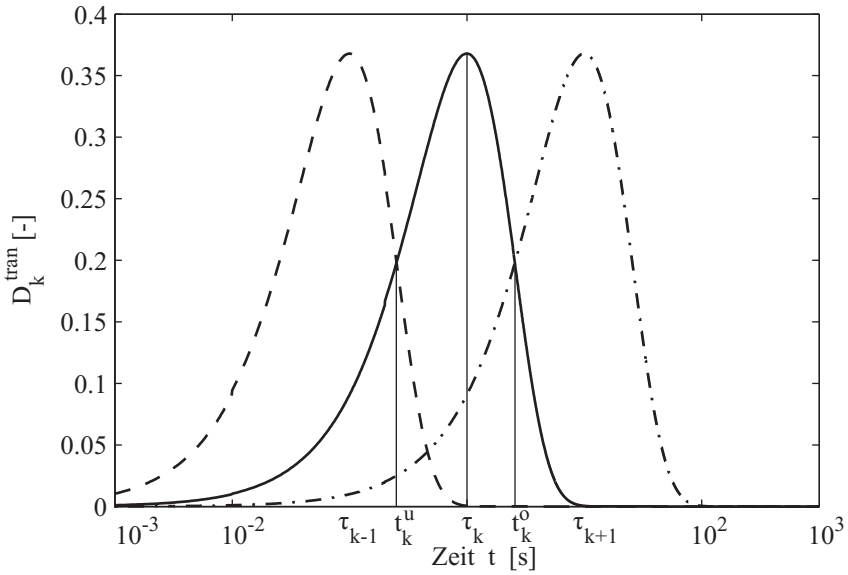


Abbildung 4.5: Beschränkung der zur Identifikation genutzten Daten

Für die untere Grenze t_k^{u} folgt aus der Bedingung $D_{k-1}^{\mathrm{tran}} = D_k^{\mathrm{tran}}$

$$t_k^{\mathrm{u}} = \frac{\tau_k \tau_{k-1}}{\tau_k - \tau_{k-1}} \ln \frac{\tau_k}{\tau_{k-1}}, \tag{4.28}$$

für die obere Grenze t_k^{o} aus $D_k^{\mathrm{tran}} = D_{k+1}^{\mathrm{tran}}$

$$t_k^{\mathrm{o}} = \frac{\tau_k \tau_{k+1}}{\tau_{k+1} - \tau_k} \ln \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k}. \tag{4.29}$$

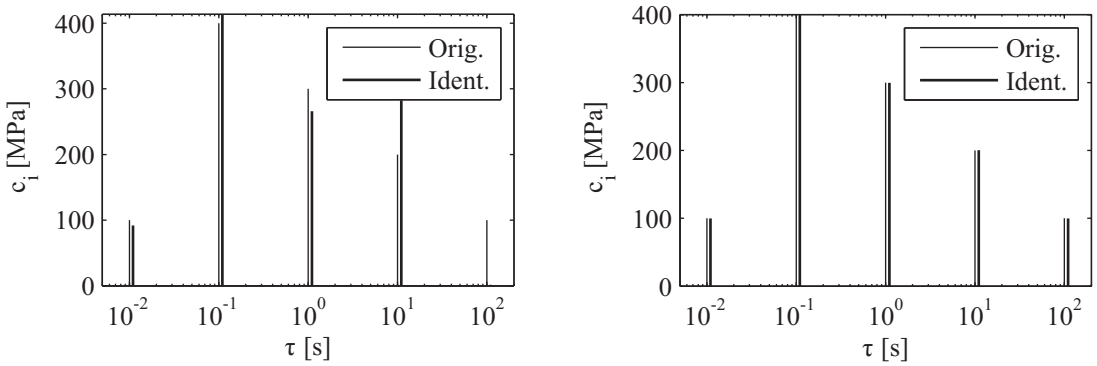
Durch diese Kriterien wird erreicht, dass nur der Ausschnitt des Messsignals zur Identifikation von c_k genutzt wird, der die größte Empfindlichkeit bezüglich dieses Parameters aufweist.

Beispiel

Abschließend sollen die Eigenschaften des modifizierten Verfahrens anhand des bekannten diskreten Spektrums

$$\underline{\mathbf{c}} = [100 \quad 400 \quad 300 \quad 200 \quad 100]^T \,\mathrm{MPa}; \quad \underline{\boldsymbol{\tau}} = [0,01 \quad 0,1 \quad 1 \quad 10 \quad 100]^T \,\mathrm{s}. \tag{4.30}$$

überprüft werden. Dabei übernimmt die mithilfe des verallgemeinerten MAXWELL-Modells berechnete Spannungsantwort die Funktion des realen Messsignals. Die Zugversuche werden bis zu einer maximalen Dehnung von $\varepsilon_0 = 0,045$ simuliert. Für die beiden betrachteten Belastungsgeschwindigkeiten von $\dot{\varepsilon}_0 = 1,5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\dot{\varepsilon}_0 = 1,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\mathrm{s}}$ ergeben sich Messzeiten von $\Delta t_0 = 3\mathrm{s}$ bzw. $\Delta t_0 = 30\mathrm{s}$. Die Ergebnisse der Identifikation sind für beide Signale in Abb. 4.6 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Informationsgehalt des Messsignals entscheidend von der Versuchsdauer bestimmt wird. In Analogie zu den Relaxationsversuchen muss der aktive Bereich des zu identifizierenden MAXWELL-Elements innerhalb der Messzeit liegen.



(a) $\Delta t_0 = 3\mathrm{s}$; $\dot{\varepsilon}_0 = 1,5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\mathrm{s}}$ (b) $\Delta t_0 = 30\mathrm{s}$; $\dot{\varepsilon}_0 = 1,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\mathrm{s}}$

Abbildung 4.6: Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit auf Ergebnis der Parameteridentifikation

Fazit

Durch die Kombination mit dem Originalverfahren (vgl. Anhang A), das zur Identifikation der Konstanten $c_{n_z+1} \ldots c_{n_v}$ genutzt wird, während aus den Zugversuchen die Relaxationsstärken $c_1 \ldots c_{n_z}$ bestimmt werden, können die Relaxationsstärken eines verallgemeinerten MAXWELL-Modells für ein breites Spektrum von Relaxationszeiten bestimmt und der in realen Relaxationsexperimenten auftretende Einfluss der endlichen Belastungsgeschwindigkeit auf die identifizierten Materialparameter eliminiert werden. Einschränkungen hinsichtlich der Identifizierbarkeit ergeben sich für $\tau_{\min}$ aus der zeitlichen Auflösung des Messsignals und für $\tau_{\max}$ aus der Wahl der Haltezeit im Relaxationsversuch.

4.2 Einachsiges viskoplastisches Materialmodell für Polypropylen

Einführung

Nach der Analyse grundlegender geschwindigkeitsabhängiger Materialphänomene soll nun ein einachsiges Materialmodell für PP formuliert werden. Da die in Abschnitt 3.1.5 beschriebenen zyklischen Versuche mit Zwischenrelaxationen die Existenz einer Gleichgewichtshysterese zeigen, wird für die Gleichgewichtsrelation ein plastisches Materialmodell gewählt. In Kombination mit dem zur Modellierung der Überspannung zu verwendenden viskoelastischen Teilmodell ergibt sich gemäß der in Kapitel 2 vorgestellten Klassifizierung ein viskoplastisches Materialmodell.

4.2.1 Materialmodell der Gleichgewichtsrelation

Motivation des Materialmodells

Verbindet man die in einem zyklischen Versuch mit Haltezeiten bestimmten Abbruchpunkte der Spannungsrelaxation (vgl. Abb. 3.11(a)), so erhält man eine sehr flach verlaufende Gleichgewichtsrelation mit Hysterese. Dabei ist im Vergleich zu dem von Metallen bekannten Verhalten kein ausgeprägter Bereich linear elastischen Materialverhaltens erkennbar. Die Spannungs-Dehnungskurven sind von Beginn an nichtlinear. Motiviert durch diese experimentellen Beobachtungen, soll zur Modellierung der Gleichgewichtsrelation ein endochrones Materialmodell der Plastizität ohne Fließbedingung (Valanis (1971a,b); Khan und Huang (1995)) eingesetzt werden, bei dem inelastische Deformationen ab Belastungsbeginn auftreten. Die Bezeichnung endochron, leitet sich dabei von der als innere Zeit des Modells interpretierbaren Bogenlänge ab. Ein endochrones Modell wurde von Kletschkowski u. a. (2001, 2002b,a, 2004, 2005) zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von kurzfaserverstärktem Polytetrafluorethylen verwendet.

Endochrones Modell

Die zu dem einfachen endochronen Modell in Abb. 4.7 gehörenden konstitutiven Gleichungen können durch Anwendung des in Abschnitt 2.2.3 erläuterten Korrespondenzprinzips auf das MAXWELL-Modell der linearen Viskoelastizitätstheorie (Abb. 3.16(d)) ermittelt werden.

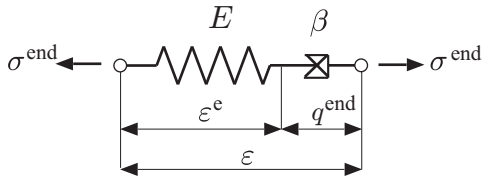


Abbildung 4.7: Rheologisches Modell der endochronen Plastizität

Während die Spannungs-Dehnungsbeziehung

$$\sigma^{\text{end}}(t) = E\left(\varepsilon(t) - q^{\text{end}}(t)\right), \tag{4.31}$$

in der ε die Dehnung und q^{end} die inelastische Dehnung des endochronen Elements beschreiben, unverändert von dem viskoelastischen Modell übernommen werden kann, ist in der Evolutionsgleichung der inneren Variable die Zeit t durch die Bogenlänge $z(t)$ nach Gleichung (2.44) zu ersetzen

$$\bar{q}'^{\text{end}}(z) = \beta\left(\bar{\varepsilon}(z) - \bar{q}^{\text{end}}(z)\right). \tag{4.32}$$

Für die zeitliche Änderung der inneren Variable $q^{\text{end}}(t)$ folgt unter Beachtung der Kettenregel

$$\dot{q}^{\text{end}}(t) = \bar{q}'^{\text{end}}(z)\dot{z}(t) = \beta\left(\bar{\varepsilon}(z) - \bar{q}^{\text{end}}(z)\right)\dot{z}(t). \tag{4.33}$$

Nach der Bildung der Zeitableitung der Spannungs-Dehnungsbeziehung (4.31) ist durch Einsetzen von (4.33) eine Differenzialgleichung für die Spannung im endochronen Modell angebbar

$$\dot{\sigma}^{\text{end}}(t) = E\dot{\varepsilon}(t) - \beta\sigma^{\text{end}}(t)\dot{z}(t). \tag{4.34}$$

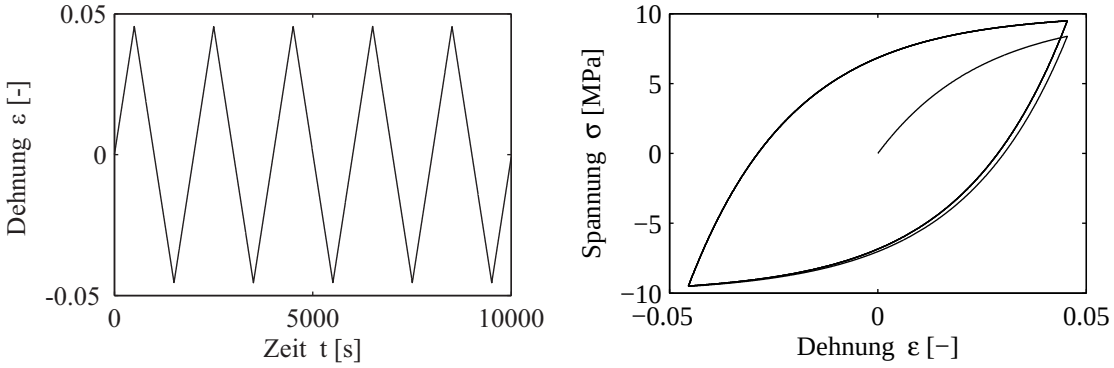
Unter Beachtung der Definition der Bogenlänge $\dot{z}(t) = |\dot{\varepsilon}|$ kann für die Differenzialgleichung des endochronen Modells die Geschwindigkeitsunabhängigkeit nachgewiesen werden. Betrachtet man das Verhalten im Relaxationsversuch ($\dot{z}(t) = |\dot{\varepsilon}| = 0$), folgt $\dot{\sigma}^{\text{end}}(t) = 0$. Somit tritt keine Relaxation der Spannung auf.

Zyklische Beanspruchung

In Abb. 4.8(b) ist die Spannungsantwort des endochronen Modells auf eine zyklische Dehnungsbeanspruchung mit fünf Zyklen und einer Dehnungsamplitude von $\hat{\varepsilon} = 0,045$ (Abb. 4.8(a)) dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass das Spannungs-Dehnungsverhalten bereits nach dem zweiten Zyklus stationär ist. Diese typische Eigenschaft endochroner Modelle, bereits nach wenigen Zyklen eine stationäre Hysterese mit der Maximalspannung

$$\sigma_{\infty}^{\text{end}} = \frac{E}{\beta}\tanh(\beta\hat{\varepsilon}) \tag{4.35}$$

zu zeigen, schränkt die Abbildbarkeit von Verfestigungsvorgängen stark ein. Eine Möglichkeit zur Veränderung dieses Verhaltens besteht in der Verwendung einer generalisierten Bogenlänge. Vorschläge dazu sind beispielsweise in Haupt (2002) zu finden. Da das zyklische Verhalten der Gleichgewichtsrelation nicht im Mittelpunkt der Untersuchungen steht, wird hier die oben beschriebene Form des endochronen Modells verwendet.



(a) Dehnungszyklus (b) Spannungs-Dehnungsverlauf

Abbildung 4.8: Spannungs-Dehnungsverhalten eines endochronen Modells bei zyklischer Belastung

Gleichgewichtsrelation

Durch die Wahl der Parameter E und β kann das Materialmodell an die gemessenen Abbruchpunkte der Zwischenrelaxationen angepasst werden. In Abb. 4.9 ist erkennbar, dass mit der Parameterkombination $E = 800,0$MPa und $\beta = 44,0$, zu deren Bestimmung nur die Endpunkte der im Belastungspfad liegenden Haltezeiten verwendet wurden, die Gleichgewichtshysterese deutlich überschätzt wird.
Da eine Verkleinerung der Hysterese allein durch die Variation der Parameter ohne eine deutliche Verschlechterung der Approximation des Belastungspfades der Gleichgewichtsrelation nicht möglich ist, soll das bisherige Modell zur Abbildung der geringen Gleichgewichtshysterese entsprechend Abb. 4.10 durch die Parallelschaltung einer nichtlinearen Feder modifiziert werden. Damit ergibt sich die ge-

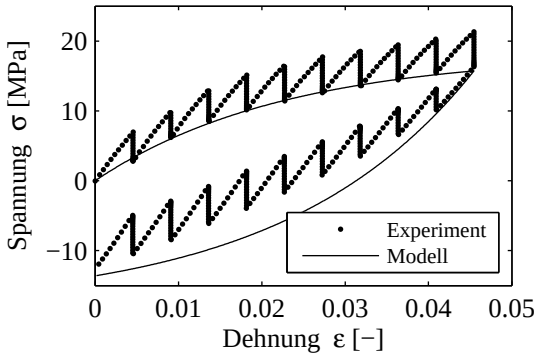


Abbildung 4.9: Modellierung der Gleichgewichtshysterese durch ein endochrones Modell

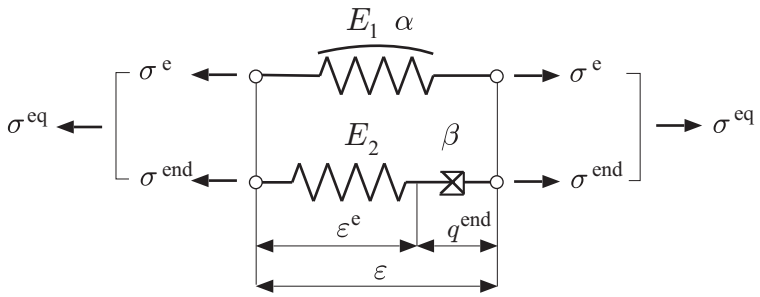


Abbildung 4.10: Rheologisches Modell der Parallelschaltung von nichtlinearer Feder und endochronem Modell

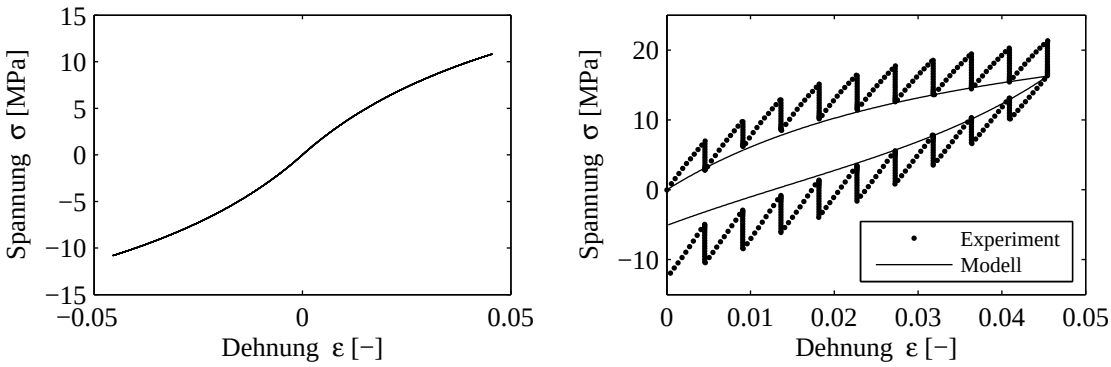
schwindigkeitsunabhängige Gleichgewichtsspannung

$$\sigma^{\mathrm{eq}} = \sigma^{\mathrm{e}} + \sigma^{\mathrm{end}} \tag{4.36}$$

als Summe der Spannungen in der Feder σ^{e} und dem endochronen Modell σ^{end}. Für die Spannungs-Dehnungsbeziehung der nichtlinearen Feder wird

$$\sigma^{\mathrm{e}} = \frac{E_1}{1 + \alpha|\varepsilon|}\varepsilon \tag{4.37}$$

angenommen, während die konstitutiven Gleichungen des endochronen Modells unter Beachtung der geänderten Parameterbezeichnungen übernommen werden. Die spezielle Wahl der einachsigen Spannungs-Dehnungsbeziehung ist dabei durch die mögliche Generalisierung von Gleichung (4.37) zu einem mehrachsigen hyperelastischen Material motiviert. Das im Zug- und Druckbereich symmetrische Spannungs-Dehnungsverhalten der nichtlinearen Feder ist in Abb. 4.11(a) dargestellt.
Mit Hilfe dieses erweiterten Modells ist bei Wahl der Parameter $E_1 = 400,0$MPa, $\alpha = 15,0$ sowie $E_2 = 350,0$MPa und $\beta = 60,0$ eine deutliche Reduzierung der Gleichgewichtshysterese möglich (vgl. Abb. 4.11(b)). Dadurch werden, bei unverändert guter Wiedergabe des Belastungspfades, die Abbruchpunkte der Zwischenrelaxationen bei Entlastung deutlich besser approximiert.



(a) Spannungs-Dehnungsverhalten des nichtlinear elastischen Teilmodells

(b) Vergleich zwischen Spannungsantwort des erweiterten Modells nach Abb. 4.10 und Experiment

Abbildung 4.11: Erweiterung des endochronen Modells durch ein nichtlinear elastisches Teilmodell - Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort

4.2.2 Linear viskoelastisches Überspannungsmodell

Wahl der Relaxationszeiten

Zur Abbildung der geschwindigkeitsabhängigen Materialphänomene wird die nichtlineare Gleichgewichtsrelation mit einem verallgemeinerten MAXWELL-Modell der linearen Viskoelastizität kombiniert, so dass eine additive Zerlegung der Gesamtspannung

$$\sigma = \sigma^{\mathrm{eq}} + \sigma^{\mathrm{ov}} \tag{4.38}$$

des viskoplastischen Materialmodells in die geschwindigkeitsunabhängige Gleichgewichtsspannung σ^{eq} und die geschwindigkeitsabhängige Überspannung σ^{ov} des verallgemeinerten MAXWELL-Modells vorliegt (Abb. 4.12).

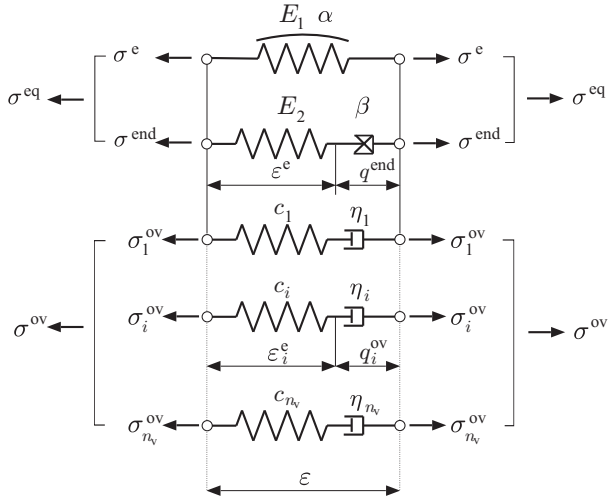
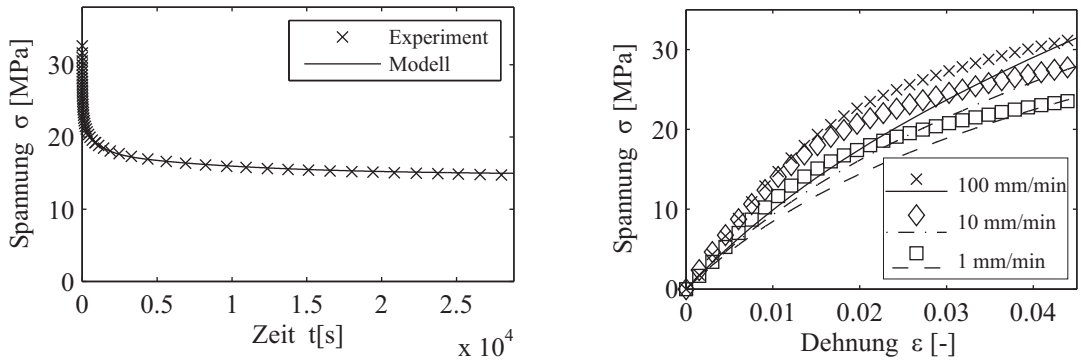


Abbildung 4.12: Rheologisches Gesamtmodell



(a) Wiedergabe des zur Identifikation genutzten Relaxationsversuchs

(b) Vorhersage von Zugversuchen mit verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten

Abbildung 4.13: Parameteridentifikation aus Relaxationsversuch - Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort

Als Voraussetzung für die Identifikation des diskreten Relaxationsspektrums durch das Fensterverfahren von EMRI und TSCHOEGL ist ein Satz von Relaxationszeiten zu definieren. Dies ist gleichbedeutend mit der Festlegung der Anzahl von MAXWELL-Elementen im Überspannungsmodell. Zur Parameteridentifikation werden die Ergebnisse der Relaxationsversuche bis zu einer Haltezeit von 10 Stunden bzw. $3,6 \cdot 10^4$s herangezogen, so dass gemäß Abschnitt 4.1.3 als größte Relaxationszeit $\tau_{\text{max}} = 10^4$s gewählt werden muss. Die minimale Relaxationszeit wird durch die Auflösung des Messsignals $\Delta t_{\text{M}} = 2$ms bestimmt und beträgt $\tau_{\text{min}} = 10^{-2}$s. Innerhalb dieser Grenzen soll das geschwindigkeitsabhängige Materialverhalten durch ein MAXWELL-Element pro Dekade modelliert werden

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 10^{-1} & 10^{0} & 10^{1} & 10^{2} & 10^{3} & 10^{4} \end{bmatrix}^T \text{s}. \tag{4.39}$$

Relaxationsversuch

Durch die Anwendung des Verfahrens von EMRI und TSCHOEGL auf die experimentellen Daten der Relaxationsversuche kann die folgende Verteilung von Relaxationsstärken bestimmt werden

$$\underline{\mathbf{c}}^{\text{R}} = [0 \quad 4,81 \quad 55,17 \quad 91,81 \quad 88,52 \quad 83,89 \quad 70,52]^T \text{ MPa}. \tag{4.40}$$

Die mit einem derart parametrisierten Modell für einen Relaxationsversuch und Zugversuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten berechneten Modellantworten sind den entsprechenden experimentell ermittelten Spannungs-Zeit- bzw. Spannungs-Dehnungsverläufen in Abb. 4.13 gegenübergestellt. Dabei ist zu erkennen, dass der zur Identifikation genutzte Relaxationsversuch erwartungsgemäß sehr gut wiedergegeben werden kann (Abb. 4.13(a)). Deutlich schlechter fällt dagegen der Vergleich von Modell und Experiment für den Zugversuch aus. Hier kann die Nichtlinearität der Spannungs-Dehnungsverläufe (vgl. Abb. 4.13(b)) nicht korrekt abgebildet werden. Ursache dafür sind die aus einem Relaxationsversuch bei der gewählten Belastungsgeschwindigkeit von $500\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ nicht identifizierbaren Relaxationsstärken für $\tau \leq 10$s.

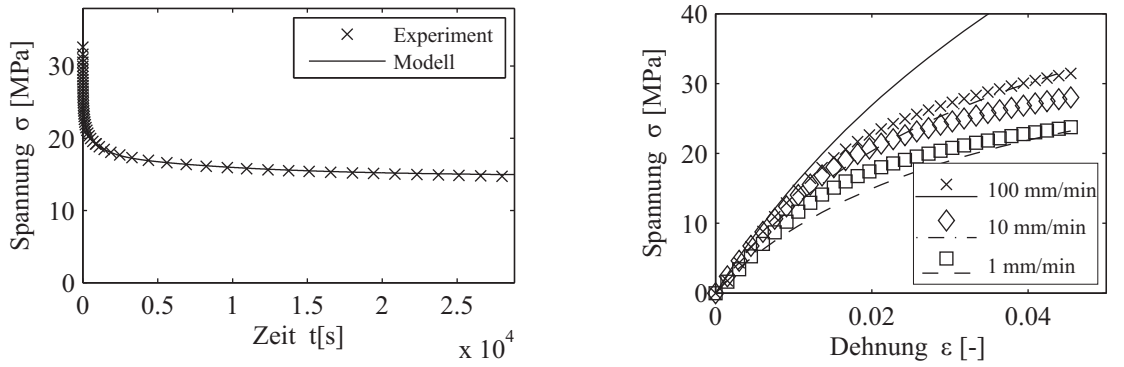
Zugversuch

Die Identifikation dieser Relaxationsstärken erfolgt unter Nutzung der modifizierten Form des Fensterverfahrens aus experimentellen Daten von Zugversuchen. Wie in Abb. 4.6 gezeigt wurde, ist eine Messzeit von $\Delta t_0 = 30$s zur Bestimmung der gesuchten Parameter notwendig. Dies entspricht bei einer maximalen Dehnung $\varepsilon_{\text{max}} = 0,045$ einer Dehnrate von $\dot{\varepsilon} = 1,5 \cdot 10^{-3}\frac{1}{\text{s}}$ bzw. einer Belastungs-

geschwindigkeit von $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$. Die Relaxationsstärken für $\tau > 10$s werden unverändert aus der vorangegangenen Identifikation übernommen. Damit lautet der modifizierte Satz von Relaxationsstärken

$$\underline{\mathbf{c}}^{\text{ZR}} = [0 \quad 0 \quad 327,54 \quad 433,27 \quad 88,52 \quad 83,89 \quad 70,52]^T \text{ MPa}. \tag{4.41}$$

Die Ergebnisse der zugehörigen Modellrechnungen sind in Abb. 4.14 dargestellt.



(a) Wiedergabe des Relaxationsversuchs mit modifiziertem Spektrum

(b) Vorhersage von Zugversuchen mit verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten

Abbildung 4.14: Parameteridentifikation aus Relaxations- und Zugversuch - Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort

Während in der Approximation des Relaxationsversuchs keine wesentlichen Änderungen erkennbar sind, da die letzten drei Relaxationsstärken unverändert übernommen wurden, wirkt sich das veränderte Spektrum in der Simulation der Zugversuche deutlich stärker aus. Zwar wird die zur Identifikation genutzte Kurve für $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ durch die höheren Konstanten c_3^{ZR} und c_4^{ZR} im Anfangsbereich besser approximiert. Nicht zufriedenstellend ist dagegen die Vorhersage der nicht zur Identifikation genutzten Versuchsgeschwindigkeiten. So wird insbesondere das Spannungsniveau bei einer Geschwindigkeit von $100\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ signifikant überschätzt. Da auch das Identifikationsverfahren durch die zu Null bestimmten Relaxationsstärken c_1^{ZR} und c_2^{ZR} auf eine Nichtlinearität des Materialverhaltens hindeutet, die durch das lineare MAXWELL-Modell nicht abgebildet werden kann, soll das Überspannungsmodell nachfolgend durch eine nichtlineare Viskositätsfunktion modifiziert werden.

4.2.3 Nichtlinear viskoelastisches Überspannungsmodell

Nichtlineare Dehnratenabhängigkeit

Ursache für die schlechte Übereinstimmung von Modellantwort und experimentell bestimmten Spannungs-Dehnungskurven bei verschiedenen Dehnraten ist die nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens von PP, die in dem bisher betrachteten linear viskoelastischen Materialmodell der Überspannung nicht berücksichtigt wird.
Da die in Abb. 4.14(b) dargestellte Spannungsantwort des linear viskoelastischen Modells für höhere Geschwindigkeiten ein zu hohes Spannungsniveau vorhersagt, sollte sich die Viskosität eines erweiterten Modells umgekehrt proportional zur Belastungsgeschwindigkeit verhalten. Zur Bestätigung dieser Vermutung wird die Viskositätfunktion $\eta(t)$ untersucht. Unter Voraussetzung des im vorangegangenen Abschnitt formulierten Modells der Gleichgewichtsrelation berechnen sich diskrete Werte der Visko-

sitätsfunktion

$$\hat{\eta}\left(t_i\right) = \frac{1}{\dot{\varepsilon}_0}\left(\hat{\sigma}(t_i) - \sigma^{\mathrm{eq}}(t_i)\right). \tag{4.42}$$

aus den Spannungswerten $\hat{\sigma}(t_i)$, die in Zugversuchen mit konstanter Dehnrate $\dot{\varepsilon}_0$ gemessenen werden. Die für verschiedene Belastungsgeschwindigkeiten bestimmten Verläufe der Viskositätsfunktionen sind in Abb. 4.15 als Funktion der Dehnung dargestellt. Die aus den Messwerten berechneten Viskositäten streben abhängig von der Belastungsgeschwindigkeit unterschiedlich schnell gegen einen stationären Wert. Je höher die Dehnrate des Zugversuchs ist, desto schneller geht die Kurve in einen nahezu hori-

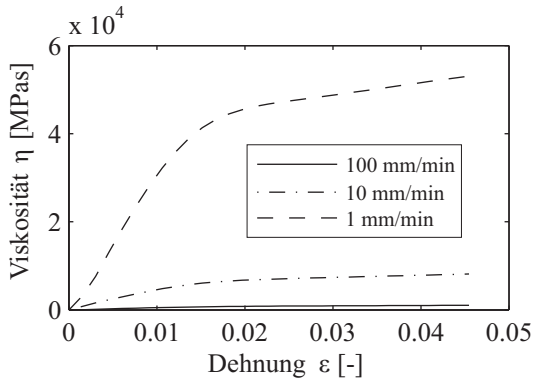


Abbildung 4.15: Darstellung der Viskositäten als Funktion der Dehnung

zontalen Verlauf über.

Nichtlineare Viskositätsfunktion

Zur Modellierung einer derartigen nichtlinearen Viskositätsfunktion existieren verschiedene Möglichkeiten, wobei bestimmte Abhängigkeiten aufgrund der experimentellen Befunde auszuschließen sind. Wichtige Erkenntnisse können dabei aus den zyklischen Versuchen mit Haltezeiten gewonnen werden. Dazu sollen die bereits in Abschnitt 3.1.5 (Abb. 3.11) vorgestellten Spannungs-Dehnungsverläufe genauer analysiert werden. Vergleicht man die Anstiege der Spannungs-Dehnungskurven bei erneuter Belastung nach dem Ende verschiedener Haltezeiten, so sind trotz unterschiedlicher Dehnungen ε keine signifikanten Abweichungen erkennbar. Eine Abhängigkeit der Viskosität vom aktuellen Wert der Dehnung ist daher im untersuchten Bereich nicht vorhanden. Da sich die verschiedenen Haltezeiten nicht nur in den Dehnungen sondern auch in den Werten der Gleichgewichtsspannung unterscheiden, sollte aufgrund der gleichen Argumentation auch keine Abhängigkeit von der Gleichgewichtsspannung σ^{eq} angenommen werden. Geeignet erscheinen dagegen die Beeinflussung der Viskosität durch die Dehnrate $\dot{\varepsilon}$ oder die Überspannung σ^{ov}. Von Lion (1994) werden dazu die Idee einer überspannungsabhängigen Viskosität übernommen und die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen des verallgemeinerten MAXWELL-Modells

$$\dot{q}_i^{\mathrm{ov}} = \frac{c_i}{\eta_i e^{-\frac{|\sigma^{\mathrm{ov}}|}{s_0}}}\left(\varepsilon - q_i^{\mathrm{ov}}\right) \tag{4.43}$$

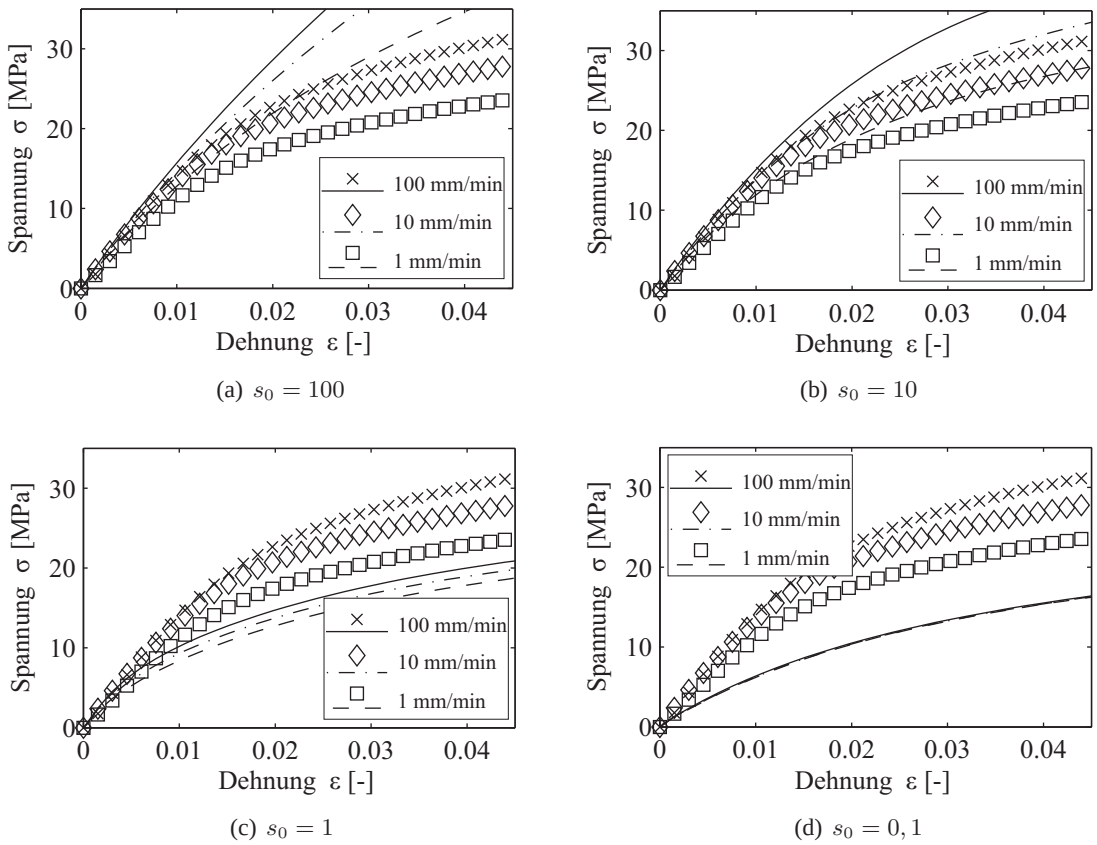
modifiziert (Kästner u. a. (2008b)). Dadurch bildet das Modell eine degressive Abhängigkeit der Viskosität von der gesamten Überspannung σ^{ov} ab, die auch als Verschiebung des Spektrums zu kleineren Zeitkonstanten

$$\tilde{\tau}_i = \tau_i e^{-\frac{|\sigma^{\mathrm{ov}}|}{s_0}} \tag{4.44}$$

interpretiert werden kann. Zur besseren Approximation des Spannungs-Dehnungsverhaltens in einem Dehnungsbereich zwischen $\varepsilon = 0,015 \ldots 0,03$ wird der Ansatz durch Einführung des Exponenten $k_0 > 1,0$

$$\tilde{\tau}_i = \tau_i e^{-\frac{|\sigma^{\mathrm{ov}}|^{k_0}}{s_0}} \tag{4.45}$$

zur Verstärkung des Einflusses der Überspannung ergänzt und die Relaxationsstärken c_i ausgehend von den bisherigen Werten optimiert. Da die Werte $\{c_i, \tau_i\}$ durch den variablen Zeitmaßstab (4.45) ihre Bedeutung als konstantes Spektrum der linearen Viskosität verloren haben, kann dazu das Verfahren von EMRI und TSCHOEGL nicht mehr angewendet werden. Die Bestimmung geeigneter Parameterkombinationen erfolgt durch ein iteratives Vorgehen bestehend aus Parameterstudien zur Ermittlung von k_0 und s_0 sowie einer nichtlinearen Optimierung der zu festen Relaxationszeiten τ_i gehörenden Relaxationsstärken c_i. In Abb. 4.16 sind, als Beispiel für die Parameterbestimmung, die Ergebnisse einer Parameterstudie zur Untersuchung des Einflusses von s_0 dargestellt. Günstige Parameterwerte liegen,



(a) $s_0 = 100$ (b) $s_0 = 10$

(c) $s_0 = 1$ (d) $s_0 = 0,1$

Abbildung 4.16: Parameterstudie zum Einfluss der überspannungsabhängigen Viskositätsfunktion

unter Voraussetzung des optimierten Spektrums, zwischen $s_0 = 1,0$ und $s_0 = 10,0$. Durch eine verfeinerte Parameterstudie in diesem Intervall konnte ein Wert von $s_0 = 5,2$ festgelegt werden.

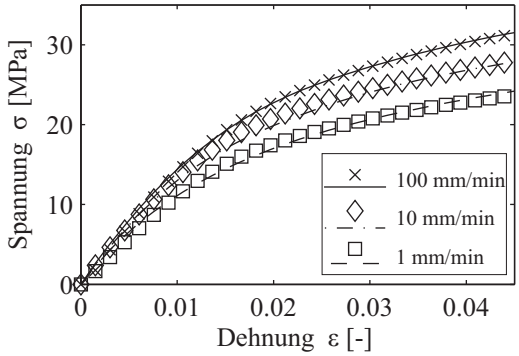


Abbildung 4.17: Vorhersage von Zugversuchen mit verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten bei Verwendung der spannungsabhängigen Viskositätsfunktion nach (4.45) - Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort

Mit $k_0 = 1,25$ sowie dem Spektrum

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} 10^{-1} & 10^{0} & 10^{1} & 10^{2} & 10^{3} & 10^{4} \end{bmatrix}^T \text{s} \tag{4.46}$$

$$\underline{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 62,18 & 107,54 & 133,27 & 288,59 & 283,88 & 173,51 \end{bmatrix}^T \text{MPa} \tag{4.47}$$

kann die gegenüber dem linear viskoelastischen Überspannungsmodell in Abb. 4.14(b) deutlich verbesserte Approximation der Zugversuche (Abb. 4.17) erreicht werden.

4.2.4 Bewertung der Modelleigenschaften

Relaxationsversuche

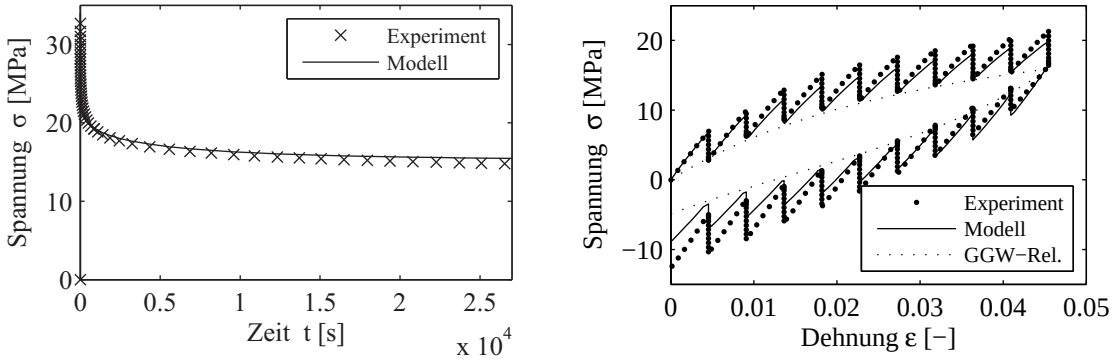
Nachdem bei der bisherigen Diskussion der Modelleigenschaften im Wesentlichen die bei verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten durchgeführten Zugversuche im Mittelpunkt standen, ist die Qualität der formulierten konstitutiven Beziehungen anhand der Modellierung anderer Belastungsprozesse zu überprüfen. Dazu soll das Verhalten in Relaxationsversuchen, Versuchen mit Zwischenrelaxationen und zyklischen Prozessen mit vergleichbarem Geschwindigkeits- und Deformationsniveau betrachtet werden.
Obwohl das zur Modellierung der nichtlinearen Dehnratenabhängigkeit eingesetzte erweiterte Materialmodell zu einer Verschiebung des Spektrums zu kürzeren Relaxationszeiten führt, werden die Relaxationsversuche mit sehr guter Genauigkeit wiedergegeben (Abb. 4.18(a)).

Zwischenrelaxationen

In Abb. 4.18(b) sind die experimentell und numerisch ermittelten Spannungs-Dehnungskurven eines Be- und Entlastungsversuchs mit Zwischenrelaxationen, der bei einer Versuchsgeschwindigkeit von $10\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ durchgeführt wurde, zu sehen. Aus dem Vergleich von Experiment und Modell ist zu erkennen, dass das Modell der Gleichgewichtsrelation die Endpunkte der Zwischenrelaxationen abbilden kann. Gleichermaßen stimmt auch der Anstieg der Spannung bei Erhöhung der Dehnung gut mit dem Experiment überein.

Zyklische Versuche

Während das Verhalten in Relaxationsexperimenten und in Versuchen mit Zwischenrelaxationen mit guter Genauigkeit simuliert werden kann, wird das Verhalten des Materials unter zyklischer Beanspruchung nur qualitativ richtig wiedergegeben. So kann in beiden Spannungs-Dehnungskurven Abb. 4.19 mit wachsender Zyklenzahl ein Absinken der in den Umkehrpunkten erreichten Spannungswerte beobachtet werden. Allerdings wird die Fläche der Hysterese durch das Modell überschätzt.



(a) Relaxationsversuch

(b) Versuch mit Zwischenrelaxation

Abbildung 4.18: Bewertung der Modelleigenschaften in Relaxationsversuchen und Be- und Entlastungversuchen mit Haltezeiten – Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass das Materialmodell in der Lage ist, die wesentlichen Phänomene des Materialverhaltens – die nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit und die Gleichgewichtshysterese – zu beschreiben. Während die Übereinstimmung in Zug- und Relaxationsversuchen als sehr gut beurteilt werden kann, ist die quantitative Übereinstimmung in zyklischen Versuchen verbesserungswürdig. Da der Schwerpunkt der Untersuchungen des Verbundes auf der Berechnung geschwindigkeitsabhängiger Spannungs-Dehnungskurven und dem Vergleich mit entsprechenden Zugversuchen liegt, wird die Qualität des Materialmodells als ausreichend bewertet.

Alternativen

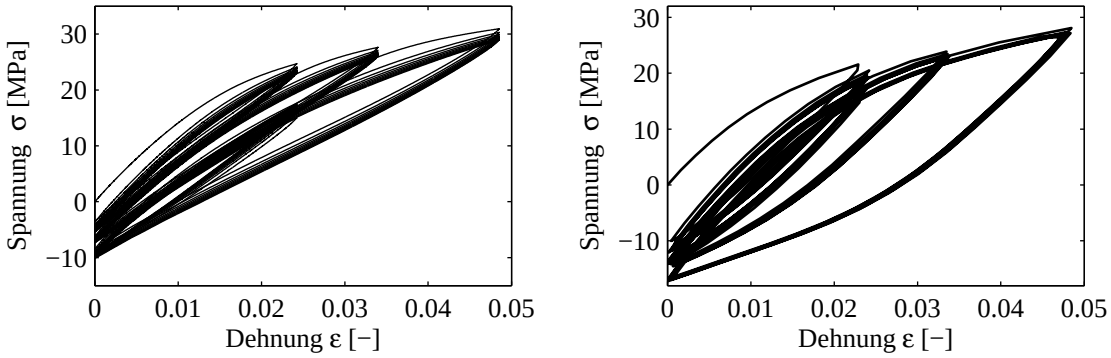
Abschließend sollen alternative Modellierungsansätze diskutiert werden. So könnte das ausgeprägte Relaxationsverhalten im Rahmen eines linear viskoelastischen Modells beispielsweise durch einen Potenzansatz (Haupt (2002)) oder ein Modell der fraktionellen Viskoelastizität (Lion (2000)) modelliert werden.

Drozdov und Christiansen (2007b) simulieren das zyklische Materialverhalten eines Polypropylen Copolymers unter Verwendung eines pseudo-elastischen Materialmodells (Ogden und Roxburgh (1999)). Dabei werden jedoch typische Phänomene wie die Spannungsrelaxation nicht erfasst. Ein ähnliches Materialmodell wird auch zur Abbildung des Materialverhaltens von Polyethylen angewendet (Drozdov und Christiansen (2007a)).

Mögliche alternative Ansätze zur Beschreibung der nichtlinearen Dehnratenabhängigkeit ergeben sich aus der Verwendung einer nichtlinearen Viskositätsfunktion Krempl und Khan (2003). Allerdings sind solche Modelle meist nicht in der Lage, das ausgeprägte Relaxationsverhalten von Polymeren abzubilden. Interessanter erscheinen deshalb Überlegungen zu den Veränderungen der Mikrostruktur, die prozessbedingt durch Zerstörung und Neubildung des Netzwerks von Verknüpfungen zwischen den Molekülketten auftreten. Aus phänomenologischer Sicht führen diese Veränderungen zu sogenannten prozess- oder strukturabhängigen Viskositäten (Barnes (1997); Lion (2000)).

Die Modellierung der auf der Mikroebene ablaufenden Strukturveränderungen kann durch die Einführung einer zusätzlichen inneren Variable erfolgen. Ein entsprechendes Modell nutzt Sedlan (2000) zur Beschreibung des Materialverhaltens von Elastomerwerkstoffen, wobei für die zusätzliche Zustandgröße q^{s}, die auch als Strukturvariable bezeichnet wird, eine Evolutionsgleichung der Form

$$\dot{q}^{\mathrm{s}} = c_{\mathrm{s}}|\dot{\varepsilon}|(1-q^{\mathrm{s}}) - \frac{1}{\tau_q}\,(q^{\mathrm{s}})^b \tag{4.48}$$



(a) Experiment (b) Modell

Abbildung 4.19: Bewertung der Modelleigenschaften bei zyklischer Beanspruchung - Vergleich zwischen Experiment und Modellantwort

gewählt wird. Der erste Summand beschreibt dabei die zunehmende Zerstörung der Materialstruktur, die zu einem Anwachsen der Strukturvariable bis $q^{\mathrm{s}} \leq 1$ führt. Der zweite Term dient der Modellierung der Erholung, d. h. der Neubildung von Vernetzungen, wobei τ_q ein Maß für die Zeitskala ist, in der Erholungsprozesse stattfinden können. Ein solches Modell könnte zur Abbildung des hier beobachteten Materialverhaltens alternativ zur spannungsabhängigen Viskosität eingesetzt werden. Die Strukturvariable hätte damit den Charakter einer Schädigungsvariable.
Ist τ_q deutlich größer als die Prozessdauer, d. h. treten keine Erholungseffekte auf, führt Gleichung (4.48) zu einer deformationsabhängigen Viskositätsfunktion, da die Evolutionsgleichung in diesem Fall linear bezüglich der Dehnrate ist und deshalb keine Geschwindigkeitsabhängigkeit auftritt.

4.3 Mehrachsiges Materialmodell und FE-Implementierung

Einführung

Das im vorigen Abschnitt anhand experimenteller Ergebnisse abgeleitete einachsige Materialmodell ist für den Einsatz zur Modellierung des Materialverhaltens von Polypropylen in einem dreidimensionalen RVE-Modell auf mehrachsige Beanspruchungszustände zu verallgemeinern. Die Verwendung des Materialmodells im Rahmen einer physikalisch nichtlinearen FE-Simulation erfordert zudem die zeitliche Diskretisierung der konstitutiven Beziehungen. Für die Anwendung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens zur iterativen Lösung des nichtlinearen globalen Gleichungssystems sind die inkrementellen Materialgleichungen durch Berechnung eines algorithmisch konsistenten Tangentenmoduls zu linearisieren. Die Aktualisierung der Spannungen und Zustandsgrößen während der inkrementellen Berechnung erfolgt schließlich innerhalb des sogenannten Spannungsalgorithmus.

4.3.1 Mehrachsige Verallgemeinerung des Materialmodells

Einachsiges Modell

Ausgangspunkt für die mehrachsige Verallgemeinerung des viskoplastischen Materialmodells sind die einachsigen konstitutiven Beziehungen in Form der additiven Zerlegung der Gesamtspannung

$$\sigma = \sigma^{\mathrm{eq}} + \sigma^{\mathrm{ov}} \tag{4.49}$$

in die geschwindigkeitsunabhängige Gleichgewichtsspannung

$$\sigma^{\text{eq}} = \sigma^{\text{e}} + \sigma^{\text{end}} \tag{4.50}$$

und die geschwindigkeitsabhängige Überspannung

$$\sigma^{\text{ov}} = \sum_{i=1}^{n_v} \sigma_i^{\text{ov}}, \tag{4.51}$$

der Spannungs-Dehnungsbeziehungen der Teilmodelle

$$\sigma^{\text{e}} = \frac{E_1}{1+\alpha|\varepsilon|}\varepsilon, \tag{4.52}$$

$$\sigma^{\text{end}} = E_2\left(\varepsilon - q^{\text{end}}\right), \tag{4.53}$$

$$\sigma_i^{\text{ov}} = c_i\left(\varepsilon - q_i^{\text{ov}}\right) \tag{4.54}$$

und der Evolutionsgleichungen für die zugehörigen inneren Variablen

$$\dot{q}^{\text{end}} = \beta\left(\varepsilon - q^{\text{end}}\right)\dot{z} \quad \text{mit} \quad \dot{z} = |\dot{\varepsilon}|, \tag{4.55}$$

$$\dot{q}_i^{\text{ov}} = \frac{c_i}{\tilde{\eta}_i}\left(\varepsilon - q_i^{\text{ov}}\right) \quad \text{mit} \quad \tilde{\eta}_i = \eta_i e^{-\frac{|\sigma^{\text{ov}}|k_0}{s_0}}. \tag{4.56}$$

Durch Kombination der Gleichungen (4.53) und (4.55) bzw. (4.54) und (4.56) können Differenzialgleichungen für die Spannungen des endochronen Modells

$$\dot{\sigma}^{\text{end}} = E_2\dot{\varepsilon} - \beta\sigma^{\text{end}}|\dot{\varepsilon}|, \tag{4.57}$$

und der viskosen Elemente

$$\dot{\sigma}_i^{\text{ov}} = c_i\dot{\varepsilon} - \frac{c_i}{\tilde{\eta}_i}\sigma_i^{\text{ov}} \tag{4.58}$$

angegeben werden.

Annahmen

Zur Verallgemeinerung auf den mehrachsigen Fall wird im Folgenden die in den experimentellen Untersuchungen (Kapitel 3) festgestellte Isotropie des Materialverhaltens vorausgesetzt. Damit experimentelle Ergebnisse aus zukünftigen Torsions- oder kombinierten Zug-Torsionsversuchen später in das Materialmodell einfließen können, werden die deviatorischen und volumetrischen Anteile der konstitutiven Gleichungen getrennt modelliert und inelastische Deformationen in beiden Anteilen zugelassen. Eine nachträgliche Beschränkung des plastischen oder viskosen Verhaltens auf die deviatorischen Komponenten ist durch die entsprechende Wahl der Materialparameter möglich.
Nachfolgend wird ein Vorschlag für die mehrachsige Verallgemeinerung der Gleichgewichtsrelation und der Überspannung angegeben. Die dazu erforderliche Aufspaltung eines symmetrischen Tensors $\boldsymbol{\mu}$ in einen deviatorischen $\mathbf{m}$ und einen volumetrischen Anteil $\frac{1}{3}\mu_{pp}\delta_{kl}$ ist durch

$$\mu_{ij} = m_{ij} + \frac{1}{3}\mu_{pp}\delta_{ij} \tag{4.59}$$

definiert. Sie wird sowohl auf die Gesamtspannung $\boldsymbol{\sigma}$, die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^{\text{e}}$, $\boldsymbol{\sigma}^{\text{end}}$ und $\boldsymbol{\sigma}^{\text{ov},i}$

$$\sigma_{ij}^{(\,)} = s_{ij}^{(\,)} + \frac{1}{3}\sigma_{mm}^{(\,)}\delta_{ij} \tag{4.60}$$

als auch auf den Verzerrungtensor

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon_{mm}\delta_{ij} \tag{4.61}$$

und auf die inneren Variablen $\mathbf{q}^{\text{end}}$ und $\mathbf{q}^{\text{ov},i}$

$$q_{ij}^{(\,)} = q_{ij}^{(\,),\text{dev}} + \frac{1}{3}q_{mm}^{(\,)}\delta_{ij} \tag{4.62}$$

angewendet.

Nichtlineare Elastizität

Zur mehrachsigen hyperelastischen Verallgemeinerung des nichtlinear elastischen Teilmodells wird ein Ansatz für die Funktion der spezifischen freien Energie formuliert. Entsprechend der Aufteilung in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil soll für die freie Energie

$$f^{\mathrm{e}} = f^{\mathrm{e,dev}} + f^{\mathrm{e,vol}} \tag{4.63}$$

gelten. Ansätze für die unabhängigen Funktionen $f^{\mathrm{e,dev}}$ und $f^{\mathrm{e,vol}}$, die für einen einachsigen Spannungszustand auf Gleichung (4.52) führen, sind durch

$$f^{\mathrm{e,dev}} = \frac{2G_1}{\rho_0 \alpha_G^2}\left[\alpha_G\sqrt{e_{ij}e_{ij}} - \ln\left(1+\alpha_G\sqrt{e_{ij}e_{ij}}\right)\right] \tag{4.64}$$

$$f^{\mathrm{e,vol}} = \frac{K_1}{\rho_0 \alpha_K^2}\left[\alpha_K\sqrt{\varepsilon_{mm}\varepsilon_{nn}} - \ln\left(1+\alpha_K\sqrt{\varepsilon_{mm}\varepsilon_{nn}}\right)\right] \tag{4.65}$$

gegeben. Die Koordinaten des Spannungstensors folgen aus der partiellen Ableitung der freien Energie f^{e} nach den Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{e}} = \rho\frac{\partial f^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \rho\left(\frac{\partial f^{\mathrm{e,dev}}}{\partial J_e}\frac{\partial J_e}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial f^{\mathrm{e,vol}}}{\partial I_\varepsilon}\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}}\right). \tag{4.66}$$

Dabei sind $I_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{mm}\varepsilon_{nn}}$ sowie $J_e = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$ Invarianten des Verzerrungstensors bzw. des Deviators $\mathbf{e}$. Daraus ergeben sich unter der Annahme kleiner Dichteänderungen die verallgemeinerten Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{e}} = \frac{2G_1}{1+\alpha_G\sqrt{e_{kl}e_{kl}}}e_{ij} + \frac{K_1}{1+\alpha_K\sqrt{\varepsilon_{mm}\varepsilon_{nn}}}\varepsilon_{qq}\delta_{ij} \tag{4.67}$$

des nichtlinear elastischen Materialmodells. Ein ähnliches Modell ist Teil eines Vorschlags von Hartmann (2006) zur Abbildung des mechanischen Verhaltens von Polyoxymethylen.

Endochrones Modell

Eine Verallgemeinerung des endochronen Plastizitätsmodells ist durch

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{end}} = 2G_2\left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{end,dev}}\right) + K_2\left(\varepsilon_{mm} - q_{mm}^{\mathrm{end}}\right)\delta_{ij} \tag{4.68}$$

und die Evolutionsgleichungen

$$\dot{q}_{ij}^{\mathrm{end}} = \left[\beta_G\left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{end,dev}}\right) + \beta_K\left(\varepsilon_{mm} - q_{mm}^{\mathrm{end}}\right)\delta_{ij}\right]\dot{z} \quad \text{mit} \quad \dot{z} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{mn}\dot{\varepsilon}_{mn}} \tag{4.69}$$

für die innere Variable $\mathbf{q}^{\mathrm{end}}$ möglich. Die Gleichungen (4.68) und (4.69) können für die nachfolgenden Überlegungen unter Beachtung von

$$\dot{q}_{ij}^{\mathrm{end,dev}} = \beta_G\left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{end,dev}}\right)\dot{z} \quad \text{und} \tag{4.70}$$

$$\dot{q}_{mm}^{\mathrm{end}} = 3\beta_K\left(\varepsilon_{mm} - q_{mm}^{\mathrm{end}}\right)\dot{z} \tag{4.71}$$

in einen Satz von Differenzialgleichungen

$$\dot{s}_{ij}^{\mathrm{end}} = 2G_2\dot{e}_{ij} - \beta_G s_{ij}^{\mathrm{end}}\dot{z} \tag{4.72}$$

$$\dot{\sigma}_{mm}^{\mathrm{end}} = 3K_2\dot{\varepsilon}_{mm} - 3\beta_K\sigma_{mm}^{\mathrm{end}}\dot{z} \tag{4.73}$$

für den Deviator und die Spur von $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{end}}$ umgeformt werden.

Überspannungs-modell

Die Verallgemeinerung der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen der $k = 1 \ldots n_\mathrm{v}$ viskosen Elemente des nichtlinearen Überspannungsmodells erfolgt in Analogie zum endochronen Modell durch

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{ov},k} = 2G_k^{\mathrm{ov}} \left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{ov},k,\mathrm{dev}} \right) + K_k^{\mathrm{ov}} \left(\varepsilon_{mm} - q_{mm}^{\mathrm{ov},k} \right) \delta_{ij} \tag{4.74}$$

mit den Evolutionsgleichungen

$$\dot{q}_{ij}^{\mathrm{ov},k} = \frac{2G_k^{\mathrm{ov}}}{\tilde{\eta}_G^k} \left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{ov},k,\mathrm{dev}} \right) + \frac{K_k^{\mathrm{ov}}}{\tilde{\eta}_K^k} \left(\varepsilon_{mm} - q_{mm}^{\mathrm{ov},k} \right) \delta_{ij} \tag{4.75}$$

für die inneren Variablen $\mathbf{q}^{\mathrm{ov},i}$. Aus der Kombination der Spannungs-Verzerrrungsbeziehungen und der Evolutionsgleichungen erhält man Differenzialgleichungen für den Deviator und die Spur des Tensors der Überspannungen des k-ten viskosen Elements

$$\dot{s}_{ij}^{\mathrm{ov},k} = 2G_k^{\mathrm{ov}} \dot{e}_{ij} - \frac{2G_k^{\mathrm{ov}}}{\tilde{\eta}_G^k} s_{ij}^{\mathrm{ov},k} \tag{4.76}$$

$$\dot{\sigma}_{mm}^{\mathrm{ov},k} = 3K_k^{\mathrm{ov}} \dot{\varepsilon}_{mm} - \frac{3K_k^{\mathrm{ov}}}{\tilde{\eta}_K^k} \sigma_{nn}^{\mathrm{ov},k}, \tag{4.77}$$

wobei die verallgemeinerten überspannungsabhängigen Viskositätsfunktionen durch

$$\tilde{\eta}_K^i = \eta_K^i e^{-\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}\|^{k_0}}{s_0}} \quad \text{sowie} \quad \tilde{\eta}_G^i = \eta_G^i e^{-\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}\|^{k_0}}{s_0}} \tag{4.78}$$

gegeben sind. Die Viskositätsfunktionen $\tilde{\eta}_K^i$ und $\tilde{\eta}_G^i$ werden jeweils von der gesamten Überspannung beeinflusst. Deshalb bilden die Gleichungen (4.76) und (4.77) ein gekoppeltes System gewöhnlicher, nichtlinearer Differenzialgleichungen erster Ordnung.

Annahmen für Materialparameter

Da keine experimentellen Ergebnisse zum Materialverhalten unter einer rein hydrostatischen oder deviatorischen Beanspruchung vorliegen, sind Annahmen zur Festlegung der Materialparameter der deviatorischen und volumetrischen Teilmodelle erforderlich. Dabei ist zu sichern, dass das in einachsigen Versuchen unter Zugbeanspruchung festgestellte Spannungs-Dehnungsverhalten nach wie vor abgebildet werden kann.

Zur Festlegung der Parameter des mehrachsigen Materialmodells wird nachfolgend eine konstante Querkontraktionszahl von $\nu = 0,4$ für das Gesamtmodell vorausgesetzt. Diese Annahme ist durch die Auswertung der mittels ARAMIS gemessenen Querdehnung in monotonen Zug- (Abb. 4.20(a)) und Relaxationsversuchen (Abb. 4.20(b), vgl. Tschoegl u. a. (2002)) motiviert. Ähnliche Annahmen findet man beispielsweise bei Kolarik und Pegoretti (2006).

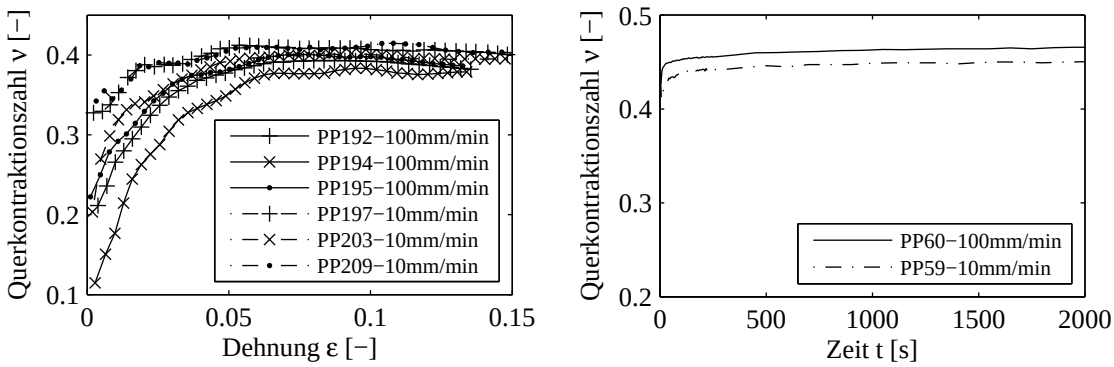
Die Elastizitätskonstanten der Teilmodelle

$$\begin{aligned} K_1 &= \tfrac{E_1}{3(1-2\nu)}\,; & G_1 &= \tfrac{E_1}{2(1+\nu)} \\ K_2 &= \tfrac{E_2}{3(1-2\nu)}\,; & G_2 &= \tfrac{E_2}{2(1+\nu)} \\ K_i^{\mathrm{ov}} &= \tfrac{c_i}{3(1-2\nu)}\,; & G_i^{\mathrm{ov}} &= \tfrac{c_i}{2(1+\nu)} \end{aligned} \tag{4.79}$$

ergeben sich aus den Elastizitätsmoduln E_1 und E_2 sowie den Relaxationsstärken c_i.

Unter der Voraussetzung einer konstanten Querkontraktionszahl in allen Teilmodellen können die verbleibenden Parameter des mehrachsigen Materialmodells aus denen der einachsigen konstitutiven Beziehungen berechnet werden, da in diesem Fall für den im Zugversuch vorliegenden Verzerrungszustand

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \quad ; \quad [\mathbf{e}] = (1+\nu)\,\varepsilon \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{4.80}$$



(a) Monotone Zugversuche

(b) Relaxationsversuche

Abbildung 4.20: Darstellung des Verlaufs der Querkontraktionszahl für monotone Zug- und Relaxationsversuche

gilt, wobei $\varepsilon_{11} = \varepsilon$ die Dehnung in Längsrichtung der Probe bezeichnet. Der zugehörige einachsige Spannungszustand ist durch

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [\mathbf{s}] = \sigma \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

beschrieben. Nach Einsetzen des Verzerrungzustandes $\boldsymbol{\varepsilon}$ gemäß (4.80) in die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen des mehrachsigen hyperelastischen Teilmodells (4.67) erhält man durch einen Koeffizientenvergleich mit der einachsigen Formulierung (4.52) folgende Ausdrücke

$$\alpha_K = \frac{\alpha}{1-2\nu} ; \quad \alpha_G = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha}{1+\nu} \tag{4.82}$$

für die Parameter α_K und α_G, die das deformationsabhängige, nichtlinear elastische Materialverhalten steuern.
Zur Festlegung der Parameter β_K und β_G des endochronen Modells wird gefordert, dass die aus (4.76) und (4.77) folgende Differenzialgleichung

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\text{end}} = 2G_2 \dot{e}_{ij} + K_2 \dot{\varepsilon}_{mm} \delta_{ij} - \left(\beta_G s_{ij}^{\text{end}} + \beta_K \sigma_{mm}^{\text{end}} \delta_{ij} \right) \dot{z} \tag{4.83}$$

für den einachsigen Zugversuch in Gleichung (4.57) übergeht. Die Wahl der Parameter

$$\beta_K = \frac{\beta}{3\sqrt{1+2\nu^2}} ; \quad \beta_G = \frac{\beta}{\sqrt{1+2\nu^2}} \tag{4.84}$$

ist eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung dieser Forderung. Das gleiche Vorgehen führt für das Überspannungsmodell auf

$$\tilde{\eta}_K^i = \frac{\tilde{\eta}^i}{1-2\nu} ; \quad \tilde{\eta}_G^i = \frac{\tilde{\eta}^i}{1+\nu}. \tag{4.85}$$

Eine Alternative zu der beschriebenen mehrachsigen Verallgemeinerung könnte beispielsweise in der Beschränkung des endochronen Materialmodells auf einen deviatorischen Anteil bestehen, wie von

Hartmann (2006) für die Modellierung von Polyoxymethylen vorgeschlagen wurde. Zur Überprüfung der gewählten mehrachsigen Verallgemeinerung ist das Materialverhalten von Polypropylen in Zug-Torsionsversuchen für verschiedene Lastpfade experimentell zu untersuchen. Das aus den oben genannten Annahmen resultierende Materialverhalten wird nach der zeitlichen Diskretisierung der konstitutiven Beziehungen und ihrer Implementierung in Abschnitt 4.3.4 diskutiert.

Thermodynamische Konsistenz

Vor der programmtechnischen Umsetzung ist abschließend die thermodynamische Konsistenz des mehrachsigen Materialmodells nachzuweisen. Diese ist gewährleistet, wenn der zweite Hauptsatz der Thermodynamik nicht verletzt wird. Für die hier untersuchten Beanspruchungen erfolgt der Nachweis mithilfe der isothermen CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung (2.28). Durch diese Gleichung wird gefordert, dass die als Differenz der Spannungsleistung und der Änderung der freien Energie zu berechnende spezifische innere Dissipationsleistung

$$\delta_\mathrm{i} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{f} \geq 0 \tag{4.86}$$

nicht negativ sein darf. Dabei ist die freie Energie anschaulich als die in den Federn der einachsigen rheologischen Modelle gespeicherte Energie interpretierbar, die reversibel in mechanische Arbeit umgewandelt werden kann. Sie ergibt sich für das vorliegende viskoplastische Materialmodell als Summe

$$f\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}^{\mathrm{end}}, \mathbf{q}^{\mathrm{ov},i}\right) = f^{\mathrm{e}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) + f^{\mathrm{end}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}^{\mathrm{end}}\right) + \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} f^{\mathrm{ov},i}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}^{\mathrm{ov},i}\right) \tag{4.87}$$

der freien Energien der Teilmodelle. Aufgrund ihrer Abhängigkeit von den Verzerrungen sowie den inneren Variablen des endochronen Modells und des nichtlinearen Überspannungsmodells folgt für die Dissipationsungleichung

$$\rho\delta_\mathrm{i} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \rho\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial q_{ij}^{\mathrm{end}}}\dot{q}_{ij}^{\mathrm{end}} + \sum_{k=1}^{n_\mathrm{v}} \frac{\partial f}{\partial q_{ij}^{\mathrm{ov},k}}\dot{q}_{ij}^{\mathrm{ov},k}\right) \geq 0. \tag{4.88}$$

Dabei gelten für die freie Energie des nichtlinear elastischen Teilmodells die Gleichungen (4.64) und (4.65). Die freien Energien der beiden anderen Teilmodelle können aus dem rheologischen Modell Abb. 4.12 abgelesen werden. Unter Beachtung der gewählten dreidimensionalen Verallgemeinerung der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen ergeben sich

$$f^{\mathrm{end}} = \frac{1}{\rho_0}\left[G_2\left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{end,dev}}\right)\left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{end,dev}}\right) + \frac{K_2}{2}\left(\varepsilon_{mm} - q_{mm}^{\mathrm{end}}\right)\left(\varepsilon_{nn} - q_{nn}^{\mathrm{end}}\right)\right], \tag{4.89}$$

$$f^{\mathrm{ov},k} = \frac{1}{\rho_0}\left[G_k\left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{ov},k,\mathrm{dev}}\right)\left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{ov},k,\mathrm{dev}}\right) + \frac{K_k}{2}\left(\varepsilon_{mm} - q_{mm}^{\mathrm{ov},k}\right)\left(\varepsilon_{nn} - q_{nn}^{\mathrm{ov},k}\right)\right]. \tag{4.90}$$

Werden analog zur Ableitung der elastischen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen aus der freien Energie f^{e} kleine Dichteänderungen vorausgesetzt, dann stellen die Spannungen der inelastischen Teilmodelle zu den inneren Variablen $\mathbf{q}^{\mathrm{end}}$ und $\mathbf{q}^{\mathrm{ov},k}$ konjugierte thermodynamische Kräfte

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{end}} = -\rho\frac{\partial f}{\partial q_{ij}^{\mathrm{end}}} \overset{(4.87)}{=} -\rho\frac{\partial f^{\mathrm{end}}}{\partial q_{ij}^{\mathrm{end}}} \overset{(4.89)}{=} \rho\frac{\partial f^{\mathrm{end}}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \tag{4.91}$$

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{ov},k} = -\rho\frac{\partial f}{\partial q_{ij}^{\mathrm{ov},k}} \overset{(4.87)}{=} -\rho\frac{\partial f^{\mathrm{ov},k}}{\partial q_{ij}^{\mathrm{ov},k}} \overset{(4.90)}{=} \rho\frac{\partial f^{\mathrm{ov},k}}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{4.92}$$

dar. Mit den Definitionen (4.91) und (4.92) sowie (4.66) kann die Dissipationsungleichung in der Form

$$\rho\delta_{\mathrm{i}} = \left[\sigma_{ij} - \left(\sigma_{ij}^{\mathrm{e}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{end}} + \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{v}}} \sigma_{ij}^{\mathrm{ov},k}\right)\right] \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_{ij}^{\mathrm{end}} \dot{q}_{ij}^{\mathrm{end}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}^{\mathrm{end}}\right) + \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{v}}} \sigma_{ij}^{\mathrm{ov},k} \dot{q}_{ij}^{\mathrm{ov},k}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}^{\mathrm{ov},k}\right) \geq 0 \tag{4.93}$$

geschrieben werden. Aufgrund der Forderung, dass (4.93) für beliebige $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ sowie $\mathbf{q}^{\mathrm{end}}$ und $\mathbf{q}^{\mathrm{ov},k}$ gültig sein soll, sind die Aufteilung der Gesamtspannung

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\mathrm{e}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{end}} + \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{v}}} \sigma_{ij}^{\mathrm{ov},k} \tag{4.94}$$

in die Spannungen der Teilmodelle und die Erfüllung der Restungleichung

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{end}} \dot{q}_{ij}^{\mathrm{end}} + \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{v}}} \sigma_{ij}^{\mathrm{ov},k} \dot{q}_{ij}^{\mathrm{ov},k} \geq 0, \tag{4.95}$$

notwendig und hinreichend für die Sicherung der thermodynamischen Konsistenz, wobei sich aus (4.95) weitere Forderungen für die Wahl der Parameter der inelastischen Teilmodelle ergeben. Nach Einsetzen der Evolutionsgleichungen (4.69) und (4.75) für die innere Variablen des endochronen Plastizitätsmodells $\mathbf{q}^{\mathrm{end}}$ und des Überspannungsmodells $\mathbf{q}^{\mathrm{ov},k}$ ergibt sich nach Aufspaltung in die deviatorischen und volumetrischen Anteile

$$\begin{aligned} s_{ij}^{\mathrm{end}} \beta_G \left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{end,dev}}\right) \dot{z} + \sigma_{mm}^{\mathrm{end}} \beta_K \left(\varepsilon_{nn} - q_{nn}^{\mathrm{end}}\right) \dot{z} + \ldots \\ \ldots + \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{v}}} \left[s_{ij}^{\mathrm{ov},k} \frac{G_k}{\tilde{\eta}_G^k} \left(e_{ij} - q_{ij}^{\mathrm{ov},k,\mathrm{dev}}\right) + \sigma_{mm}^{\mathrm{ov},k} \frac{K_k}{\tilde{\eta}_K^k} \left(\varepsilon_{nn} - q_{nn}^{\mathrm{ov},k}\right)\right] \geq 0. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Unter Beachtung der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen der beiden Teilmodelle folgt daraus

$$\frac{\beta_G}{G_2} s_{ij}^{\mathrm{end}} s_{ij}^{\mathrm{end}} \dot{z} + \frac{\beta_K}{K_2} \sigma_{mm}^{\mathrm{end}} \sigma_{nn}^{\mathrm{end}} \dot{z} + \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{v}}} \left(s_{ij}^{\mathrm{ov},k} s_{ij}^{\mathrm{ov},k} \frac{1}{\tilde{\eta}_G^k} + \sigma_{mm}^{\mathrm{ov},k} \sigma_{nn}^{\mathrm{ov},k} \frac{1}{\tilde{\eta}_K^k}\right) \geq 0, \tag{4.97}$$

wobei die Skalarpodukte der Spannungsdeviatoren, die Produkte der Spuren und die zeitliche Änderung der Bogenlänge stets größer als Null sind. Deshalb sind die Wahl der überspannungsabhängigen Viskositätsfunktion (4.85) mit den Parametern $\eta_i > 0$ sowie die Wahl der Parameter $\beta_G > 0$, $\beta_K > 0$ und $G_2 > 0$, $K_2 > 0$ hinreichend für die Erfüllung des zweiten Hauptsatzes. Da die identifizierten Materialparameter diesen Forderungen entsprechen, ist das Materialmodell thermodynamisch konsistent.

4.3.2 Einbindung des Materialmodells in eine physikalisch nichtlineare FE-Berechnung

FE-Gleichgewichtsbedingungen

Die Implementierung des verallgemeinerten viskoplastischen Materialmodells im Rahmen eines kommerziellen FE-Programms erfolgt durch ein benutzerspezifisches Unterprogramm. Die darin zu berechnenden Größen werden im folgenden Abschnitt definiert. Dazu wird zunächst die näherungsweise Lösung des physikalisch nichtlinearen Feldproblems mittels FEM betrachtet. Unter physikalischer oder materieller Nichtlinearität soll hier eine aus den verwendeten konstitutiven Beziehungen resultierende

Nichtlinearität verstanden werden. Geometrische Nichtlinearitäten in Form von großen Verschiebungen, Rotationen sowie großen Verzerrungen oder Nichtlinearitäten infolge von Randbedingungen werden nicht betrachtet.
Die diskreten, algebraischen Gleichgewichtsbedingungen der FEM können aus dem unter Punkt 2.1.2 erläuterten Prinzip der virtuellen Arbeit (2.20) hergeleitet werden. Die Diskretisierung umfasst dabei einerseits die Unterteilung des Berechnungsgebiets V

$$V = \bigcup_{i=1}^{n^{\mathrm{E}}} V_i^{\mathrm{E}} \tag{4.98}$$

in n^{E} finite Elemente mit dem Volumen V_i^{E}, andererseits wird das Verschiebungsfeld innerhalb dieser Elemente mithilfe eines Verschiebungsansatzes

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n^{\mathrm{K,E}}} N_i \hat{\mathbf{u}}_i \tag{4.99}$$

approximiert. Dabei sind N_i die zu den $n^{\mathrm{K,E}}$ Knoten des Elements gehörenden Formfunktionen und $\hat{\mathbf{u}}_i$ ist der Vektor der Verschiebungen des i-ten Knotens. Die Einführung des Verschiebungsansatzes (4.99) führt in Kombination mit der in 4.3.3 angegebenen Zeitdiskretisierung der konstitutiven Beziehungen zu einer Algebraisierung des partiellen Differenzialgleichungssystems, das aus den Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik resultiert.
Fasst man die Knotenverschiebungen in einem einzigen Spaltenvektor $\underline{\hat{\mathbf{d}}}$ für das gesamte Element zusammen, lautet der Verschiebungsansatz in Vektor-Matrixschreibweise

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\mathbf{N}}}\, \underline{\hat{\mathbf{d}}}. \tag{4.100}$$

Daraus folgt auch die diskrete Form der Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (vgl. Erläuterung in Abschnitt 5.2.1)

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\, \underline{\hat{\mathbf{d}}}\,, \tag{4.101}$$

wobei

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} & \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} & \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}^T \tag{4.102}$$

eine für FE-Formulierungen typische, vektorielle Darstellung der sechs unabhängigen Koordinaten des symmetrischen Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist. In Analogie dazu enthält

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{31} \end{bmatrix}^T \tag{4.103}$$

die unabhängigen Koordinaten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$.
Mit der räumlichen Diskretisierung (4.98) und dem algebraischen Verschiebungsansatz (4.99) folgt für das Prinzip der virtuellen Arbeit in Vektor-Matrixnotation

$$\bigcup_{i=1}^{n^{\mathrm{E}}} \left[\delta \underline{\hat{\mathbf{d}}}^T \int_{V_i^{\mathrm{E}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T\, \underline{\boldsymbol{\sigma}}\, dV \right] = \bigcup_{i=1}^{n^{\mathrm{E}}} \left[\delta \underline{\hat{\mathbf{d}}}^T \int_{O_i^{\mathrm{E}}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T\, \underline{\mathbf{t}}\, dA + \delta \underline{\hat{\mathbf{d}}}^T \int_{V_i^{\mathrm{E}}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T\, \rho \underline{\mathbf{f}}\, dV \right]. \tag{4.104}$$

Infolge des durch $\cup_{i=1}^{n^{\mathrm{E}}}$ gekennzeichneten Assemblierungsprozesses erhält man aus dem Vektor der virtuellen Verschiebungen des Elements $\delta \underline{\hat{\mathbf{d}}}$ den des Gesamtmodells $\delta \underline{\hat{\mathbf{u}}}$. Aufgrund der Beliebigkeit der

virtuellen Knotenverschiebungen $\delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}$ folgt aus

$$\delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^T \left[\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n^{\mathrm{E}}} \left(\int_{O_i^{\mathrm{E}}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \, \underline{\mathbf{t}} \, dA + \int_{V_i^{\mathrm{E}}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \, \rho \underline{\mathbf{f}} \, dV \right)}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}_{\mathrm{e}}} - \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n^{\mathrm{E}}} \left(\int_{V_i^{\mathrm{E}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \, \underline{\boldsymbol{\sigma}} \, dV \right)}_{\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{i}}} \right] = 0 \tag{4.105}$$

das Gleichgewicht der inneren und äußeren Knotenkräfte

$$\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{e}} - \underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{i}} = \underline{\mathbf{0}}. \tag{4.106}$$

Die unterschiedliche Kennzeichnung des externen Kraftvektors in (4.105) und (4.106) weist darauf hin, dass $\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{e}}$ neben den arbeitsäquivalenten äußeren Knotenlasten $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}_{\mathrm{e}}$, die aus den Flächen- oder Volumenkraftdichten resultieren, auch Belastungen in Form von Einzelkräften, die an den Knoten angreifen, enthalten kann. Im Allgemeinen sind dabei sowohl $\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{e}}\left(\underline{\hat{\mathbf{u}}}\right)$ als auch $\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{i}}\left(\underline{\hat{\mathbf{u}}}\right)$ abhängig von dem aktuellen Beanspruchungszustand, ausgedrückt durch den Verschiebungsvektor $\underline{\hat{\mathbf{u}}}$. Im Folgenden sollen deformationsabhängige äußere Lasten ausgeschlossen werden, so dass sich die Abhängigkeit aufgrund der materiellen Nichtlinearität auf den Vektor der inneren Knotenlasten

$$\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{e}} - \underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{i}}\left(\underline{\hat{\mathbf{u}}}\right) = \underline{\mathbf{0}}, \tag{4.107}$$

der aus den Spannungen im Inneren ermittelt wird, beschränkt.

Inkrementelle Lösung

Zur effektiven Berechnung des pfadabhängigen Strukturverhaltens kommt in FE-Programmen ein inkrementelles Lösungsverfahren zum Einsatz, bei dem die Belastung Schritt für Schritt aufgebracht wird. Die Steuerung der Lastgeschichte erfolgt dabei durch Einführung der Zeitvariable t, die in statischen Berechnungen ohne geschwindigkeitsabhängige Materialphänomene lediglich die Bedeutung eines Lastparameters besitzt. Tritt dagegen, wie im vorliegenden Fall, geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten auf, beschreibt t die reale Zeit und bestimmt die Geschwindigkeit mit der ein bestimmter Belastungsprozess durchlaufen wird.
Das Ziel der inkrementellen Berechnung ist die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen (4.106) zu jedem diskreten Zeitpunkt der gesamten Lastgeschichte. Dabei wird angenommen, dass das Gleichgewicht zum Zeitpunkt t erfüllt und das Verschiebungsfeld ${}^{t}\underline{\hat{\mathbf{u}}}$ der zugehörigen Gleichgewichtskonfiguration bestimmt wurde. Ausgehend von diesem Gleichgewichtszustand erfolgt die Lösung von

$$\underline{\mathbf{g}}\left({}^{t+\Delta t}\underline{\hat{\mathbf{u}}}\right) = {}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{e}} - \underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{i}}\left({}^{t+\Delta t}\underline{\hat{\mathbf{u}}}\right) = \underline{\mathbf{0}}. \tag{4.108}$$

für den folgenden Zeitpunkt $t + \Delta t$, wobei Δt das gewählte Zeitinkrement bezeichnet (Bathe (2002)).

NEWTON-RAPHSON-Iteration

Aufgrund der Abhängigkeit der Spannungen bzw. der inneren Knotenkräfte vom aktuellen Verformungszustand stellt (4.108) ein nichtlineares Gleichungssystem dar, dessen Lösung in Form des neuen Verschiebungsvektors ${}^{t+\Delta t}\underline{\hat{\mathbf{u}}}$ iterativ zu bestimmen ist. Dazu kommt hier das NEWTON-RAPHSON-Verfahren zum Einsatz. Abbildung 4.21 veranschaulicht die iterative Lösungsprozedur für ein System mit einem Freiheitsgrad.
Aus der Anwendung dieses Iterationsschemas folgen die im Rahmen der numerischen Materialmodellierung zur Verfügung zu stellenden Größen, die im Folgenden abgeleitet werden. Dazu wird angenom-

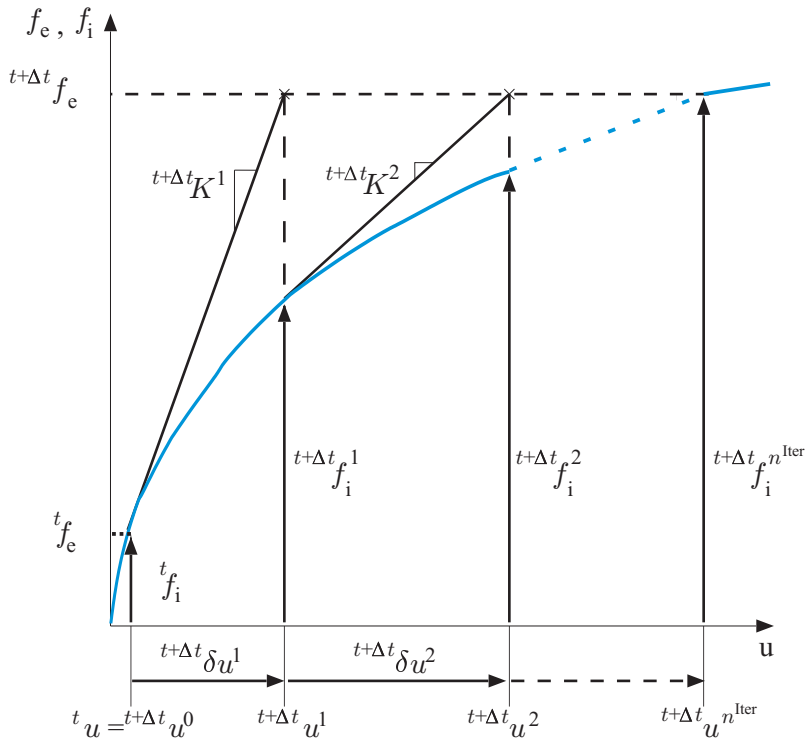


Abbildung 4.21: Iterative Lösung mittels NEWTON-RAPHSON-Verfahren

men, dass im Iterationsschritt $i-1$ die Lösung ${}^{t+\Delta t}\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i-1}$ berechnet worden ist. Eine TAYLOR-Reihenentwicklung an dieser bekannten Stelle liefert

$$\underline{\mathbf{g}}\left({}^{t+\Delta t}\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i}\right) = \underline{\mathbf{g}}\left({}^{t+\Delta t}\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i-1}\right) + \underbrace{\left.\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}}{\partial \underline{\hat{\mathbf{u}}}}\right|_{{}^{t+\Delta t}\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i-1}}}_{-\,{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{i}} {}^{t+\Delta t}\delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i} + \mathcal{O}\left(\left({}^{t+\Delta t}\delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i}\right)^2\right) = \underline{\mathbf{0}}, \tag{4.109}$$

wobei der Ausdruck ${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{i}$ als Tangentensteifigkeitsmatrix des i-ten Iterationsschritts bezeichnet wird. Unter Vernachlässigung der Terme zweiter und höherer Ordnung kann über

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{i}\ {}^{t+\Delta t}\delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i} = {}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{f}}_e - \underline{\mathbf{f}}_i\left({}^{t+\Delta t}\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i-1}\right) \tag{4.110}$$

ein Verschiebungszuwachs ${}^{t+\Delta t}\delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i}$ für den aktuellen Iterationsschritt berechnet werden. Der Verschiebungszuwachs ist dabei nicht mit der virtuellen Verschiebung in Gleichung (4.104) zu verwechseln. Die Summe aller während der bisherigen i Iterationen berechneten Verschiebungszuwächse ergibt das aktuelle Verschiebungsinkrement

$${}^{t+\Delta t}\Delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i} = \sum_{k=1}^{i} {}^{t+\Delta t}\delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{k}\,. \tag{4.111}$$

Daraus kann über

$${}^{t+\Delta t}\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i} = {}^{t}\underline{\hat{\mathbf{u}}} + {}^{t+\Delta t}\Delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i} \tag{4.112}$$

die aktuelle Verschiebung bestimmt werden. Wird nach n^{Iter} Iterationen ein Abbruchkriterium erfüllt, das beispielsweise über das Residuum des Kraftvektors oder durch den Vektor der Verschiebungszuwächse definiert werden kann, ist die Berechnung des Lastschritts abgeschlossen und die inkrementelle Lösung kann für einen neuen Lastschritts fortgesetzt werden.

Materialtangentensteifigkeit

Da in einer nur materiell nichtlinearen FE-Rechnung der Vektor der äußeren Knotenlasten und die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ unabhängig von der Verformung sind, ist zur Bildung der Tangentensteifigkeitsmatrix

$$
\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{i} &= -\left.\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}}{\partial \underline{\hat{\mathbf{u}}}}\right|_{t+\Delta t\,\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i-1}} = \left.\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{i}}}{\partial \underline{\hat{\mathbf{u}}}}\right|_{t+\Delta t\,\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i-1}} && (4.113)\\
&= \bigcup_{i=1}^{n^{\mathrm{E}}} \int_{V^{\mathrm{E}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{T} \left.\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right|_{t+\Delta t\,\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i-1}} \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \underline{\hat{\mathbf{d}}}}\, dV && (4.114)\\
&= \bigcup_{i=1}^{n^{\mathrm{E}}} \int_{V^{\mathrm{E}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{T} \underbrace{\left.\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right|_{t+\Delta t\,\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i-1}}}_{{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{i}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}\, dV && (4.115)
\end{aligned}
$$

lediglich die Linearisierung der konstitutiven Beziehungen durch Bildung der Materialtangentensteifigkeitsmatrix ${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{i}$ erforderlich.

Spannungsalgorithmus

Nachdem der aktuelle Zuwachs des Verschiebungsvektors ${}^{t+\Delta t}\delta\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i}$ bestimmt wurde, erfolgt zur Berechnung des nächsten Iterationsschritts die Aktualisierung der rechten Seite von Gleichung (4.110) (vgl. Abb. 4.22). Dazu ist ein neuer Vektor der inneren Knotenlasten

$$
{}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{i}}^{i} = \bigcup_{i=1}^{n^{\mathrm{E}}} \int_{V^{\mathrm{E}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{T}\, {}^{t+\Delta t}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{i}\, dV \tag{4.116}
$$

aus den aktuellen Spannungen ${}^{t+\Delta t}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{i}$ zu berechnen. Da die konstitutiven Beziehungen zur Abbildung der Gleichgewichtshysterese und der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens in Form von Differenzialgleichungen vorliegen, ist dazu eine zeitliche Diskretisierung erforderlich. Das gewählte Diskretisierungsverfahren bestimmt in Verbindung mit der Struktur der Materialgleichungen die mathematischen Eigenschaften des sogenannten Spannungsalgorithmus zur Aktualisierung der Spannungswerte

$$
{}^{t+\Delta t}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{i} = {}^{t}\underline{\boldsymbol{\sigma}} + {}^{t+\Delta t}\Delta\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{i}. \tag{4.117}
$$

Da im Rahmen dieser Arbeit auch die Materialtangentensteifigkeitsmatrix aus der inkrementellen Form der Materialgleichungen

$$
{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{i} = \left.\frac{\partial\, {}^{t+\Delta t}\underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial\, {}^{t+\Delta t}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right|_{t+\Delta t\,\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i-1}} = \left.\frac{\partial\Delta\, {}^{t+\Delta t}\underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial\Delta\, {}^{t+\Delta t}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right|_{t+\Delta t\,\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{i-1}} \tag{4.118}
$$

abgeleitet wird, handelt es sich um einen algorithmischen Tangentenmodul.
Um die Konvergenz des Iterationsverfahrens sicherzustellen, sollten die zur Berechnung der Materialtangentensteifigkeitsmatrix genutzten inkrementellen Materialgleichungen mit den im Spannungsalgorithmus verwendeten übereinstimmen. In diesem Fall wird der Tangentenmodul als algorithmisch konsistent bezeichnet.

Die zeitliche Diskretisierung der in Abschnitt 4.3.1 beschriebenen mehrachsigen konstitutiven Beziehungen, die Formulierung eines Algortihmus zur Aktualisierung der Spannungen und der inneren Zustandsvariablen sowie die Herleitung des algorithmisch konsistenten Tangentenmoduls sind Gegenstand des folgenden Abschnitts.
Die Materialtangentensteifigkeitsmatrix wird, wie in Abb. 4.22 dargestellt ist, dem FE-Programm während der Assemblierung der Tangentensteifigkeitsmatrix des Gesamtmodells übergeben. Nach der Berechnung des aktuellen Verschiebungszuwachses erfolgt die Aktualisierung der Spannungen. Der aus diesen Spannungen resultierende Vektor der inneren Knotenlasten wird im nächsten Iterationsschritt erneut benötigt, um den nächsten Verschiebungszuwachs zu berechnen.

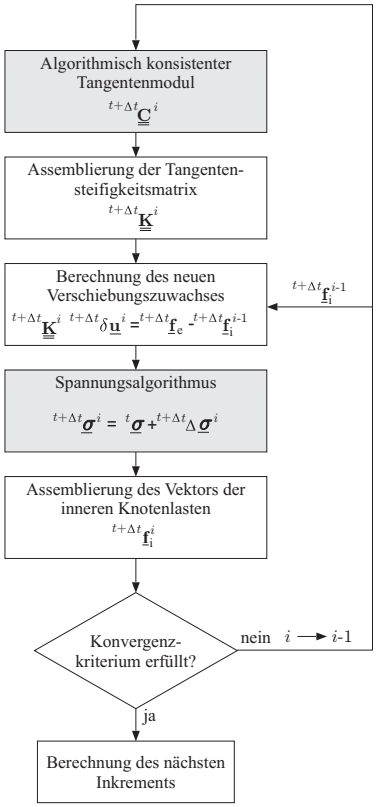


Abbildung 4.22: Prinzipieller Ablauf einer nichtlinearen FE-Rechnung

4.3.3 Spannungsalgorithmus und algorithmisch konsistenter Tangentenmodul

Zeitdiskretisierung

Die Simulation der in Kapitel 3 beschriebenen monotonen Zug-, Relaxations- und zyklischen Versuche erfordert die numerisch stabile Ermittlung der aktuellen Spannungswerte für verschiedene Zeitbereiche zwischen 3 und $3 \cdot 10^4$ Sekunden. Eine im Vorfeld untersuchte Diskretisierung des Gesamtmodells mit dem expliziten EULER-Vorwärtsverfahren führte für das nichtlineare Überspannungsmodell auch bei geringen Zeitschrittweiten zu Instabilitäten. Dagegen wurden die Teilmodelle der Gleichgewichtsrelation zuverlässig integriert. Zur Sicherung der numerischen Stabilität der Spannungsberechnung kommt daher für das Überspannungsmodell ein implizites Verfahren zum Einsatz, während sowohl das nicht-

linear elastische Modell als auch das endochrone Plastizitätsmodell aus Effizienzgründen explizit zeitintegriert werden.
Die allgemeine Form der in dem beschriebenen viskoplastischen Materialmodell vorkommenden konstitutiven Gleichungen lautet

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\sigma}\right). \tag{4.119}$$

Ihre Auswertung zum bekannten Zeitpunkt t

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}|_t = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\sigma}\right)|_t \tag{4.120}$$

führt in Kombination mit dem Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$\dot{(\,)}\Big|_t \approx \frac{^{t+\Delta t}(\,) - {}^{t}(\,)}{\Delta t} = \frac{^{t+\Delta t}\Delta(\,)}{\Delta t} \tag{4.121}$$

auf das EULER-Vorwärtsverfahren. Ein zweiter Ordnung genaues, implizites Verfahren erhält man durch Auswertung der Differenzialgleichung zu dem fiktiven Zeitpunkt $t + \frac{1}{2}\Delta t$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}|_{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\sigma}\right)|_{t+\frac{1}{2}\Delta t} \tag{4.122}$$

unter Verwendung des zentralen Differenzenquotienten an der Stelle $t + \frac{1}{2}\Delta t$

$$\dot{(\,)}\Big|_{t+\frac{1}{2}\Delta t} \approx \frac{^{t+\Delta t}(\,) - {}^{t}(\,)}{\Delta t} = \frac{^{t+\Delta t}\Delta(\,)}{\Delta t} \tag{4.123}$$

und der linearen Interpolation

$$(\,)|_{t+\frac{1}{2}\Delta t} \approx {}^{t}(\,) + \frac{1}{2}\,{}^{t+\Delta t}\Delta(\,) \tag{4.124}$$

zur Berechnung der benötigten Größen zum Zeitpunkt $t + \frac{1}{2}\Delta t$. Aufgrund der Auswertung der Differenzialgleichung bei $t + \frac{1}{2}\Delta t$ wird diese Form der Zeitdiskretisierung als implizite Mittelpunktregel bezeichnet.

Additive Zerlegung

Die Anwendung der genannten Diskretisierungsverfahren zur Überführung der konstitutiven Gleichungen in eine inkrementelle Form bestimmt die Eigenschaften des Spannungsalgorithmus und bildet die Grundlage der Berechnung der algorithmisch konsistenten Tangentenmoduln der Teilmodelle. Aufgrund der additiven Zerlegung der Spannung

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{eq}} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{end}} + \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{v}}} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov},i}, \tag{4.125}$$

ergibt sich auch das Inkrement der Gesamtspannung

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{end}} + \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{v}}} \Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov},i} \tag{4.126}$$

als Summe der Inkremente der Spannungen in den Teilmodellen. Gleiches gilt für den algorithmisch konsistenten Tangentenmodul

$$\frac{\partial\Delta\sigma_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\Delta\sigma_{ij}^{\mathrm{e}}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}} + \frac{\partial\Delta\sigma_{ij}^{\mathrm{end}}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}} + \sum_{m=1}^{n_{\mathrm{v}}} \frac{\partial\Delta\sigma_{ij}^{\mathrm{ov},m}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}. \tag{4.127}$$

Erfolgt in den Teilmodellen die getrennte Betrachtung von Deviator und Spur des jeweiligen Spannungstensors, so können das Inkrement der Spannung

$$\Delta\sigma_{ij}^{(\,)} = \Delta s_{ij}^{(\,)} + \frac{1}{3}\Delta\sigma_{mm}^{(\,)}\delta_{ij} \tag{4.128}$$

und der Tangentenmodul

$$\frac{\partial\Delta\sigma_{ij}^{(\,)}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\Delta s_{ij}^{(\,)}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}} + \frac{1}{3}\frac{\partial\Delta\sigma_{mm}^{(\,)}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}\delta_{ij} \tag{4.129}$$

aus den Beiträgen der deviatorischen und hydrostatischen Anteile bestimmt werden.

Inkrementelle Form

Für das nichtlinear elastische Teilmodell ergeben sich nach Bildung der Zeitableitung von (4.67) und Anwendung der expliziten Zeitdiskretisierung

$$^{t+\Delta t}\Delta s_{ij}^{\mathrm{e}} = \frac{2G_1}{1+\alpha_G\sqrt{{}^{t}e_{kl}\,{}^{t}e_{kl}}}\left({}^{t+\Delta t}\Delta e_{ij} - \frac{\alpha_G}{1+\alpha_G\sqrt{{}^{t}e_{mn}\,{}^{t}e_{mn}}}\frac{{}^{t+\Delta t}\Delta e_{op}\,{}^{t}e_{op}}{\sqrt{{}^{t}e_{qr}\,{}^{t}e_{qr}}}\,{}^{t}e_{ij}\right) \tag{4.130}$$

$$^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{mm}^{\mathrm{e}} = \frac{3K_1}{\left(1+\alpha_K\sqrt{{}^{t}\varepsilon_{mm}\,{}^{t}\varepsilon_{nn}}\right)^2}\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{pp}. \tag{4.131}$$

In gleicher Weise führt die Diskretisierung der Differenzialgleichungen des endochronen Modells auf

$$^{t+\Delta t}\Delta s_{ij}^{\mathrm{end}} = 2G_2\,{}^{t+\Delta t}\Delta e_{ij} - \beta_G\,{}^{t}s_{ij}^{\mathrm{end}}\,{}^{t+\Delta t}\Delta z \tag{4.132}$$

$$^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{pp}^{\mathrm{end}} = 3K_2\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{mm} - 3\beta_K\,{}^{t}\sigma_{mm}^{\mathrm{end}}\,{}^{t+\Delta t}\Delta z. \tag{4.133}$$

Aufgrund des expliziten Zeitdiskretisierungsverfahrens sind die Inkremente der Spannungen nur Funktionen des aktuellen Verzerrungsinkrements, des Verzerrungszustands zum Zeitpunkt t sowie im Fall des endochronen Modells des ebenfalls bekannten Spannungswerts ${}^{t}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{end}}$.
Im Gegensatz dazu führt die Anwendung der impliziten Mittelpunktregel zur Diskretisierung der konstitutiven Gleichungen des Überspannungsmodells auf ein nichtlineares Gleichungssystem

$$^{t+\Delta t}\Delta s_{ij}^{\mathrm{ov},k} = 2G_k^{\mathrm{ov}}\,{}^{t+\Delta t}\Delta e_{ij} - \frac{2G_k^{\mathrm{ov}}\Delta t}{\tilde{\eta}_G^k\left({}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}\right)}\left({}^{t}s_{ij}^{\mathrm{ov},k} + \frac{1}{2}\,{}^{t+\Delta t}\Delta s_{ij}^{\mathrm{ov},k}\right) \tag{4.134}$$

$$^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{mm}^{\mathrm{ov},k} = 3K_k^{\mathrm{ov}}\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{mm} - \frac{3K_k^{\mathrm{ov}}\Delta t}{\tilde{\eta}_K^k\left({}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}\right)}\left({}^{t}\sigma_{nn}^{\mathrm{ov},k} + \frac{1}{2}\,{}^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{nn}^{\mathrm{ov},k}\right) \tag{4.135}$$

mit

$$\tilde{\eta}_K^i\left({}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}\right) = \eta_K^i\exp\left(-\frac{\left\|\sum_{j=1}^{n^{\mathrm{v}}}\left({}^{t}\sigma_{kl}^{\mathrm{ov},j} + \frac{1}{2}\,{}^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{kl}^{\mathrm{ov},j}\right)\right\|^{k_0}}{s_0}\right) \tag{4.136}$$

$$\tilde{\eta}_G^i\left({}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}\right) = \eta_G^i\exp\left(-\frac{\left\|\sum_{j=1}^{n^{\mathrm{v}}}\left({}^{t}\sigma_{kl}^{\mathrm{ov},j} + \frac{1}{2}\,{}^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{kl}^{\mathrm{ov},j}\right)\right\|^{k_0}}{s_0}\right) \tag{4.137}$$

zur Bestimmung der deviatorischen und volumetrischen Anteile des Inkrements ${}^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}$ der Überspannung, das durch eine weitere NEWTON-RAPHSON-Iteration innerhalb des Spannungsalgorithmus

gelöst wird. Im Gegensatz zu den beiden Teilmodellen der Gleichgewichtsrelation enthalten die diskreten Gleichungen des Überspannungsmodells das Zeitinkrement Δt, wodurch die Geschwindigkeitsabhängigkeit in der numerischen Umsetzung des Materialmodells realisiert wird. Bedingt durch die nichtlinearen Viskositätsfunktionen entsteht eine Kopplung zwischen den Änderungen des Deviators und der Spur des Überspannungstensors. Die Implementierung des Spannungsalgorithmus für das nichtlineare Überspannungsmodell erfolgte im Rahmen einer Diplomarbeit (Obst (2009)).

Tangentenmodul

Zur Bildung des weiterhin erforderlichen algorithmisch konsistenten Tangentenmoduls sind die partiellen Ableitungen der Spannungsinkremente nach dem Verzerrungsinkrement ${}^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ zu bilden. Dies führt für das Überspannungsmodell auf ein weiteres lineares Gleichungssystem bestehend aus

$$\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta s_{ij}^{\mathrm{ov},m}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} = 2G_m^{\mathrm{ov}}\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta e_{ij}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} - \frac{2G_m^{\mathrm{ov}}\Delta t}{\tilde{\eta}_G^m\left({}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}\right)}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta s_{ij}^{\mathrm{ov},m}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + \frac{k_0}{2s_0}\,{}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}s_{ij}^{\mathrm{ov},m}\left({}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\sigma_{rs}^{\mathrm{ov}}\;{}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\sigma_{rs}^{\mathrm{ov}}\right)^{\frac{k_0}{2}-1}\,{}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\sigma_{op}^{\mathrm{ov}}\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{op}^{\mathrm{ov}}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}}\right] \tag{4.138}$$

und

$$\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{nn}^{\mathrm{ov},m}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} = 3K_m^{\mathrm{ov}}\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{nn}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} - \frac{3K_m^{\mathrm{ov}}\Delta t}{\tilde{\eta}_K^m\left({}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ov}}\right)}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{pp}^{\mathrm{ov},m}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + \frac{k_0}{2s_0}\,{}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\sigma_{qq}^{\mathrm{ov},m}\left({}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\sigma_{rs}^{\mathrm{ov}}\;{}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\sigma_{rs}^{\mathrm{ov}}\right)^{\frac{k_0}{2}-1}\,{}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\sigma_{uv}^{\mathrm{ov}}\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{uv}^{\mathrm{ov}}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}}\right] \tag{4.139}$$

zur Berechnung von $\frac{\partial\sigma_{ij}^{\mathrm{ov},m}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}$, wobei die partiellen Ableitungen des Deviators und der Spur des Inkrements des symmetrischen Verzerrungstensors

$$\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta e_{ij}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{nn}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} = \delta_{kl} \tag{4.140}$$

sind. Dagegen ist der Tangentenmodul des nichtlinear elastischen Teilmodells in Form von

$$\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta s_{ij}^{\mathrm{e}}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} = \frac{2G_1}{1+\alpha_G\sqrt{{}^{t}e_{mn}\,{}^{t}e_{mn}}}\left[\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right.$$
$$\left. - \frac{\alpha_G}{1+\alpha_G\sqrt{{}^{t}e_{op}\,{}^{t}e_{op}}}\frac{{}^{t}e_{ij}\,{}^{t}e_{kl}}{\sqrt{{}^{t}e_{qr}\,{}^{t}e_{qr}}}\right] \tag{4.141}$$

$$\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{pp}^{\mathrm{e}}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} = \frac{3K_1}{\left(1+\alpha_K\sqrt{{}^{t}\varepsilon_{pp}\,{}^{t}\varepsilon_{qq}}\right)^2}\delta_{kl} \tag{4.142}$$

sind. Dagegen ist der Tangentenmodul des nichtlinear elastischen Teilmodells in Form von

explizit angebbar. Für das endochrone Modell erhält man die Beziehungen

$$\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta s_{ij}^{\mathrm{end}}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} = 2G_2\left[\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right] - \beta_G\,{}^{t}s_{ij}^{\mathrm{end}}\frac{{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}}{\sqrt{{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{mn}\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{mn}}} \tag{4.143}$$

$$\frac{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\sigma_{pp}^{\mathrm{end}}}{\partial\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}} = 3K_2\delta_{kl} - 3\beta_K\,{}^{t}\sigma_{pp}^{\mathrm{end}}\frac{{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}}{\sqrt{{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{mn}\,{}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{mn}}}\,. \tag{4.144}$$

Der aus der verallgemeinerten Bogenlänge resultierende Term $\frac{\Delta\varepsilon_{kl}}{\sqrt{\Delta\varepsilon_{mn}\Delta\varepsilon_{mn}}}$ beschreibt die Richtung des aktuellen Verzerrungsinkrements. Für beliebige Lastpfade ergibt sich daraus eine unsymmetrische Tangentensteifigkeitsmatrix, so dass ein geeignetes Verfahren zur Lösung des globalen Gleichungssystems der FEM zu verwenden ist. Weiterhin ist zur Vermeidung der Division durch Null im Fall eines verschwindenden Verzerrungsinkrements, z.B. am Beginn der Rechnung oder während der Simulation eines Relaxationsversuchs, der gesamte Ausdruck Null zu setzen.
Der algorithmische Tangentenmodul des Gesamtmodells ergibt sich nach Berechnung der einzelnen Beiträge gemäß (4.127). Für die numerische Implementierung werden die in Tensorschreibweise angegebenen Größen unter Beachtung der Definition der Spannungs- $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ und Verzerrungsvektoren $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ in die Materialtangentensteifigkeitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ überführt.
Aufgrund der Bildungsvorschrift des Tangentenmoduls sind die in den Gleichungen des Überspannungsmodells und des endochronen Modells auftretenden Spannungs- und Verzerrungsinkremente jeweils die Größen der vorangegangenen Iteration $i-1$.

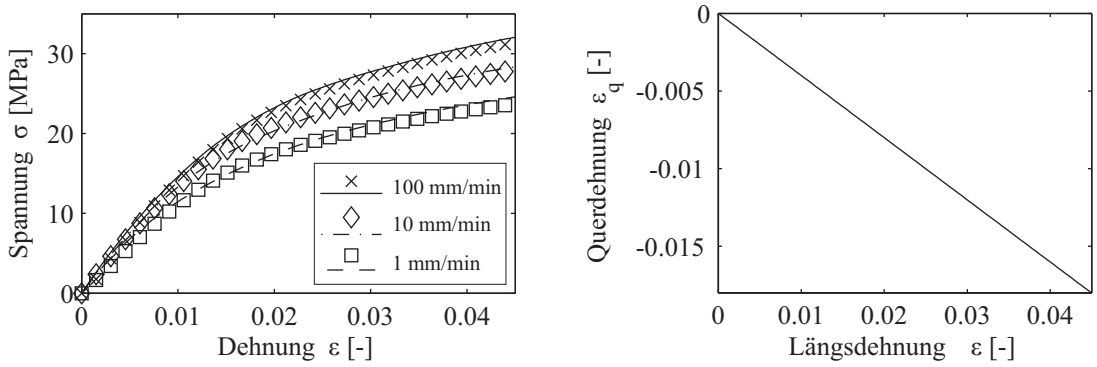
4.3.4 Validierung des Materialmodells

Einführung

Vor dem Einsatz in einem RVE-Modell wird das Verhalten des Materialmodells unter verschiedenen Belastungbedingungen untersucht und die Plausibilität der Ergebnisse überprüft. Dabei ermöglicht die Berechnung verschiebungsgesteuerter Lastfälle die separate Verifikation des Spannungsalgorithmus. Das Verhalten des Modells während der iterativen Berechnung kann anschließend durch die Simulation von kraftgesteuerten Prozessen kontrolliert werden.

Verschiebungssteuerung

Die Berechnung verschiebungsgesteuerter monotoner Zugversuche mit verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten dient der qualitativen und quantitativen Verifikation des mehrachsigen Materialmodells unter einachsiger Beanspruchung. Dabei kann, wie in Abb. 4.23(a) dargestellt ist, festgestellt werden, dass das mehrachsige Materialmodell mit den Parametern (4.79), (4.82), (4.84) und (4.85) in der Lage ist, das in den Experimenten beobachtete geschwindigkeitsabhängige Materialverhalten korrekt wiederzugeben. Die Darstellung von Quer- ε_q und Längsdehnung ε in Abb. 4.23(b) verdeutlicht



(a) Spannungs-Dehnungskurven

(b) Querdehnung

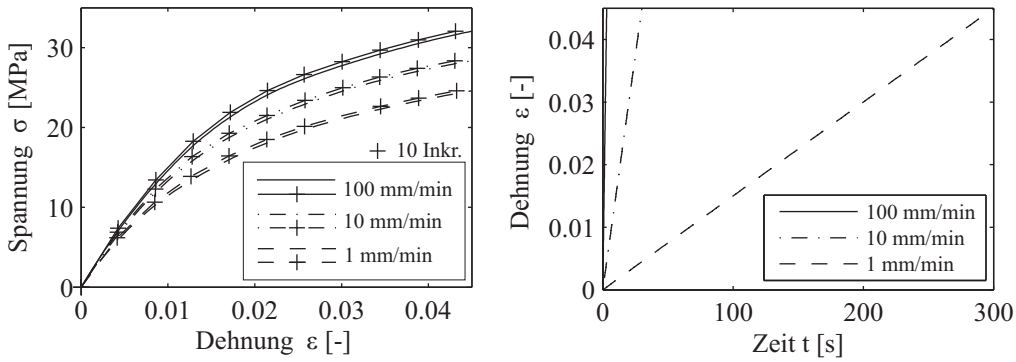
Abbildung 4.23: Simulation verschiebungsgesteuerter Zugversuche

die Einhaltung einer konstanten Querkontraktionszahl von $\nu = 0,4$, die bei der mehrachsigen Verallgemeinerung vorausgesetzt wurde.

Kraftsteuerung

Zur Überprüfung der korrekten Implementierung der Tangentensteifigkeitsmatrix ist weiterhin das

Verhalten des Materialmodells in kraftgesteuerten Berechnungen zu betrachten. Abbildung 4.24(a) vergleicht dazu Berechnungsergebnisse für Zugversuche, wobei zwei verschiedene Zeitdiskretisierungen mit 100 bzw. 10 Inkrementen verwendet wurden. Als Abbruchkriterium für die Iteration diente in bei-



(a) Spannungs-Dehnungskurven (b) Dehnungs-Zeitverläufe

Abbildung 4.24: Simulation kraftgesteuerter Zugversuche

den Fällen die Forderung

$$\max\left(\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{r}}\right) = \max\left(\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{e}} - \underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{i}}\right) \leq 1 \cdot 10^{-4}\mathrm{N} \tag{4.145}$$

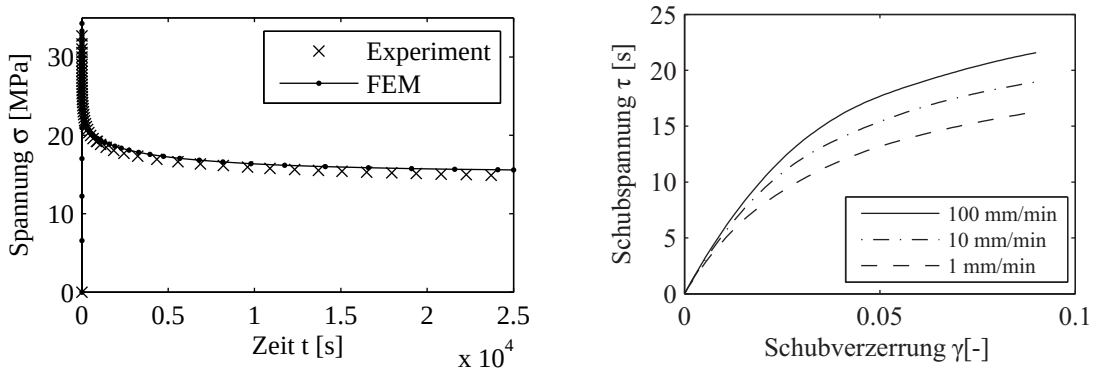
für das Residuum $\underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{r}}$ der Knotenkraftvektoren. Während dieses Kriterium für die feinere Zeitdiskretisierung bereits nach dem ersten Schritt erfüllt ist, erfordert die größere Zeitschrittweite die iterative Bestimmung des Verschiebungszuwachses für jedes Inkrement. Die zwischen den beiden Diskretisierungsvarianten auftretenden Unterschiede, die vorallem auf den Diskretisierungsfehler der zur Steuerung genutzten Lastgeschichte zurückzuführen sind, können als gering bewertet werden.
Da die Kraftsteuerung durch die in den verschiebungsgesteuerten Zugversuchen berechneten Knotenkraft-Zeitverläufe erfolgt, ist anhand der resultierenden Dehnungs-Zeitverläufe (vgl. Abb. 4.24(b)) eine zusätzliche Kontrollmöglichkeit gegeben. Sowohl die erreichte maximale Dehnung als auch die Dehnraten entsprechen dabei den Vorgaben der verschiebungsgesteuerten Lastfälle.

Spannungsrelaxation

Neben der in den Zugversuchen zu beobachtenden Geschwindigkeitsabhängigkeit wird auch das damit einhergehende Relaxationsverhalten korrekt wiedergegeben (Abb. 4.25(a)). Zur effizienten Simulation der Spannungsrelaxation über einen Zeitraum von $2,5 \cdot 10^4$s kommt dabei eine adaptive Zeitschrittweitensteuerung zum Einsatz. Während für die Aufbringung der Belastung eine Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,5$s verwendet wird, wächst das Zeitinkrement während des Relaxationsvorgangs bis auf mehrere Tausend Sekunden an. Die auftretenden Abweichungen von dem experimentell bestimmten Spannungs-Zeitverlauf entsprechen dabei denen der einachsigen Variante des Materialmodells. Dadurch wird die Robustheit des implementierten Materialmodells unter Beweis gestellt.

Schubbeanspruchung

Zusätzlich zu diesen Normalbeanspruchungen erfolgte die Simulation des Materialverhaltens unter Schubbeanspruchung für drei verschiedene Belastungsgeschwindigkeiten, wobei lediglich der deviatorische Anteil des Materialmodells angesprochen wird. Da sowohl für den Spannungsdeviator als auch für den hydrostatischen Anteil die gleichen konstitutiven Annahmen gewählt wurden, entspricht das qualitative Materialverhalten dem der Zugversuche, allerdings bei einem deutlich niedrigeren Spannungsniveau. Durch die Simulation von Zug- und Schubbeanspruchungen in den drei verschiedenen Raumrichtungen konnte weiterhin die Richtungsunabhängigkeit des Materialverhaltens nachgewiesen



(a) Spannungs-Zeitverlauf für (Zug)-Relaxationsversuch (b) Spannung-Verzerrungsverlauf für Schubversuch

Abbildung 4.25: Simulation von Relaxations- und Schubversuchen

werden.

5 Modellierung repräsentativer Volumenelemente mittels XFEM

Einführung

Zur Simulation des effektiven Materialverhaltens von Verbundwerkstoffen wird neben den Materialmodellen für die konstitutiven Bestandteile ein Modell der lokalen Werkstoffstruktur benötigt. Aufgrund der komplexen Geometrie textiler Verstärkungsstrukturen stellt die Generierung eines diskreten Berechnungsmodells für ein RVE eine besondere Herausforderung dar. Bei der Anwendung der FEM entstehen einerseits stark deformierte Elementgeometrien, die zu einer schlechten numerischen Konditionierung führen. Andererseits ist ein hoher Modellierungsaufwand für die manuelle Erstellung der numerischen Modelle zu erwarten.
Für die hier betrachteten textilen Verstärkungen wird daher eine alternative Modellierungsstrategie für RVE auf Basis der erweiterten Finiten-Elemente-Methode (XFEM) entwickelt, die ausgehend von der dreidimensionalen Geometrie der Verstärkungsstruktur eine automatisierte Erstellung der Berechnungsmodelle ermöglicht und ein Berechnungsnetz regelmäßiger finiter Elemente liefert (Kästner u. a. (2008a); Kästner und Ulbricht (2006); Haasemann u. a. (2006)).

5.1 Grundzüge der XFEM

XFEM/FEM

Im Unterschied zur gewöhnlichen FEM, bei der die Vernetzung an Details der inneren Struktur angepasst werden muss, ist dies bei Nutzung der XFEM nicht erforderlich. Risse und innere Grenzflächen, die z. B. bei Hohlräumen, Einschlüssen oder Materialgrenzen auftreten, sind nicht Teil des regelmäßigen Netzes. Die Lage der Unstetigkeitsstellen ist unabhängig von der gewählten Vernetzung. Allerdings müssen aus diesem Grund alternative Verfahren zur Lokalisierung von Grenzflächen, zur Abbildung der Diskontinuität der Feldgrößen oder ihrer Ableitungen sowie zur Integration der Elementsteifigkeitsmatrizen angewendet werden.

5.1.1 Anreicherung des Verschiebungsansatzes

Verschiebungsansatz

Die XFEM bietet, durch eine *lokale* Anreicherung

$$\mathbf{u}^{\mathrm{XFEM}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n^{\mathrm{K}}} N_i \hat{\mathbf{u}}_i}_{\text{FEM}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{K}^{\mathrm{Anr}}} N_j \hat{\mathbf{a}}_j F}_{\text{Anreicherung}} \tag{5.1}$$

des gewöhnlichen Verschiebungsansatzes der FEM (4.99), die Möglichkeit, Unstetigkeiten verschiedener Feldgrößen innerhalb eines Elements und damit in einem regelmäßigen Berechnungsnetz abzubilden. Dabei entspricht die erste Summe der bekannten Approximation des Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}$ durch das Produkt von Formfunktionen N_i und dem Vektor der Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}_i$ am Knoten i. Die Erweiterung des Verschiebungsansatzes besteht aus den Vektoren der zusätzlichen Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{a}}_j$

und einer Anreicherungsfunktion F, die das mechanische Verhalten an einer Unstetigkeitsstelle wiedergibt. Durch die angepasste Wahl der Anreicherungsfunktion können starke (Verschiebungssprung) und schwache Diskontinuitäten (Dehnungs- bzw. Steifigkeitssprung) abgebildet werden. Die unterschiedlichen Summationsindizes in (5.1) zeigen an, dass nicht alle n^{K} Knoten des Berechnungsnetzes zusätzliche Freiheitsgrade aufweisen sondern nur diejenigen $j \in \mathcal{K}^{\mathrm{Anr}}$, in deren Einflussgebiet eine Unstetigkeit auftritt (vgl. Abb. 5.1).
Im Hinblick auf die Modellierung von Verbundwerkstoffen mit textiler Verstärkungsstruktur bedeutet dies, dass das Netz der finiten Elemente nicht mehr derart gewählt werden muss, dass Elementränder auf einer Materialgrenze liegen. Stattdessen wird der senkrecht zu einer solchen Grenzfläche auftretende Dehnungssprung durch die Erweiterung des Verschiebungsansatzes modelliert.

Anwendung

Ursprünglich wurde die XFEM zur Simulation des Rissfortschritts entwickelt (Moes u. a. (1999); Dauxz u. a. (2000)). Im Gegensatz zur gewöhnlichen FEM kann durch die Unabhängigkeit von Vernetzung und Topologie des Risses auf die aufwendige Neuvernetzung des FE-Modells bei einer Verschiebung der Rissspitze verzichtet werden. Die Unstetigkeit des Verschiebungsfeldes infolge der Rissöffnung wird dabei innerhalb der Elemente durch den erweiterten Verschiebungsansatz abgebildet. Als Anreicherungsfunktion wird die Sprungfunktion verwendet.
In der Folgezeit wurde die Methode auch zur Abbildung von Einschlüssen und Hohlräumen eingesetzt (Sukumar u. a. (2001); Belytschko u. a. (2001); Moes u. a. (2003)). Verschiedene Erweiterungen umfassen die Modellierung des Rissspitzennahfeldes (Zi und Belytschko (2003)), die Anwendung zur Simulation des dreidimensionalen Risswachstums (Sukumar u. a. (2000); Gravouil u. a. (2002a,b)) sowie zur Modellierung von Grenzflächenrissen (Sukumar u. a. (2004)), Elemente höherer Ordnung (Stazi u. a. (2003)) und geometrisch nichtlineare Formulierungen (Fagerström und Larsson (2006)).

X-Elemente

Die Umsetzung der XFEM erfolgt im Rahmen dieser Arbeit durch die Definition und Implementierung spezieller X-Elemente (Abb. 5.1), welche die gewöhnlichen Elemente im Bereich einer Materialgrenze ersetzen. Dabei wird vorausgesetzt, dass die lokale Anreicherung des Verschiebungsansatzes auf den Bereich eines einzelnen Elements, das von einer Materialgrenze geschnitten wird, beschränkt bleibt. Ausgehend von dem erweiterten Verschiebungsansatz (5.1) wird in 5.2.1 eine Elementsteifig-

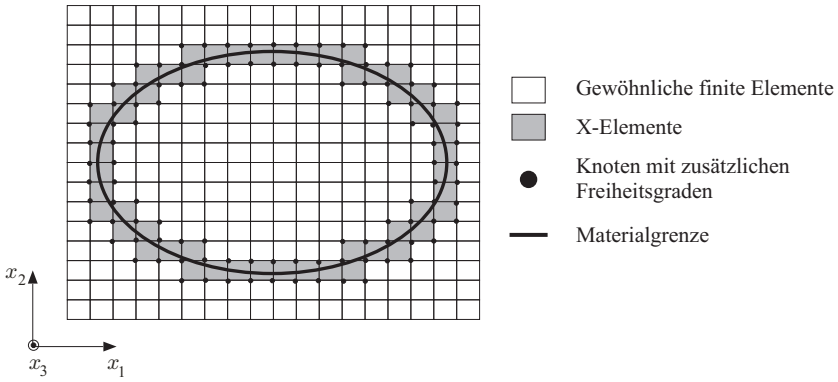


Abbildung 5.1: X-Elemente und Knoten mit zusätzlichen Freiheitsgraden im Verlauf einer Materialgrenze

keitsmatrix formuliert. Zur Berechnung dieser Matrix werden eine Methode zur Lokalisierung der Materialgrenze innerhalb des Elements sowie eine geeignete Anreicherungsfunktion benötigt, die im Folgenden zur Verfügung gestellt werden.

5.1.2 Lokalisierung von Grenzflächen

Da das Berechnungsnetz unabhängig von der Lage der Materialgrenze ist, muss die Lokalisierung der Grenzfläche separat erfolgen. Dazu wird der vorzeichenbehaftete Abstand

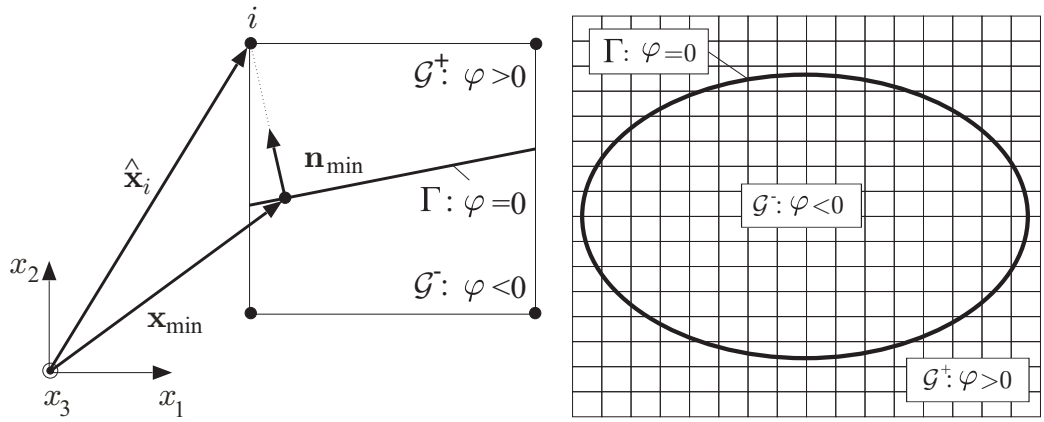
$$\hat{\varphi}_i = (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_{\text{min}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{min}} \tag{5.2}$$

des Knotens mit dem Ortsvektor $\hat{\mathbf{x}}_i$ zu einer durch das Element verlaufenden Materialgrenze Γ berechnet (Abb. 5.2(a)), wobei $\mathbf{n}_{\text{min}}$ ein Normaleneinheitsvektor an dem Punkt der Materialgrenze $\mathbf{x}_{\text{min}}$ mit dem geringsten Abstand ist. Durch Interpolation der Knotenwerte $\hat{\varphi}_i$ mittels der Formfunktionen N_i der Elemente kann für jeden Punk der Abstand

$$\varphi = \sum_i N_i \hat{\varphi}_i \tag{5.3}$$

bestimmt werden. Um eine ausreichende Genauigkeit dieser Approximation zu gewährleisten, muss das Berechnungsnetz genügend fein gewählt werden. Die Lage der Materialgrenze Γ ist dann eindeutig durch die Parameterkurve $\varphi = 0$ beschrieben. Damit gilt entsprechend Abb. 5.2(b)

$$\varphi = \begin{cases} = 0 & \text{auf} \quad \Gamma, \\ < 0 & \text{in} \quad \mathcal{G}^-, \\ > 0 & \text{in} \quad \mathcal{G}^+. \end{cases} \tag{5.4}$$



(a) Berechnung des vorzeichenbehafteten Abstands (b) Identifikation von Grenzflächen

Abbildung 5.2: Identifikation von Grenzflächen mittels Parameterfunktion

Da reale Materialstrukturen zahlreiche Materialgrenzen mit beliebig komplizierten Verläufen enthalten können, ist in der Regel keine analytische Berechnung der Abstände $\hat{\varphi}_i$ möglich und die Lokalisierung in Form einer globalen Parameterfunktion φ nicht sinnvoll. Im Rahmen der automatisierten Modellgenerierung (vgl. Abschnitt 5.3) wird der durch ein dreidimensionales Geometriemodell der Verstärkungsstruktur gegebene Verlauf der Materialgrenzen daher innerhalb eines Elements durch eine bilineare Parameterfläche ersetzt, die auch zur elementweisen Berechnung des vorzeichenbehafteten Abstands genutzt wird.

5.1.3 Wahl der Anreicherungsfunktion für Materialgrenzen

Art der Diskontinuität

Neben der reinen Lokalisierung der Materialgrenze kann der Abstand φ auch zur Formulierung einer Anreicherungsfunktion F zur Abbildung der an einer Materialgrenze auftretenden Unstetigkeit genutzt werden. An einer solchen Grenze kommt es aufgrund verschiedener Materialparameter in den angrenzenden Gebieten zu einer sprunghaften Änderung der Koeffizienten der partiellen Differentialgleichungen. Während die Verschiebung, bedingt durch die zu fordernde Kompatibilität des zusammenhängenden Gebiets, keine Unstetigkeiten aufweisen darf, kann senkrecht zu einer Grenzfläche Γ ein Sprung in den Verzerrungen

$$\begin{array}{rcl} [\tilde{\varepsilon}_{1i}] = [\tilde{\varepsilon}_{i1}] & \neq & 0 \\ [\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}] & = & 0 \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c} i = 1,2,3 \\ \alpha,\ \beta = 2,3 \end{array} \quad \text{und} \quad [a] = a^+ - a^- \tag{5.5}$$

auftreten (Abb. 5.3), der durch die Anreicherungsfunktion abzubilden ist.

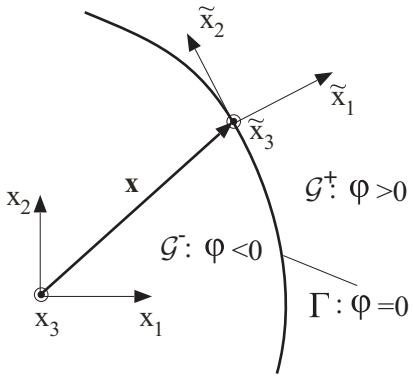


Abbildung 5.3: Verzerrungssprung an einer Materialgrenze

Anreicherungsfunktion

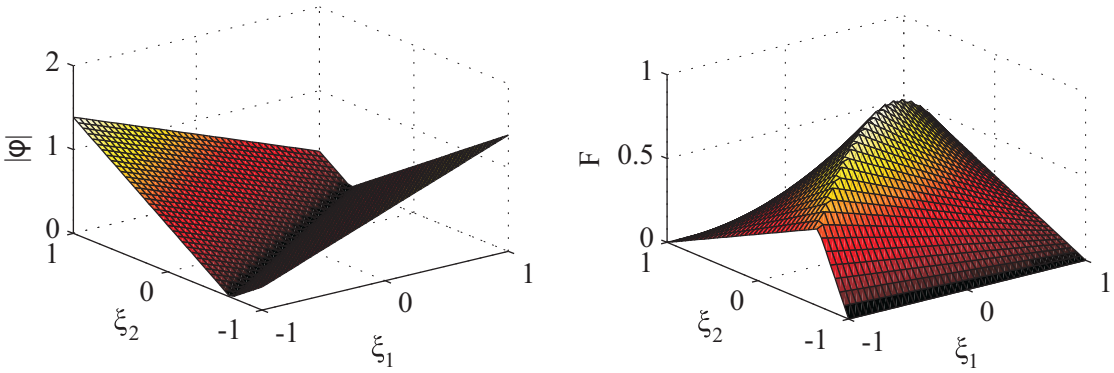
Betrachtet man den Betrag des Abstands $|\varphi|$ zu einer Materialgrenze, der in Abb. 5.4(a) in den natürlichen Koordinaten ξ_1, ξ_2 (s. Abschnitt 5.2.1) eines ebenen, zweidimensionalen finiten Elements, das von einer schräg zu den Elementkanten verlaufenden Materialgrenze geschnitten wird, dargestellt ist, erkennt man, dass die Ableitung dieser Verteilung die gewünschte Diskontinuität aufweist. Damit ist durch

$$|\varphi| = \left| \sum_i N_i \hat{\varphi}_i \right| \tag{5.6}$$

eine mögliche Anreicherungsfunktion zur Abbildung des Verzerrungssprungs gegeben. Bezüglich der Implementierung eines X-Elements in einem kommerziellen FE-Programm besitzt dieser Ansatz jedoch einen entscheidenden Nachteil. Das von dem Knoten i beeinflusste Verschiebungsfeld wirkt sich nicht nur auf das von einer Grenzlinie durchzogene Element sondern auch auf die benachbarten Elemente aus. Da zur praktischen Umsetzung der XFEM angestrebt wird, nur diejenigen gewöhnlichen Elemente des regelmäßigen Netzes, die von einer Grenze geschnitten werden, durch X-Elemente zu ersetzen, während die übrige Vernetzung unverändert bleibt, muss die Auswirkung der Anreicherung im Verschiebungsansatz auf diese Elemente beschränkt sein.
In Moes u. a. (2003) wird mit

$$F = \sum_i N_i \left|\hat{\varphi}_i\right| - \left| \sum_i N_i \hat{\varphi}_i \right| \tag{5.7}$$

ein Vorschlag für eine alternative Anreichungsfunktion beschrieben (Abb. 5.4(b)). Es ist zu erkennen,



(a) Verlauf der Anreichungsfunktion $|\varphi|$

(b) Verlauf der Anreichungsfunktion F

Abbildung 5.4: Verlauf möglicher Anreicherungsfunktionen zur Modellierung des Verzerrungssprungs innerhalb eines ebenen zweidimensionalen finiten Elements

dass F für alle Elemente, für deren Knotenwerte $\hat{\varphi}_i\hat{\varphi}_j > 0, i \neq j$ gilt, also für diejenigen Elemente, die nicht von einer Materialgrenze geschnitten werden, verschwindet. Damit ist die Auswirkung der zusätzlichen Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{a}}_i$ auf die Elemente im Bereich der Diskontinuität der Materialparameter beschränkt. In Abb. 5.4(b) wird anhand der Darstellung des Verlaufs von F in einem zweidimensionalen Elementbereich deutlich, dass auch auf den Rändern des X-Elements, die keine Schnittpunkte mit der Materialgrenze aufweisen, $F = 0$ gilt. Dadurch wird auch die Kompatibilität des Verschiebungsverlaufs zu den benachbarten gewöhnlichen finiten Elementen gesichert. Moes u. a. (2003) beschreiben zudem das bei Verwendung der Funktion F gegenüber $|\varphi|$ verbesserte Konvergenzverhalten.
In Abb. 5.5 sind abschließend die Richtungsableitungen der Anreicherungsfunktion F

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}^\Gamma} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} n_1^\Gamma + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} n_2^\Gamma \tag{5.8}$$

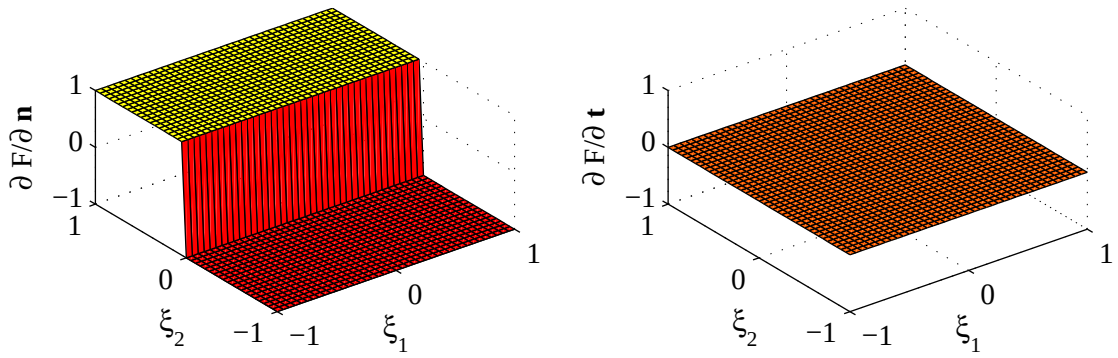
$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{t}^\Gamma} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} t_1^\Gamma + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} t_2^\Gamma \tag{5.9}$$

in Richtung des Normalen- $\mathbf{n}^\Gamma$ und Tangentenvektors $\mathbf{t}^\Gamma$ der Materialgrenze Γ für zwei verschiedene Verläufe innerhalb eines ebenen zweidimensionalen Elements dargestellt. Die Grafiken zeigen deutlich, dass die Unstetigkeit der Ableitungen nur senkrecht zu einer Grenzfläche auftritt.

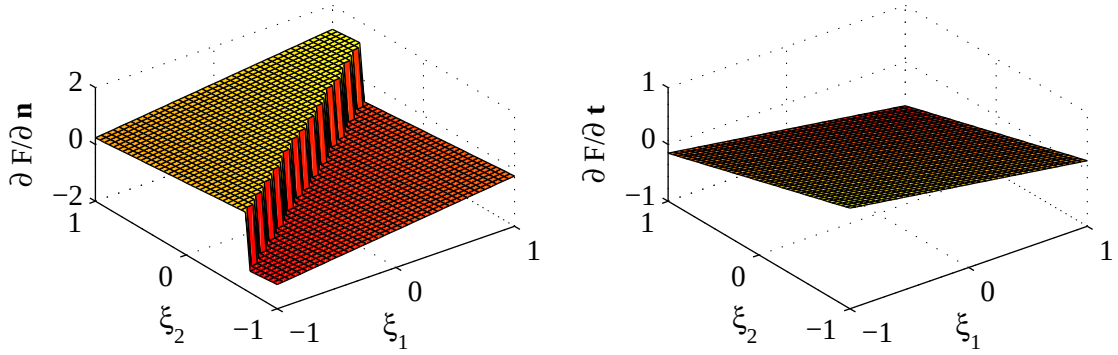
5.2 Formulierung von X-Elementen mit erweitertem Verschiebungsansatz

Einführung

Wie in der Einführung von Abschnitt 5.1 erläutert wurde, erfolgt die programmtechnische Umsetzung der XFEM durch die Definition eines neuen, X-Element genannten Elementtyps. Besonders vorteilhaft für die Implementierung ist dabei die Eigenschaft der Anreicherungsfunktion (5.7), den Einfluss des erweiterten Verschiebungsansatzes auf ein von einer Materialgrenze geschnittenes Element zu begrenzen. Dadurch sind keine weiteren Übergangselemente erforderlich. Für den Einsatz des neuen Elementtyps



(a) Materialgrenze parallel zu den Elementkanten, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}^\Gamma}(\boldsymbol{\xi})$ (b) Materialgrenze parallel zu den Elementkanten, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}^\Gamma}(\boldsymbol{\xi})$



(c) Materialgrenze schräg zu den Elementkanten, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}^\Gamma}(\boldsymbol{\xi})$ (d) Materialgrenze schräg zu den Elementkanten, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}^\Gamma}(\boldsymbol{\xi})$

Abbildung 5.5: Verlauf der partiellen Ableitungen der Anreicherungsfunktion bei verschiedenen Verläufen der Materialgrenze innerhalb eines ebenen zweidimensionalen finiten Elements

in einem kommerziellen FE-Programm soll in diesem Abschnitt die Tangentensteifigkeitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\mathrm{E}}$ eines X-Elements zur Abbildung von Materialgrenzen

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\mathrm{E}} = \int_{V^{\mathrm{E}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{T}\, \underline{\underline{\mathbf{C}}}\, \underline{\underline{\mathbf{B}}}\, dV \tag{5.10}$$

zur Verfügung gestellt werden. Dazu ist zunächst die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ unter Berücksichtigung des erweiterten Verschiebungsansatzes zu berechnen. Die Materialtangentensteifigkeitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ folgt aus den Materialmodellen der Verbundkomponenten (vgl. Abschnitt 4.3.3). Da sowohl $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ als auch $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ innerhalb des Elements eine Unstetigkeit aufweisen, erfolgt die numerische Integration durch Zerlegung des quaderförmigen Elements V^{E} in n^{T} tetraederförmige Teilbereiche V_i^{T}, in denen herkömmliche Quadraturformeln angewendet werden können

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^{n^{\mathrm{T}}} \int_{V_i^{\mathrm{T}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{T}\, \underline{\underline{\mathbf{C}}}\, \underline{\underline{\mathbf{B}}}\, dV. \tag{5.11}$$

5.2.1 X-Element

Achtknotenelement

Ausgangspunkt für die Berechnung der Tangentensteifigkeitsmatrix des X-Elements ist ein gewöhnliches Achtknotenelement, das gemäß dem isoparametrischen Konzept (Bathe (2002); Cook u. a. (2002); Zienkiewicz (1977)) die gleichen Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned} N_1(\boldsymbol{\xi}) &= \tfrac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3) & N_2(\boldsymbol{\xi}) &= \tfrac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3) \\ N_3(\boldsymbol{\xi}) &= \tfrac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_3) & N_4(\boldsymbol{\xi}) &= \tfrac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_3) \\ N_5(\boldsymbol{\xi}) &= \tfrac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_3) & N_6(\boldsymbol{\xi}) &= \tfrac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_3) \\ N_7(\boldsymbol{\xi}) &= \tfrac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3) & N_8(\boldsymbol{\xi}) &= \tfrac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3) \end{aligned} \tag{5.12}$$

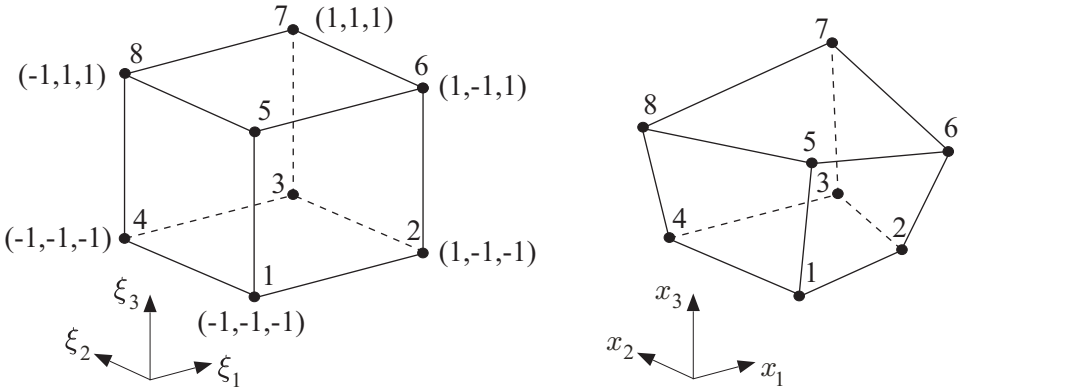
zur Abbildung der Geometrie

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\boldsymbol{\xi})\hat{\mathbf{x}}_i \tag{5.13}$$

zwischen den physikalischen Koordinaten $\mathbf{x}$ und den natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ ($-1 \leq \xi_i \leq +1$) des Elements sowie zur Interpolation des Verschiebungsfeldes

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\boldsymbol{\xi})\hat{\mathbf{u}}_i \tag{5.14}$$

verwendet. Dabei sind $\hat{\mathbf{x}}_i$ die Koordinaten der acht Knoten des Elements und $\hat{\mathbf{u}}_i$ die zugehörigen Knotenverschiebungsvektoren. Abb. 5.6(a) zeigt die würfelförmige Geometrie des Elements in den natürlichen Koordinaten sowie die Anordnung der Knoten. Abhängig von der Lage der Knoten im physikalischen Bereich, nimmt das Element eine im Allgemeinen nicht quaderförmige Konfiguration an (Abb. 5.6(b)). Während die Elementkanten nach wie vor Geraden sind, können dabei gekrümmte Begrenzungsflächen auftreten.



(a) Achtknotenelement, natürliche Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ (b) Achtknotenelement, physikalische Koordinaten $\mathbf{x}$

Abbildung 5.6: Isoparametrisches Achtknotenelement

Infolge des erweiterten Verschiebungsansatzes des X-Elements

$\underline{\underline{\mathbf{B}}}$-Matrix

$$\mathbf{u}^{\text{X-Element}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\boldsymbol{\xi}) \left[\hat{\mathbf{u}}_i + \hat{\mathbf{a}}_i F(\boldsymbol{\xi})\right] \tag{5.15}$$

existieren an allen acht Knoten zusätzliche Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{a}}_i$, die mit dem Produkt $N_i F$ der in Abschnitt 5.1.3 beschriebenen Anreicherungsfunktion F (5.7) und der Formfunktionen N_i des Achtknotenelements (5.12) gewichtet werden. Da die Anreicherung alle Knoten des X-Elements umfasst, kann im Gegensatz zu (5.1) auf eine getrennte Summation von gewöhnlichen und zusätzlichen Freiheitsgraden verzichtet werden. In der nachfolgend für die Herleitung der FE-Formulierung verwendeten Vektor-Matrixnotation lautet der angereicherte Verschiebungsansatz

$$\underline{\mathbf{u}}^{\text{X-Element}}(\boldsymbol{\xi}) = \underline{\underline{\mathbf{N}}}(\boldsymbol{\xi})\hat{\underline{\mathbf{d}}} \tag{5.16}$$

mit der erweiterten Matrix der Formfunktionen

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_1F & 0 & 0 & \dots & N_8F & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_1F & 0 & \dots & 0 & N_8F & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_1F & \dots & 0 & 0 & N_8F \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

und dem verallgemeinerten Vektor der Elementverschiebungen

$$\hat{\underline{\mathbf{d}}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{u}}}_1^T & \hat{\underline{\mathbf{a}}}_1^T & \dots & \hat{\underline{\mathbf{u}}}_i^T & \hat{\underline{\mathbf{a}}}_i^T & \dots & \hat{\underline{\mathbf{u}}}_8^T & \hat{\underline{\mathbf{a}}}_8^T \end{bmatrix}^T. \tag{5.18}$$

Im Folgenden soll die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ hergeleitet werden, die den Zusammenhang

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\boldsymbol{\xi}) = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\,(\boldsymbol{\xi})\,\hat{\underline{\mathbf{d}}}. \tag{5.19}$$

zwischen dem in (4.102) definierten Verzerrungsvektor $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und dem erweiterten Verschiebungsvektor des Elements $\hat{\underline{\mathbf{d}}}$ herstellt (vgl. (4.101)). Dazu sind zunächst die infinitesimalen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (2.4) mit dem Vektor des Verschiebungsgradienten

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T \tag{5.20}$$

in Matrixform

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \tag{5.21}$$

zu schreiben Die Operatormatrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ enthält dabei nur die Werte Null und Eins und sichert die korrekte Zuordnung zwischen den Koordinaten des Verzerrungsvektors und denen des Verschiebungsgradientenvektors. Aufgrund der Interpolation des Verschiebungsfeldes durch Formfunktionen in den natürlichen Koordinaten sind die in (5.20) enthaltenen partiellen Ableitungen durch Anwendung der Kettenregel

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

oder in abgekürzter Form

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{5.23}$$

zu bestimmen, wobei die sogenannte JACOBI-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square}$ die partiellen Ableitungen bezüglich der jeweiligen Koordinaten des Achtknotenelements miteinander verknüpft. Da zwischen den natürlichen

und physikalischen Koordinaten eine Transformationsbeziehung in Form der Geometrieinterpolation (5.13) existiert, folgt mit den bekannten Formfunktionen $N_i(\boldsymbol{\xi})$, den Koordinatenvektoren $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_i$ der Knoten des Elements sowie der abkürzenden Schreibweise $\partial()/\partial\xi_i = ()_{,\xi_i}$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} N_{1,\xi_1} & N_{2,\xi_1} & \dots & N_{8,\xi_1} \\ N_{1,\xi_2} & N_{2,\xi_2} & \dots & N_{8,\xi_2} \\ N_{1,\xi_3} & N_{2,\xi_3} & \dots & N_{8,\xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1^T \\ \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\hat{\mathbf{x}}}_8^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

Ihre Determinante $J^{\square} = \det\left(\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square}\right)$ kann als Verhältnis der differentiellen Volumenelemente des physikalischen und numerischen Bereichs interpretiert werden und ist bei der Integration durch

$$\int_{V_e} dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_{V_e^{\square}} J^{\square}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \tag{5.25}$$

zu berücksichtigen.
Im vorliegenden Fall sind jedoch die partiellen Ableitungen bezüglich der natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ bekannt und die bezüglich der physikalischen $\mathbf{x}$ gesucht, deshalb wird die inverse Darstellung

$$\underline{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square^{-1}}\, \underline{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}}} \tag{5.26}$$

benötigt. Die Inverse $\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square^{-1}}$ der Jacobi-Matrix existiert, wenn die Zuordnung zwischen den natürlichen und den globalen Koordinaten eindeutig ist, was hier vorausgesetzt wird.
Damit folgt für den Zusammenhang der partiellen Ableitungen der Verschiebungen bezüglich der beiden Koordinatensysteme (vgl. (5.20))

$$\underline{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square^{-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square^{-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square^{-1}} \end{bmatrix} \underline{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}}}. \tag{5.27}$$

Der Vektor des Verschiebungsgradienten $\underline{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}}}$ in natürlichen Koordinaten ergibt sich aus

$$\underline{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}}} = \underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}}\, \underline{\hat{\mathbf{d}}}, \tag{5.28}$$

wobei die Matrix

$$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi_1} & 0 & 0 & (N_1F)_{,\xi_1} & 0 & 0 & \dots & (N_8F)_{,\xi_1} & 0 & 0 \\ N_{1,\xi_2} & 0 & 0 & (N_1F)_{,\xi_2} & 0 & 0 & \dots & (N_8F)_{,\xi_2} & 0 & 0 \\ N_{1,\xi_3} & 0 & 0 & (N_1F)_{,\xi_3} & 0 & 0 & \dots & (N_8F)_{,\xi_3} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi_1} & 0 & 0 & (N_1F)_{,\xi_1} & 0 & \dots & 0 & (N_8F)_{,\xi_1} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi_2} & 0 & 0 & (N_1F)_{,\xi_2} & 0 & \dots & 0 & (N_8F)_{,\xi_2} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi_3} & 0 & 0 & (N_1F)_{,\xi_3} & 0 & \dots & 0 & (N_8F)_{,\xi_3} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi_1} & 0 & 0 & (N_1F)_{,\xi_1} & \dots & 0 & 0 & (N_8F)_{,\xi_1} \\ 0 & 0 & N_{1,\xi_2} & 0 & 0 & (N_1F)_{,\xi_2} & \dots & 0 & 0 & (N_8F)_{,\xi_2} \\ 0 & 0 & N_{1,\xi_3} & 0 & 0 & (N_1F)_{,\xi_3} & \dots & 0 & 0 & (N_8F)_{,\xi_3} \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

die partiellen Ableitungen der Formfunktionen $N_i(\boldsymbol{\xi})$ und des Produkts $N_i(\boldsymbol{\xi})\, F(\boldsymbol{\xi})$ enthält.
Die gesuchte Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ erhält man schließlich durch die Kombination der Zwischenergebnisse (5.21), (5.27) und (5.28)

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square^{-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square^{-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square^{-1}} \end{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}}}_{\underline{\underline{\mathbf{B}}}} \underline{\hat{\mathbf{d}}}. \tag{5.30}$$

Für ihre Größe folgt aus den zu multiplizierenden Matrizen $[6 \times 9]$, $[9 \times 9]$ und $[9 \times 48]$ schließlich $[6 \times 48]$. Sie verknüpft die sechs unabhängigen Elementverzerrungen mit den 48 Knotenfreiheitsgraden des Elements.

Vollständigkeit und Kompatibilität

Zur Sicherung der monotonen Konvergenz einer FE-Berechnung werden nach Bathe (2002) die Vollständigkeit und die Kompatibilität des Verschiebungsansatzes gefordert, wobei die Kompatibilität bereits bei der Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit zur Herleitung der FE-Formulierung in Abschnitt 4.3.2 vorausgesetzt wurde. Werden beide Forderungen erfüllt, ist die Konvergenz bei einer Verfeinerung des Berechnungsnetzes gesichert.
Unter der Vollständigkeit des Verschiebungsansatzes ist dabei zu verstehen, dass das Element in der Lage ist, sowohl Starrkörperbewegungen verzerrungsfrei wiederzugeben als auch einen konstanten Verzerrungszustand abzubilden. Diese Forderung kann anhand des linearen Testverschiebungsfeldes

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}. \tag{5.31}$$

diskutiert werden. Dabei bilden $\mathbf{b}$ eine Starrkörpertranslation und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ ein lineares Verschiebungsfeld ab. Wertet man das Verschiebungsfeld an den Knoten eines Elements aus, erhält man die Knotenverschiebungen

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i. \tag{5.32}$$

Der Verschiebungsansatz eines Elements ist dann vollständig, wenn er unter Verwendung der Knotenverschiebungen (5.32) das Verschiebungsfeld (5.31) liefert. Für die Interpolation des Verschiebungsfeldes der gewöhnlichen FEM $\mathbf{u} = \sum_i N_i \hat{\mathbf{u}}_i$ führt diese Forderung auf

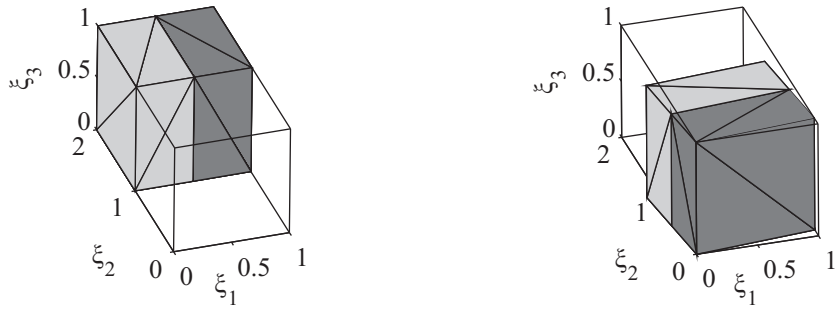
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i (\mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{b} \sum_i N_i + \mathbf{A} \cdot \left(\sum_i N_i \hat{\mathbf{x}}_i \right). \tag{5.33}$$

Die Bedingung (5.33) ist für isoparametrische Elemente durch die Eigenschaft der Formfunktionen $\sum N_i = 1$ und die Verwendung der gleichen Interpolation sowohl für die Geometrie als auch für das Verschiebungsfeld des Elements stets erfüllt.
Betrachtet man nun den erweiterten Verschiebungsansatz des X-Elements (5.15), wird deutlich, dass die Anreicherung die Vollständigkeit des Verschiebungsfeldes stört

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i (\mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i + \hat{\mathbf{a}}_i F) = \mathbf{b} \sum_i N_i + \mathbf{A} \cdot \left(\sum_i N_i \hat{\mathbf{x}}_i \right) + \sum_i N_i \hat{\mathbf{a}}_i F, \tag{5.34}$$

da die Erweiterung dazu eingeführt wurde, ein unstetiges Verzerrungsfeld innerhalb des Elements abzubilden. Untersuchungen an einem einzelnen X-Element zeigen jedoch, dass das Element unabhängig von der Lage der Materialgrenze und den Materialeigenschaften in den beiden Materialbereichen bei

Verwendung einer ausreichenden Integrationsordnung in der Lage ist, beliebige Starrkörperverschiebungen und infinitesimale Starrkörperroationen verzerrungsfrei wiederzugeben (Abb. 5.7). In diesem Fall ergibt sich $\hat{\mathbf{a}}_i = \mathbf{0}$. Damit verschwindet der Anreicherungsterm in Gleichung (5.34) und die Vollständigkeit des Verschiebungsfeldes bei Starrkörperbewegungen ist gesichert.



(a) Starrkörpertranslation (b) Starrkörperrotation

Abbildung 5.7: Verzerrungsfreie Starrkörperbewegungen des X-Elements

Werden in beiden Materialbereichen gleiche konstitutive Eigenschaften vorausgesetzt und das Element homogen beansprucht, liefert die Rechnung außerdem ein konstantes Verzerrungsfeld innerhalb des Elements mit $\hat{\mathbf{a}}_i = \mathbf{0}$. Damit ist auch in diesem Fall die Vollständigkeit des Verschiebungsansatzes gewährleistet.
Für den inhomogenen Fall ist die Diskussion der Vollständigkeit für ein einzelnes X-Element nicht zielführend, da in diesem Element die Diskontinuität des Verzerrungsfeldes modelliert wird. Allerdings demonstriert Gleichung (5.34) einen wesentlichen Vorteil der Anreicherungsfunktion (5.7). Durch die Begrenzung des erweiterten Verschiebungsansatzes auf das von der Diskontinuität betroffene Element können in der Umgebung der Materialgrenze gewöhnliche isoparametrische finite Elemente verwendet werden, die entsprechend (5.33) die Forderung nach Vollständigkeit des Verschiebungsansatzes erfüllen. Eine Konvergenzuntersuchung in Moes u. a. (2003), bei der das Verhalten der XFEM bei Verwendung der Anreicherungsfunktionen nach (5.6) und (5.7) mit der gewöhnlichen FEM verglichen wird, zeigt ein ähnliches Konvergenzverhalten von FEM und XFEM mit (5.7), da der Einfluss der Anreicherungsfunktion in diesem Fall auf die von einer Materialgrenze betroffenen Element beschränkt bleibt.
Die Anforderungen hinsichtlich der Kompatibilität des Verschiebungsfeldes werden im Rahmen der Assemblierung des Gesamtgleichungssystems in Abschnitt 5.3.3 behandelt.

5.2.2 Numerische Integration

Aufteilung in Integrationsbereiche

Infolge der zur Modellierung des Steifigkeitssprungs gewählten Anreicherung weist der Integrand der Steifigkeitsmatrix innerhalb eines Elements Unstetigkeiten auf. Zur numerischen Integration wird das Element deshalb mittels einer dreidimensionalen Form der DELAUNAY-Zerlegung, die in Abschnitt 5.3.2 beschrieben wird, in n^{T} tetraederförmige Integrationsbereiche

$$\int_{V^{\mathrm{E}}} dV = \sum_{i=1}^{n^{\mathrm{T}}} \int_{V_i^{\mathrm{T}}} dV, \tag{5.35}$$

die einen stetigen Integranden aufweisen, unterteilt. Innerhalb dieser Bereiche können dann bekannte Quadraturformeln zur Integration genutzt werden.

Funktionaldeterminante der Tetraeder

Durch die Aufteilung des Integrationsbereiches V^{E} entstehen geradlinig berandete Tetraeder (Abb. 5.8). Da die Beschreibung des Tetraederbereichs in den natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\eta}$ ($0 \leq \eta_i \leq 1$ und $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \leq 1$) erfolgt, ist bei der numerischen Integration, aufgrund der Transformation zwischen dem $\boldsymbol{\eta}$- und dem $\boldsymbol{\xi}$-System, neben der JACOBI-Determinante des quaderförmigen Elements auch die Funktionaldeterminante $J^{\triangle}$ des Tetraeders zu beachten. Für das differentielle Volumenelement gilt daher

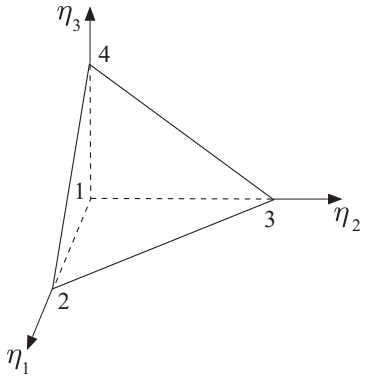


Abbildung 5.8: Geometrie der zur Integration genutzten Tetraeder in natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\eta}$

$$dV = J^{\square} d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = J^{\square}\, J^{\triangle} d\eta_1\, d\eta_2\, d\eta_3. \tag{5.36}$$

Die Determinante $J^{\triangle} = \det\left(\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\triangle}\right)$ der durch

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial \eta}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\triangle} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial \xi}} \tag{5.37}$$

definierten JACOBI-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\triangle}$ ist aus der Geometrieinterpolation des Tetraeders

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^{4} N_i^{\triangle}(\boldsymbol{\eta})\, \hat{\boldsymbol{\xi}}_i, \tag{5.38}$$

die mit den Formfunktionen $N_i^{\triangle}(\boldsymbol{\eta})$

$$\begin{aligned} N_1^{\triangle}(\boldsymbol{\eta}) &= 1 - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 & N_2^{\triangle}(\boldsymbol{\eta}) &= \eta_1 \\ N_3^{\triangle}(\boldsymbol{\eta}) &= \eta_2 & N_4^{\triangle}(\boldsymbol{\eta}) &= \eta_3 \end{aligned} \tag{5.39}$$

erfolgt, zu ermitteln. In Analogie zu (5.24) erhält man unter Berücksichtigung der linearen Funktionen in (5.39)

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\triangle} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_1^T \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_2^T \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_3^T \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_4^T \end{bmatrix}. \tag{5.40}$$

Quadratur

Die Integration der Elementsteifigkeitsmatrix erfolgt nun durch Anwendung von Quadraturformeln in den Tetraederbereichen. Dadurch wird das Integral zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix (5.10) in die Summe

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \sum_{i=1}^{n^{\mathrm{T}}} \sum_{j=1}^{n^{\mathrm{Int}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \left(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}_j)\right) \, \underline{\underline{\mathbf{C}}} \, \underline{\underline{\mathbf{B}}} \left(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}_j)\right) \, J^{\square} w_j \frac{1}{6} J_i^{\triangle}, \tag{5.41}$$

der Beiträge der n^{Int} Integrationspunkte aller n^{T} Tetraeder überführt. Dabei sind $\boldsymbol{\eta}_j$ die Position des j-ten Integrationspunkts in den natürlichen Tetraederkoordinaten und w_j das zu diesem Integrationspunkt gehörende Gewicht. Zu beachten ist, dass der tetraederförmige Integrationsbereich wegen

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \leq 1 \tag{5.42}$$

nur ein Sechstel des von den Flächen $\eta_1 = 0, \eta_1 = 1$ und $\eta_2 = 0, \eta_2 = 1$ sowie $\eta_3 = 0, \eta_3 = 1$ begrenzten Würfels umfasst. Deshalb ist statt $J^{\triangle}$ lediglich $\frac{1}{6} J^{\triangle}$ in der Summe von Gleichung (5.41) zu berücksichtigen.

5.2.3 Mechanisches Verhalten von X-Elementen und Wahl der Integrationsordnung

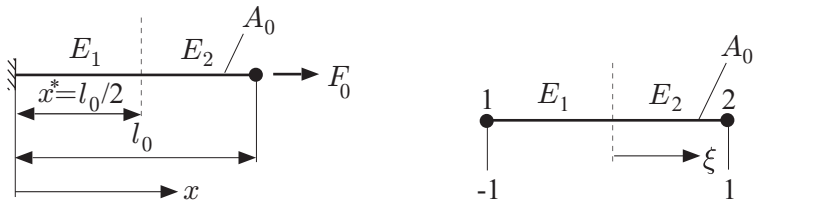
Integrationsordnung

Betrachtet man die Struktur der Matrix $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}}$ in (5.29) so wird deutlich, dass die höchsten Ordnungen von ξ_1, ξ_2 und ξ_3 durch Ausdrücke der Form $(N_i F)_{,\xi_j}$ bestimmt werden, die maximal Terme $\xi_1\xi_2^2\xi_3^2$, $\xi_1^2\xi_2\xi_3^2$ oder $\xi_1^2\xi_2^2\xi_3$ enthalten. Zur exakten Integration ist für ein quaderförmiges Element, bei dem die Inverse $\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{\square -1}$ der JACOBI-Matrix lediglich Konstanten enthält, im linear elastischen Fall aufgrund der quadratischen Form $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}} \, \underline{\underline{\mathbf{B}}}$ des Integranden eine Quadraturformel mit dem Genauigkeitsgrad vier erforderlich.
Da die numerische Integration mit steigender Ordnung des exakt integrierbaren Polynoms die Auswertung des Integranden an immer mehr Stützstellen erfordert, vergrößert sich auch der numerische Aufwand zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix. Um diesen Aufwand reduzieren zu können, wird im Rahmen dieser Arbeit eine reduzierte Integrationsordnung verwendet. Ihre Auswirkungen auf das Berechnungsergebnis sind, bedingt durch die Aufteilung des Elements in Integrationsbereiche, als gering zu bewerten, da durch diese Unterteilung des Integrationsgebiets Teilbereiche entstehen, in denen der Integrand bereits durch eine niedrigere Polynomordnung mit ausreichender Genauigkeit approximiert werden kann.

Stabproblem

Die Auswahl eines geeigneten Integrationsverfahrens soll im Folgenden anhand des eindimensionalen Stabproblems motiviert werden. Gegeben ist dazu ein aus zwei Materialien mit den Elastizitätsmoduln $E_1 = E_0$ und $E_2 = 5E_0$ zusammengesetzter Stab mit der konstanten Querschnittsfläche A_0 und der Länge l_0. Die Materialgrenze befindet sich bei $x^* = \frac{l_0}{2}$ (Abb. 5.9).
Die exakte Lösung für diesen einseitig gelagerten und am freien Ende durch die Kraft F_0 belasteten Stab ist ein bereichsweise linearer Verschiebungsverlauf. Die Dehnung $\varepsilon(x)$ weist einen Sprung an der Stelle x^* auf, der durch die Modellierung mittels XFEM darstellbar ist. Neben diesem Dehnungssprung sollte auch die Verschiebung des Stabendes

$$u\left(x = l_0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}\right)\frac{F_0}{A_0} l_0 = \frac{3}{5}\frac{F_0}{E_0 A_0} l_0 = \frac{3}{5} u_0 \text{ mit } u_0 = \frac{F_0}{E_0 A_0} \tag{5.43}$$



(a) Stabproblem (b) Stabelement, natürliche Koordinate ξ

Abbildung 5.9: Aus zwei Materialien zusammengesetzter Stab der Länge l_0

korrekt vorhergesagt werden.
Bevor das Verhalten des dreidimensionalen Volumenelements untersucht wird, soll das Problem mithilfe eines Stabelements mit dem erweiterten Verschiebungsansatz

$$u^{\text{Stabelement}}(\xi) = \sum_{i=1}^{2} N_i(\xi)\left[\hat{u}_i + \hat{a}_i F(\xi)\right] \tag{5.44}$$

analysiert werden. Die Anreicherungsfunktion F entsprechend Gleichung (5.7) ist im einachsigen Fall

$$F(\xi) = N_1(\xi)|\hat{\varphi}_1| + N_2(\xi)|\hat{\varphi}_2| - |N_1(\xi)\hat{\varphi}_1 + N_2(\xi)\hat{\varphi}_2| \tag{5.45}$$

in der Lage, den zur Modellierung des Dehnungssprungs erforderlichen, bereichsweise linearen Verlauf innerhalb des Elements abzubilden. Dabei sind

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \text{und} \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{5.46}$$

die Formfunktionen des Stabelements. Unter Beachtung dieser Funktionen folgt aus dem Anreicherungsterm des Verschiebungsansatzes

$$u^{\text{Anr.}}(\xi) = \hat{a}_1 N_1(\xi)F(\xi) + \hat{a}_2 N_2(\xi)F(\xi) = \frac{1}{2}\left[(\hat{a}_1+\hat{a}_2)F(\xi) - (\hat{a}_1-\hat{a}_2)\xi F(\xi)\right], \tag{5.47}$$

dass zur korrekten Abbildung des bereichsweise linearen Verschiebungsverlaufs, unabhängig von der Lage der Materialgrenze, die Bedingung

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_2 \tag{5.48}$$

zu erfüllen ist. Dieses Ergebnis sollte sich ohne Definition weiterer Zwangsbedingung aus der Lösung des FE-Gleichungssystems ergeben. Da Kopplungen zwischen gewöhnlichen und zusätzlichen Freiheitsgraden auftreten, erfordern die Erfüllung dieser Bedingung sowie die korrekte Vorhersage der Verschiebung des Stabendes die Wahl einer ausreichend hohen Integrationsordnung. Um die Steifigkeitsmatrix exakt zu integrieren, ist eine zweiter Ordnung genaue Quadraturformel erforderlich.

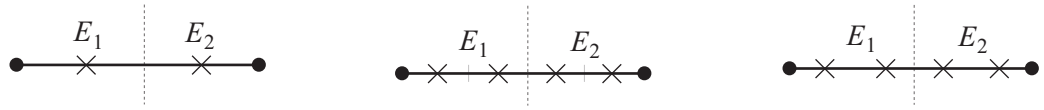
Einfluss der Integrationsordnung

Im Folgenden soll das mechanische Verhalten des Stabelements in Abhängigkeit der verwendeten Quadraturformeln erster und zweiter Ordnung untersucht werden. Dazu wird zunächst das Verhalten eines Elements ohne Anreicherung des Verschiebungsansatzes diskutiert, das jedoch in zwei Integrationsbereiche mit den entsprechenden Materialeigenschaften aufgeteilt ist (Abb. 5.10(a)). Neben der Verschiebung $\hat{u}_1 = 0$ sind in diesem Fall auch die Werte der zusätzlichen Freiheitsgrade $\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = 0$ vorgeschrieben. Die verbleibende Koordinate der Elementsteifigkeitsmatrix kann durch Anwendung

der GAUSS-Quadratur mit einem Integrationspunkt je Materialbereich integriert werden. Die Auswertung des Integranden in beiden Materialbereichen führt zu einer Mittelung der Steifigkeiten und man erhält für die Verschiebung

$$\hat{u}_2 = \frac{F_0}{\bar{E}A_0} l_0 = \frac{F_0}{3E_0A_0} l_0 = \frac{1}{3} u_0 \neq u\left(l_0\right). \tag{5.49}$$

Trotz separater Integration unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Steifigkeiten ist das Element ohne die Anreicherung also nicht in der Lage die Gesamtverschiebung korrekt vorherzusagen (Abb. 5.11(a)). Deshalb werden nun die Zwangsbedingungen für die zusätzlichen Freiheitsgrade fallengelassen.
Wird in den beiden Teilbereichen nach wie vor nur ein Integrationsverfahren erster Ordnung verwendet (Abb. 5.10(a)), ist die resultierende Steifigkeitsmatrix infolge der Anreicherung singulär, da für die drei noch zu bestimmenden Freiheitsgrade ($\hat{u}_2, \hat{a}_1$ und $\hat{a}_2$) nur zwei unabhängige Gleichungen zur Verfügung stehen (vgl. Zienkiewicz (1977)).



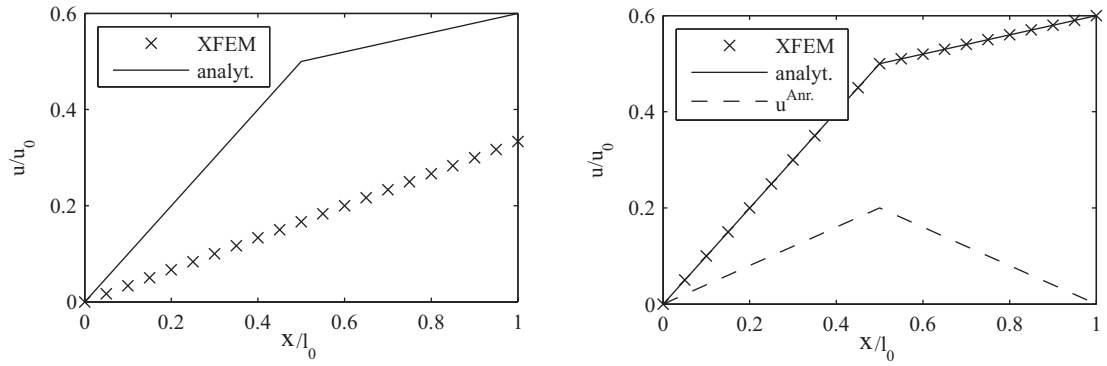
(a) 2 Integrationsbereiche, GAUSS-Quadratur 1. Ordnung (b) 4 Integrationsbereiche, GAUSS-Quadratur 1. Ordnung (c) 2 Integrationsbereiche, GAUSS-Quadratur 2. Ordnung

Abbildung 5.10: Varianten der numerischen Integration in einem Stabelement mit erweitertem Verschiebungsansatz

Die Singularität der Steifigkeitsmatrix kann unter Beibehaltung der Integrationsordnung durch eine weitere Unterteilung der beiden Materialbereiche in je zwei Integrationsbereiche (Abb. 5.10(b)) aufgehoben werden. Obwohl die Quadraturformel bei Verwendung eines Integrationspunkts die quadratischen Anteile des Integranden der Steifigkeitsmatrix nicht exakt integriert, liefert die Aufteilung in vier Integrationsbereiche den korrekten abschnittsweise linearen Verschiebungsverlauf (Abb. 5.11(b)). Die Verschiebung des Stabendes beträgt $\hat{u}_2 = \frac{3}{5} u_0 = u\left(l_0\right)$ und die zusätzlichen Freiheitsgrade entsprechen mit $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$ der Bedingung (5.48). Das gleiche exakte Ergebnis erhält man bei Verwendung von zwei Integrationsbereichen durch eine Erhöhung der Anzahl der Integrationspunkte auf zwei (Abb. 5.10(c)). In diesem Fall wird die Steifigkeitsmatrix exakt integriert.

Volumenelement

Nach der Untersuchung des Verhaltens eines Stabelements soll nun das dreidimensionale X-Element gemäß Abschnitt 5.2.1 zur Modellierung des Stabproblems mit $\nu = 0$ verwendet werden. Das Element mit der Kantenlänge l_0 besitzt eine durch $x_2^* = \frac{l_0}{2}$ definierte, ebene Materialgrenze und wird durch vier gleich große Knotenkräfte, die in der Summe F_0 ergeben, belastet (Abb. 5.12(a)). Für die Integration werden drei in Zienkiewicz (1977) angegebene Quadraturformeln erster, zweiter und dritter Ordnung mit je einem, vier bzw. fünf Integrationspunkten je Tetraeder verwendet. Da das Element infolge der Tetraederzerlegung zwölf Integrationsbereiche aufweist, steht in jedem Fall eine ausreichende Anzahl von Gleichungen zur Berechnung der 48 Freiheitsgrade zur Verfügung. Nach Verhinderung der Starrkörpertranslationen und -rotationen tritt im dreidimensionalen Fall keine Singularität der Steifigkeitsmatrix auf.
Als Kriterien für die Wahl einer ausreichenden Integrationsordnung sollen analog zum eindimensionalen Problem die exakte Abbildung der Stablösung mit einem abschnittsweise linearen Verschiebungsverlauf innerhalb des Elements und $u\left(x_2 = l_0\right) = \frac{3}{5} u_0$ dienen. Dazu ist die Bedingung (5.48) für



(a) Mittelung der Steifigkeiten, GAUSS-Quadratur 1. Ordnung

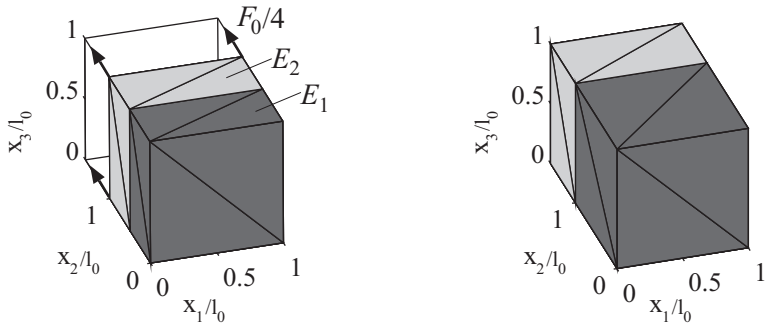
(b) Abschnittsweise linearer Verschiebungsverlauf bei Unterteilung in 4 Integrationsbereiche und GAUSS-Quadratur 1. Ordnung

Abbildung 5.11: Verschiebungsverläufe in einem Stabelement mit erweitertem Verschiebungsansatz

den dreidimensionalen Fall zu verallgemeinern. Aus der Anreicherung des Verschiebungsansatzes in (5.15) folgt unter Berücksichtigung der Eigenschaft der Formfunktionen $\sum N_i = 1$ analog zu (5.48) unabhängig von der Lage der Materialgrenze

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \hat{\mathbf{a}}_2 = \ldots = \hat{\mathbf{a}}_8 = \hat{\mathbf{a}}. \tag{5.50}$$

Die Erfüllung dieser Forderungen kann erst durch Verwendung des Verfahrens dritter Ordnung gesichert werden, dagegen führt die Anwendung der Verfahren niedrigerer Ordnung zu falschen Ergebnissen für die Verschiebung. Abb. 5.12 zeigt die berechnete, deformierte Konfiguration des in Tetraeder zerlegten Elements. Dabei ist die unterschiedliche Steifigkeit der beiden farblich gekenn-



(a) Undeformierte Konfiguration

(b) Deformierte Konfiguration

Abbildung 5.12: Deformationsverhalten des X-Elements

zeichneten Materialbereiche deutlich erkennbar. Die Verschiebung der Seitenfläche $x_2 = l_0$ beträgt $u\,(x_2 = l_0) = \frac{3}{5}u_0$ und die Vektoren der zusätzlichen Freiheitsgrade erfüllen die Bedingung (5.50).
Die für beliebige Verläufe der Materialgrenze innerhalb des dreidimensionalen Elements oder bei

Berücksichtigung der Querkontraktion auftretenden Verzerrungsfelder werden von den bisher betrachteten bereichsweise konstanten Werten abweichen, so dass die Bedingung (5.50) nicht mehr als Kriterium für die Qualität der Approximation dienen kann. Da diese Verzerrungsfelder im Allgemeinen durch die Anreicherungsfunktion nicht mehr exakt abgebildet werden können und außerdem eine weitere Erhöhung der Integrationsordnung mit einer überproportionalen Zunahme der auszuwertenden Integrationspunkte verbunden wäre, wird das Verfahren dritter Ordnung standardmäßig zur Berechnung der Elementmatrizen verwendet, da es einen vernüftigen Kompromiss zwischen Anzahl der Integrationspunkte und Integrationsordnung bietet.

5.2.4 2X-Element

Innerhalb des zu modellierenden Gebiets V existieren in der Regel eine Reihe von Materialgrenzen (Abb. 5.13), so dass der Verschiebungsansatz der XFEM (5.1) in verallgemeinerter Form als

$$\mathbf{u}^{\text{XFEM}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n^{\text{K}}} N_i \hat{\mathbf{u}}_i}_{\text{FEM}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n^{\text{I}}} \sum_{k \in \mathcal{K}_j^{\text{Anr}}} \left(N_k \hat{\mathbf{a}}_k F_j\right)}_{\text{Anreicherung}} \tag{5.51}$$

geschrieben werden kann. Dabei bezeichnet n^{I} die Anzahl der Materialgrenzen in V. Die Summation über $k \in \mathcal{K}_j^{\text{Anr}}$ umfasst alle Knoten, deren Einflussgebiet von der j-ten Materialgrenze geschnitten wird. Die programmtechnische Umsetzung eines derart allgemeinen Verschiebungsansatzes in einem kommerziellen FE-Programm würde bedeuten, dass innerhalb eines Elements $0 \leq n^{\text{I,E}} \leq n^{\text{I}}$ verschiedene Materialgrenzen zu modellieren wären. Die damit verbundenen unterschiedlichen Elementtypen und der entsprechend komplexe Assemblierungsprozess erscheinen nicht praktikabel.
Sollte die Modellierung andererseits mit einem regelmäßigen Berechnungsnetz erfolgen, das nur gewöhnliche und X-Elemente enthält, wäre die Vernetzung so fein zu wählen, dass je Element nur eine Materialgrenze auftritt. Daraus ergeben sich starke Einschränkungen bei der Netzgenerierung und die Modellierung der bei textilverstärkten Polymeren häufig auftretenden Berührungsstellen zwischen einzelnen Rovings (Abb. 5.13) wäre nicht möglich.
Um die an dieser Stelle entstehenden Verzweigungen einer Roving-Roving-Grenzfläche in zwei Roving-Matrix-Grenzflächen abzubilden, gleichzeitig jedoch die Vielfalt der Elementtypen zu beschränken, kommt eine Weiterentwicklung des X-Elements zum Einsatz. Dieses so genannte 2X-Element ermöglicht durch eine weitere Anreicherung des Verschiebungsansatzes die Abbildung von zwei unabhängigen oder sich verzweigenden Materialgrenzen innerhalb eines Elements. Der Verschiebungsansatz lautet in diesem Fall

$$\mathbf{u}^{\text{2X-Element}}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \sum_{i=1}^{8} N_i\left(\boldsymbol{\xi}\right) \left[\hat{\mathbf{u}}_i + \hat{\mathbf{a}}_i F_1\left(\boldsymbol{\xi}, \varphi_1(\boldsymbol{\xi})\right) + \hat{\mathbf{b}_i} F_2\left(\boldsymbol{\xi}, \varphi_2(\boldsymbol{\xi})\right)\right]. \tag{5.52}$$

Dabei enthält der erweiterte Verschiebungsansatz analog zu Gleichung (5.15) zusätzliche Knotenfreiheitsgrade $\hat{\mathbf{a}}_i$ und $\hat{\mathbf{b}}_i$. Diese werden mit Ansatzfunktionen $F_1\left(\boldsymbol{\xi}, \varphi_1(\boldsymbol{\xi})\right)$ und $F_2\left(\boldsymbol{\xi}, \varphi_2(\boldsymbol{\xi})\right)$ gewichtet, die je einer der beiden Materialgrenzen zugeordnet sind. Die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix erfolgt analog zu Abschnitt 5.2.1.
Eine weitere Erhöhung der Anzahl der in einem Element zu modellierenden Materialgrenzen ist sowohl aus programmtechnischer als auch aus mechanischer Sicht nicht sinnvoll, da die Komplexität der resultierenden Verschiebungs- und Verzerrungsfelder nicht mit ausreichender Genauigkeit abzubilden wäre.

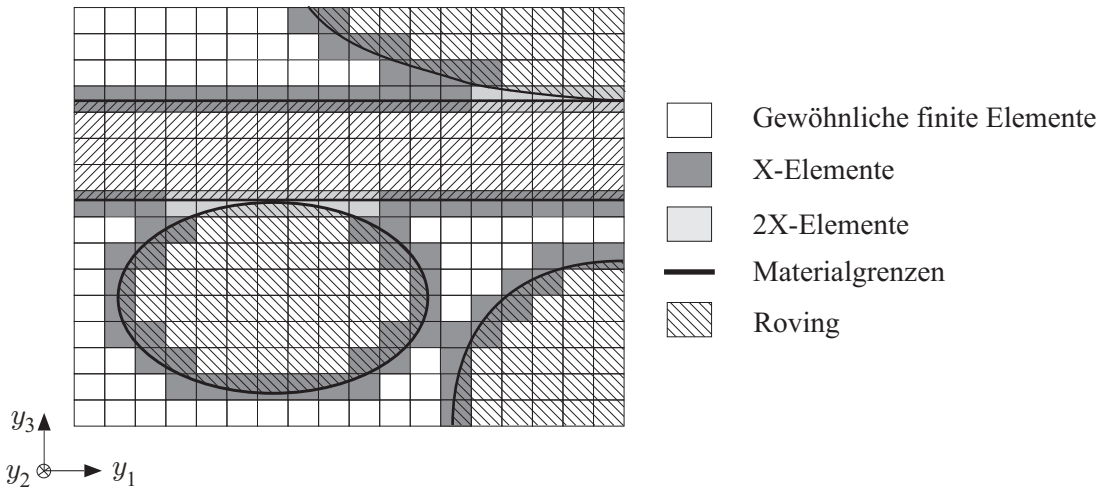


Abbildung 5.13: Gebiet mit mehr als einer Materialgrenze

5.3 Automatisierte Modellgenerierung

Einführung

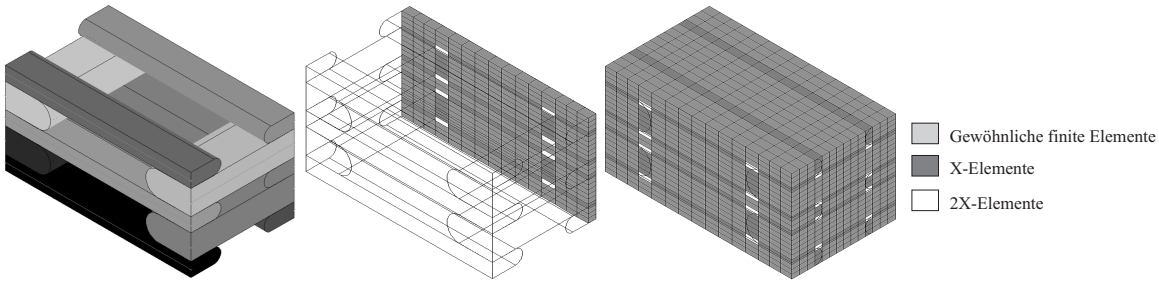
Um eine effiziente Modellierung von textilverstärkten Verbundwerkstoffen zu ermöglichen, ist ein in wesentlichen Teilen automatisierter Modellierungsprozess erforderlich. Deshalb wurde ein Verfahren entwickelt, das ausgehend von einem dreidimensionalen Geometriemodell schichtweise das entsprechende XFEM-Modell erstellt. Dazu sind neben den eigentlichen Elementformulierungen Routinen zur automatisierten Erkennung bzw. Lokalisierung der Materialgrenzen, zur Berechnung der Anreicherungsfunktion, zur Festlegung der Integrationsbereiche sowie zur Zuweisung der Materialparameter erforderlich. Die besondere Herausforderung liegt dabei in der Erkennung und numerischen Behandlung sämtlicher in einem Modell zu erwartenden Verläufe von Materialgrenzen sowie in der Assemblierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix, da Elemente mit verschiedenen Knotenfreiheitsgraden unter Wahrung der Kompatibilität des Verschiebungsfeldes miteinander zu verknüpfen sind. Die dazu im Rahmen dieser Arbeit implementierten Routinen ermöglichen die automatisierte Erstellung von RVE-Modellen für textile Verstärkungsstrukturen.
Die Berücksichtigung des Maschenfadens, der aufgrund seines im Vergleich zu Kett- und Schussfaden deutlich geringeren Durchmessers nicht sinnvoll durch Volumenelemente modelliert werden kann, ist durch ein separates Netz von Stabelementen möglich, das durch entsprechende kinematische Zwangsbedingungen an das Volumennetz gekoppelt wird.
Da die automatisierte Modellgenerierung zur Erstellung von RVE-Modellen angewendet werden soll, erfolgt die Beschreibung in den lokalen Koordinaten $\mathbf{y}$ des RVE (vgl. Abschnitt 2.3.1).

5.3.1 Vorgehen

Geometriemodell

Ausgangspunkt der Modellierung ist ein dreidimensionales Geometriemodell der textilen Verstärkungsstruktur, das über verschiedene Schnittstellen der Präprozessoren kommerziell verfügbarer FE-Programme importiert werden kann (Abb. 5.14(a)). In diesem Modell wird jeder der n^{R} Rovings durch einen entsprechenden dreidimensionalen Körper V_i^{R} abgebildet. Eine explizite Modellierung der Geometrie der Matrixbereiche innerhalb des RVE ist nicht erforderlich.

Im nächsten Schritt wird diesem Geometriemodell Schicht für Schicht ein regelmäßiges Berechnungsnetz überlagert, dass den Bereich Y des quaderförmigen RVE vollständig ausfüllt (Abb. 5.14(b)). Die Feinheit der Vernetzung ist dabei so zu wählen, dass vorhandene Materialgrenzen mit ausreichender Genauigkeit erfasst werden können. Abb. 5.14(c) zeigt das resultierende Berechnungsnetz für ein Biaxialgelege.



(a) 3D-Geometriemodell (b) Schichtweise Modellgenerierung (c) XFEM-Modell des RVE

Abbildung 5.14: Automatisierte Generierung eines XFEM-Modells

Bestimmung der Elementtypen

Während der Überlagerung wird bei Erstellung eines neuen Elements mit dem Volumen V^{E} geometrisch geprüft, ob ein Körper der textilen Verstärkungsstruktur innerhalb des Elementbereichs liegt oder nicht. Dazu bestimmt man das Schnittvolumen

$$V_i^{\mathrm{S}} = V^{\mathrm{E}} \cap V_i^{\mathrm{R}} \tag{5.53}$$

zwischen dem Element und dem i-ten Körper der textilen Verstärkungsstruktur. Anhand des Vektors der Schnittvolumina $\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{S}}$, der $n^{\mathrm{S}} \leq n^{\mathrm{R}}$ verschiedene Koordinaten $V_i^{\mathrm{S}} > 0$ enthalten kann, sowie der Anzahl der Materialbereiche n^{M} innerhalb des Elements erfolgt eine Fallunterscheidung (Tab. 5.1) zur Identifikation der X-Elemente sowie der Zuweisung von Materialparametern. Der Wert n^{S} gibt dabei die Anzahl der Rovingbereiche an, die von dem Element geschnitten werden. Neben verschiedenen Rovingbereichen kann das Element zusätzlich einen oder mehrere Materialbereiche enthalten, die dem Matrixmaterial zuzuordnen sind. Infolge der Schnittoperationen erfolgt also die Zerlegung des Elementbereichs in $n^{\mathrm{M}} \geq n^{\mathrm{S}}$ verschiedene Materialbereiche, zwischen denen n^{G} verschiedene Materialgrenzen liegen. Abbildung 5.15 zeigt diese Zerlegung für ein Element mit drei verschiedenen Materialbereichen.
Theoretisch können beliebig viele Materialbereiche innerhalb des Elementvolumens modelliert werden. Da jedoch mit jeder Zerlegung eine neue Materialgrenze innerhalb des Elements abzubilden und damit eine weitere Anreicherung des Verschiebungsansatzes erforderlich ist, wird die Vielfalt aus praktischen Gründen auf maximal drei Materialbereiche bzw. zwei Grenzflächen innerhalb des Elements beschränkt (vgl. Fall v. in Tab. 5.1). Diese Einschränkung ist bei der Festlegung der Elementgrößen zu berücksichtigen.

Beispiel

Sämtliche gemäß Tab. 5.1 zu unterscheidenden Fälle treten beispielsweise bei der Anwendung der automatischen Modellgenerierung auf das Biaxialgelege von Abb. 5.6 im Kreuzungsbereich der Kett- und Schussfäden auf. Abb. 5.16 zeigt dazu eine vergrößerte Detailansicht. Liegt ein Element vollständig innerhalb des Matrixbereichs, so kann an dieser Stelle ein gewöhnliches finites Element eingesetzt werden (Fall i), dem die Materialeigenschaften der Matrix zuzuweisen sind. Diejenigen Elemente, die sich

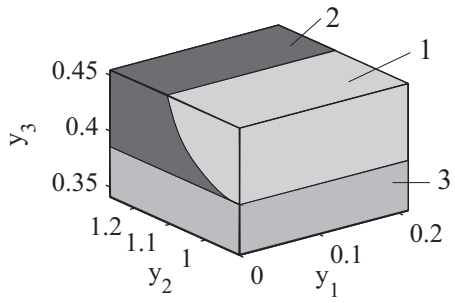


Abbildung 5.15: Geometrische Unterteilung des Elementbereichs in $n^{\mathrm{M}} = 3$ Materialbereiche

Tabelle 5.1: Fallunterscheidung zur Bestimmung des Elementtyps und Zuweisung der Materialparameter

Fall	Kriterium	Elementtyp	Grenzen n^{G}	Materialien
i	$\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{S}} = \mathbf{0}$	gewöhnliches Element	0	Matrix
ii	$\left\|\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{S}}\right\| = V^{\mathrm{E}} \wedge n^{\mathrm{M}} = 1, n^{\mathrm{S}} = 1$	gewöhnliches Element	0	Roving
iii	$\left\|\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{S}}\right\| = V^{\mathrm{E}} \wedge n^{\mathrm{M}} = 2, n^{\mathrm{S}} = 2$	X-Element	1	Roving/Roving
iv	$0 < \left\|\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{S}}\right\| < V^{\mathrm{E}} \wedge n^{\mathrm{M}} = 2, n^{\mathrm{S}} = 1$	X-Element	1	Roving/Matrix
v	$0 < \left\|\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{S}}\right\| \leq V^{\mathrm{E}} \wedge n^{\mathrm{M}} = 3, n^{\mathrm{S}} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$	2X-Element	2	Roving/Matrix/Matrix Roving/Roving/Matrix Roving/Roving/Roving

innerhalb eines Volumens der Verstärkungsstruktur befinden, sind ebenfalls gewöhnliche Elemente, besitzen aber die Materialeigenschaften des Rovings (Fall ii). Alle Elemente, die von einer Materialgrenze geschnitten werden, sind X-Elemente. Die Materialgrenze kann dabei entweder zwischen zwei Rovingbereichen (Fall iii) oder zwischen Roving und Matrix (Fall iv) verlaufen. Enthält ein Element drei Materialbereiche (Fall v), ist an dieser Stelle ein 2X-Element zu verwenden.
Um nach der erfolgreichen Generierung des regelmäßigen Netzes Elementsteifigkeitsmatrizen für die X- und 2X-Elemente berechnen zu können, müssen die Lage der Materialgrenze identifiziert und die Aufteilung des Elements in tetraederförmige Integrationsbereiche durchgeführt werden. Die dazu erforderlichen Schritte werden im folgenden Abschnitt erläutert.
Da alle Elemente zunächst separat generiert werden, existiert noch kein zusammenhängendes Berechnungsnetz. Den anschließend notwendigen Assemblierungsprozess der Gesamtsteifigkeitsmatrix beschreibt Abschnitt 5.3.3. Dabei ist die unterschiedliche Anzahl von Knotenfreiheitsgraden benachbarter Elemente zu berücksichtigen.

5.3.2 Zerlegung des Integrationsbereichs und Identifikation der Materialgrenzen

Einführung

Wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben wurde, erfolgt die Aufteilung des Elements in zwei respektive drei Materialbereiche mittels geometrischer Schnittoperationen zwischen dem Elementvolumen und der Verstärkungsstruktur. Um die Integration der Elementsteifigkeitsmatrizen ausführen zu können, sind die daraus resultierenden, im Allgemeinen krummlinig berandeten Materialbereiche durch

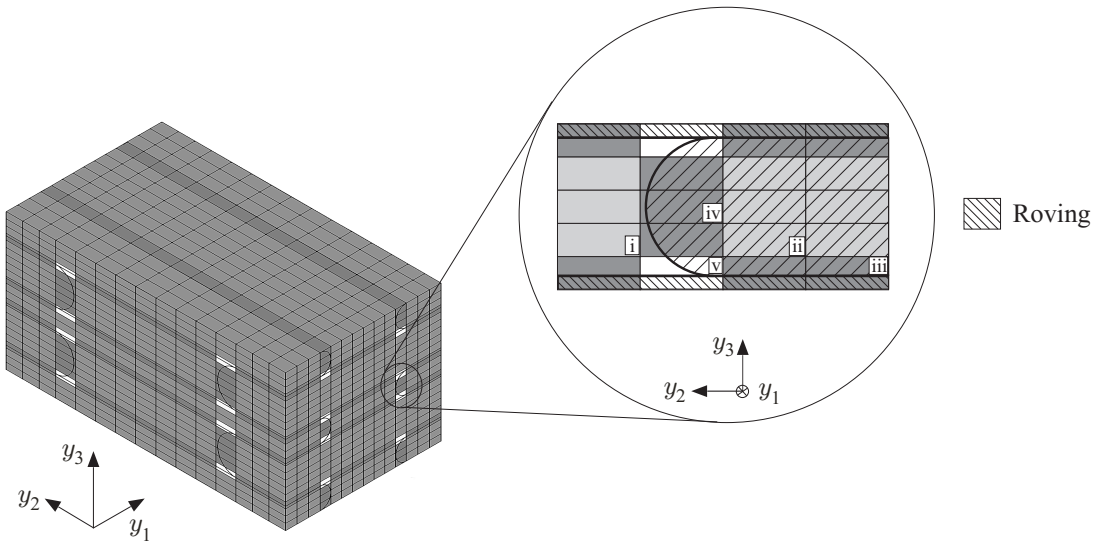
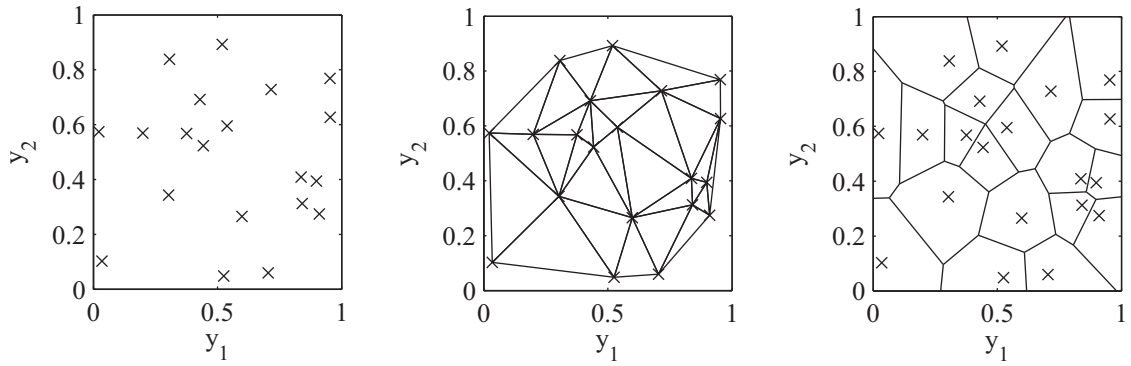


Abbildung 5.16: Fallunterscheidungen bei der automatisierten Generierung eines XFEM-Modells

eine konsistente Aufteilung des Elements in tetraederförmige Integrationsbereiche zu ersetzen. Daraus ergibt sich auch ein vereinfachter Verlauf der Materialgrenze innerhalb des Elements. Auf Basis dieses Verlaufs sind zur Berechnung des Integranden der Steifigkeitsmatrix die Knotenwerte $\hat{\varphi}_i$ der zur Lokalisierung der Materialgrenze verwendeten Parameterfunktion φ zu berechnen.

DELAUNAY-Zerlegung

Die Zerlegung der Materialbereiche in Tetraeder erfolgt mithilfe des Quickhull-Algorithmus von Barber und Dobkin (1996). Dieser stellt eine dreidimensionale Verallgemeinerung der DELAUNAY-Triangulation (Abb. 5.17) dar.



(a) Zufallsverteilte Punktmenge $\mathcal{P}$ (b) DELAUNAY-Zerlegung (c) VORONOI-Zerlegung

Abbildung 5.17: Vergleich von DELAUNAY- und VORONOI-Zerlegung für eine gegebene Punktmenge $\mathcal{P}$

Bei der zweidimensionalen DELAUNAY-Zerlegung erfolgt die geradlinige Verbindung der in der y_1-

y_2-Ebene liegenden Punktmenge

$$\mathcal{P} = \{P_1(y_1, y_2), \ldots, P_{20}(y_1, y_2)\} \tag{5.54}$$

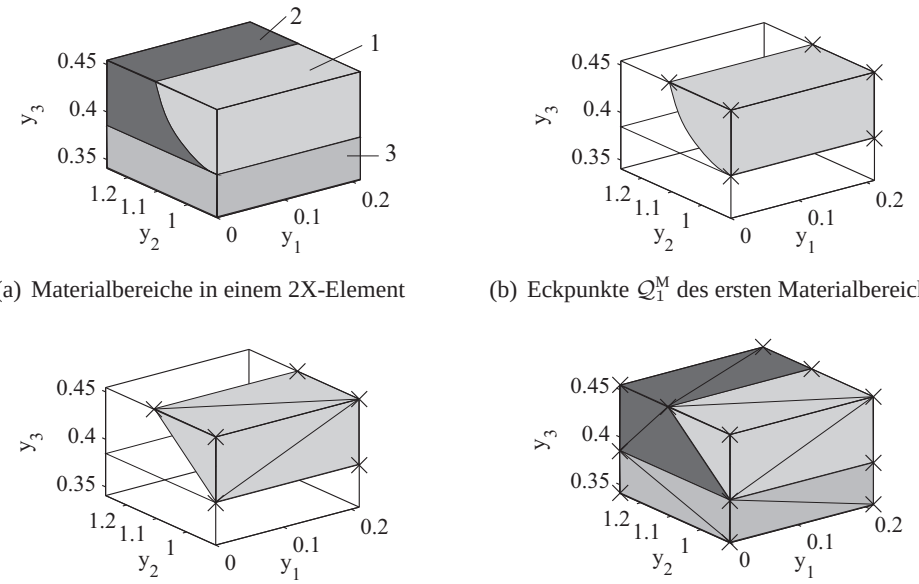
in Abb. 5.17(a) so, dass kein anderer Eckpunkt innerhalb des Umkreises eines von benachbarten Punkten gebildeten Dreiecks liegt. Dadurch entsteht eine aus Dreiecken zusammengesetzte, konvexe Polygonfläche (Abb. 5.17(b)). Die DELAUNAY-Zerlegung ist damit das Komplement zu der in Abb. 5.17(c) dargestellten VORONOI- oder DIRICHLET-Zerlegung. Diese ist für die Bestimmung der Integrationsbereiche allerdings nicht geeignet, da die Punkte $\mathcal{P}$ im Inneren der VORONOI-Zellen liegen.

Tetraederzerlegung

Die Unterteilung des quaderförmigen Elements erfolgt in Analogie zum zweidimensionalen Fall der DELAUNAY-Zerlegung durch eine Aufteilung in tetraederförmige Integrationsbereiche. Zur Berechnung dieser Zerlegung sowie zur Identifikation der Materialgrenzen innerhalb des Elements werden die Mengen $\mathcal{Q}_i^{\mathrm{M}}$ der Eckpunkte der n^{M} Materialbereiche (Abb. 5.18)

$$\mathcal{Q}_i^{\mathrm{M}} = \{Q_1(\mathbf{y}), \ldots, Q_m(\mathbf{y})\}, \quad i = 1, \ldots, n^{\mathrm{M}} \tag{5.55}$$

ermittelt. Die Menge $\mathcal{Q}_i^{\mathrm{M}}$ der Eckpunkte des i-ten Materialbereichs Abb. 5.18(b) bildet die Basis für



(a) Materialbereiche in einem 2X-Element

(b) Eckpunkte $\mathcal{Q}_1^{\mathrm{M}}$ des ersten Materialbereichs

(c) Tetraederzerlegung des ersten Materialbereichs

(d) Tetraederzerlegung des Elementbereichs

Abbildung 5.18: Diskretisierung der geometrischen Materialbereiche und Zerlegung in tetraederförmige Integrationsgebiete

die anschließende dreidimensionale DELAUNAY-Zerlegung (Abb. 5.18(c)).
Infolge der geradlinigen Verbindung der Eckpunkte erfolgt damit auch die Überführung des krummlinig berandeten Materialbereichs in einen durch ebene Dreiecksflächen begrenzten Simplex. Um eine korrekte Zuordnung zwischen Integrationsbereichen und Materialeigenschaften und eine konsistente Aufteilung in die Integrationsgebiete gewährleisten zu können, wird jeder geometrische Materialbereich separat in Tetraeder zerlegt (Abb. 5.18(c)). Die daraus folgende Aufteilung des gesamten Elementbereichs ist in Abb. 5.18(d) zu sehen.

Materialgrenze

Da die Bestimmung der Eckpunkte $\mathcal{Q}_i^{\mathrm{M}}$ für jeden Materialbereich separat durchgeführt wird, definiert die Menge der gemeinsamen Eckpunkte zweier Materialbereiche

$$\mathcal{I}_{kl} = \{I_1(\mathbf{y}), \ldots, I_n(\mathbf{y})\} = \mathcal{Q}_k^{\mathrm{M}} \cap \mathcal{Q}_l^{\mathrm{M}} \quad \text{mit} \quad 3 \leq n \leq 4 \tag{5.56}$$

eine Grenzfläche innerhalb des Elements. Enthält die Schnittmenge $\mathcal{I}_{kl}$ weniger als drei voneinander verschiedene Punkte, liegt nur eine punkt- oder linienförmige Berührung der Bereiche aber keine Grenzfläche vor. Ein Beispiel für einen derartigen Fall ist die Grenzlinie zwischen den Materialbereichen 1 und 3 in Abb. 5.18(a).

Einfach gekrümmte Grenzflächen

Enthält $\mathcal{I}_{kl}$ genau drei Punkte (Abb. 5.19(a)) oder erfüllen vier Punkte die Bedingung

$$(\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{13}) \cdot \mathbf{r}_{14} = 0, \tag{5.57}$$

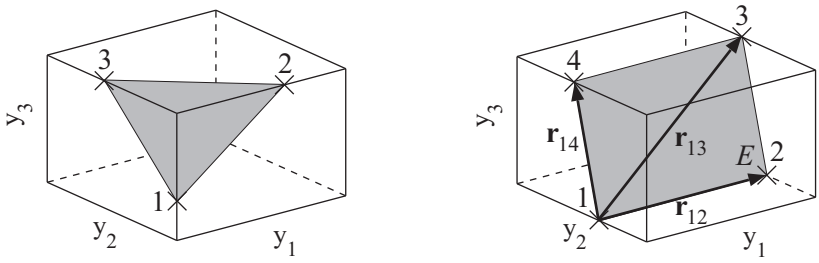
d. h. das Volumen des von ihnen gebildeten Spats ist Null (Abb. 5.19(b)), so ist die Grenzfläche eine Ebene E

$$\mathbf{n}^E \cdot \mathbf{y} = d \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}^E = \frac{\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{13}}{|\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{13}|}. \tag{5.58}$$

Die Knotenwerte $\hat{\varphi}_i$ der zur Lokalisierung der Grenzfläche und zur Formulierung des erweiterten Verschiebungsansatzes verwendeten Parameterfunktion φ können in diesem Fall aus

$$\hat{\varphi}_i = \mathbf{n}^E \cdot \mathbf{y}_i - d \tag{5.59}$$

bestimmt werden. Für eine ebene Grenzfläche sind die durch $\varphi = 0$ bestimmte Lage der Materialgrenze und die durch die Elemente von $\mathcal{I}_{kl}$ verlaufende Ebene identisch.



(a) Ebene durch 3 Punkte (b) Ebene durch 4 Punkte

Abbildung 5.19: Ebene Materialgrenzfläche

Doppelt gekrümmte Grenzflächen

Liegen die Punkte in $\mathcal{I}_{kl}$ dagegen nicht in einer Ebene, d. h. ist die ursprüngliche Materialgrenze doppelt gekrümmt, ergeben sich zwei wesentliche Schwierigkeiten.

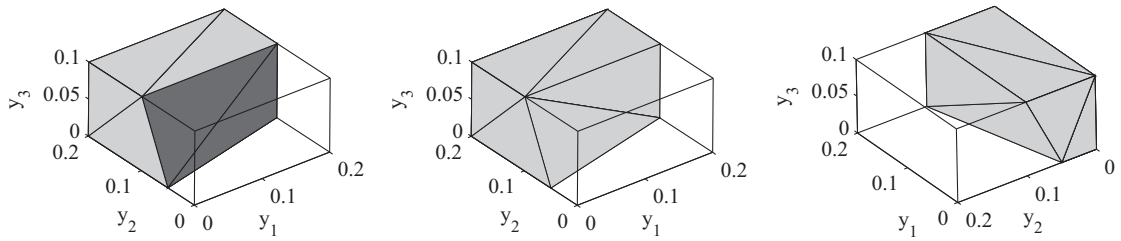
1. Die bereichsweise Aufteilung in Integrationsgebiete führt zu einer inkompatiblen Tetraederzerlegung, da der verwendete Algorithmus anhand der vorgegebenen Eckpunkte $\mathcal{Q}_i^{\mathrm{M}}$ einen konvexen Simplex für jeden Materialbereich generiert (Abb. 5.20(a)). Für eine konsistente Zerlegung wären aber je eine konvexe und eine konkave Außenkontur erforderlich.

2. Weiterhin sind zwar die Schnittlinien der Materialgrenze mit den Elementflächen nach wie vor Geraden, allerdings weist die durch die Tetraederflächen definierte Materialgrenze in diesem Fall einen Knick auf (vgl. Abb. 5.20), der durch die Approximation $\varphi = N_i \hat{\varphi}_i$ nicht abgebildet werden kann. Die Folge ist eine Inkonsistenz zwischen dem approximierten Verlauf der Grenzfläche $\varphi = 0$ und der Zerlegung in Integrationsbereiche. Außerdem ist die Berechnung der Knotenwerte des vorzeichenbehafteten Abstands nicht mehr eindeutig.

Eine vollständige Lösung dieser Probleme bietet die Verwendung quadratischer Ansatzfunktionen zur Approximation der Parameterfunktion φ in Kombination mit Integrationsbereichen, deren Berandung durch NURBS-Flächen beschrieben wird. Dieser Lösungsansatz wurde im Rahmen einer Diplomarbeit (Prüger (2008)) für ebene Elemente erfolgreich implementiert. Aufgrund des erforderlichen Berechnungsaufwands erscheint die Verallgemeinerung des dort vorgeschlagenen Verfahrens auf dreidimensionale Problemstellungen nicht zweckmäßig.

Kompatible Materialbereiche

Um mit der automatischen Modellgenerierung auch doppelt gekrümmte Materialgrenzen behandeln zu können, ist zunächst die Kompatibilität der Tetraederzerlegung der Materialbereiche zu sichern. Infolge der Eigenschaft des verwendeten Algorithmus, eine konvexe Außenkontur zu generieren, ist in den Zerlegungen der beiden benachbarten Bereiche ein Tetraeder enthalten, dessen Ecken den in $\mathcal{I}_{kl}$ enthaltenen Punkten der Materialgrenzfläche entsprechen (vgl. Kennzeichnung in Abb. 5.20(a)).



(a) Inkompatible Tetraederzerlegung für Materialbereich 1 (b) Kompatible Tetraederzerlegung für Materialbereich 1 (c) Tetraederzerlegung für Materialbereich 2

Abbildung 5.20: Zur Sicherung einer kompatiblen Tetraederzerlegung der Materialbereiche

Durch Löschen dieses Tetraeders kann die Kompatibilität der Integrationsgebiete gesichert werden. Zur Überprüfung der modifizierten Tetraederzerlegung wird anschließend das Volumen der Tetraeder aller Materialbereiche bestimmt und mit dem Elementvolumen verglichen. Sollten beide Volumina nicht identisch sein, erfolgt die Ausgabe einer Fehlermeldung. In diesem Fall ist die Tetraederzerlegung manuell zu korrigieren.

Knotenwerte $\hat{\varphi}_i$

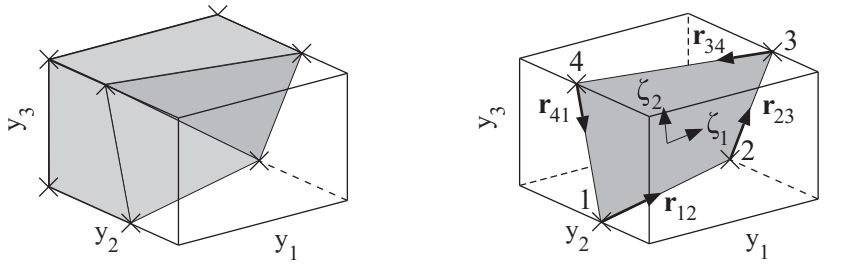
Zur Berechnung der Knotenwerte $\hat{\varphi}_i$ der Parameterfunktion φ wird die Materialgrenze durch die bilineare Approximation

$$\mathbf{y}\left(\boldsymbol{\zeta}\right) = \sum_{i=1}^{4} N_i\left(\boldsymbol{\zeta}\right) \hat{\mathbf{y}}_i \tag{5.60}$$

mit den natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\zeta}$ ersetzt. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung des Abstands und die Konsistenz zwischen der Parameterfläche $\varphi = 0$ und den Kanten der Materialgrenze entlang der Seitenflächen des Elements ist gesichert (Abb. 5.21). Die $N_i\left(\boldsymbol{\zeta}\right)$ entsprechen den bekannten bilinearen Formfunktionen

$$\begin{aligned} N_1(\boldsymbol{\zeta}) &= \tfrac{1}{4}\left(1-\zeta_1\right)\left(1-\zeta_2\right) & N_2(\boldsymbol{\zeta}) &= \tfrac{1}{4}\left(1+\zeta_1\right)\left(1-\zeta_2\right) \\ N_3(\boldsymbol{\zeta}) &= \tfrac{1}{4}\left(1+\zeta_1\right)\left(1+\zeta_2\right) & N_4(\boldsymbol{\zeta}) &= \tfrac{1}{4}\left(1-\zeta_1\right)\left(1+\zeta_2\right) \end{aligned} \tag{5.61}$$

und die Vektoren $\hat{\mathbf{y}}_i$ enthalten analog zur Geometrieapproximation der FEM die Koordinaten der vier Eckpunkte der Materialgrenzfläche. Ihre Reihenfolge ist in mathematisch positiver Richtung so zu wählen, dass durch die Punkte eine einfach zusammenhänge Fläche gebildet wird (Abb. 5.21(b)).
Die gesuchten Knotenwerte $\hat{\varphi}_i$ folgen schließlich aus der Minimierung des Betrags des Ortsvektors



(a) Knick in einer Materialgrenzfläche (b) Bilineare Approximation der Grenzfläche

Abbildung 5.21: Approximation im Fall doppelt gekrümmter Materialgrenzflächen

zwischen dem i-ten Knoten und einem Punkt $\mathbf{y}(\boldsymbol{\zeta})$ auf der Grenzfläche

$$|\hat{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}(\boldsymbol{\zeta})|^2 \quad \rightarrow \quad \text{Min.} \tag{5.62}$$

Die Auswertung der notwendigen Bedingung führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung der lokalen Koordinaten $\boldsymbol{\zeta}_{\text{min}}$ des Punktes $\mathbf{y}_{\text{min}} = \mathbf{y}(\boldsymbol{\zeta}_{\text{min}})$ mit dem geringsten Abstand zum i-ten Knoten, das numerisch gelöst wird. Für den Vektor zwischen diesem Punkt und dem i-ten Knoten folgt aus der notwendigen Bedingung

$$[\hat{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}(\boldsymbol{\zeta})] \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = 0 \tag{5.63}$$

die Parallelität zu dem Normaleneinheitsvektor im Punkt $\mathbf{y}_{\text{min}}$, da durch $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \zeta_1}$ und $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \zeta_2}$ die Tangentialebene an die Parameterfläche $\mathbf{y}(\boldsymbol{\zeta})$ aufgespannt wird. Der vorzeichenbehaftete Abstand des i-ten Knoten berechnet sich aus dem Skalarprodukt

$$\hat{\varphi}_i = (\hat{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_{\text{min}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{min}}. \tag{5.64}$$

5.3.3 Assemblierung des Gleichungssystems

Einführung

In den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels wurden die Grundlagen zur Formulierung von finiten Elementen mit einem im Sinne der XFEM angereicherten Verschiebungsansatz, zur automatischen Identifikation des erforderlichen Elementtyps in einem RVE-Modell, zur Lokalisierung der Materialgrenze innerhalb eines Elements und zur Durchführung der numerischen Integration der Elementsteifigkeitsmatrix erläutert. Damit ist man in der Lage die Steifigkeitsmatrix bzw. Tangentensteifigkeitsmatrix für jedes Element des Gesamtmodells zu berechnen.
Abschließend sind die einzelnen Elementmatrizen zu einer globalen Steifigkeitsmatrix zu assemblieren. Ausgangspunkt dafür ist die aus Gründen der Konvergenz zu fordernde Kompatibilität der Verschiebungen benachbarter Elemente (Bathe (2002), Abschnitt 4.3). In Standard-FE-Netzen, die lediglich aus Elementen eines Typs zusammengesetzt sind, erfolgt der Zusammenbau auf der Basis von Topologieinformationen durch die Zuordnung der lokalen Elementknotennummer zu einem globalen Knoten. Diese Informationen werden in Form einer Koinzidenzmatrix hinterlegt. Dieses Vorgehen ist auch dann noch anwendbar, wenn innerhalb des Berechnungsnetzes nur

- gewöhnliche finite Elemente untereinander,

- gewöhnliche finite Elemente und X-Elemente oder
- verschiedene X-Elemente, die ein und derselben Materialgrenze zuzuordnen sind,

zusammentreffen.

Fallunterscheidung

Treten dagegen 2X-Elemente auf oder treffen X-Elemente aufeinander, die zu unterschiedlichen Materialgrenzen gehören, ist der Zusammenbau des Gesamtmodells deutlich komplizierter. Die verschiedenen im Rahmen einer Fallunterscheidung zu behandelnden Fälle sollen im Folgenden anhand des Ausschnitts eines RVE-Modells (Abb. 5.22) diskutiert werden.

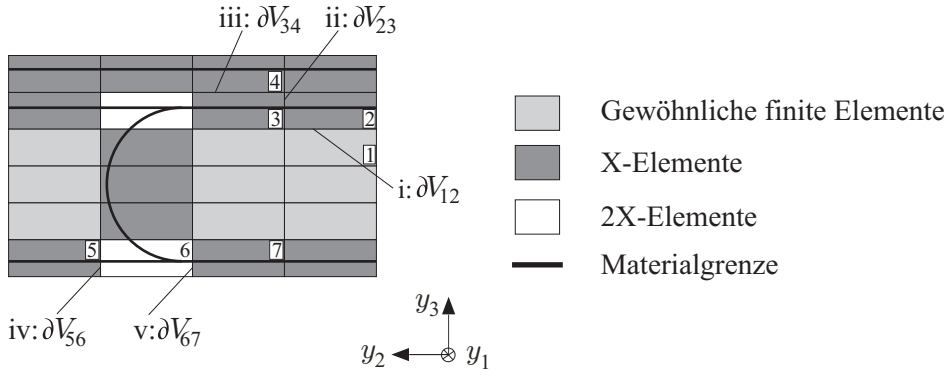


Abbildung 5.22: Sicherung der Kompatibilität des Verschiebungsfeldes bei beliebigen Konfigurationen von gewöhnlichen finiten Elementen, X- und 2X-Elementen

Grundlage für die Verknüpfung der verschiedenen Elemente ist die Forderung der kinematischen Kompatibilität beschrieben durch

$$\mathbf{u}|_{\partial V_i^{\mathrm{E}}} = \mathbf{u}|_{\partial V_j^{\mathrm{E}}} \,\forall\, \mathbf{y} \in \partial V_{ij}. \tag{5.65}$$

Dabei bezeichnen $\mathbf{u}|_{\partial V_i^{\mathrm{E}}}$ die Verschiebungsfelder am Rand $\partial V_i^{\mathrm{E}}$ des i-ten Elements und ∂V_{ij} die Berührungsfläche $\partial V_{ij} = \partial V_i^{\mathrm{E}} \cap \partial V_j^{\mathrm{E}}$ zweier Elemente i und j. Die Verschiebungsverläufe auf beiden Seiten der Berührungsfläche ergeben sich aus den Verschiebungsansätzen der Elemente. Im folgenden sollen fünf in Abb. 5.22 eingezeichnete Fälle beschrieben werden.

Ein X-Element

i. In diesem Fall wird ∂V_{12} von dem gewöhnlichen finiten Element 1 und dem X-Element 2 gebildet. Setzt man die Verschiebungsansätze beider Elemente in die Kompatibilitätsbedingung (5.65) ein, folgt

$$\sum_{\substack{k\in\partial V_1^{\mathrm{E}}\\ k\in\partial V_{12}}} N_k \hat{\mathbf{u}}_k = \sum_{\substack{l\in\partial V_2^{\mathrm{E}}\\ l\in\partial V_{12}}} N_l \left(\hat{\mathbf{u}}_l + \hat{\mathbf{a}}_l F\right), \tag{5.66}$$

wobei die Summationsindizes k und l die lokalen Nummern der Knoten durchlaufen, die Teil der Berührungsfläche sind. Da die Anreicherungsfunktion (5.7) entlang der Elementflächen, die nicht von einer Materialgrenze geschnitten werden, verschwindet, gilt in dem betrachteten Fall

$$F = 0 \,\forall\, \mathbf{y} \in \partial V_{12}. \tag{5.67}$$

Damit ist die Kompatibilität der Elementverschiebungen aufgrund der gleichen Formfunktionen in beiden Elementen durch identische Werte der gewöhnlichen Verschiebungsfreiheitsgrade

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \hat{\mathbf{u}}_l \,\forall\, k, l \text{ mit } \hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_l \tag{5.68}$$

zu sichern. Dabei können, wie oben beschrieben, die lokalen Knoten der benachbarten Elemente an der Stelle $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_l$ zu einem globalen Knoten kondensiert werden. Dieses Beispiel demonstriert durch die mögliche Kombination von gewöhnlichen finiten Elementen und X-Elementen den wesentlichen Vorteil der Anreicherungsfunktion (5.7) gegenüber anderen Funktionen, die sich über mehrere Elementbereiche auswirken.

ii. Mit den beiden Elementen zwei und drei in Abb. 5.22 treffen zwei X-Elemente zusammen, die von ein und derselben Materialgrenze geschnitten werden. Zur Sicherung der Kompatibilität der Verschiebungen auf ∂V_{23} ist die Bedingung

Zwei X-Elemente

$$\sum_{\substack{k\in\partial V_2^{\mathrm{E}}\\ k\in\partial V_{23}}} N_k\left(\hat{\mathbf{u}}_k + \hat{\mathbf{a}}_k F_2\right) = \sum_{\substack{l\in\partial V_3^{\mathrm{E}}\\ l\in\partial V_{23}}} N_l\left(\hat{\mathbf{u}}_l + \hat{\mathbf{a}}_l F_3\right), \tag{5.69}$$

zu erfüllen, wobei

$$F_2 = F_3 \;\forall\, \mathbf{y} \in \partial V_{23} \tag{5.70}$$

vorausgesetzt wird. Dies ist durch die kinematischen Kopplungen

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_k &= \hat{\mathbf{u}}_l \\ \hat{\mathbf{a}}_k &= \hat{\mathbf{a}}_l \end{aligned}\right\} \;\forall\, k,l \text{ mit } \hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_l \tag{5.71}$$

möglich.

iii. Dagegen sind für den in Abb. 5.22 gekennzeichneten Fall von zwei X-Elementen, die zu unterschiedlichen Materialgrenzen gehören, entlang der Berührungsfläche

$$F_3 = 0 \;\forall\, \mathbf{y} \in \partial V_3^{\mathrm{E}} \text{ und } F_4 = 0 \;\forall\, \mathbf{y} \in \partial V_4^{\mathrm{E}}. \tag{5.72}$$

Zur Erfüllung der Kompatibilität entlang von ∂V_{34} ergibt sich aus (5.65) die Zwangsbedingung

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \hat{\mathbf{u}}_l \;\forall\, k,l \text{ mit } \hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_l. \tag{5.73}$$

Eine kinematische Kopplung der zusätzlichen Freiheitsgrade beider Elemente würde eine unphysikalische Verknüpfung der unabhängigen erweiterten Verschiebungsfelder bedeuten.

iv. Treffen, wie im Fall der Elemente fünf und sechs, ein X- und ein 2X-Element derart aufeinander, dass eine Materialgrenze des 2X-Elements in dem benachbarten X-Element fortgesetzt wird, sind die Verschiebungen auf beiden Seiten der Elementgrenzfläche

X- und 2X-Elemente

$$\sum_{\substack{k\in\partial V_5^{\mathrm{E}}\\ k\in\partial V_{56}}} N_k\left(\hat{\mathbf{u}}_k + \hat{\mathbf{a}}_k F_5\right) = \sum_{\substack{l\in\partial V_6^{\mathrm{E}}\\ l\in\partial V_{56}}} N_l\left(\hat{\mathbf{u}}_l + \hat{\mathbf{a}}_l F_{6_1} + \hat{\mathbf{b}}_l F_{6_2}\right). \tag{5.74}$$

Zur Festlegung der erforderlichen kinematischen Bedingungen ist zunächst die Zuordnung zwischen den Materialgrenzen und den zusätzlichen Verschiebungsfreiheitsgraden bzw. der entsprechenden Anreicherung des Verschiebungsfeldes zu prüfen. Nachfolgend soll angenommen werden, dass die in Element fünf fortgesetzte, horizontal verlaufende Grenze zu dem ersten Term der Anreicherung und damit zur Anreicherungsfunktion F_{6_1} gehört. Da ∂V_{56} nicht von der gekrümmten zweiten Materialgrenze geschnitten wird, ist

$$F_{6_2} = 0 \;\forall\, \mathbf{y} \in \partial V_{56}. \tag{5.75}$$

Die Sicherung eines kompatiblen Verschiebungsfeldes ist daher mit

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_k &= \hat{\mathbf{u}}_l \\ \hat{\mathbf{a}}_k &= \hat{\mathbf{a}}_l\end{aligned}\right\} \forall\, k,l \text{ mit } \hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_l \tag{5.76}$$

möglich.

Verzweigung

v. Das abschließende Beispiel betrachtet die Verzweigung einer Materialgrenze innerhalb eines 2X-Elements. In diesem Fall ist die Kompatibilität der Verschiebungen eines X- und eines 2X-Elements zu fordern

$$\sum_{\substack{k\in\partial V_6^{\mathrm{E}}\\ k\in\partial V_{67}}} N_k \left(\hat{\mathbf{u}}_k + \hat{\mathbf{a}}_k F_{6_1} + \hat{\mathbf{b}}_k F_{6_2}\right) = \sum_{\substack{l\in\partial V_7^{\mathrm{E}}\\ l\in\partial V_{67}}} N_l \left(\hat{\mathbf{u}}_l + \hat{\mathbf{a}}_l F_7\right) \tag{5.77}$$

ohne dass eine der Anreicherungsfunktionen entlang der gemeinsamen Grenzfläche verschwindet. Da beide Materialgrenzen auf ∂V_{56} zusammenfallen

$$F_{6_1} = F_{6_2} = F_7 \;\forall\, \mathbf{y} \in \partial V_{67}, \tag{5.78}$$

folgt für die Knotenfreiheitsgrade beider Elemente

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_k &= \hat{\mathbf{u}}_l \\ \hat{\mathbf{a}}_k + \hat{\mathbf{b}}_k &= \hat{\mathbf{a}}_l\end{aligned}\right\} \forall\, k,l \text{ mit } \hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_l. \tag{5.79}$$

Zwangsbedingungen

Für die programmtechnische Umsetzung dieser und weiterer Fälle, z.B. zur kompatiblen Verknüpfung von 2X-Elementen, wird ein knotenweises Vorgehen gewählt. Sobald zwei benachbarte Elementschichten generiert wurden, sind die zunächst unabhängigen Elemente durch kinematische Zwangsbedingungen, analog zu den geschilderten Fallbeispielen, miteinander zu verknüpfen. Dazu wird im Rahmen einer Fallunterscheidung für jede globale Knotenposition eine Kompatibilitätsbedingung ausgewählt und in Form von linearen kinematischen Zwangsbedingungen an das Programmsystem übergeben.

Inkompatibilität

Verläuft die entlang der Elementflächen lineare Approximation einer Materialgrenze nicht C^1-stetig, d. h. ist die ursprüngliche Materialgrenze gekrümmt, kann die in den Gleichungen (5.71), (5.76) und (5.79) vorausgesetzte Gleichheit der Anreicherungsfunktionen in zwei benachbarten Elementen, aufgrund der elementweisen Berechnung der Knotenwerte $\hat{\varphi}_i$ vorzeichenbehafteten Abstands, nicht mehr gewährleistet werden. Die Folge sind inkompatible Verschiebungsfelder, wobei die Imkompatibilität von der Krümmung der Materialgrenze und der gewählten Netzfeinheit abhängig ist.
Die ebenfalls mögliche globale Berechnung der Abstandsfunktionen würde andererseits zwar die Inkompatibilität der Verschiebungen verhindern, aber bedingt durch die Interpolation mit den Formfunktionen des Elements zu einer schlechteren Übereinstimmung zwischen der Approximation der Materialgrenze und den Tetraederbereichen führen.
Da die elementweise Berechnung des vorzeichenbehafteten Abstands im Hinblick auf beliebige Materialgrenzen eine Begrenzung der Vielfalt der möglichen Verläufe und damit eine zuverlässige Berechnung des Abstands zu einer innerhalb des Elementbereichs liegenden Materialgrenze ermöglicht, wird die Inkompatibilität des Verschiebungsfeldes aus praktischen Erwägungen in Kauf genommen. Ihre Auswirkungen können durch eine ausreichend feine Vernetzung minimiert werden. Eine Lösung dieser Problematik wäre, wie in Abschnitt 5.3.2 erwähnt, durch die Verwendung von Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen und krummlinig berandeten Integrationsbereichen möglich (vgl. Prüger (2008)).

5.3.4 Periodische Verschiebungsrandbedingungen für Homogenisierung

Randbedingungen für zusätzliche Freiheitsgrade

Neben den im vorangegangenen Abschnitt erläuterten kinematischen Zwangsbedingungen zur Sicherung der Kompatibilität des Verschiebungsfeldes ergeben sich auch aus den periodischen Verschiebungsrandbedingungen (2.65) der Homogenisierung Kopplungen der zusätzlichen Freiheitsgrade entlang zweier gegenüberliegender Randflächen ∂Y^{i+} und ∂Y^{i-} des RVE Y. Da der lineare Anteil des Randverschiebungsfeldes in (2.65) alleine durch die Kopplung der gewöhnlichen Freiheitsgrade mit den Hauptknoten in Form der linearen Zwangsbedingung (2.67) erzeugt wird, spielen die zusätzlichen Freiheitsgrade nur bei der Erfüllung der Periodizitätsforderung (2.66) eine Rolle.
Entscheidend für die Art der kinematischen Kopplung ist dabei die Tatsache, ob eine Materialgrenze zwei gegenüberliegende Seitenflächen schneidet. Die wesentlichen zu unterscheidenden Fälle sind in Abb. 5.23 dargestellt.

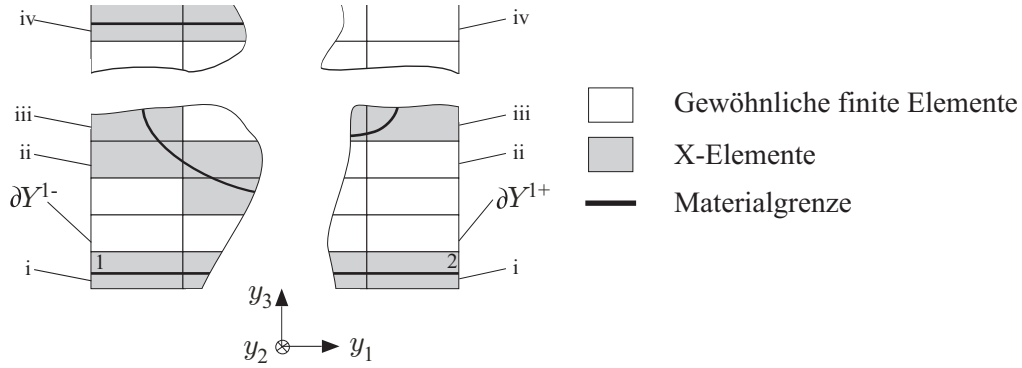


Abbildung 5.23: Periodische Randbedingungen für zusätzliche Verschiebungsfreiheitsgrade

In Fall (i) werden die beiden gegenüberliegenden Randflächen ∂Y^{1+} und ∂Y^{1-} von ein und derselben Materialgrenze geschnitten. Zur Sicherung der Periodizität des Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}^{\mathrm{P}}\left(\mathbf{y}^{1-}\right)$ müssen die Elementverschiebungen

$$\sum_{\substack{k\in\partial V_1^{\mathrm{E}}\\ k\in\partial Y^{1-}}} N_k\left(\hat{\mathbf{u}}_k^{\mathrm{P}}+\hat{\mathbf{a}}_k F_2\right)=\sum_{\substack{l\in\partial V_2^{\mathrm{E}}\\ k\in\partial Y^{1+}}} N_l\left(\hat{\mathbf{u}}_l^{\mathrm{P}}+\hat{\mathbf{a}}_l F_2\right) \tag{5.80}$$

genügen, d. h. der vorliegende Fall der Kopplung entspricht Gleichung (5.71). Während die Zwangsbedingung $\hat{\mathbf{u}}_k^{\mathrm{P}} = \hat{\mathbf{u}}_l^{\mathrm{P}}$ für den periodischen Anteil des gewöhnlichen Verschiebungsfeldes bereits in der Kopplung an die Masterknoten (2.67) enthalten ist, sind die zusätzlichen Freiheitsgrade durch die Bedingung

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \hat{\mathbf{a}}_l \;\forall\; k,l \text{ mit } \hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_l \tag{5.81}$$

miteinander zu verknüpfen.
Im Gegensatz dazu ist für den Fall (ii), in dem eine Materialgrenze die Randflächen des RVE nicht schneidet, keine weitere Zwangsbedingung für die zusätzlichen Freiheitsgrade in Element 3 erforderlich, da $F_3 = 0 \;\forall\; \mathbf{y} \in \partial Y^{1-}$. Gleiches gilt auch für zwei gegenüberliegende X-Elemente (iii), deren Materialgrenzen unabhängig voneinander sind und den Rand des RVE nicht schneiden. Eine Kopplung der zusätzlichen Freiheitsgrade würde eine unphysikalische Zwangsbedingung für die Verschiebungsfelder beider Elemente darstellen.

Die ebenfalls denkbare Kombination eines X-Elements, dessen Materialgrenze einen Rand des RVE schneidet, mit einem gewöhlichen finiten Element auf der gegenüberliegenden Seite des RVE (iv), ist aus Gründen der periodischen Materialstruktur nicht zulässig.

Effektive Materialkennwerte

Die Berechnung effektiver Materialkennwerte erfolgt im Fall der periodischen Verschiebungsrandbedingungen durch die Auswertung der Reaktionskräfte $\mathbf{F}^{y_i}$ an drei Hauptknoten, deren Verschiebungen $\mathbf{u}^{y_i}$ die Deformation des gesamten RVE kontrollieren. Wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben wurde, besteht ein direkter Zusammenhang zwischen den Reaktionskräften an diesen Hauptknoten und dem Spannungsmittelwert. An dieser Stelle soll der Einfluss des erweiterten Verschiebungsansatzes der XFEM auf die Berechnung der effektiven Materialkennwerte untersucht werden. Setzt man die periodischen Randverschiebungen (2.65) in das Prinzip der virtuellen Arbeit unter Berücksichtigung der Arbeitsanteile der Hauptknoten (2.68) ein

$$\sum_{i=1}^{3} \left[\int_{\partial Y^i} \left(\mathbf{t}^{i+} \mathbf{y}^{i+} + \mathbf{t}^{i-} \mathbf{y}^{i-} \right) : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dA + \int_{\partial Y^i} \left(\mathbf{t}^{i+} \cdot \delta\mathbf{u}^{\mathrm{P},i+} + \mathbf{t}^{i-} \cdot \delta\mathbf{u}^{\mathrm{P},i-} \right) dA - \mathbf{F}^{y_i} \cdot \delta\mathbf{u}^{y_i} \right] = 0, \tag{5.82}$$

folgen aufgrund der Unabhängigkeit von $\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und $\delta\mathbf{u}^{\mathrm{P}}$ sowie der geforderten Periodizität $\delta\mathbf{u}^{\mathrm{P},i+} = \delta\mathbf{u}^{\mathrm{P},i-}$ die antiperiodischen Spannungsvektoren auf gegenüberliegenden Flächen des RVE. Da der Einfluss der zusätzlichen Freiheitsgrade, wie oben erwähnt wurde, auf den periodischen Anteil der Randverschiebungen beschränkt bleibt, trägt die Anreicherung des Randverschiebungsfeldes nicht zu den Reaktionskräften $\mathbf{F}^{y_i}$ an den Masterknoten bei.

Beispiele für die Anwendung dieses Verfahrens zur Modellierung der RVE von Verbundwerkstoffen mit textilen Verstärkungsstrukturen sind zusätzlich zum folgenden Kapitel in Ulbricht u. a. (2008), Kästner u. a. (2008a) und Kästner und Ulbricht (2006) sowie Haasemann u. a. (2006) zu finden.

6 Simulation des effektiven Materialverhaltens des Verbundes und experimentelle Verifikation

Einführung

Zur Simulation des effektiven Materialverhaltens textilverstärkten Polypropylens werden die in den Kapiteln 2, 4 und 5 beschriebenen Äquivalenzkriterien, Materialmodelle und Modellierungsverfahren zu einer durchgängigen Berechnungstrategie kombiniert, die ausgehend von den Materialeigenschaften der Verbundbestandteile und ihrer geometrischen Anordnung innerhalb des Verbundes eine Vorhersage des makroskopischen Verhaltens ermöglicht.
Unter der Annahme, dass alle konstitutiven Bestandteile des Verbundes ein linear elastisches Materialverhalten aufweisen, erfolgt zunächst die Berechnung effektiver elastischer Steifigkeiten nach Abschnitt 2.3.2. Für die anschließende Simulation des inelastischen Materialverhaltens des Verbundes wird das mechanische Verhalten von PP durch das in Kapitel 4 bereitgestellte Materialmodell abgebildet. Die Modellierung des Materialverhaltens der Glasfaserverstärkung erfolgt in beiden Fällen durch ein isotropes, linear elastisches Materialmodell mit den Parametern $E_{\text{Glas}} = 73$ GPa und $\nu_{\text{Glas}} = 0,25$.

Beispiele

In den folgenden Abschnitten werden zwei verschiedene GF-PP-Verbunde betrachtet. Nach der Demonstration der Funktionsfähigkeit des vorgeschlagenen Verfahrens anhand des akademischen Beispiels eines unidirektional (UD) verstärkten Verbundes kommt die Modellierungstrategie zur Vorhersage des effektiven Verhaltens von gewebeverstärktem PP zum Einsatz. Die erforderlichen RVE-Modelle werden mithilfe der XFEM auf der Basis von Geometriemodellen erstellt, die aus Schliffbildern und Computertomografie (CT)-Aufnahmen ableitbar sind.
Die Verifizierung der Simulationsrechnungen erfolgt anhand der Ergebnisse der experimentellen Untersuchung des mechanischen Verhaltens der beiden Verbundtypen. Die dazu erforderlichen Probekörper wurden an der Laborpresse des Instituts für Textil- und Bekleidungstechnik (ITB) der TU Dresden hergestellt. Die verwendeten textilen Halbzeuge bestehen aus einem Roving, der sowohl Glas- als auch Polypropylenfasern enthält und daher als Hybridgarn bezeichnet wird. Während des Pressvorgangs schmelzen die Thermoplastfasern auf und füllen den verbleibenden Hohlraum innerhalb der Form. Die Konsolidierung des Verbundes erfolgt schließlich durch Abkühlen unter Beibehaltung des Pressdrucks. Die aus den so hergestellten Platten durch Wasserstrahlschneiden entnommenen streifenförmigen Probekörper nach DIN EN ISO 527-4 werden mit Aufleimern versehen (Abb. 6.1) und in monotonen Zugversuchen geprüft. Dabei wird in Analogie zu den Versuchen an unverstärktem PP die Belastungs-

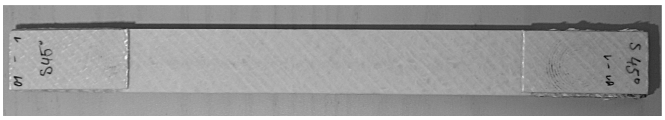


Abbildung 6.1: Probekörper nach DIN EN ISO 527-4

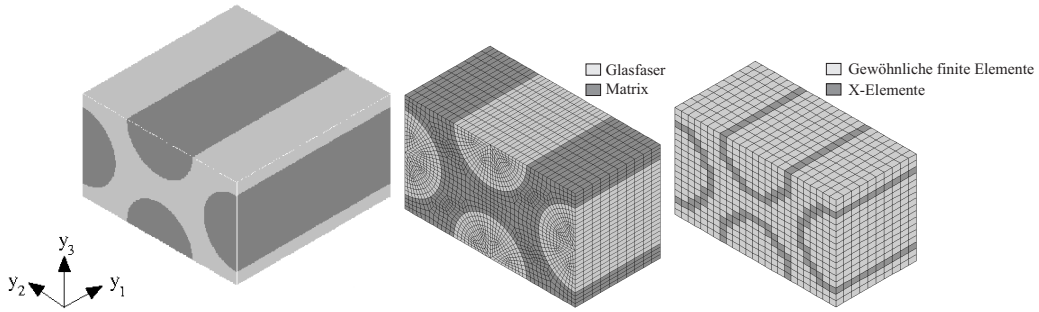
geschwindigkeit variiert. Zur Untersuchung der Richtungsabhängigkeit des Materialverhaltens erfolgt

die Prüfung der Verbundproben für drei verschiedene Orientierungen der textilen Verstärkungsstruktur relativ zur Belastungsrichtung.

6.1 Simulation des effektiven Materialverhalten eines GF-PP-Verbundes mit unidirektionaler Verstärkung

Wahl des RVE

In diesem Abschnitt wird die Modellierung und Simulation eines GF-PP-Verbundes, dessen Faserverstärkung aus geradlinig und parallel zueinander verlaufenden Einzelfasern besteht, beschrieben. Der Faservolumengehalt beträgt $v_\mathrm{F} = 0,5$. Unter Annahme einer hexagonalen und periodisch fortsetzbaren Faseranordnung (vgl. Abschnitt 2.3) ergibt sich die in Abb. 6.2(a) dargestellte Geometrie des RVE. Die numerische Modellierung des RVE erfolgt zu Vergleichszwecken sowohl durch die FEM als auch die XFEM. Die entsprechenden numerischen RVE-Modelle sind in Abb. 6.2(b) und Abb. 6.2(c) abgebildet.



(a) Geometrie des RVE-Modells (b) FEM-Modell (c) XFEM-Modell

Abbildung 6.2: Geometrie und numerische Modelle des RVE eines UD-Verbundes

6.1.1 Effektives linear elastisches Materialverhalten

Materialparameter

Zur Berechnung des effektiven linear elastischen Materialverhaltens sind neben den bereits angegebenen Parametern der Glasfilamente die elastischen Konstanten für Polypropylen festzulegen. Als Annahme für den Elastizitätmodul soll dabei der Anstieg der einachsigen Spannungs-Dehungskurve im Nullpunkt verwendet werden. Dieser kann durch

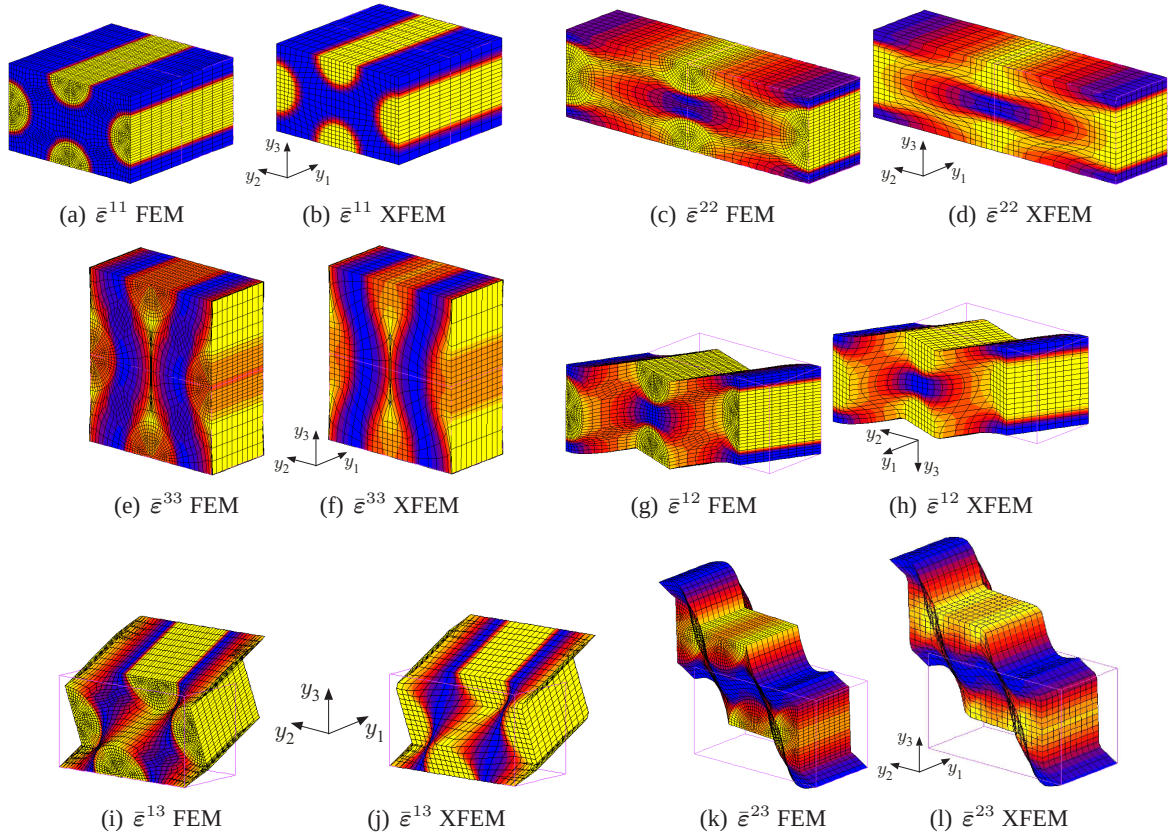
$$E_\mathrm{PP} = E_1 + E_2 + \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} c_i \approx 1.9\mathrm{GPa} \tag{6.1}$$

berechnet werden. Dabei sind E_1, E_2 und c_i die E-Moduln bzw. Relaxationsstärken des in Kapitel 4 beschriebenen einachsigen viskoplastischen Materialmodells. Für die Querkontraktionszahl wird $\nu_\mathrm{PP} = 0,4$ angenommen.

FEM/XFEM

Die derart parametrisierten numerischen RVE-Modelle werden anschließend durch periodische Verschiebungsrandbedingungen gemäß (2.65) belastet. Zur Lösung der daraus entstehenden sechs unabhängigen Lastfälle ist jeweils eine linear elastische FE-Rechnung erforderlich. Die aus den einzelnen Deformationsmoden resultierenden Verformungen des RVE sind in Abb. 6.3 für das FEM- und das

XFEM-Modell dargestellt. Dabei sind die in den Schubmoden auftretenden periodischen Verschiebungsanteile erkennbar.



(a) $\bar{\varepsilon}^{11}$ FEM (b) $\bar{\varepsilon}^{11}$ XFEM (c) $\bar{\varepsilon}^{22}$ FEM (d) $\bar{\varepsilon}^{22}$ XFEM

(e) $\bar{\varepsilon}^{33}$ FEM (f) $\bar{\varepsilon}^{33}$ XFEM (g) $\bar{\varepsilon}^{12}$ FEM (h) $\bar{\varepsilon}^{12}$ XFEM

(i) $\bar{\varepsilon}^{13}$ FEM (j) $\bar{\varepsilon}^{13}$ XFEM (k) $\bar{\varepsilon}^{23}$ FEM (l) $\bar{\varepsilon}^{23}$ XFEM

Abbildung 6.3: Vergleich der mit FEM und XFEM berechneten sechs Deformationsmoden $\bar{\varepsilon}^{kl}$ zur Bestimmung der effektiven elastischen Steifigkeiten, Darstellung der lokalen Spannungsfelder $\sigma_{kl}(\mathbf{y})$

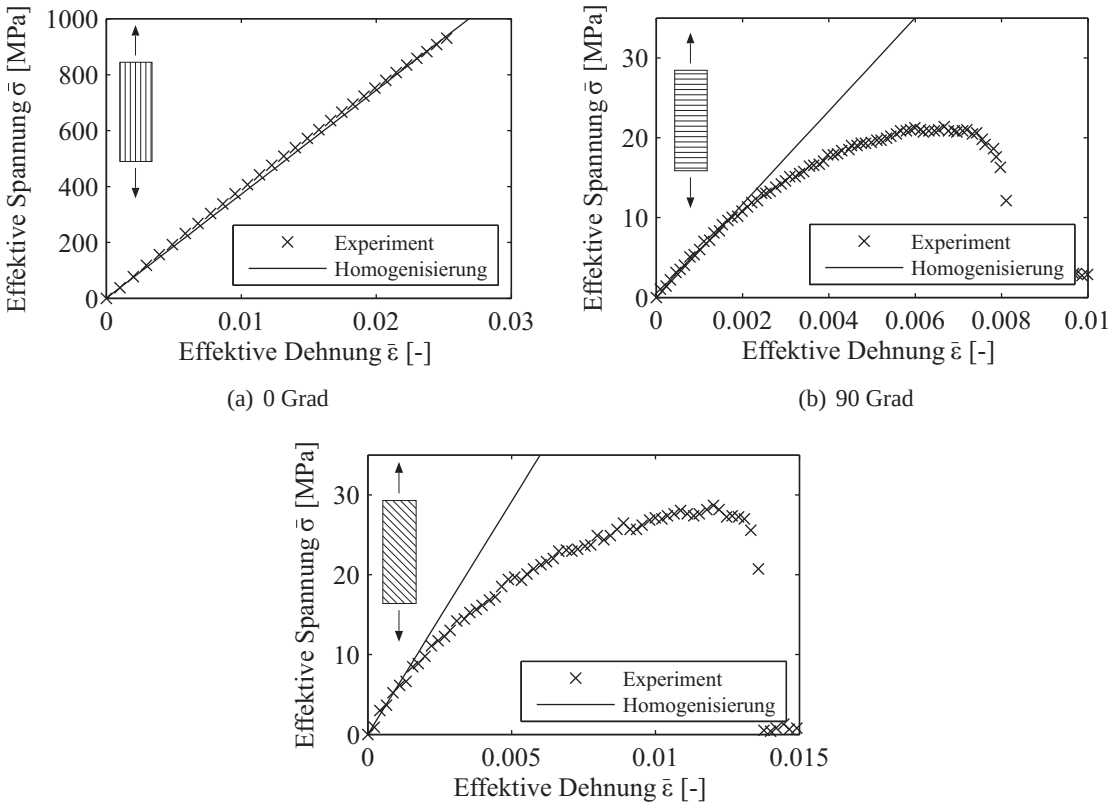
Es wird weiterhin deutlich, dass die mit beiden Modellierungsvarianten erzielten Ergebnisse qualitativ gut übereinstimmen. Dies wird auch durch die Ergebnisse für die effektiven elastischen Steifigkeiten bestätigt, die durch Mittelung der lokalen Spannungsfelder zu berechnen sind. Zur effizienten Bestimmung dieser Mittelwerte werden entsprechend (2.70) die Reaktionskräfte an den Masterknoten ausgewertet.
Mit den oben genannten Materialparametern folgt für die mit beiden Modellierungsvarianten berechneten effektiven elastischen Steifigkeiten des UD-verstärkten Verbundes, angegeben in Form der Steifigkeitsmatrix in VOIGTscher Notation (vgl. Abschnitt 2.3.2),

$$\underline{\underline{\bar{\mathbf{C}}}}^{\mathrm{V,UD}}_{\mathrm{FEM/XFEM}} = \begin{bmatrix} 40,05/40,12 & 4,40/4,40 & 4,40/4,40 & 0 & 0 & 0 \\ 4,40/4,40 & 8,79/8,81 & 5,01/4,99 & 0 & 0 & 0 \\ 4,40/4,40 & 5,01/4,99 & 8,79/8,81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,89/1,90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,91/1,91 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,91/1,91 \end{bmatrix} \text{ GPa}. \quad (6.2)$$

Erwartungsgemäß besitzt die effektive Steifigkeitsmatrix aufgrund der unidirektionalen Anordnung der Glasfasern eine deutliche Vorzugsrichtung parallel zur Achse der Verstärkungsfasern (y_1-Richtung). In der dazu senkrechten y_2-y_3-Ebene ist das Materialverhalten dagegen richtungsunabhängig. Die transversale Isotropie ist auf die gewählte Idealisierung der Faseranordnung in Form eines hexagonalen Gitters zurückzuführen.
Aus der Steifigkeitsmatrix können effektive Elastizitätsmoduln berechnet werden. Für die Faserrichtung erhält man $\bar{E}_{11} = 37,24$GPa und für die transversale Richtung $\bar{E}_{22} = \bar{E}_{33} = 5,84$GPa. Nach einer Transformation der Steifigkeitsmatrix in ein um 45 Grad gedrehtes Koordinatensystem kann außerdem der E-Modul $\bar{E}_{11}^{45} = 6,60$GPa für eine unter diesem Winkel zur Faserrichtung erfolgende Zugbeanspruchung bestimmt werden.

Experimentelle Verifikation

Das aus diesen Steifigkeiten resultierende lineare Deformationsverhalten wird in Abb. 6.4 mit experimentell bestimmten Spannungs-Dehnungskurven verglichen. Erfolgt die Belastung in Richtung der



(a) 0 Grad

(b) 90 Grad

(c) 45 Grad

Abbildung 6.4: Vergleich des berechneten effektiven linear elastischen Materialverhaltens mit experimentell bestimmten Spannungs-Dehungskurven für verschiedene Belastungsrichtungen

Verstärkungsfasern Abb. 6.4(a), wird das effektive Materialverhalten durch die hohe Steifigkeit der Glasfasern dominiert. Demzufolge ist auch in der experimentell bestimmten Spannungs-Dehnungskurve keine Nichtlinearität erkennbar. Die mit Hilfe des RVE-Modells berechnete Steifigkeit liefert eine sehr gute Übereinstimmung mit dem gemessenen Materialverhalten.

Betrachtet man dagegen die Zugversuche in denen die Belastung unter einem Winkel von 90 (Abb. 6.4(b)) bzw. 45 Grad (Abb. 6.4(c)) zur Faserrichtung aufgebracht wird, ist in den Experimenten ein deutlich niedrigeres Spannungsniveau und ein nichtlineares Deformationsverhalten festzustellen, das im Wesentlichen durch das Matrixmaterial bestimmt ist. In diesen Fällen liefert die linear elastische Homogenisierung Steifigkeiten, die gut mit dem Anfangsanstieg der experimentellen Kurven übereinstimmen.
Aufgrund der einfachen Verstärkungsstruktur kann der E-Modul in Faserrichtung des hier als akademisches Beispiel verwendeten UD-Verbundes durch Anwendung der Mischungsregel

$$\bar{E}_{11} = v_{\mathrm{F}} E_{\mathrm{Glas}} + (1 - v_{\mathrm{F}})\, E_{\mathrm{PP}} = 37,45\mathrm{GPa} \tag{6.3}$$

bestimmt werden. Das Ergebnis stimmt sehr gut mit dem durch die Homogenisierung bestimmten Wert überein, da die zur Herleitung der Mischungsregel verwendete Annahme einer konstanten Dehnung dem im RVE vorliegenden Verzerrungszustand entspricht. Dagegen wird für die Querrichtung unter der Voraussetzung einer konstanten Spannung in den beiden konstitutiven Bestandteilen des Verbundes die effektive Steifigkeit deutlich unterschätzt

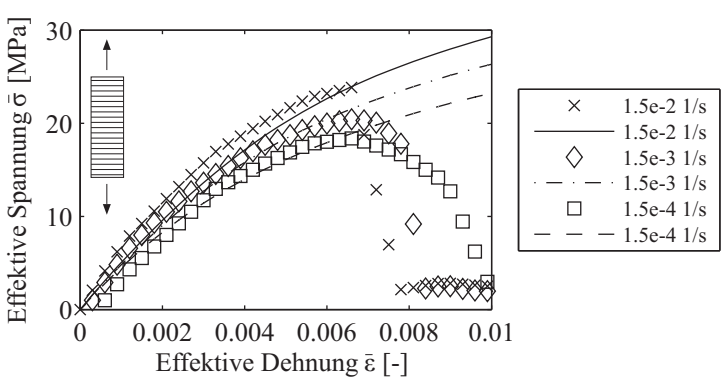
$$\bar{E}_{22} = \frac{E_{\mathrm{Glas}} E_{\mathrm{PP}}}{v_{\mathrm{F}} E_{\mathrm{PP}} + (1 - v_{\mathrm{F}})\, E_{\mathrm{Glas}}} = 3,70\mathrm{GPa}. \tag{6.4}$$

Nach der erfolgreichen Berechnung der effektiven elastischen Steifigkeiten und der damit erfolgten Verifizierung der XFEM soll im folgenden Abschnitt das Materialverhalten der PP-Matrix mit dem in Kapitel 4 abgeleiteten viskoplastischen Materialmodell abgebildet werden.

6.1.2 Effektives inelastisches Materialverhalten

Querrichtung

Anhand der Berechnung effektiver Spannungs-Dehnungskurven für eine einachsige makroskopische Zugbeanspruchung mit konstanter Belastungsgeschwindigkeit wird nachfolgend der Einfluss des inelastischen Materialverhaltens von PP auf das effektive Verbundverhalten untersucht. Da die Eigenschaften der Matrix, wie im vorangegangen Abschnitt gezeigt wurde, keinen Einfluss auf das mechanische Verhalten des Verbundes bei Zugbeanspruchung in Richtung der Glasfaserfilamente besitzen, werden nur die Zugversuche quer und unter einem Winkel von 45 Grad zu den Verstärkungsfasern untersucht. Für die Berechnung der Querrichtung wird die im Versuch vorgegebene, in der Probe als homogen angenommene, makroskopische Dehnung $\bar{\varepsilon}(t)$ mittels periodischer Verschiebungsrandbedingungen in der y_1-y_2-Ebene auf das RVE übertragen und der Mittelwert $\bar{\sigma}(t) = \langle \sigma(\mathbf{y}, t) \rangle$ berechnet. Die daraus resultierenden effektiven Spannungs-Dehnungskurven sind in Abb. 6.5(a) für verschiedene Dehnraten im Vergleich mit entsprechenden experimentell bestimmten Verläufen dargestellt. Aus der in Abb. 6.5(b) veranschaulichten lokalen Dehnungsverteilung $\varepsilon_{22}(\mathbf{y})$ für den letzten Lastschritt kann im Vergleich zu dem vorgegebenen Effektivwert $\bar{\varepsilon} = 0,015$ eine lokale Dehnungsüberhöhung von $\frac{\max[\varepsilon_{22}(\mathbf{y})]}{\bar{\varepsilon}} = 2,67$ abgelesen werden.
Der Vergleich der experimentell und numerisch bestimmten effektiven Spannungs-Dehnungskurven macht deutlich, dass die Nichtlinearität der Verläufe bis zum Erreichen des Spannungsmaximums gut wiedergegeben wird. Allerdings ist die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Verbundverhaltens nicht so stark ausgeprägt, wie von der Simulation prognostiziert. Außerdem verursacht das sukzessive Versagen der Faser-Matrixinterphase danach eine Nichtlinearität des Spannungs-Dehnungsverlaufs, die durch das RVE-Modell nicht korrekt vorhergesagt werden kann, da kein Grenzschicht- oder Schädigungsmodell enthalten ist. Die Einbindung eines entsprechenden Kohäsivzonenansatzes in die XFEM-Modellierung zur Abbildung des Grenzschichtversagens ist für zukünftige Arbeiten geplant.



(a) Effektive Spannungs-Dehnungskurven

(b) Lokale Dehnungsverteilung $\varepsilon_{22}(\mathbf{y})$

Abbildung 6.5: Zugversuch in Querrichtung des unidirektional verstärkten Polypropylens - Vergleich zwischen der Simulation und den experimentell für verschiedene Dehnraten ermittelten Spannungs-Dehnungskurven

45 Grad

Im Gegensatz zur Berechnung des effektiven Materialverhaltens in Querrichtung, kann für die Simulation der Zugversuche unter 45 Grad zur Verstärkungsrichtung keine verschiebungsbasierte Laststeuerung angewendet werden, wenn für beide Simulationen ein und dasselbe RVE-Modell genutzt werden soll, da die auftretenden effektiven Querdehnungen im Gegensatz zur Längsdehnung nicht bekannt sind (vgl. Abschnitt 2.3.3). Daher erfolgt die Simulation kraftgesteuert unter Nutzung der in den Experimenten gemessenen effektiven Spannungsverläufe $\bar{\sigma}(t)$. Für einen Winkel $\alpha = 45°$ folgt für den in das lokale Koordinatensystem gedrehten effektiven Spannungszustand

$$[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}] = \frac{1}{2}\bar{\sigma}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

Dieser wird über äußere Kräfte an den Masterknoten

$$F_j^{y_i} = \tilde{\sigma}_{ij} A^{y_i} \tag{6.6}$$

auf das RVE aufgebracht. Zur Darstellung der effektiven Spannungs-Dehnungskurven wird der mittlere Verzerrungszustand des RVE

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = \frac{u_1^{y_1}}{\Delta y_1} \tag{6.7}$$

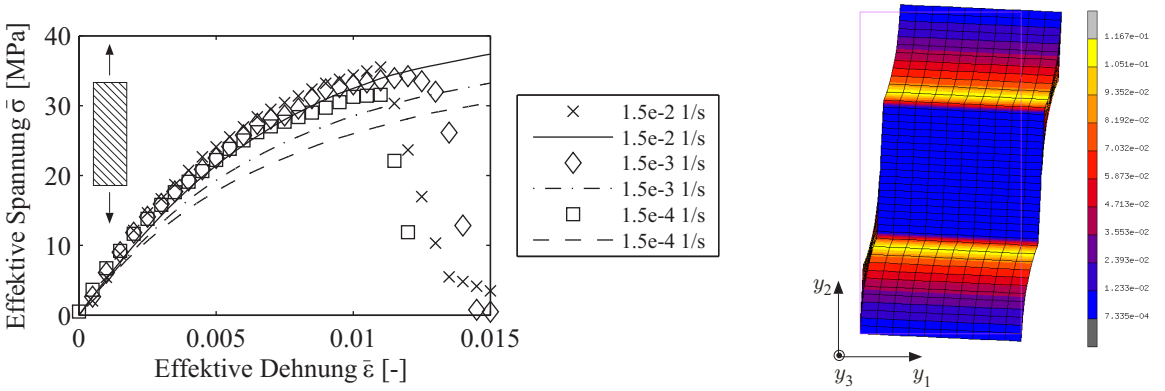
$$\tilde{\varepsilon}_{22} = \frac{u_2^{y_2}}{\Delta y_2} \tag{6.8}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_1^{y_2}}{\Delta y_2} + \frac{u_2^{y_1}}{\Delta y_1}\right) \tag{6.9}$$

aus den in der nichtlinearen FE-Rechnung bestimmten Verschiebungen der Masterknoten berechnet. Für die resultierende Dehnung $\bar{\varepsilon}$ in Richtung der Probenlängsachse ergibt sich schließlich

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{12} + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{22}. \tag{6.10}$$

Auch für die Beanspruchung unter 45 Grad zur Verstärkungsrichtung ist ein nichtlineares Deformationsverhalten festzustellen (Abb. 6.6(a)). Allerdings ist die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens deutlich geringer ausgeprägt als in den Zugversuchen unter 90 Grad zur Faserrichtung. Die Nichtlinearität der Spannungs-Dehnungskurven wird im Wesentlichen durch die Schubsteifigkeit der Matrix bestimmt. Dies ist aus dem in Abb. 6.6(b) dargestellten Deformationszustand zu erkennen. Damit liefert die gute Übereinstimmung zwischen den experimentell und numerisch bestimmten Spannungs-Dehnungskurven neben der Demonstration der Anwendbarkeit der Berechnungsmethodik auch eine Verifikation für die gewählte mehrachsige Verallgemeinerung des viskoplastischen Materialmodells für Polypropylen.



(a) Effektive Spannungs-Dehnungskurven

(b) Lokale Schubverzerrungsverteilung $\gamma_{12}(\mathbf{y})$

Abbildung 6.6: Zugversuch unter 45 Grad zur Verstärkungsrichtung des UD-Verbundes - Vergleich zwischen der Simulation und den experimentell für verschiedene Dehnraten ermittelten Spannungs-Dehnungskurven

Randbedingungseinfluss

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Simulationsergebnisse wurden unter Anwendung periodischer Randverschiebungen in der y_1-y_2-Ebene sowie der Spannungsrandbedingung $\mathbf{t}^3 = \mathbf{0}$ in Dickenrichtung y_3 ermittelt. Dabei ist die Spannungsfreiheit in Dickenrichtung insbesondere für die Simulation eines RVE, das den gesamten Schichtaufbau erfasst, sinnvoll.
Da für den unidirektionalen Verbund davon ausgegangen werden kann, dass auch über der Probendicke eine periodische, hexagonale Faseranordnung vorliegt, sind auch perodische Randverschiebungen in Kombination mit der Forderung nach dem Verschwinden des zugehörigen Reaktionskraftvektors $\mathbf{F}^{y_3} = \mathbf{0}$ in dieser Richtung denkbar. Eine derartige Form der Randbedingungen erzwingt entlang der Ränder ∂Y^+ und ∂Y^- eine konstante Querkontraktion, die die errechneten effektiven Spannungs-Dehnungskurven jedoch nur geringfügig beeinflusst (Abb. 6.7).

6.2 Simulation des effektiven Materialverhaltens eines GF-PP-Verbundes mit Gewebeverstärkung

Einführung

Nachdem die Anwendbarkeit der vorgeschlagenen Modellierungsstrategie anhand des unidirektional verstärkten PP nachgewiesen werden konnte, beschreibt der folgende Abschnitt die Vorhersage des effektiven Materialverhaltens eines GF-PP-Verbundes mit Gewebeverstärkung. Wie unter Punkt 2.3

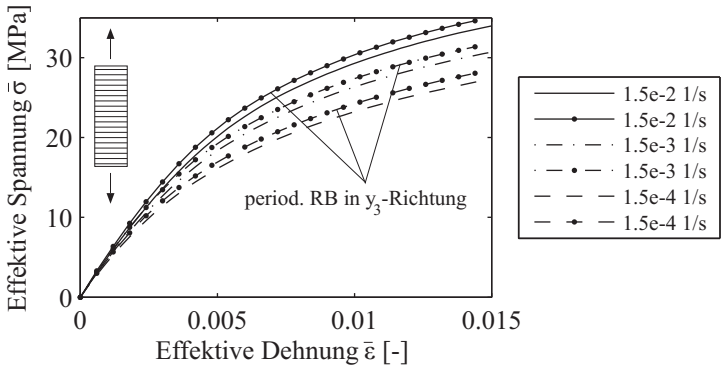
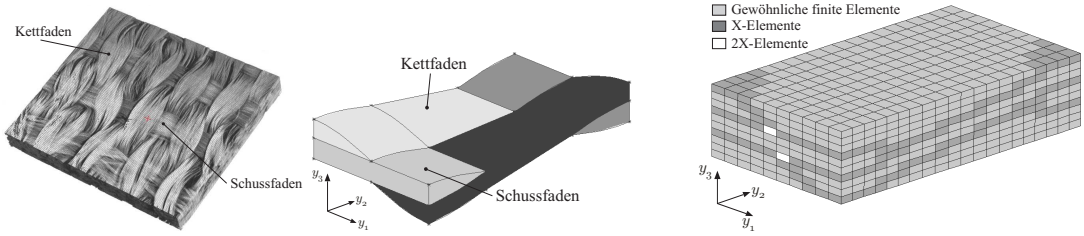


Abbildung 6.7: Einfluss der in Dickenrichtung gewählten Randbedingungen auf das Simulationsergebnis für Zugversuche senkrecht zur Faserrichtung

erläutert wurde, sind die einzelnen Filamente im Gegensatz zum vorigen Beispiel in einem textilverstärkten Verbund nicht mehr homogen verteilt, so dass die Betrachtung einer zusätzlichen Längenskala in Form der Mesoebene zweckmäßig ist. Die Mesostruktur des Verbundes wird durch die geometrische Anordnung der konsolidierten Rovings, die einen hohen Faservolumengehalt aufweisen, und der dazwischenliegenden Matrixbereiche bestimmt. Sie ist in einem entsprechenden RVE zu erfassen.

Idealisiertes Geometriemodell

Die Ableitung eines Geometriemodells für die Mesoebene erfolgt im vorliegenden Fall ausgehend von Schliffbildern und CT-Aufnahmen (Abb. 6.8(a)) des konsolidierten Verbundes. Im Gegensatz zur



(a) CT-Aufnahme (b) Geometrie (Viertelmodell) (c) XFEM-Modell (Viertelmodell)

Abbildung 6.8: Idealisierte Geometrie der Verstärkungsstruktur und XFEM-Modell

ursprünglichen Anordnung der Rovings im unkonsolidierten textilen Halbzeug (vgl. Abb. 1.2(a)) ist in der CT-Aufnahme eine unregelmäßigere Fadenlage zu verzeichnen, die auf das Aufschmelzen der in dem Hybridgarn enthaltenen Polypropylenfasern während des Pressprozesses zurückzuführen ist.
Zur numerischen Modellierung wird die in Abb. 6.8(b) dargestellte idealisierte Geometrie der Verstärkungsstruktur angenommen. Trotz der Idealisierungen bildet das Modell mit dem ondulierten Kettfadenverlauf eine wesentliche Eigenschaft der textilen Verstärkungsstruktur ab. Außerdem berücksichtigt das Geometriemodell den im Vergleich zu den aneinander anliegenden Kettfäden deutlich größeren Abstand zwischen zwei benachbarten Schussfäden. Die parametrisierte mathematische Beschreibung der Rovingquerschnitte und des Fadenverlaufs erfolgt durch Winkelfunktionen. Dabei werden kleine Krümmungsradien vermieden, da diese sowohl hinsichtlich der Vernetzung mittels FEM als auch der

Anwendung der automatisierten Modellgenerierung auf Basis der XFEM als problematisch anzusehen sind. Bei der Erstellung des RVE-Modells wird weiterhin davon ausgegangen, dass die Rovings der textilen Verstärkungsstruktur vollständig in Matrix eingebettet sind, wodurch ein quaderförmiges RVE entsteht.

6.2.1 Effektives linear elastisches Materialverhalten

Effektive Rovingeigenschaften

Da das Materialverhalten der, auf der Mesoebene als homogen betrachteten, konsolidierten Rovings durch die Eigenschaften von Filament und Matrix bestimmt wird, ist gemäß Abschnitt 2.3 der Einsatz eines zweistufigen Homogenisierungsverfahrens erforderlich. Im ersten Homogenisierungsschritt werden die effektiven Steifigkeiten des Rovings durch Anwendung der linear elastischen Homogenisierung mit periodischen Verschiebungsrandbedingungen berechnet. Unter der Voraussetzung einer hexagonalen Anordnung der Glasfaserfilamente innerhalb des Rovings analog zu Abb. 6.2(a) sowie der Annahme eines Faservolumengehalts von 80 Prozent ($v_\mathrm{F} = 0,8$), die durch die Auswertung von Schliffbildern motiviert ist, ergibt sich folgende Matrix der effektiven elastischen Steifigkeiten

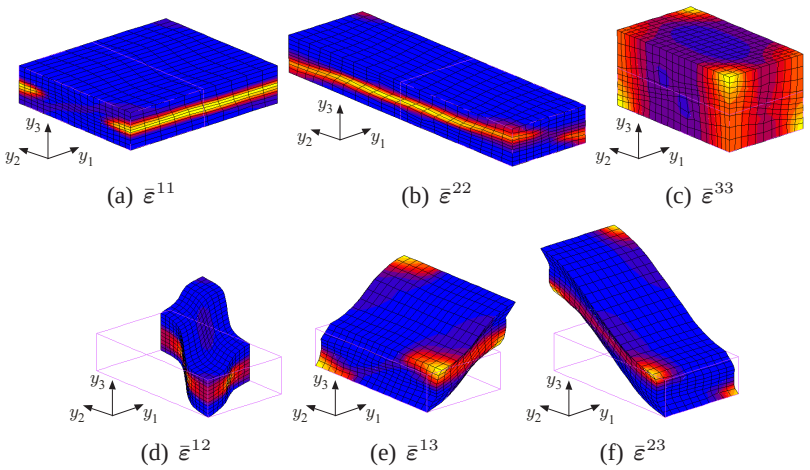
$$\bar{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{Roving}} = \begin{bmatrix} 63,40 & 8,67 & 8,67 & 0 & 0 & 0 \\ 8,67 & 22,19 & 9,35 & 0 & 0 & 0 \\ 8,67 & 9,35 & 22,19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,39 \end{bmatrix} \text{ GPa}, \tag{6.11}$$

die ein transversal isotropes linear elastisches Materialverhalten des Rovings beschreibt.

Effektive Verbundeigenschaften

Für den zweiten Homogenisierungsschritt ist ausgehend von der idealisierten Geometrie der Verstärkungsstruktur ein numerisches RVE-Modell für die Mesoebene zu erstellen. Dazu kommt die automatisierte Modellgenerierung zum Einsatz (Abb. 6.8(c)). Im Vergleich zu einem FE-Modell mit tetraederförmigen Elementen bietet die Anwendung der XFEM, zusätzlich zu dem regelmäßigen Berechnungsnetz, Vorteile bei der Modellierung von Verbundwerkstoffen mit einem hohen Faservolumengehalt, da keine Restriktionen hinsichtlich der Größe der Matrixbereiche in der Umgebung eines Rovings existieren. Während für das betrachtete Gewebe zur Modellierung der quaderförmigen Außenkontur des RVE bei Anwendung der FEM mindestens eine zusätzliche Elementschicht ober- und unterhalb der Verstärkungsstruktur zu berücksichtigen wäre, ist dies bei der Modellierung mittels XFEM nicht erforderlich, so dass ein höherer Faservolumengehalt abgebildet werden kann.
Bedingt durch die Symmetrien der textilen Verstärkungsstruktur ist zur Berechnung des effektiven elastischen Materialverhaltens die Betrachtung eines Viertelmodells des eigentlichen RVE ausreichend. Die Belastung des RVE erfolgt in diesem Fall durch die in Kästner u. a. (2008a) beschriebenen periodischen Symmetrierandbedingungen. Die resultierenden Deformationsmoden $\bar{\varepsilon}^{kl}$ des RVE sind in Abb. 6.9 dargestellt. Durch die Auswertung der für diese charakteristischen Lastfälle berechneten lokalen Spannungsfelder kann, analog zum Skalenübergang von der Mikro- zur Mesoebene, eine makroskopische Steifigkeitsmatrix für den gewebeverstärkten GF-PP-Verbund bestimmt werden

$$\bar{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{Gewebe}} = \begin{bmatrix} 13,65 & 3,83 & 3,35 & 0 & 0 & 0 \\ 3,83 & 15,27 & 3,38 & 0 & 0 & 0 \\ 3,35 & 3,38 & 5,66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,85 \end{bmatrix} \text{ GPa}. \tag{6.12}$$



(a) $\bar{\varepsilon}^{11}$ (b) $\bar{\varepsilon}^{22}$ (c) $\bar{\varepsilon}^{33}$

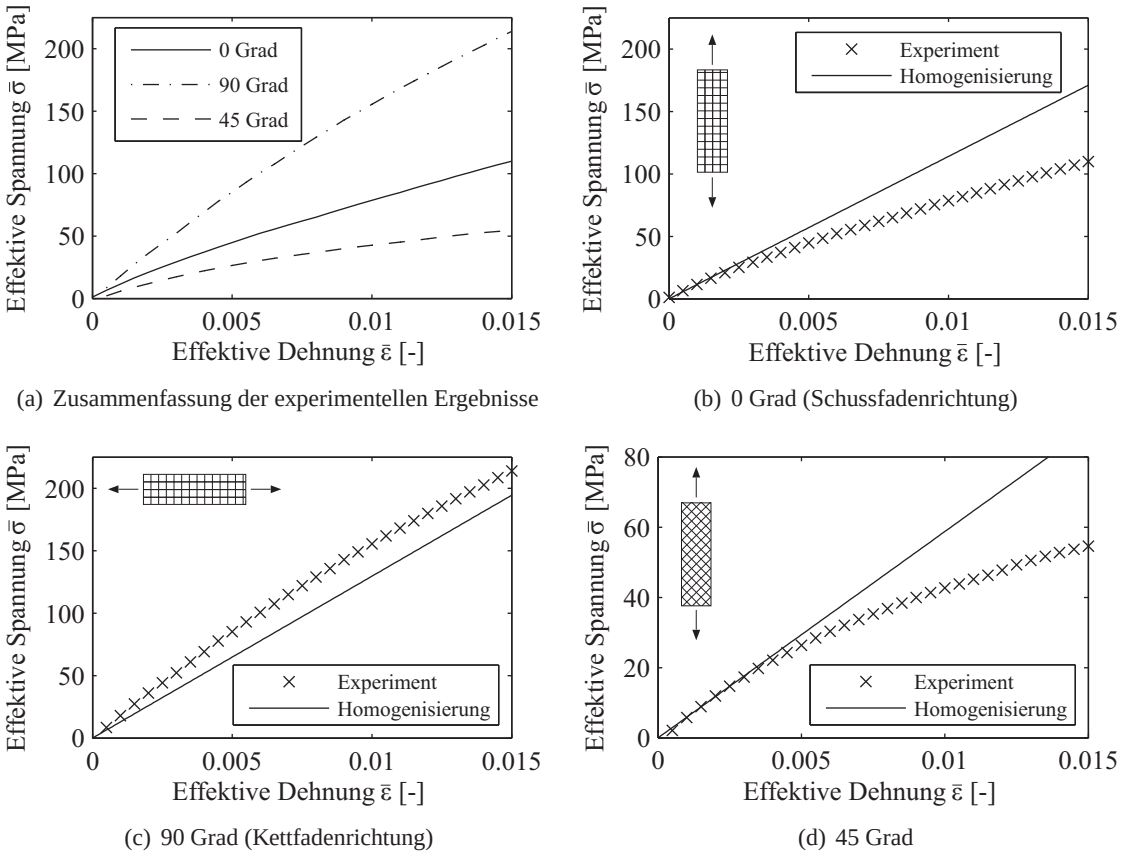
(d) $\bar{\varepsilon}^{12}$ (e) $\bar{\varepsilon}^{13}$ (f) $\bar{\varepsilon}^{23}$

Abbildung 6.9: Simulation von sechs Deformationsmoden $\bar{\varepsilon}^{kl}$ zur Bestimmung der effektiven elastischen Steifigkeiten, Darstellung der lokalen Spannungsfelder $\sigma_{kl}\left(\mathbf{y}\right)$

Damit sind alle für die Strukturberechnung benötigten Kennwerte des makroskopischen Ersatzkontinuums mit einem orthotropen linear elastischen Materialverhalten bekannt. Die experimentelle Bestimmung der vollständigen Steifigkeitsmatrix ist mit einem erheblichen Aufwand verbunden und erfordert z. B. die Verwendung von Ultraschallverfahren.

Experimentelle Verifikation

Zum Vergleich der vorhergesagten effektiven Steifigkeiten mit dem experimentell ermittelten Deformationsverhalten des Verbundes werden die effektiven Elastizitätsmoduln für die Belastung in Richtung der Schussfäden $\bar{E}_{11} = 11,42\text{GPa}$ sowie in Richtung der Kettfäden $\bar{E}_{22} = 12,96\text{GPa}$ aus der Steifigkeitsmatrix berechnet. In Analogie zu dem für den UD-Verbund angewendeten Vorgehen kann der effektive E-Modul $\bar{E}_{11}^{45} = 5,88\text{GPa}$ für einen Zugversuch unter einem Winkel von 45 Grad zu den Orthotropieachsen der Verstärkungsstruktur nach der Transformation der Steifigkeitsmatrix in das gedrehte Koordinatensystem ermittelt werden.
Das durch die berechneten Elastizitätskonstanten beschriebene lineare Deformationsverhalten wird in Abb. 6.10 den experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungskurven für die jeweilige Belastungsrichtung gegenübergestellt. Dabei fällt auf, dass der Verbund trotz des wellenförmigen Verlaufs der Kettfäden in der 90-Grad-Richtung eine höhere Steifigkeit aufweist als in Schussfadenrichtung (vgl. Abb. 6.10(a)). Dieses Verhalten ist auf den großen Schussfadenabstand (vgl. Abb. 6.8(a)) zurückzuführen und wird auch durch das RVE-Modell vorhergesagt. Aus dem Vergleich der experimentellen und numerischen Daten ist weiterhin zu erkennen, dass die Simulationsergebnisse sowohl für die Schussfadenrichtung (Abb. 6.10(b)) als auch für die Belastung unter einem Winkel von 45 Grad (Abb. 6.10(d)) eine Tangente an die realen Spannungs-Dehnungsverläufe bilden. Dagegen wird die Steifigkeit des Verbundes in Kettfadenrichtung (Abb. 6.10(c)) unterschätzt.
Obwohl die prinzipielle Charakteristik des Verbundverhaltens durch die Simulation vorhergesagt werden kann, demonstriert dieses Ergebnis ein Defizit des genutzten RVE-Modells auf der Basis einer einzelnen Schicht der textilen Verstärkungsstruktur. Stellt man sich den in den Experimenten untersuchten mehrschichtigen Verbund zusammengesetzt aus mehreren RVE der Einzelschicht vor, so wird anschaulich klar, dass abhängig von der textilen Verstärkungsstruktur Abweichungen zu den experimentellen Ergebnissen vorhanden sein werden, da die in der Realität auftretende Durchdringung der verschiedenen Lagen des textilen Halbzeugs nicht abgebildet werden kann. Deshalb sollten in Zukunft



(a) Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse

(b) 0 Grad (Schussfadenrichtung)

(c) 90 Grad (Kettfadenrichtung)

(d) 45 Grad

Abbildung 6.10: Vergleich des berechneten effektiven linear elastischen Materialverhaltens mit experimentell bestimmten Spannungs-Dehungskurven für verschiedene Belastungsrichtungen

auch RVE für den gesamten Verbund untersucht werden.

6.2.2 Effektives inelastisches Materialverhalten

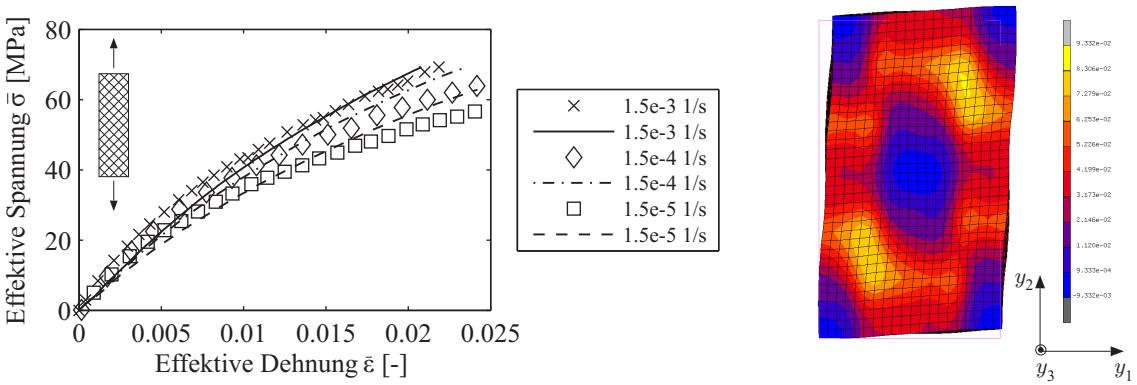
Annahmen

Für die Berechnung des effektiven nichtlinearen Spannungs-Dehnungsverhaltens werden nachfolgend ausschließlich Zugversuche unter 45 Grad zu den Orthotropieachsen des RVE betrachtet. Analog zum UD-Verbund kommt zur Abbildung des Materialverhaltens der Matrix im Rahmen der physikalisch nichtlinearen FE-Simulation das in Kapitel 4 für PP entwickelte viskoplastische Materialmodell zum Einsatz. Das inelastische Verhalten der Verstärkungsfäden, das beispielsweise durch Schädigungsvorgänge verursacht wird, bleibt dagegen unberücksichtigt. Die Rovings werden nach wie vor als homogenes linear elastisches Kontinuum mit der effektiven Steifigkeit $\underline{\underline{\bar{C}}}^{V}_{\text{Roving}}$ gemäß (6.11) modelliert.
Da in den zu simulierenden Zugversuchen sowohl Normal- als auch Schubbeanspruchungen auftreten, können die zur Berechnung des effektiven elastischen Materialverhaltens genutzten periodischen Symmetrierandbedingungen nicht mehr angewendet werden. Daher ist für die nichtlineare Berechnung das vollständige RVE-Modell zu verwenden.

45 Grad

Wie in Abschnitt 2.3.3 beschrieben wurde, erfolgt die Simulation der Versuche kraftgesteuert unter

Verwendung der experimentell für verschiedene Dehnraten von $1,5 \cdot 10^{-5} \ldots 1,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s}$ ermittelten Spannungsverläufe $\bar{\sigma}(t)$. Abbildung 6.11 zeigt dazu den Vergleich der experimentell und rechnerisch ermittelten effektiven Spannungs-Dehnungskurven sowie das lokale Schubverzerrungsfeld $\gamma_{12}(\mathbf{y})$ an der Oberfläche des RVE. Die in den Experimenten beobachtete Dehnratenabhängigkeit des Materialverhaltens (Abb. 6.11(a)) wird mit guter Genauigkeit durch das RVE-Modell wiedergegeben. Speziell für die beiden niedrigeren Dehnraten liegt die Steifigkeit des numerischen Modells jedoch über den experimentell bestimmten Werten. Dies ist u. a. auf zusätzlich auftretende Schädigungsphänomene in der Verbundprobe zurückzuführen, die durch das Modell nicht erfasst werden.

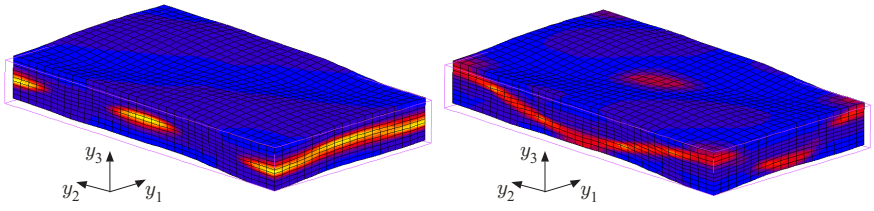


(a) Effektive Spannungs-Dehnungskurven

(b) Lokale Schubverzerrungsverteilung $\gamma_{12}(\mathbf{y})$

Abbildung 6.11: Zugversuch unter 45 Grad zu den Orthotropieachsen des gewebeverstärkten Verbundes - Vergleich zwischen der Simulation und den experimentell für verschiedene Dehnraten ermittelten Spannungs-Dehnungskurven

Neben den effektiven Spannungs-Dehnungskurven liefert die mehrskalige Modellierung und Simulation auch Informationen zur den lokalen Beanspruchungen des heterogenen Werkstoffs. So ist beispielsweise anhand von Abb. 6.11(b) zu erkennen, dass sich die lokale Schubdeformation erwartungsgemäß in den Matrixbereichen des RVE konzentriert, während die Verformung durch die steifen Verstärkungsfäden, z.B. in der Mitte und an den Ecken des RVE, behindert wird. Aufgrund der in der y_1- und y_2-Richtung auftretenden Belastungen werden sowohl die Schuss- als auch die Kettfäden auf Zug beansprucht (Abb. 6.12).



(a) $\boldsymbol{\sigma}_{11}(\mathbf{y})$

(b) $\boldsymbol{\sigma}_{22}(\mathbf{y})$

Abbildung 6.12: Darstellung der lokalen Spannungsfelder für einen Zugversuch unter 45 Grad zu den Orthotropieachsen des gewebeverstärkten Verbundes

7 Zusammenfassung und Ausblick

Skalenübergreifende Modellierung

Die Modellierung der lokalen Werkstoffstruktur führt im Rahmen der Berechnung eines Bauteils, das aus einem heterogenen Verbundwerkstoff gefertigt ist, bedingt durch die Größenunterschiede zwischen den Bauteilabmessungen und dem inneren Aufbau des Materials zu einem erheblichen Berechnungsaufwand. In der vorliegenden Arbeit wird daher die Modellierung des Verbundes durch ein homogenes Ersatzkontinuum mit effektiven Materialkennwerten vorgeschlagen. Diese Materialparameter werden aus den lokalen Eigenschaften des heterogenen Werkstoffaufbaus unter Anwendung von Homogenisierungsverfahren berechnet.
Für die hier betrachteten GF-PP-Verbunde können mit der Mikro-, der Meso- und der Makroskala drei charakteristische Skalenebenen definiert werden, so dass für die Berechnung des effektiven Materialverhaltens ein zweistufiges Homogenisierungsverfahren erforderlich ist. In einem ersten Homogenisierungsschritt werden effektive Kennwerte für den auf der Mesoebene als homogen betrachteten konsolidierten Roving berechnet, dessen Verhalten durch die Eigenschaften seiner mikroskopischen Bestandteile – Filament und Matrix – bestimmt wird. Matrix, Roving und Geometrie der textilen Verstärkung definieren ein für die Materialstruktur der Mesoebene charakteristisches RVE, das Grundlage für die zweite Stufe des Homogenisierungsverfahrens – der Berechnung effektiver Verbundkennwerte – ist.
Für beide Homogenisierungsschritte wird dabei vorausgesetzt, dass sich die charakteristischen Längen zweier aufeinanderfolgender Skalenebenen deutlich voneinander unterscheiden, so dass der Einfluss einzelner Inhomogenitäten auf das effektive Verhalten ausgeschlossen werden kann. Für die kontinuumsmechanische Modellierung der lokalen Materialstruktur auf der Mikro- und Mesoskala wird weiterhin angenommen, dass die charakteristischen Längen der Inhomogenitäten die Anwendung einer phänomenologischen Feldbeschreibung erlauben.
Nach der Definition eines Kriteriums für die Äquivalenz von lokalem und effektivem Materialverhalten in Form der HILL-MANDEL-Bedingung und der Diskussion des Randbedingungseinflusses sowie verschiedener RVE-Varianten, wird die Berechnung effektiver elastischer Steifigkeiten durch die Auswertung des für charakteristische Deformationsmoden simulierten lokalen Materialverhaltens erläutert.
Während für den linear elastischen Fall die Parameter eines effektiven Materialmodells in Form des HOOKEschen Gesetzes explizit bestimmt werden, ist ein makroskopisches Materialmodell für den GF-PP-Verbund im nichtlinearen Fall nicht bekannt. Die Vorhersage des effektiven inelastischen Materialverhaltens erfolgt stattdessen durch die Simulation von Zugversuchen. Unter der Voraussetzung eines homogenen makroskopischen Beanspruchungszustandes werden Randbedingungen für die Simulation eines einzelnen RVE definiert. Abhängig von der vorliegenden makroskopischen Beanspruchung erfolgt die Berechnung verschiebungs- oder kraftgesteuert. Den im Zugversuch vorliegenden Randbedingungen wird dabei durch die Forderung periodischer Randverschiebungen in der Probenebene und durch die Annahme verschwindender Spannungsvektoren in Dickenrichtung des Verbundes Rechnung getragen.

Experimente

Eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendung der vorgeschlagenen mehrskaligen Modellierungsstrategie ist die mathematische Beschreibung des Materialverhaltens der Verbundbestandteile. In der vorliegenden Arbeit wird insbesondere der Einfluss des inelastischen mechanischen Verhaltens von PP auf das effektive Werkstoffverhalten des Verbundes untersucht. Daher steht die Charakterisierung

des mechanischen Verhaltens von unverstärktem PP im Vordergrund der experimentellen Untersuchungen. Die durchgeführten monotonen Zug- und Relaxationsversuche sowie zyklische Experimente mit und ohne Haltezeiten belegen ein geschwindigkeitsabhängiges mechanisches Verhalten mit Gleichgewichtshysterese. Gemäß der Klassifizierung nach HAUPT wird das Materialverhalten als viskoplastisch bezeichnet. Für die Glasfilamente der textilen Verstärkung wird isotropes linear elastisches Materialverhalten angenommen.

Materialmodell für PP

Ausgehend von den experimentellen Ergebnissen und der Analyse der strukturellen Ursachen des Werkstoffverhaltens von PP wird ein einachsiges viskoplastisches Materialmodell vorgeschlagen. Dieses besteht aus einem nichtlinear elastischen Teilmodell und einem endochronen Plastizitätsmodell zur Abbildung der geschwindigkeitsunabhängigen Gleichgewichtsrelation. Ein verallgemeinertes MAXWELL-Modell bildet den Ausgangspunkt für die Modellierung der geschwindigkeitsabhängigen Überspannung. Die Materialparameter in Form des diskreten Relaxationsspektrums werden unter Nutzung des an die Eigenschaften des Modells angepassten Fensterverfahrens von EMRI und TSCHOEGL identifziert. Um den Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit in Relaxationsversuchen eliminieren zu können, wird auf der Grundlage dieses Verfahrens ein Algorithmus zur Identifikation des diskreten Spektrums des verallgemeinerten MAXWELL-Modells aus Zugversuchen entwickelt.
Das lineare Überspannungsmodell wird zur Modellierung der in den Experimenten festgestellten nichtlinearen Dehnratenabhängigkeit um eine überspannungsabhängige Viskositätsfunktion erweitert und die Modellparameter ausgehend von dem diskreten Relaxationsspektrum optimiert.
Die thermodynamisch konsistente mehrachsige Verallgemeinerung des Materialmodells erfolgt unter der Annahme einer konstanten Querkontraktionszahl. Aus der zeitlichen Diskretisierung der erhaltenen konstitutiven Beziehungen werden schließlich ein Spannungsalgorithmus und ein algorithmisch konsistenter Tangentenmodul abgeleitet, die zur Einbindung des Materialmodells in den Rechenablauf einer physikalisch nichtlinearen FE-Rechnung erforderlich sind.

XFEM

Für die Berechnung des effektiven Materialverhaltens benötigt man neben den konstitutiven Gleichungen zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens der Verbundbestandteile ein numerisches Modell des RVE. Dazu wird im Rahmen dieser Arbeit ein Modellierungverfahren auf der Grundlage der XFEM entwickelt, das die Modellierung von heterogenen Materialien in einem Netz regelmäßiger, quaderförmiger Elemente ermöglicht. Das mechanische Verhalten im Bereich der Materialgrenzen wird durch eine lokale Anreicherung der gewöhnlichen FE-Verschiebungsapproximation abgebildet. Nach der Auswahl einer geeigneten Anreicherungsfunktion zur Modellierung einer Unstetigkeit des Verzerrungsfeldes, werden zwei neuartige Elementtypen formuliert und die zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen erforderlichen Grundlagen zur Lokalisierung der Materialgrenze innerhalb des Elementbereichs, zur Aufteilung in Integrationsgebiete mit stetigen Integranden und zur Zuweisung der Materialparameter implementiert. Anhand der Analyse des mechanischen Verhaltens der definierten Elemente bei Starrkörperbewegungen und konstanten Verzerrungszuständen erfolgt die Auswahl der Ordnung der zu verwendenden Quadraturformel.
Um die effiziente Modellierung der lokalen, heterogenen Werkstoffstruktur von Verbundmaterialien gewährleisten zu können, wird in dieser Arbeit ein Verfahren zur automatisierten Modellgenerierung, ausgehend von einem dreidimensionalen Geometriemodell der textilen Verstärkungsstruktur, zur Verfügung gestellt. Bedingt durch die Verwendung verschiedener Elementtypen mit unterschiedlichen Anzahlen von Knotenfreiheitsgraden ist die Assemblierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix für das automatisch generierte XFEM-Modell nicht allein auf der Basis von Topologiedaten durch Verschmelzen der lokalen Knoten zu einem globalen möglich. Abhängig von den aneinander angrenzenden Elementtypen werden kinematische Zwangsbedingungen zur Sicherung kompatibler Verschiebungsfelder genutzt.

Simulation

Die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Beispielrechnungen verbinden die Grundlagen der Homogenisierung, das für PP formulierte Materialmodell und das entwickelte Modellierungsverfahren auf Basis der XFEM zu einer skalenübergreifenden Methode zur Simulation des effektiven Materialverhaltens textilverstärkter Verbunde, die auch auf andere Werkstoffbeispiele anwendbar ist. Die dargestellten Simulationsergebnisse können das in den experimentellen Untersuchungen beobachtete Materialverhalten von zwei GF-PP-Verbunden mit guter Genauigkeit vorhersagen. Charakteristische Versuchsergebnisse, wie das in bestimmten Belastungsrichtungen nichtlineare und geschwindigkeitsabhängige Deformationsverhalten, können im Voraus simuliert werden. Außer den Materialeigenschaften der konstitutiven Bestandteile und ihrer geometrischen Anordnung im Verbund, d. h. physikalisch interpretierbaren Parametern der Mikro- und Mesoskala, gehen keine weiteren Informationen über das Verhalten des Verbundes in die Simulation ein.
Die physikalisch nichtlinearen RVE-Modelle können zukünftig auch im Rahmen einer gekoppelten Mehrskalensimulation zum Einsatz kommen. Zur Begrenzung des Rechenaufwandes sollte dieses Modellierungsverfahren jedoch nur in ausgewählten Bereichen oder in adaptiver Form abhängig von der aktuellen Beanspruchung genutzt werden.

Schädigung

Obwohl die experimentell bestimmten Spannungs-Dehnungskurven bereits durch die Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens von PP gut approximiert werden, ist die Erweiterung der Modellierung zur Vorhersage des Versagens des Verbundes erforderlich. Da das Versagen entscheidend durch die Faserverstärkung bestimmt wird, sollte in Zukunft ein Schädigungsmodell (vgl. Matzenmiller u. a. (1995)) zur Abbildung des inelastischen Verhaltens des Rovings in das mehrskalige Modellierungsverfahren eingebunden werden. Neben kontinuumsmechanischen Ansätzen zur Schädigungsmodellierung ergeben sich auch aus der Kombination des erweiterten XFEM-Verschiebungsansatzes mit einem Kohäsivzonenmodell (Remmers u. a. (2003); de Borst u. a. (2006)) interessante Ansätze z. B. zur Modellierung des sukzessiven Versagens einer Filament-Matrix-Grenzschicht oder zur Simulation der Delamination von Schichtverbunden.

Polypropylen

Das nichtlineare Materialverhalten von PP sollte zukünftig auch in Torsionsversuchen untersucht werden, um die deviatorischen Anteile des mehrachsigen Materialmodells separat identifizieren zu können. Für die anschließende Verifizierung eines verbesserten Materialmodells sind proportionale und nichtproportionale Zug-Torsionsbelastungen wünschenswert. Interessant erscheinen auch die Untersuchung von Zug-Druck-Unsymmetrien des Materialverhaltens sowie die Ausnutzung der Temperatur-Zeitverschiebung zur Verkürzung der Haltezeiten in Relaxationsexperimenten. Hinsichtlich der Modellierung von PP sind die Abbildung des ausgeprägten Relaxationsverhaltens durch ein Modell der fraktionellen Viskoelastizität sowie die Modellierung auf der Grundlage einer Strukturvariablen (Sedlan (2000)) denkbar.

Modellierung

Zusätzlich zur Erstellung von XFEM-Modellen kann die entwickelte automatisierte Modellierungsprozedur auch zur Generierung von Voxel-Modellen, d. h. regelmäßigen FE-Netzen ohne Anreicherung des Verschiebungsansatzes eingesetzt werden. Dadurch würden der aufwendige Assemblierungsprozess der Gesamtsteifigkeitsmatrix und die Formulierung von kinematischen Zwangsbedingungen vermieden. Um vergleichbare Ergebnisse zu erzielen, wäre in diesem Fall allerdings eine deutlich feinere Vernetzung erforderlich. Denkbar ist auch die Unterteilung der Voxelelemente in Material- und Integrationsbereiche analog zur XFEM, so dass eine Mittelung der verschiedenen Materialsteifigkeiten innerhalb des Elements erfolgt.
Aus den Ergebnissen der Simulation des effektiven Materialverhaltens des gewebeverstärkten GF-PP-Verbundes ist außerdem zu schlussfolgern, dass neben den RVE-Modellen für eine Verbundschicht auch RVE für den Gesamtverbund zu modellieren sind, um die Interaktionen der textilen Halbzeuge verschiedener Schichten besser abbilden zu können.

Literaturverzeichnis

[Altenbach u. a. 1996] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; RIKARDS, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1996

[Altenbach und Altenbach 1994] ALTENBACH, J. ; ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, 1994

[Arruda und Boyce 1993a] ARRUDA, Ellen M. ; BOYCE, Mary C.: Evolution of plastic anisotropy in amorphous polymers during finite straining. In: *International Journal of Plasticity* 9 (1993), Nr. 6, S. 697–720. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TWX-481BMTJ-5D/2/5b5f85a8b930a90055e310e6b29b9063. – ISSN 0749-6419

[Arruda und Boyce 1993b] ARRUDA, Ellen M. ; BOYCE, Mary C.: A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41 (1993), Februar, Nr. 2, S. 389–412. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TXB-46FVDR1-1F/2/03a04d51aeab934aa430d3da633d6faf. – ISSN 0022-5096

[Arruda u. a. 1995] ARRUDA, Ellen M. ; BOYCE, Mary C. ; JAYACHANDRAN, R.: Effects of strain rate, temperature and thermomechanical coupling on the finite strain deformation of glassy polymers. In: *Mechanics of Materials* 19 (1995), Januar, Nr. 2-3, S. 193–212. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TX6-3YB571C-H/2/b5df075050afc53fc9c37362330db465. – ISSN 0167-6636

[Åström 1997] ÅSTRÖM, B. T.: *Manufacturing of Polymer Composites*. Chapman & Hall, 1997

[Barber und Dobkin 1996] BARBER, C. B. ; DOBKIN, D. P.: The quickhull algorithm for convex hulls. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 22 (1996), Nr. 4, S. 469–483

[Barnes 1997] BARNES, H. A.: Thixotropy–a review. In: *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 70 (1997), Mai, Nr. 1-2, S. 1–33. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TGV-3S9SXVK-1/1/75773e3c3f2cb99021b7c868bec23bf5

[Bathe 2002] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. 2., vollständig neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer, 2002

[Belytschko u. a. 2001] BELYTSCHKO, T. ; MOES, N. ; USUI, S. ; PARIMI, C.: Arbitrary discontinuities in finite elements. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng* 50 (2001), S. 993–1013

[Benveniste 1987] BENVENISTE, Y.: A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. In: *Mechanics of Materials* 6 (1987), Juni, Nr. 2, S. 147–157. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TX6-47Y9MSK-S/2/e4b7abc5b165bb537564fc5da8760b59. – ISSN 0167-6636

[de Borst u. a. 2006] BORST, Rene de ; REMMERS, Joris J. ; NEEDLEMAN, Alan: Mesh-independent discrete numerical representations of cohesive-zone models. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), S. 160–177

[Castaneda 1991] CASTANEDA, P. P.: The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39 (1991), Nr. 1, S. 45–71. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TXB-46PYMMW-3Y/2/aa7756c07677fbe3d44899b43dab6c55. – ISSN 0022-5096

[Coleman und Noll 1960] COLEMAN, B. D. ; NOLL, W.: An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 6 (1960), Januar, Nr. 1, S. 355–370. – URL http://dx.doi.org/10.1007/BF00276168

[Cook u. a. 2002] COOK, R. D. ; MALKUS, D. S. ; PLESHA, M. E. ; WITT, R. J.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Fourth Edition. John Wiley & Sons, Inc., 2002

[Dauxz u. a. 2000] DAUXZ, C. ; MOES, N. ; DOLBOW, J. ; SUKUMAR, N. ; BELYTSCHKO, T.: Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng* 48 (2000), S. 1741–1760

[Doghri und Friebel 2005] DOGHRI, I. ; FRIEBEL, C.: Effective elasto-plastic properties of inclusion-reinforced composites. Study of shape, orientation and cyclic response. In: *Mechanics of Materials* 37 (2005), Januar, Nr. 1, S. 45–68. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TX6-4BVP6P4-2/2/cf1e0dfa6616a26afe3dadde002b1daa. – ISSN 0167-6636

[Drago und Pindera 2007] DRAGO, A. ; PINDERA, M.-J.: Micro-macromechanical analysis of heterogeneous materials: Macroscopically homogeneous vs periodic microstructures. In: *Composites Science and Technology* 67 (2007), Mai, Nr. 6, S. 1243–1263. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TWT-4JRVD83-3/2/c1a6fbea3d486ecb633e34e3e048ffa6. – ISSN 0266-3538

[Drozdov und Christiansen 2007a] DROZDOV, A. D. ; CHRISTIANSEN, J. de C.: Cyclic viscoplasticity of high-density polyethylene: Experiments and modeling. In: *Computational Materials Science* 39 (2007), April, Nr. 2, S. 465–480. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TWM-4KV3XPG-3/2/5426d74850f246613dbce3c3cf0ca399

[Drozdov und Christiansen 2007b] DROZDOV, A. D. ; CHRISTIANSEN, J. de C.: Cyclic viscoplasticity of solid polymers: The effects of strain rate and amplitude of deformation. In: *Polymer* 48 (2007), Mai, Nr. 10, S. 3003–3012. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TXW-4N9884N-3/2/a7e86c605bb921c355097540f7a46005

[Drozdov 2009] DROZDOV, A.D.: Mullins effect in semicrystalline polymers. In: *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009), September, Nr. 18-19, S. 3336–3345. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VJS-4W8TW7P-1/2/6d67e2836a46d088f3808e05438008f9. – ISSN 0020-7683

[Drozdov u. a. 2009] DROZDOV, A.D. ; HOG LEJRE, A.-L. ; CHRISTIANSEN, J. d.: Viscoelasticity, viscoplasticity, and creep failure of polypropylene/clay nanocomposites. In:

Composites Science and Technology 69 (2009), Dezember, Nr. 15-16, S. 2596–2603. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TWT-4WXC26B-2/2/e9d66bc91906ce1b67c68eec4acf7eab. – ISSN 0266-3538

[Drozdov 1998] DROZDOV, Aleksey D.: A model for the nonlinear viscoelastic response in polymers at finite strains. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Juni, Nr. 18, S. 2315–2347. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VJS-3SYXFY4-6/2/4640fd2abc95aae83d84e50dd2f2adc5. – ISSN 0020-7683

[Drozdov und Christiansen 2003] DROZDOV, Aleksey D. ; CHRISTIANSEN, Jesper D.: The effect of annealing on the nonlinear viscoelastic response of isotactic polypropylene. In: *Polymer Engineering & Science* 43 (2003), Nr. 4, S. 946–959. – URL http://dx.doi.org/10.1002/pen.10078

[Ehrenstein 2006] EHRENSTEIN, G. W.: *Faserverbund-Kunststoffe*. Hanser, 2006

[Emri und Tschoegl 1993] EMRI, I. ; TSCHOEGL, N. W.: Generating line spectra from experimental responses. Part I: Relaxation modulus and creep compliance. In: *Rheologica Acta* 32 (1993), Mai, Nr. 3, S. 311–322. – URL http://dx.doi.org/10.1007/BF00434195

[Emri und Tschoegl 1994] EMRI, I. ; TSCHOEGL, N. W.: Generating line spectra from experimental responses. Part IV: Application to experimental data. In: *Rheologica Acta* 33 (1994), Januar, Nr. 1, S. 60–70. – URL http://dx.doi.org/10.1007/BF00453464

[Emri und Tschoegl 1995] EMRI, I. ; TSCHOEGL, N. W.: Determination of mechanical spectra from experimental responses. In: *International Journal of Solids and Structures* 32 (1995), Nr. 6-7, S. 817–826. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VJS-3YKKXMW-5C/2/8026393d47dff616b3574fe9aceccf1f

[Fagerström und Larsson 2006] FAGERSTRÖM, M. ; LARSSON, R.: Theory and numerics for finite deformation fracture modelling using strong discontinuities. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng* 66 (2006), S. 911–948

[Forest u. a. 1999] FOREST, S ; DENDIEVEL, R ; CANOVA, G R.: Estimating the overall properties of heterogeneous Cosserat materials. In: *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 7 (1999), S. 829–840

[Forest und Sab 1998] FOREST, S. ; SAB, K.: Cosserat overall modelling of heterogeneous materials. In: *Mechanics research communications* 25 (1998), Nr. 4, S. 449–454

[Geers u. a. 2007] GEERS, M. G. D. ; COENEN, E. W. C. ; KOUZNETSOVA, V. G.: Multi-scale computational homogenization of structured thin sheets. In: *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 15 (2007), Nr. 4, S. S393–S404. – ISSN 0965-0393

[Gerlach und Matzenmiller 2005] GERLACH, S. ; MATZENMILLER, A.: Comparison of numerical methods for identification of viscoelastic line spectra from static test data. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63 (2005), Nr. 3, S. 428–454. – URL http://dx.doi.org/10.1002/nme.1161

[Gerlach 2003] GERLACH, Sebastian: *Modellbildung und Parameteridentifikation viskoelastischer Faserverbundwerkstoffe*, Universität Kassel, Dissertation, 2003

[Govindjee und Simo 1992] GOVINDJEE, Sanjay ; SIMO, Juan C.: Mullins effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus. In: *International Journal of Solids and Structures* 29 (1992), Nr. 14-15, S. 1737–1751. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VJS-482GJJD-92/2/44f08def42406a0cc5bbf78691ce5f41. – ISSN 0020-7683

[Gravouil u. a. 2002a] GRAVOUIL, A. ; MOES, N. ; BELYTSCHKO, T.: Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part I: Mechanical model. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng* 53 (2002), S. 2549–2568

[Gravouil u. a. 2002b] GRAVOUIL, A. ; MOES, N. ; BELYTSCHKO, T.: Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II: Level set update. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng* 53 (2002), S. 2569–2586

[Gusev 1997] GUSEV, A. A.: Representative volume element size for elastic composites: A numerical study. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (1997), September, Nr. 9, S. 1449–1459. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TXB-3SPTCBM-2/2/6f3950b2dd5e7affc19989b940e21bd3. – ISSN 0022-5096

[Haasemann 2008] HAASEMANN, G.: *Effektive mechanische Eigenschaften von Verbundwerkstoffen mit Biaxialgestrickverstärkung*, TU Dresden, Dissertation, 2008

[Haasemann u. a. 2006] HAASEMANN, G. ; KÄSTNER, M. ; ULBRICHT, V.: Multi-Scale Modelling and Simulation of Textile Reinforced Materials. In: *CMC* 3 (2006), S. 131–146

[Hartmann 2006] HARTMANN, S.: A thermomechanically consistent constitutive model for polyoxymethylene Experiments, material modelling and computation. In: *Arch. Appl. Mech.* 76 (2006), S. 349–366

[Haupt 1993] HAUPT, P.: On the mathematical modelling of material behavior in continuum mechanics. In: *Acta Mechanica* 100 (1993), September, Nr. 3, S. 129–154. – URL http://dx.doi.org/10.1007/BF01174786

[Haupt 2002] HAUPT, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer, 2002

[Heinrich und Kaliske 1997] HEINRICH, G. ; KALISKE, M.: Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity. In: *Computational and Theoretical Polymer Science* 7 (1997), Nr. 3-4, S. 227–241. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VJ9-3TGP6HR-F/2/0ce9bee023adb132c713d1ef6e22fd16. – ISSN 1089-3156

[Hill 1963] HILL, R.: Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles. In: *J. Mech. Phys. Solids* 11 (1963), S. 357–372

[Hill 1972] HILL, R.: On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain. In: *Proc. R. Soc. Lond. A.* (1972), S. 131–147

[Hufenbach 2007] HUFENBACH, W. (Hrsg.): *Textile Verbundbauweisen und Fertigungstechnologien für Leichtbaustrukturen des Maschinen- und Fahrzeugbaus*. 2007

[Kaliske und Heinrich 1999] KALISKE, M ; HEINRICH, G: An extended tube-model for rubber elasticity: Statistical-mechanical theory and finite element implementation. In: *RUBBER CHEMISTRY AND TECHNOLOGY* 72 (1999), SEP-OCT, Nr. 4, S. 602–632. – ISSN 0035-9475

[Kaliske und Rothert 1997] KALISKE, M. ; ROTHERT, H.: Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. In: *Computational Mechanics* 19 (1997), Februar, Nr. 3, S. 228–239. – URL http://dx.doi.org/10.1007/s004660050171

[Kanit u. a. 2003] KANIT, T. ; FOREST, S. ; GALLIET, I. ; MOUNOURY, V. ; JEULIN, D.: Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), Nr. 13-14, S. 3647–3679. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VJS-48GDV9K-1/2/2dd6cda9c49706ed2c969bdea531bb50. – ISSN 0020-7683

[Kästner u. a. 2008a] KÄSTNER, M. ; HAASEMANN, G. ; BRUMMUND, J. ; ULBRICHT, V.: *Computation of effective stiffness properties for textile-reinforced composites using X-FEM*. Kap. 13, S. 261–279, Springer, 2008

[Kästner u. a. 2008b] KÄSTNER, M. ; OBST, M. ; THIELSCH, K. ; BRUMMUND, J. ; ULBRICHT, V.: Computation of the effective nonlinear material behaviour of composites using X-FEM - Analysis of the matrix material behaviour. In: *PAMM* 8 (2008), Nr. 1, S. 10429–10430. – URL http://dx.doi.org/10.1002/pamm.200810429

[Kästner und Ulbricht 2006] KÄSTNER, M. ; ULBRICHT, V.: Homogenization of fibre composites using X-FEM. In: *PAMM* 6 (2006), Nr. 1, S. 489–490. – URL http://dx.doi.org/10.1002/pamm.200610225

[Keck 1998] KECK, Joachim: *Zur Beschreibung finiter Deformationen von Polymeren: Experimente, Modellbildung, Parameteridentifikation und Finitie-Elemente-Formulierung*, Universitaet Stuttgart, Prof. Miehe, Dissertation, 1998

[Khan und Huang 1995] KHAN, A. S. ; HUANG, S.: *Continuum Theory of Plasticity*. John Wiley & Sons, Inc., 1995

[Kletschkowski u. a. 2001] KLETSCHKOWSKI, T. ; SCHOMBURG, U. ; BERTRAM, A.: Viskoplastische Materialmodellierung am Beispiel des Dichtungswerk- stoffs Polytetrafluorethylen. In: *TECHNISCHE MECHANIK Band 21, Heft 3, (2001), 227-241* 21 (2001), S. 227–241

[Kletschkowski u. a. 2002a] KLETSCHKOWSKI, T. ; SCHOMBURG, U. ; BERTRAM, A.: Endochronic viscoplastic material models for filled PTFE. In: *Mechanics of Materials* 34 (2002), Dezember, Nr. 12, S. 795–808. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TX6-470M6V4-2/1/9377a891afbab60686cf07fbcea5d0c2

[Kletschkowski u. a. 2002b] KLETSCHKOWSKI, T. ; SCHOMBURG, U. ; BERTRAM, A.: An inelastic material model for filled polytetrafluorethylen. In: *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 72 (2002), Juli, Nr. 4, S. 293–299. – URL http://dx.doi.org/10.1007/s00419-002-0207-z

[Kletschkowski u. a. 2004] KLETSCHKOWSKI, T. ; SCHOMBURG, U. ; BERTRAM, A.: An Endochronic Viscoplastic Approach for Materials with Different Behavior in Tension and Compression.

In: *Mechanics of Time-Dependent Materials* 8 (2004), Juni, Nr. 2, S. 119–135. – URL http://dx.doi.org/10.1023/B:MTDM.0000027680.35012.35

[Kletschkowski u. a. 2005] KLETSCHKOWSKI, T. ; SCHOMBURG, U. ; BERTRAM, A.: A rate-dependent endochronic approach to thermoplastic materials: temperature and filler volume fraction dependence. In: *Mechanics of Materials* 37 (2005), Juni, Nr. 6, S. 687–704. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TX6-4DB57M6-6/2/d0b96af934efbf63f3c2f13fdee5d779

[Kolarik und Pegoretti 2006] KOLARIK, J. ; PEGORETTI, A.: Non-linear tensile creep of polypropylene: Time-strain superposition and creep prediction. In: *Polymer* 47 (2006), Januar, Nr. 1, S. 346–356. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TXW-4HM87FR-G/2/b3abf5eea95f15b04c07ecbf680659da. – ISSN 0032-3861

[Kouznetsova 2002] KOUZNETSOVA, V.G.: *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*, TU Eindhoven, Dissertation, 2002

[Krempl und Khan 2003] KREMPL, E. ; KHAN, F.: Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers. In: *International Journal of Plasticity* 19 (2003), Juli, Nr. 7, S. 1069–1095. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TWX-47VR82S-1/2/39dbdbe79ba957b8d9e53cf8dd10973b

[Kröner 1958] KRÖNER, E.: Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. In: *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* 151 (1958), August, Nr. 4, S. 504–518. – URL http://dx.doi.org/10.1007/BF01337948

[Lion 1994] LION, A.: *Materialeigenschaften der Viskoplastizität*, Universität Gesamthochschule Kassel, Dissertation, 1994

[Lion 1996] LION, A.: A constitutive model for carbon black filled rubber: Experimental investigations and mathematical representation. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 8 (1996), Juni, Nr. 3, S. 153–169. – URL http://dx.doi.org/10.1007/BF01181853

[Lion 1997a] LION, A.: A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomers. In: *Acta Mechanica* 123 (1997), März, Nr. 1, S. 1–25. – URL http://dx.doi.org/10.1007/BF01178397

[Lion 2000] LION, A.: Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity: a physical approach based on nonlinear rheological models. In: *International Journal of Plasticity* 16 (2000), April, Nr. 5, S. 469–494. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TWX-3YS99F8-1/1/34a2ebe07ec848db95c1048d8eda4508

[Lion 1997b] LION, Alexander: On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (1997), November, Nr. 11-12, S. 1805–1834. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TXB-3SPX7PT-4/2/4dc5d108f28a87c8413d90cf036e6859. – ISSN 0022-5096

[Masson u. a. 2000] MASSON, R. ; BORNERT, M. ; SUQUET, P. ; ZAOUI, A.: An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), Juni, Nr. 6-7, S. 1203–1227.

– URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TXB-400214J-H/2/9b554557a4d9a80e2bab0ef3d7e8f73f. – ISSN 0022-5096

[Matzenmiller u. a. 1995] MATZENMILLER, A. ; LUBLINER, J. ; TAYLOR, R.L.: A constitutive model for anisotropic damage in fibre-composites. In: *Mechanics of Materials* 20 (1995), S. 125–152

[Menges u. a. 2002] MENGES, G. ; HABERSTROH, E. ; MICHAELI, W. ; SCHMACHTENBERG, E.: *Werkstoffkunde Kunststoffe 5., völlig überarbeitete Auflage*. Hanser, 2002

[Miehe und Koch 2002] MIEHE, C. ; KOCH, A.: Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains. In: *Archive of Applied Mechanics* 72 (2002), S. 300–317

[Miehe 2002] MIEHE, Christian: Strain-driven homogenization of inelastic microstructures and composites based on an incremental variational formulation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55 (2002), Nr. 11, S. 1285–1322. – URL http://dx.doi.org/10.1002/nme.515

[Miehe und Keck 2000] MIEHE, Christian ; KECK, Joachim: Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), Februar, Nr. 2, S. 323–365. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TXB-3Y4C4Y0-5/2/6734cbf25413902f5b255e8329566d74. – ISSN 0022-5096

[Moes u. a. 2003] MOES, N. ; CLOIREC, M. ; CARTRAUD, P. ; REMACLE, J.-F.: A computational approach to handle complex microstructure geometries. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192 (2003), S. 3163–3177

[Moes u. a. 1999] MOES, N. ; DOLBOW, J. ; BELYTSCHKO, T.: A finite element method for crack growth without remeshing. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 46 (1999), S. 131–150

[Mori und Tanaka 1973] MORI, T ; TANAKA, K: Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. In: *Acta Metallurgica* 21 (1973), Mai, Nr. 5, S. 571–574. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B7598-48JJRXF-8K/2/adc8cdb5ef173be14a33adadbf07f558. – ISSN 0001-6160

[Obst 2009] OBST, M.: *Implementierung eines viskoplastischen Materialmodells für Polypropylen in das Programmsystem Marc*, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, 2009

[Offermann u. a. 2005] OFFERMANN, P. ; DIESTEL, O. ; CHOI, B.D.: Development of multidirectional reinforced weft-knitted fabrics made from commingling hybrid yarns for complex light weight constructions. In: *13. Internationales Techtextil Symposium*, 2005

[Ogden und Roxburgh 1999] OGDEN, R. W. ; ROXBURGH, D. G.: A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 455 (1999), August, Nr. 1988, S. 2861–2877. – URL http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/455/1988/2861.abstract

[Pierard 2006] PIERARD, O.: *Micromechanics of inclusion-reinforced composites in elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity: modeling and computation*, Universite Catholique de Louvain Faculte des Sciences Appliquees, Dissertation, 2006

[Pierard und Doghri 2006] PIERARD, Olivier ; DOGHRI, Issam: An enhanced affine formulation and the corresponding numerical algorithms for the mean-field homogenization of elasto-viscoplastic composites. In: *International Journal of Plasticity* 22 (2006), Januar, Nr. 1, S. 131–157. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TWX-4GDBTB2-2/2/b3d10146f104df0c5671529042acc626. – ISSN 0749-6419

[Prüger 2008] PRÜGER, S.: *Entwicklung eines ebenen finiten Elementes mit quadratischen Ansatzfunktionen auf Basis der X-FEM*, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, 2008

[Reese und Govindjee 1998] REESE, Stefanie ; GOVINDJEE, Sanjay: A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), September, Nr. 26-27, S. 3455–3482. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VJS-494SRCX-13/2/a731cabb063ca797f844065321f3b326. – ISSN 0020-7683

[Remmers u. a. 2003] REMMERS, Joris J. C. ; WELLS, Garth N. ; BORST, Rene de: A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003), Nr. 13, S. 2013–2040. – URL http://dx.doi.org/10.1002/nme.907

[Schwarz 2004] SCHWARZ, I.: *Syndiotaktisches Polypropylen: Alterung eines teilkristallinen Thermoplasten oberhalb der Glasübergangstemperatur*, Universität Dortmund, Dissertation, 2004

[Sedlan 2000] SEDLAN, K.: *Viskoelastisches Materialverhalten von Elastomerwerkstoffen: Experimentelle Untersuchung und Modellbildung*, Universität Gesamthochschule Kassel, Dissertation, 2000

[Simo 1987] SIMO, J. C.: On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 60 (1987), Februar, Nr. 2, S. 153–173. – URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V29-47XF8SV-5R/2/9d224f48c71725731d52f770162c3dff. – ISSN 0045-7825

[Stazi u. a. 2003] STAZI, L. ; BUDYN, E. ; CHESSA, J. ; BELYTSCHKO, T.: An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. In: *Computational Mechanics* 31 (2003), S. 38–48

[Sukumar u. a. 2001] SUKUMAR, N. ; CHOPP, D.L. ; MOES, N. ; BELYTSCHKO, T.: Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001), S. 6183–6200

[Sukumar u. a. 2004] SUKUMAR, N. ; HUANG, Z. Y. ; PREVOST, J.-H. ; SUO, Z.: Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng* 59 (2004), S. 1075–1102

[Sukumar u. a. 2000] SUKUMAR, N. ; MOES, N. ; MORAN, B. ; BELYTSCHKO, T.: Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng* 48 (2000), S. 1549–1570

[Tobolsky 1967] TOBOLSKY, A. V.: *Mechanische Eigenschaften und Struktur von Polymeren*. Berliner Union, 1967

[Truesdell und Noll 2004] TRUESDELL, C. ; NOLL, W.: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Third Edition*. Springer, 2004

[Tschoegl 1989] TSCHOEGL, N.W.: *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Springer, 1989

[Tschoegl u. a. 2002] TSCHOEGL, N.W. ; KNAUSS, W. G. ; EMRI, I.: Poisson's Ratio in Linear Viscoelasticity - A Critical Review. In: *Mechanics of Time-Dependent Materials* 6 (2002), März, Nr. 1, S. 3–51. – URL http://dx.doi.org/10.1023/A:1014411503170

[Ulbricht u. a. 2008] ULBRICHT, V. ; KÄSTNER, M. ; LICHTNECKERT, T. ; BRUMMUND, J. ; MODLER, K.-H. ; HUFENBACH, W. ; BÖHM, R. ; EBERT, C. ; GRÜBER, B. ; LANGKAMP, A. ; LEPPER, M.: Modelling of the effective material behavior of textile reinforced composites. In: *Journal of Plastics Technology* 4 (2008), S. 1–30

[Valanis 1971a] VALANIS, K. C.: A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface. Part II - Application to Mechanical Behavior of Metals. In: *Archives of Mechanics* 23 (1971), S. 535–551

[Valanis 1971b] VALANIS, K.C.: A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface. Part I - General Theory. In: *Archives of Mechanics 23* 23 (1971), S. 517–533

[Willis 1989] WILLIS, J. R.: The Structure of Overall Constitutive Relations for a Class of Nonlinear Composites. In: *IMA J Appl Math* 43 (1989), Nr. 3, S. 231–242. – URL http://imamat.oxfordjournals.org/cgi/content/abstract/43/3/231

[Zi und Belytschko 2003] ZI, G. ; BELYTSCHKO, T.: New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng* 57 (2003), S. 2221–2240

[Zienkiewicz 1977] ZIENKIEWICZ, O.C.: *Methode der finiten Elemente*. Fachbuchverlag Leipzig, 1977

A Fensterverfahren von EMRI und TSCHOEGL

Beispiel

In Anlehnung an die Beschreibung in Emri und Tschoegl (1993) soll die Funktionsweise dieses Identifikationsverfahrens für Relaxationsspektren der linearen Viskoelastizität anhand eines bekannten diskreten Relaxationsspektrums mit fünf gleichmäßig über die logarithmische Skala verteilten Relaxationszeiten erläutert werden (Abb. A.1). Dieses Spektrum entspricht dem Überspannungsanteil eines verallgemeinerten MAXWELL-Modells mit $n_\mathrm{v} = 5$ Elementen. In der grafischen Darstellung der zu den einzelnen MAXWELL-Elementen gehörigen Überspannungsanteile der Relaxationsfunktionen

$$R_i^{\mathrm{ov}}(t) = c_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \tag{A.1}$$

sowie der Gesamtfunktion

$$R^{\mathrm{ov}}(t) = \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} R_i^{\mathrm{ov}}(t) = \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} c_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \tag{A.2}$$

in Abb. A.1 ist erkennbar, dass der aktive Bereich der einzelnen MAXWELL-Elemente (vgl. Abschnitt 4.1.2) nur einen begrenzten Bereich der Relaxationsfunktion des Gesamtmodells beeinflusst, diese Eigenschaft wird durch das Verfahren ausgenutzt.

Idee des Algorithmus

Betrachtet man den Relaxationsvorgang, so wird klar, dass der Wert der Relaxationsfunktion für $t = 0$ der Summe der Relaxationsstärken

$$R^{\mathrm{ov}}(0) = \sum_{i=1}^{n_\mathrm{v}} c_i \tag{A.3}$$

der einzelnen Elemente entspricht. Mit fortschreitender Haltezeit wechselt das erste MAXWELL-Element vom sogenannten Glas- in den Übergangsbereich und die Spannungsrelaxation setzt ein. Betrachtet man den aktiven Bereich des k-ten MAXWELL-Elements, so sind die Beiträge aller MAXWELL-Elemente bis $k-1$ nahezu abgeklungen, während sich alle Elemente ab $k+1$ unverändert im Glasbereich befinden. Damit erhält man eine Näherungsformel für den Überspannungsanteil der Relaxationsfunktion

$$R^{\mathrm{ov}}(t) \approx 0 + c_k e^{-\frac{t}{\tau_k}} + \sum_{i=k+1}^{n_\mathrm{v}} c_i \qquad \forall\, t_k^{\mathrm{u}} \le t < t_k^{\mathrm{o}}. \tag{A.4}$$

Zur Sicherung der Genauigkeit des Algorithmus sind die Annahmen hinsichtlich der als aktiv zu berücksichtigenden MAXWELL-Elemente anhand der Analyse des Verlaufs der Kernfunktion $e^{\frac{t}{\tau_i}}$ des i-ten MAXWELL-Elements zu präzisieren. Da die Kernfunktion $e^{-\frac{t}{\tau_i}}$ nach zwei Dekaden abgeklungen ist, wird im Gegensatz zu (A.4) in der implementierten Version des Algorithmus lediglich der Einfluss der mehr als zwei Dekaden zurückliegenden Spektrallinien vernachlässigt

$$R^{\mathrm{ov}}(t) = \sum_{i=i_{\min}}^{k-1} c_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} + c_k e^{-\frac{t}{\tau_k}} + \sum_{i=k+1}^{n_\mathrm{v}} c_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad \forall\, t_k^{\mathrm{u}} \le t < t_k^{\mathrm{o}}; \tag{A.5}$$

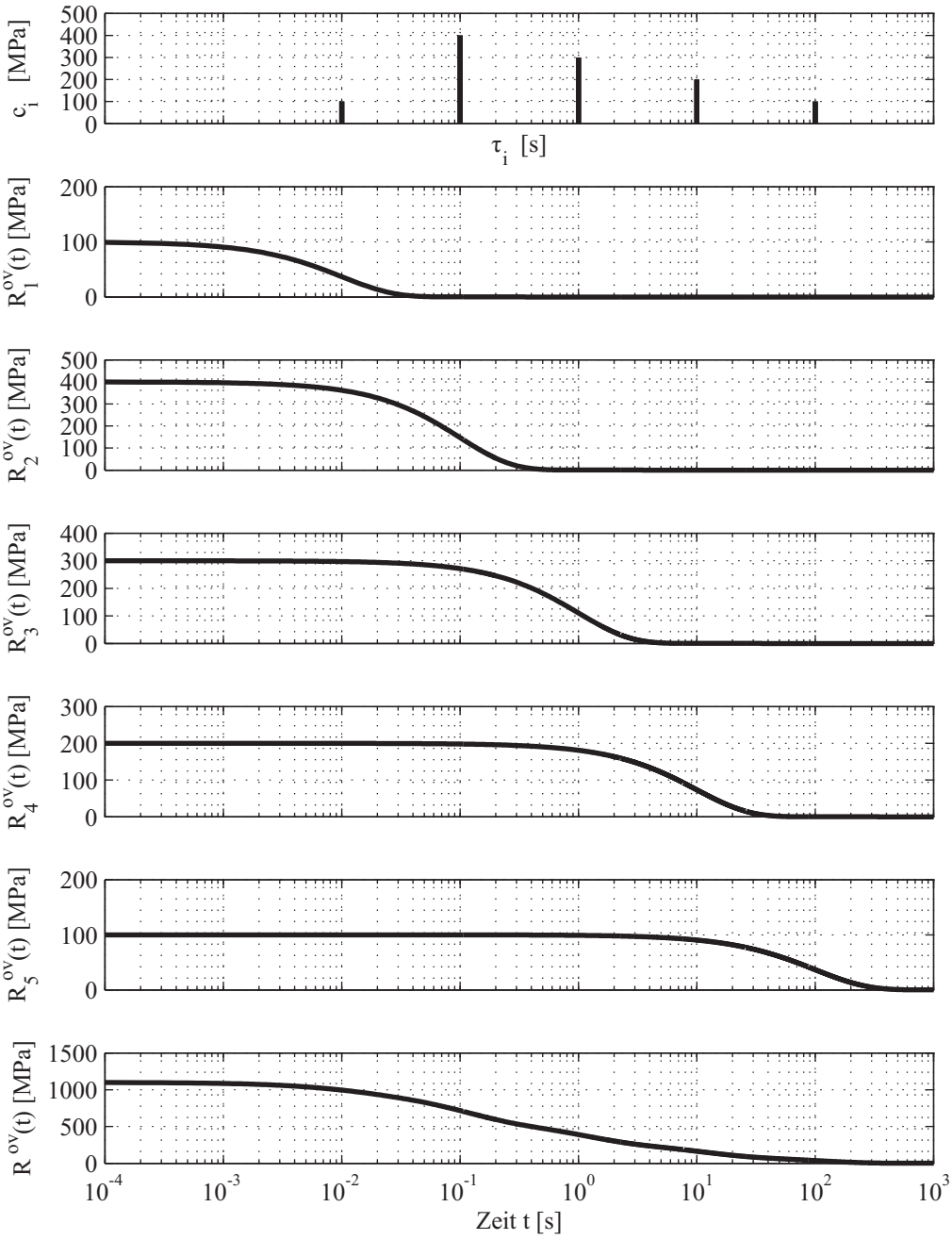


Abbildung A.1: Diskretes Relaxationsspektrum und Relaxationsfunktionen

mit

$$i_{\min} = \begin{cases} k-3 & \text{für} \quad k-3 \geq 1 \\ 1 & \text{für} \quad k-3 < 1 \end{cases} . \tag{A.6}$$

Zur vollständigen Definition des Identifikationsalgorithmus sind schließlich die Grenzen t_k^{u} und t_k^{o}, die das Zeitintervall, in dem $R^{\mathrm{ov}}(t)$ durch (A.5) approximiert werden kann, und damit das Fenster der zur Identifikation genutzten Daten bestimmen, festzulegen. Sie entsprechen den in Abschnitt 4.1.3 für die Identifikation aus dem Zugversuch berechneten Werten.

Identifikation

Die Relaxationsstärken c_k der durch (A.5) gegebenen Modellantwort sind nun an die experimentell bestimmten diskreten Messwerte $\hat{R}^{\mathrm{ov}}(t_j)$ anzupassen. Diese berechnet man aus dem gemessenen Spannungsverlauf $\hat{\sigma}(t_j)$ durch Abziehen des Endwerts der Spannung bei Erreichen der Haltezeit t_{h}, der eine Näherung für den Gleichgewichtswert $\sigma^{\mathrm{eq}}(\varepsilon_0)$ darstellt, und Normierung mit der während des Relaxationsexperiments konstant gehaltenen Dehnung ε_0

$$\hat{R}^{\mathrm{ov}}(t_j) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\hat{\sigma}(t_j) - \hat{\sigma}(t_{\mathrm{h}}) \right] . \tag{A.7}$$

Die Berechnung der k-ten Relaxationsstärke erfolgt durch Minimierung des Quadrats

$$F_k = \sum_{j=j_k^{\mathrm{u}}}^{j_k^{\mathrm{o}}} \left[\hat{R}^{\mathrm{ov}}(t_j) - R^{\mathrm{ov}}(t_j) \right]^2 \tag{A.8}$$

der zwischen der Modellantwort $R^{\mathrm{ov}}(t_j)$ und dem Messwert $\hat{R}^{\mathrm{ov}}(t_j)$ im Intervall $[t_k^{\mathrm{u}}, t_k^{\mathrm{o}}]$ auftretenden Abweichung, wobei j_k^{u} und j_k^{o} die den Bereichsgrenzen zugeordneten Indizes der diskreten Messwerte sind. Für die Relaxationsstärke c_k erhält man aus der Minimierung von F_k und Einsetzen von (A.5) die Bestimmungsgleichung

$$c_k = \frac{\displaystyle\sum_{j=j_k^{\mathrm{u}}}^{j_k^{\mathrm{o}}} \left[\hat{R}^{\mathrm{ov}}(t_j) - \sum_{i=i_{\min}}^{k-1} c_i e^{-\frac{t_j}{\tau_i}} - \sum_{i=k+1}^{n_{\mathrm{v}}} c_i e^{-\frac{t_j}{\tau_i}} \right] e^{-\frac{t_j}{\tau_k}}}{\displaystyle\sum_{j=j_k^{\mathrm{u}}}^{j_k^{\mathrm{o}}} e^{-\frac{2t_j}{\tau_k}}} . \tag{A.9}$$

Die Berechnung beginnt mit der größten Relaxationszeit und endet mit der Identifikation von c_1, d. h. der zur kleinsten Relaxationszeit gehörenden Relaxationsstärke. Da im ersten Durchlauf die noch nicht identifizierten Relaxationsstärken mit Null angenommen werden, ist der zunächst ermittelte Satz von Relaxationsstärken durch eine rekursive Anwendung des Verfahrens zu verbessern. Die Identifikation ist abgeschlossen, wenn die relative Änderung aller zu identifizierenden Parameter zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schritten, kleiner als ein vorher festgelegter Grenzwert ist.
Abhängig von dem zugrundeliegenden Messsignal ist es möglich, dass der Algorithmus negative Relaxationsstärken liefert. Obwohl das berechnete Spektrum in diesem Fall den zur Identifikation genutzten Relaxationsversuch gut wiedergibt, sind die negativen Spektrallinien physikalisch nicht interpretierbar und können bei der Berechnung anderer Versuchsantworten zu falschen Ergebnissen führen. Werden in einem Durchlauf negative Relaxationsstärken berechnet, so sind diese vor dem nächsten Berechnungsschritt Null zu setzen.

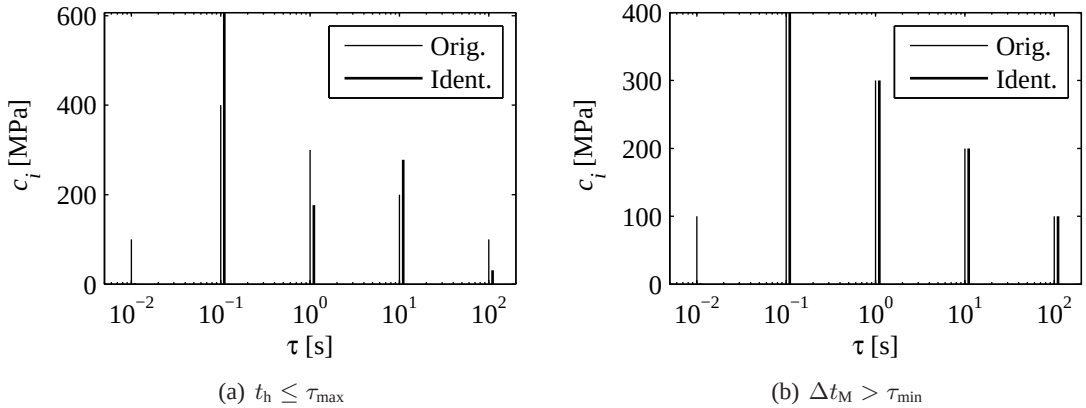
B Analyse des Informationsgehalts realer Relaxationsversuche

Anforderungen an das Messsignal

Nachfolgend soll der Einfluss des zur Verfügung stehenden Messsignals auf die Ergebnisse der Parameteridentifikation bei Anwendung des Fensterverfahrens von EMRI und TSCHOEGL anhand der Rekonstruktion des bekannten diskreten Spektrums gemäß Abb. A.1 diskutiert werden. Den dazu erforderlichen Spannungs-Zeitverlauf liefert die Spannungsantwort eines verallgemeinerten MAXWELL-Modells mit den Parametern

$$\underline{\mathbf{c}} = [100 \quad 400 \quad 300 \quad 200 \quad 100]^T \text{ MPa}; \quad \underline{\boldsymbol{\tau}} = [0,01 \quad 0,1 \quad 1 \quad 10 \quad 100]^T \text{ s}. \tag{B.1}$$

Durch den Vergleich des bekannten Spektrums des verallgemeinerten MAXWELL-Modells mit dem Ergebnis der Identifikation können zunächst die Anforderungen an das Messsignal veranschaulicht werden. Als wesentliche Voraussetzungen sind die richtige Wahl von Haltezeit und zeitlicher Auflösung des Messsignals zu nennen. Die Haltezeit sollte länger sein, als die größte Relaxationszeit des zu bestimmenden Spektrums ($t_\mathrm{h} > \tau_\mathrm{max}$), um genügend Informationen zur Berechnung der zugehörigen Relaxationsstärke zur Verfügung zu haben. Für die Zeitschrittweite der Abtastung ist in dem zur Identifikation der Relaxationsstärke c_1 verwendeten Ausschnitt des Messsignals eine Abtastung mit $\Delta t_\mathrm{M} < \tau_\mathrm{min}$ zu fordern. Für die Aufzeichnung des Messsignals empfiehlt sich wegen des starken Spannungsabfalls am Beginn der Relaxation bei langen Haltezeiten eine variable Abtastung mit einem kombinierten Kraft-Zeitkriterium.
In Abb. B.1 sind die Auswirkungen einer im Vergleich zu dem zu indentifizierenden Spektrum zu kurzen Messzeit sowie einer nicht ausreichenden Auflösung des Messsignals dargestellt. Das mithilfe des



(a) $t_\mathrm{h} \leq \tau_\mathrm{max}$ (b) $\Delta t_\mathrm{M} > \tau_\mathrm{min}$

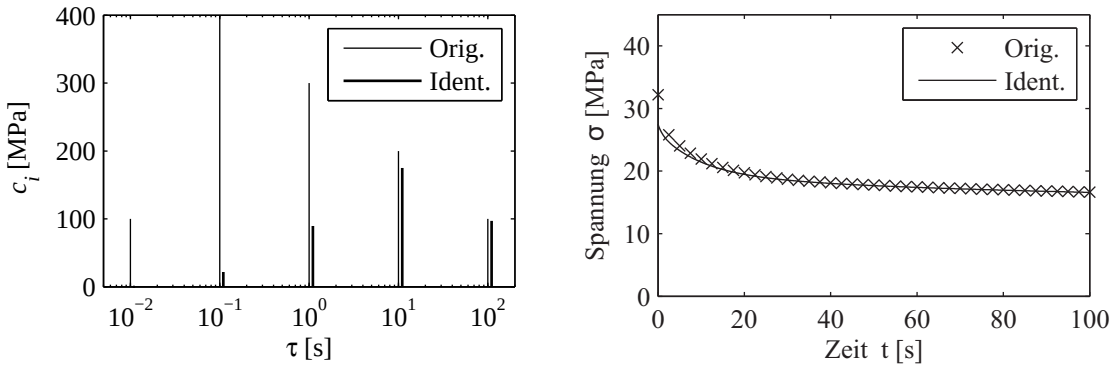
Abbildung B.1: Auswirkung einer zu kurzen Messzeit bzw. einer nicht ausreichenden Auflösung des Messsignals

EMRI-TSCHOEGL-Verfahrens bestimmte Spektrum weicht insbesondere bei der zu kurzen Messzeit

($t_\mathrm{h} = 100s$, Abb. B.1(a)) deutlich von dem vorgegebenen ab. Als Folge der ungenügenden Auflösung ($\Delta t_\mathrm{M} = 0,1\mathrm{s}$, Abb. B.1(b)) kann die zur Relaxationszeit $\tau_\mathrm{min} = 0,01\mathrm{s}$ gehörende Relaxationsstärke nicht bestimmt werden, während der Rest des Spektrums korrekt identifiziert wird.

Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit

Im Unterschied zu dem bisher untersuchten idealen Relaxationsversuch, der entsprechend Abb. 3.15 eine sprungförmige Dehnungsänderung aufweist, kann die Belastung in einem realen Experiment nur mit einer endlichen Geschwindigkeit erfolgen (vgl. Abb. 4.4). Da während der für das Erreichen der Dehnung ε_0 benötigten Zeit Δt_0 bereits Relaxationsvorgänge im Material ablaufen, hat die Belastungsgeschwindigkeit einen entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis der Parameteridentifikation, der an dem bereits verwendeten Beispielsystem mit bekanntem Spektrum studiert werden soll. In Anlehnung an die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Experimente beträgt die Dehnung $\varepsilon_0 = 0,045$. Bei einer Geschwindigkeit von $v_\mathrm{Trav} = 100\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}}$ benötigt man $\Delta t_0 = 3\mathrm{s}$ zum Aufbringen der Belastung. Wie in Abb. B.2 zu erkennen ist, führt dies zu einer fehlerhaften Bestimmung des diskreten Spektrums bis $\tau \leq 10\mathrm{s}$. Obwohl das Modell mit den identifizierten Parametern den Relaxationversuch relativ gut wiedergibt, ergeben sich bei der Modellierung eines Zugversuchs falsche Ergebnisse, da sich dort speziell die niedrigen Zeitkonstanten auf die Modellantwort auswirken.



(a) $\Delta t_0 = 3\mathrm{s}$, Spektrum

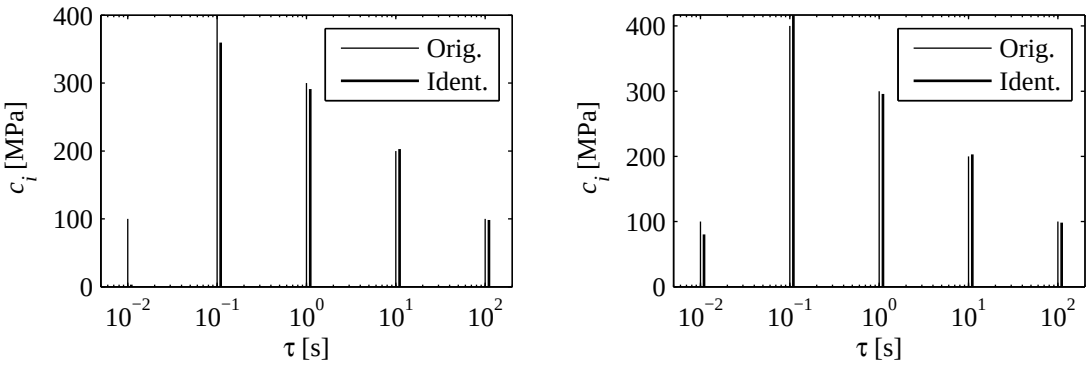
(b) $\Delta t_0 = 3\mathrm{s}$, Spannungs-Zeitverlauf

Abbildung B.2: Ergebnis der Parameteridentifikation bei einer Belastungsgeschwindigkeit $v_\mathrm{Trav} = 100\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}}$

Eine Erhöhung der Versuchsgeschwindigkeit auf $10^4\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}}$ führt zu einer Verbesserung des Ergebnisses, allerdings kann eine vernüftige Approximation des vorgegebenen Spektrums erst für $v_\mathrm{Trav} = 10^6\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}} = 16.67\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ erreicht werden (Abb. B.3). Da die Versuchsgeschwindigkeit hier durch die zur Verfügung stehende Prüfmaschine auf 500 $\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}}$ begrenzt ist, besteht keine Möglichkeit, ein Relaxationsspektrum mit Zeitkonstanten $\tau_\mathrm{min} \leq 10\mathrm{s}$ aus dem Relaxationsversuch zu identifizieren. Das Fensterverfahren von EMRI und TSCHOEGL deshalb in Abschnitt 4.1.3 so modifiziert, dass auch Daten aus Zugversuchen zur Bestimmung des Spektrums genutzt werden können.

Kontinuierliche Spektren

Im Unterschied zu den bisher untersuchten, mithilfe eines verallgemeinerten MAXWELL-Elements generierten Daten liegt den im Relaxationsexperiment ermittelten Spannungs-Zeitverläufen kein diskretes Spektrum zugrunde. Vielmehr unterliegen die geschwindigkeitsabhängigen Eigenschaften des Materials einer kontinuierlichen Verteilung. Das anhand der Ergebnisse von Relaxationsversuchen identifizierte diskrete Spektrum stellt lediglich eine Möglichkeit der Approximation im Rahmen der linearen Viskoelastizitätstheorie dar.
Mit dem formalen Übergang von einer Summe der Beiträge der einzelnen MAXWELL-Elemente in



(a) $v_{\text{Trav}} = 10^4 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$, $\Delta t_0 = 3 \cdot 10^{-2}$s (b) $v_{\text{Trav}} = 10^6 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$, $\Delta t_0 = 3 \cdot 10^{-4}$s

Abbildung B.3: Ergebnis der Parameteridentifikation bei höheren Belastungsgeschwindigkeiten

(4.18) zu einem Integral

$$R^{\text{ov}}(t) = \int_0^\infty \tilde{c}\,(\tau)\, e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \tag{B.2}$$

ist der Übergang von einem diskreten Spektrum zu einer kontinuierlichen Verteilung $\tilde{c}(\tau)$ verbunden. Da $\tilde{c}(\tau)$ die Dimension Modul je Zeit besitzt, wird die durch

$$R^{\text{ov}}(t) = \int_{-\infty}^\infty H\,(\tau)\, e^{-\frac{t}{\tau}} d\ln\tau \tag{B.3}$$

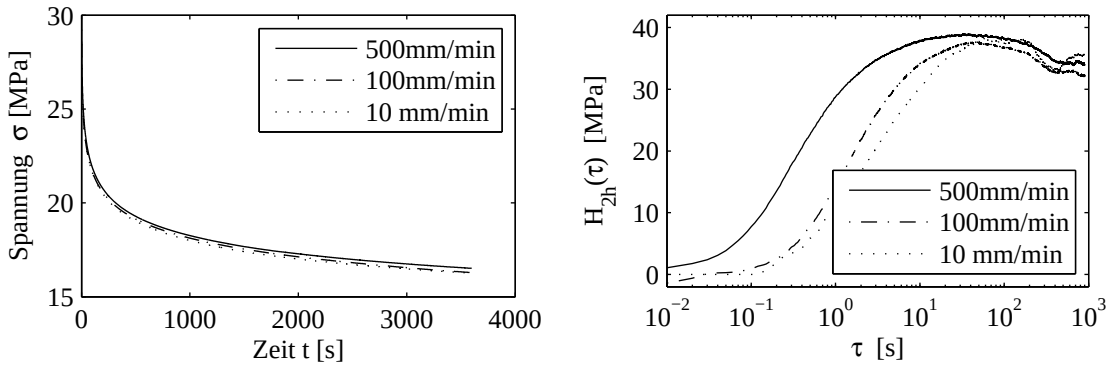
definierte Verteilung $H(\tau)$, die in Analogie zu den diskreten Relaxationsstärken die Dimension eines Moduls aufweist, als kontinuierliches Relaxationspektrum bezeichnet (Tschoegl (1989)). Die Verteilung $H(\tau)$ kann über Näherungsformeln direkt aus den in Relaxationsversuchen gemessenen Spannungs-Zeitverläufen berechnet werden und bietet so eine Möglichkeit zur Ermittlung und Analyse des Informationsgehalts des aufgezeichneten Signals.

Anwendung auf Relaxationsversuche

Im Folgenden soll mithilfe einer zweiter Ordnung genauen Näherung

$$H_{2h}(\tau/\beta_2) = \left.\frac{h\hat{R}(t_i) - (h+1)\hat{R}(ht_i) + \hat{R}(h^2 t_i)}{(h-1)\ln h}\right|_{t_i=\tau}, \tag{B.4}$$

die auf dem logarithmischen Differenzenquotienten basiert, der Informationsgehalt realer Relaxationsversuche untersucht werden. Dabei wird für den Parameter h, der ein Maß für die Schrittweite darstellt, der Wert zwei gewählt. Damit ergibt sich für den sogenannten Verschiebungsfaktor $\beta_2 = 1,005$, so dass praktisch keine Verschiebung des näherungsweise berechneten Spektrums $H_{2h}(\tau/\beta_2)$ gegenüber $H(\tau)$ zu berücksichtigen ist. Für die Details der Herleitung der Näherungslösung und der numerischen Berechnung des Verschiebungsfaktors wird auf Tschoegl (1989) verwiesen.
Die Analyse realer Messdaten erfolgt am Beispiel von drei Relaxationsversuchen mit einer Haltezeit von $t_\text{h} = 3$h, in denen die Belastung mit unterschiedlichen Versuchsgeschwindigkeiten von 10, 100 und 500 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$ aufgebracht wird (Abb. B.4). Abbildung B.4(a) zeigt die während der Relaxation aufgezeichne-



(a) Spannungs-Zeitverläufe (b) Kontinuierliches Spektrum $H_{2h}(\tau)$

Abbildung B.4: Analyse des Einflusses der Versuchsgeschwindigkeit auf den Informationsgehalt von realen Relaxationsversuchen mittels kontinuierlicher Spektren

ten Spannungs-Zeitverläufe und Abb. B.4(b) die nach (B.4) ermittelten zugehörigen kontinuierlichen Spektren. Es ist festzustellen, dass die berechneten kontinuierlichen Spektren im Bereich $\tau \leq 10^1$s abhängig von der Belastungsgeschwindigkeit deutlich sichtbare Unterschiede aufweisen, für höhere Zeitkonstanten aber gut übereinstimmen. Diese Ergebnisse bestätigen die an dem verallgemeinerten MAXWELL-Modell hinsichtlich des Einflusses der Belastungsgeschwindigkeit gewonnenen Erkenntnisse. In den gemessenen Spannungs-Zeitverläufen sind diese Abweichungen kaum erkennbar, da sich der Einfluss der Zeitkonstanten $\tau \leq 10^1$s auf den starken Spannungsabfall am Beginn der Relaxation beschränkt.