# Zur physikalisch nichtlinearen Analyse von Verbund-Stabtragwerken unter quasi-statischer Langzeitbeanspruchung

On the Physically Nonlinear Analysis
of Composite Structures
under Quasi-Static Long-Term Loading

Von der Fakultät Bauingenieurwesen
der Technischen Universität Dresden
zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

**Dissertation**

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Frank Hannawald
geb. 30. April 1975 in Bautzen

verteidigt am 30. März 2006

Gutachter
Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang Graße
Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Graf
Prof. Dr.-Ing. habil. Nguyen Viet Tue

# Kurzfassung

Softwareentwicklungen für die Tragwerksplanung im Bauwesen werden zunehmend komplexer. Mit der Bereitstellung zuverlässiger und effizienter Berechnungsmethoden, welche sowohl ingenieurgemäße Ansprüche als auch wirtschaftliche Zielsetzungen erfüllen, werden neue Möglichkeiten für eine zielgerichtete Entwicklung oder verstärkte Etablierung von neueren Bauweisen geschaffen.

Die vorliegende Arbeit beschreibt ein Verfahren zur physikalisch nichtlinearen Analyse vorwiegend biegebeanspruchter Verbund-Stabtragwerke des Hoch- und Brückenbaues unter quasi-statischer Langzeitbeanspruchung. Die zugehörige programmtechnische Umsetzung wird veranschaulicht. Die Modellierungsmöglichkeiten bezüglich der Werkstoffe orientieren sich an baupraktisch relevanten Erfordernissen sowie an den Besonderheiten und aktuellen Entwicklungen der Verbundbauweise.

Besonderes Augenmerk wird zunächst auf eine realitätsnahe Darstellung der den Gebrauchszustand von Verbundtragwerken charakterisierenden zeit- und lastabhängigen Einflussgrößen sowie ihrer Wechselwirkungen gelegt. Zur objektiven Beurteilung möglicher Materialmodelle wird zuerst auf das prinzipielle Verhalten im Experiment eingegangen, danach erfolgt eine Auswahl geeigneter Modelle. Schwerpunkte stellen dabei insbesondere die Betoneigenschaften Kriechen, Schwinden, abfließende Hydratationswärme und die Rissbildung sowie das Verbundverhalten zwischen den Werkstoffen dar. Diese Betrachtungen schließen das Werkstoffverhalten unter Be- und Entlastung ein.

Die statische Lösung basiert auf einer inkrementell-iterativen Anwendung der Deformationsmethode. Ausgangspunkt der Berechnungen in einem Iterationsschritt ist die numerische Integration des Stab-Differentialgleichungssystems. Ausgehend von der Formulierung der Wirkungsgrößen an einem Stabrändern wird die Berücksichtigung von Belastungs- und Systemmodifikationen sowie zeitabhängigen und -unabhängigen Zwangsprozessen aufgezeigt.

Eine wesentliche Erweiterung der Anwendungen im Stahl-Beton-Verbundbau stellt die Herleitung des Stab-Differentialgleichungssystems für den nachgiebigen Verbund dar. Mit der Verknüpfung einzelner Detailmodelle zu einem zeitabhängigen Lösungsverfahren und deren Integration in einen entsprechenden Softwareentwurf wird die programmtechnische Basis für eine modellhafte, zeitvariante Erfassung der beschreibenden Kenngrößen bereitgestellt.

Ausgewählte praktische Beispiele demonstrieren abschließend die Anwendungsmöglichkeiten des Verfahrens und stellen die Verifikation der Simulationsergebnisse anhand von Messungen dar.

# Abstract

Software for designing structural frameworks in civil engineering is getting more and more complex. By offering reliable and efficient calculation methods, economic goals can be reached as well as the civil engineer's demands. Furthermore, opportunities for special developments are created and acceptance of new building systems is increased.

The work presented here introduces a method for the physically nonlinear analysis of different composite beam designs for building and bridge structures which are subjected mainly to bending stresses under quasi-static, long-term loading. In addition, the utilization of these methods, including materials and modelling concepts, are shown in a newly developed software package. Present developments for composite construction and civil engineering requirements are the basis for the materials and modelling possibilities discussed.

Particular attention is given to a realistic description of time and load dependent variables characterizing the state of the composite structures and their interactions. The selection of material models is based on experimental results. The main points of interest are concrete properties like creep, shrinkage, effluent hydration heat, cracking and boundary behaviour between different materials. Material behaviour under load and reload conditions was taken into account as well.

The static solution is based on the incremental iterative application of the deformation method. Each iteration starts with the numerical integration of the beam system of differential equations. Based on the effects at the beam boundaries, the consideration of load and system modifications, as well as time dependent and independent constraint processes, is shown.

An essential extension of the composite beam structure model is obtained using the system of differential equations for the flexible bond. Several detailed models are linked to a time dependent simulation for the entire system, which has been incorporated into a software package visualizing the time dependent variables.

Finally, some practical application examples are presented. The validation of the implemented approach is demonstrated by correlating the calculated results with real life measurements.

# Inhalt

**KAPITEL 1 EINFÜHRUNG ..... 1**

**1.1 Motivation ..... 2**

**1.2 Zielstellung ..... 3**

**1.3 Vorgehensweise ..... 5**

**KAPITEL 2 MODELLBILDUNG / BERECHNUNGSVERFAHREN ..... 7**

**2.1 Allgemeines ..... 8**

**2.2 Kenntnisstand ..... 9**

2.2.1 Starrer Verbund ..... 9

2.2.1.1 Gesamtquerschnittsverfahren ..... 10

2.2.1.2 Teilquerschnittsverfahren ..... 11

2.2.1.3 Diskretisierungsmethoden ..... 11

2.2.2 Nachgiebiger Verbund ..... 13

2.2.2.1 Geschlossene Differentialgleichungslösungen ..... 14

2.2.2.2 Diskretisierungsmethoden ..... 15

**2.3 Ein verbessertes Lösungsverfahren ..... 17**

2.3.1 Einordnung des Lösungsverfahrens ..... 17

2.3.2 Vorgehensweise und Abgrenzung des Leistungsumfangs ..... 17

2.3.2.1 Betrachtungszeitraum ..... 18

2.3.2.2 Statisches System und Querschnitte ..... 19

2.3.2.3 Äußere Einwirkungen ..... 20

2.3.2.4 Kinematische Hypothese ..... 20

2.3.2.5 Material ..... 21

2.3.2.6 Rissmodellierung ..... 21

2.3.2.7 Verbundverhalten ..... 21

2.3.2.8 Ergebnisse ..... 22

**KAPITEL 3 MATERIALVERHALTEN UND VERWENDETE MODELLE ..... 23**

**3.1 Beton ..... 25**
3.1.1 Verformungskomponenten ..... 25
3.1.2 Festigkeitsklassen ..... 26
3.1.3 Mechanische Eigenschaften von Festbeton unter kurzzeitiger Beanspruchung ..... 27
3.1.3.1 Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten bei einaxialer Beanspruchung ..... 27
3.1.3.2 Festigkeits- und Formänderungskennwerte ..... 31
3.1.3.3 Werkstoffmodellierung ..... 34
3.1.3.4 Verwendete Rechenmodelle ..... 36
3.1.4 Zeitliche Entwicklung der mechanischen Werkstoffeigenschaften von Beton ..... 38
3.1.4.1 Allgemeines ..... 39
3.1.4.2 Festigkeiten und Elastizitätsmodul ..... 40
3.1.4.3 Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit ..... 42
3.1.4.4 Verwendetes Rechenmodell ..... 43
3.1.5 Zeitabhängige Verformungen ..... 44
3.1.5.1 Kriechen ..... 44
3.1.5.2 Schwinden ..... 60
3.1.5.3 Abfließende Hydratationswärme ..... 64

**3.2 Stahl ..... 68**
3.2.1 Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit ..... 68
3.2.2 Baustahl ..... 70
3.2.3 Betonstahl ..... 71
3.2.4 Werkstoffmodellierung ..... 72
3.2.5 Verwendetes Rechenmodell ..... 72

**3.3 Stahlbeton ..... 74**
3.3.1 Verbundverhalten ..... 74
3.3.1.1 Kurzzeitige Belastung ..... 75
3.3.1.2 Verbundkriechen ..... 76
3.3.2 Mechanisches Verhalten eines Stahlbetonkörpers im einaxialen Zugversuch ..... 77
3.3.2.1 Monotone Zugbeanspruchung ..... 77
3.3.2.2 Ent- und Wiederbelastung ..... 79
3.3.3 Werkstoffmodellierung ..... 81
3.3.3.1 Tension-Stiffening ..... 81
3.3.3.2 Rissabstände und Rissbreiten ..... 84
3.3.4 Verwendetes Rechenmodell ..... 85

**3.4 Verbundsicherung zwischen Baustahl und Beton ..... 87**
3.4.1 Allgemeines ..... 87
3.4.2 Zum Tragverhalten von Kopfbolzendübeln ..... 88
3.4.2.1 Statische Beanspruchung ..... 88
3.4.2.2 Ent- und Wiederbelastung ..... 91
3.4.3 Einflüsse auf das Trag- und Verformungsverhalten von Kopfbolzendübeln ..... 94

3.4.4 Modellierung der Last-Schlupf-Charakteristik ....95
3.4.4.1 Statische Dübelkennlinie ....95
3.4.4.2 Statische Dübeltragfähigkeit - Dübelformeln ....97
3.4.4.3 Dübelkennlinie bei Ent- und Wiederbelastung ....97
3.4.5 Verwendetes Rechenmodell ....98
3.4.6 Tragverhalten von Kopfbolzendübeln bei Verwendung hochfester Werkstoffe ...99

**3.5 Verbund unterschiedlich alter Betone ....101**

**KAPITEL 4 ANALYSE QUASI-STATISCHER LAST- UND ZWANGSPROZESSE ..... 103**

**4.1 Vorgehensweise bei der nichtlinearen Analyse des Systemzustandes ....104**
4.1.1 Zusammenhang zwischen den Parametern des Systemzustandes ....104
4.1.2 Diskretisierung (in Raum und Zeit) ....105
4.1.3 Gesamtlösung ....107

**4.2 Statische Grundlösungen für die Zuwächse in einem Iterationsschritt ....110**
4.2.1 Differentialgleichungssystem des ebenen Stabes ....110
4.2.1.1 Kinematische Beziehungen ....110
4.2.1.2 Stoffgesetze – Schnittgrößen-Verzerrungs-Abhängigkeiten ....111
4.2.1.3 Gleichgewichtsbedingungen ....114
4.2.1.4 Zusammenführen der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbeziehungen in einem DGL-System 1. Ordnung ....115
4.2.2 Stabsteifigkeitsmatrizen und Randschnittkräfte des kinematisch bestimmt gelagerten Stabes ....117
4.2.2.1 Lösung des DGL-Systems ....117
4.2.2.2 Übergang von der Reduktionsmethode zur Deformationsmethode ....118
4.2.3 Deformationsmethode ....119
4.2.3.1 Randschnittkraft-Knotenverschiebungs-Abhängigkeiten ....119
4.2.3.2 Kopplung der Stäbe zur Gesamtstruktur - Aufbau und Lösung des Gleichungssystems für die unbekannten Knotenverschiebungen ....124

**4.3 Zur Gleichgewichtsiteration ....127**
4.3.1 Lastgesteuerte Iterationsverfahren ....127
4.3.2 Abbruchkriterien für den Iterationsprozess ....130

**4.4 Zwangsbeanspruchungen und Eigenspannungszustände ....131**
4.4.1 Numerische Umsetzung ....131
4.4.2 Beanspruchungsunabhängige Formänderungen ....133
4.4.3 Beanspruchungsabhängige Formänderungen ....133
4.4.4 Kriterium für die Zeit-Intervallteilung ....134

**4.5 Herstellungs- und nutzungsbedingte Systemmodifikationen ....136**
4.5.1 Bauteilveränderungen ....136
4.5.2 Querschnittsmodifikationen ....137
4.5.3 Veränderung von Auflager- und Stabanschlussbedingungen ....138

**4.6 Nichtlineare Stützungen ... 139**

**4.7 Analyse der Eigenschwingungen ... 140**

4.7.1 Algebraisches und transzendentes Eigenwertproblem ... 140

4.7.2 Erweiterung des Stab-Differentialgleichungssystems ... 141

**4.8 Nachgiebiger Verbund ... 143**

4.8.1 Erweiterung des Differentialgleichungssystems für den nachgiebigen Verbund 144

4.8.1.1 Kinematik ... 144

4.8.1.2 Schnittkraft-Verzerrungs-Abhängigkeiten ... 145

4.8.1.3 Gleichgewichtsbedingungen ... 146

4.8.1.4 Erweitertes Differentialgleichungssystem ... 147

4.8.2 Stabsteifigkeitsmatrizen und Randschnittkräfte des kinematisch bestimmt gelagerten Stabes ... 149

4.8.2.1 Lösung des DGL-Systems ... 149

4.8.2.2 Übergang von der Reduktionsmethode zur Deformationsmethode ... 150

4.8.3 Deformationsmethode ... 151

4.8.4 Zwangsbeanspruchungen und Eigenspannungszustände ... 151

4.8.5 Systemmodifikationen ... 152

4.8.6 Analyse der Eigenschwingungen ... 153

**KAPITEL 5 RECHNERBASIERTE TRAGWERKSANALYSE UND APPLIKATIONSENTWURF ... 155**

**5.1 Rechnergestützte Tragwerksanalyse und Rechentechnik ... 156**

**5.2 Zeitabhängige Systemmodellierung ... 158**

**KAPITEL 6 TESTBEISPIELE, PARAMETERSTUDIEN UND ANWENDUNGEN ... 165**

**6.1 Testbeispiele und Parameterstudien ... 166**

6.1.1 Schwinden und Kriechen unter der Annahme eines starren Verbundes ... 166

6.1.1.1 Gegenüberstellung mit Lösungen von SATTLER [124] und FLEDERER [49] ... 167

6.1.1.2 Schrittweitensteuerung im Zeitbereich ... 170

6.1.1.3 Eine Näherungslösung für die numerische Erfassung der alterungsabhängigen Betonkriechverformungen ... 171

6.1.2 Nachgiebiger Verbund ... 173

6.1.2.1 Lösung für t = 0 ... 174

6.1.2.2 Vergleich mit weiteren Lösungen unter dem Einfluss von Schwinden und Kriechen ... 175

6.1.3 Einfluss der Werkstoffmodellierung des Stahlbetons auf den zeit- und lastabhängigen Systemzustand eines Zweifeldträgers ... 178

6.1.3.1 Verbundträger mit Eigenlastverbund ... 179

6.1.3.2 Herstellung mit und ohne Eigenlastverbund ... 181

**6.2 Anwendungen ..... 185**
6.2.1 Gegenüberstellung von Messung und Simulation am Beispiel der Unionbrücke Dresden-Radebeul ..... 185
6.2.2 Rahmenbrücke aus Verbundfertigteilen mit nachträglicher Ortbetonergänzung 196

**KAPITEL 7 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK ..... 203**

**LITERATURVERZEICHNIS ..... 207**

**ANLAGEN ..... 217**

# Abkürzungen, Bezeichnungen, Indizes

Folgende Abkürzungen, Bezeichnungen und Indizes werden verwendet, sofern im Text keine andere Zuordnung erfolgt. Auf die Definition selten gebrauchter Bezeichnungen sowie Mehrfachbezeichnungen wird im Text hingewiesen.

### *Abkürzungen*

| | |
|---|---|
| BA | **B**etonier**a**bschnitt |
| DEM | **D**iskrete **E**lemente **M**ethode |
| DGL | **D**ifferential**gl**eichung |
| DIN-FB | **DIN-F**ach**b**ericht |
| GQV | **G**esamt**q**uerschnitts**v**erfahren |
| FEM | **F**inite **E**lemente **M**ethode |
| KBD | **K**opf**b**olzen**d**übel |
| RH | relative Luftfeuchtigkeit in % (**r**elative **h**umidity) |
| RS-Modell | **R**evised **S**ummation **M**odell |
| TQS | **T**eil**q**uer**s**chnitt |
| TQV | **T**eil**q**uerschnitts**v**erfahren |
| VFT | **V**erbund**f**ertig**t**eil |
| VTQS | **V**erbund**t**eil**q**uer**s**chnitt |

### *Bezeichnungen*

| | |
|---|---|
| a … z | Variable |
| $\underline{a}$ … $\underline{z}$ | Vektoren |
| $\underline{A}$ … $\underline{Z}$ | Matrizen |
| $\tilde{\square}$ | globale Koordinaten |
| $\dot{\square}$ | Ableitung nach der Zeit |
| $\underline{A}$ | Koeffizientenmatrix des Stabdifferentialgleichungssystems |
| $A_s$ | Schubfläche |
| $\underline{b}$ | rechte Seite des Stabdifferentialgleichungssystems |
| C | Dübelsteifigkeit |
| E | Elastizitätsmodul |
| $\underline{\overset{\circ}{F}}$ | Vektor der kinematisch bestimmten Randschnittkräfte |
| G | Schubmodul |

| | |
|---|---|
| $\underline{K}$ | Systemsteifigkeitsmatrix |
| $l_E$ | Risseinzugslänge |
| m | äußeres Linienmoment |
| M | Biegemoment |
| N | Normalkraft |
| $\underline{P}$ | Vektor der äußeren Knotenlasten |
| q | äußere Linienlast |
| Q | Querkraft |
| $\Delta\underline{R}$ | Inkrement des Vektors der Korrekturkräfte infolge physikalischer Nichtlinearitäten |
| s | Schlupf |
| t | Zeit |
| (t) | zeitabhängige Größe |
| $t_o$ | Erstbelastungsalter des Betons |
| $t_s$ | Betonalter zum Schwindbeginn |
| T | Schubkraft |
| u, w | Verschiebung in Richtung der x-, y-Achse |
| v | Verschiebung |
| V | Variationskoeffizient |
| $w_m$ | mittlere Rissbreite |
| x | Koordinatenachse in Richtung der Referenzachse |
| y | Koordinatenachse senkrecht zur Referenzachse |
| z | Koordinatenachse in Richtung der Verdrehung |
| $\underline{z}$ | Vektor der Wirkungsgrößen am differentiellen Stababschnitt |
| $\beta(t)$ | Faktor zur Berücksichtigung des Verbundkriechens |
| $\gamma$ | Gleitung |
| $\Delta$ | inkrementelle Zuwächse |
| $\varepsilon$ | Dehnung |
| $\sigma$ | Normalspannung |
| $\sigma_x$ | Standardabweichung |
| $\overline{\sigma}$ | Normierte Betondruckfestigkeit ($\sigma/f_{cm}$) |
| $\tau$ | Schubspannung |
| $\varphi$ | Verdrehung in Richtung der z-Achse |

## *Indizes*

| | |
|---|---|
| $\square_a$ | Baustahl |
| $\square_c$ | Beton |
| $\square^{[k]}$ | Iterationsschrittzähler |
| $\square_L$ | Schicht L |
| $\square_{NL}$ | nichtlinear |
| $\square_{(n)}$ | Inkrementzähler |
| $\square_{phy}$ | Korrekturen infolge physikalischer Nichtlinearitäten |
| $\square_r$ | Bezug zur Referenzachse des Querschnittes |
| $\square_s$ | Betonstahl |
| $\square_{Schl}$ | Schlupf mit Bezug zur Referenzachse |
| $\square_{st}$ | Stahl |
| $\square_{Syst}$ | Systemmodifikationen |
| $\square_T$ | Temperatur |
| $\square_{\Delta t}$ | zeitabhängige Größen |

## *Werkstoffspezifische Bezeichnungen und Indizes*

### Beton

| | |
|---|---|
| $E_{cm}$ | mittlerer Elastizitätsmodul |
| $f_c$ | Druckfestigkeit |
| $f_{ck}$ | charakteristische Zylinderdruckfestigkeit |
| $f_{cm}$ | mittlere Druckfestigkeit |
| $f_{ctm}(f_{ct})$ | mittlere (charakteristische) Zugfestigkeit |
| $G_f$ | Bruchenergie |
| $h_0$ | wirksame Bauteildicke |
| $J(t,t_o)$ | Kriechfunktion |
| w/z | Wasser-Zement-Wert |
| $\varepsilon_{c0}$ | Dehnung beim Erreichen der Druckfestigkeit |
| $\varepsilon_H$ | Dehnung infolge abfließender Hydratationswärme |
| $\varepsilon_K$ | Kriechdehnung |
| $\varepsilon_S$ | Schwinddehnung |
| $\varepsilon_{cu}$ | Bruchdehnung |
| $\varphi_K$ | Kriechzahl |
| $\square_{28}$ | normativ geregelte Festigkeits- und Formänderungskennwerte bezogen auf eine Materialprüfung nach 28 Tagen |

### Stahl

| | |
|---|---|
| $f_{tk}$ | charakteristischer Wert der Bruchfestigkeit des Betonstahls |
| $f_{uk}$ | charakteristischer Wert der Bruchfestigkeit des Baustahls |
| $f_{yk}$ | charakteristischer Wert der Streckgrenze |
| $\varepsilon_t$ | Bruchdehnung des Betonstahls |
| $\varepsilon_u$ | Bruchdehnung des Baustahls |

„Lernen ist wie Rudern gegen den Strom -
wer damit aufhört, treibt zurück.“

*Benjamin Franklin*

# Kapitel 1

# Einführung

Bereits seit frühester Zeit, jedoch verstärkt ab dem Beginn seiner Sesshaftwerdung, setzt sich der Mensch mit der Errichtung von Bauwerken auseinander. Anfangs vorrangig als Behausungen zum Schutz vor existentiellen Bedrohungen, entstanden bereits im Altertum bemerkenswerte Bauten wie Tempel, Brücken und Aquädukte, welche den Entwicklungsstand der damaligen Kulturen dokumentieren und auch maßgeblich zur jeweiligen intellektuellen, kulturellen und technischen Weiterentwicklung beitrugen. Basis des Bauens war damals das Vermögen Einzelner, sich in physikalische Vorgänge einfühlen zu können und die über Generationen gesammelten Erfahrungen aus vergangenen Epochen anzuwenden sowie ein insgesamt hohes handwerkliches Können.

Mit dem Beginn der modernen Natur- und Ingenieurwissenschaften in der durch Renaissance, Humanismus und Reformation geprägten Frühen Neuzeit traten Ende des 15. Jahrhunderts verstärkt theoretische Betrachtungen des Entwurfsgegenstandes auf. Heute steht dem Ingenieur bei der Planung, Bemessung und Ausführung von Bauwerken durch die Anwendung theoretischer Gesetzmäßigkeiten ein umfangreiches mathematisches und physikalisches Wissen zur Verfügung.

Parallel zur Entwicklung der Rechentechnik hat sich in nahezu allen Ingenieurdisziplinen ein grundlegender Wandel im Umgang mit theoretischem Wissen hin zu einer problemorientierten Anwendung vollzogen. Neben der Entwicklung und Erforschung von Werkstoffen wird das moderne Ingenieurwesen deshalb stark von der elektronischen Datenverarbeitung geprägt. Nach einer bisher etwa 40 Jahre andauernden Phase der Konzentration menschlicher Arbeit auf die Entwicklung computergestützter Rechenmodelle sind heute Softwarelösungen fester Bestandteil des Arbeitsgeschehens in nahezu allen Fachdisziplinen. Speziell in der Baustatik beruht dabei der ökonomische Erfolg auch auf der Vielfalt der behandelbaren Aufgabenstellungen und der erreichbaren Modellqualität bei gleichzeitiger Zeitersparnis. Allerdings ist mit der Verfügbarkeit wachsender Rechenleistungen auch ein Anwachsen des Umfanges der erfassbaren und lösbaren Probleme und des dafür betriebenen Aufwands zu verzeichnen. Neben technologischen Verbesserungen werden in Zukunft vor allem Maßnahmen zur Steigerung der Funktionsvielfalt sowie zur allgemeinen Leistungssteigerung weiter zum verstärkten Einsatz derartiger Produkte beitragen.

Die Entwicklung von Verbundkonstruktionen zielt auf eine Verbindung der positiven Eigenschaften der Verbundpartner, bei gleichzeitiger Elimination der jeweiligen negativen Eigenschaften, ab und stellt im Bauwesen aus materialökonomischer Sicht eine Optimierung und Erweiterung bekannter Konstruktionsformen dar. Ihre praktische Anwendung ist heute unter Beibehaltung der bekannten Formenvielfalt nahezu untrennbar an die Verwendung numerischer Verfahren der Baustatik gebunden, wird jedoch noch immer maßgebend durch die zum Teil unzureichende Kenntnis des Werkstoffverhaltens der Verbundpartner geprägt.

## 1.1 Motivation

Da sich durch die gezielte Kombination der Eigenschaften von Stahl und Beton vielfältige konstruktive und gestalterische Möglichkeiten eröffnen, hat sich die Stahl-Beton-Verbundbauweise in den letzten Jahren als fester Bestandteil des Hoch- und Brückenbaus etabliert. Hohe Vorfertigungsgrade, verbunden mit kurzen Montagezeiträumen, erhöhen die Attraktivität der Anwendung sowohl in technischer als auch in wirtschaftlicher Hinsicht.

Der klassische Verbundträger besteht aus einem stählernen Grundprofil mit aufbetonierter Profil- oder Vollbetonplatte. Speziell im Brückenbau werden darüber hinaus zunehmend mehrteilige Verbundquerschnitte verwendet. Als Beispiele dafür stehen innovative Lösungen wie Verbundfertigteilträger mit nachträglicher Ortbetonergänzung, Doppelverbundquerschnitte oder hybride Konstruktionen mit aufgelösten bzw. gefalteten Stegen.

Zu große Rissbreiten im Beton, zu große Durchbiegungen, ungeeignete Trägerüberhöhungen oder unzulässig große Schwingungen sind oftmals die Ursache von Schäden an Verbundbauwerken. Offensichtlich bewegt man sich beim Nachweis der Gebrauchstauglichkeit manchmal in Bereichen, die als kritisch zu bewerten sind und die Grenzen der aktuellen Ingenieurbemessung aufzeigen. Probleme mit der Tragsicherheit einer normenkonform bemessenen Verbundkonstruktion sind im Gegensatz dazu von untergeordneter Bedeutung. In der Praxis treten deshalb zunehmend immer mehr Fragestellungen nach der Beurteilung der Dauerhaftigkeit und der Gebrauchstauglichkeit eines Verbundbauwerkes in den Vordergrund. Bereits während der Planungsphase sind darin Überlegungen zur Ertüchtigung von Tragwerken während oder nach einer definierten Nutzungsdauer eingeschlossen.

Eine realitätsnahe Betrachtung von Stahl-Beton-Verbundbauwerken setzt eine umfassende Kenntnis der verwendeten Materialien und Verbindungsmittel sowie deren Wechselwirkungen im System voraus. Bereits unter Gebrauchslasten sehr ausgeprägt vorhandene nichtlineare Verhaltensweisen eines Materials wie die Rissbildung und die Langzeitphänomene Schwinden und Kriechen des Betons sowie die Charakteristik der Verbindungen zwischen den Verbundpartnern bedingen den zeit- und lastabhängigen Systemzustand eines Verbundtragwerkes. Herstellungsbedingte Systemveränderungen sowie Instandhaltungs- oder Ertüchtigungsmaßnahmen bewirken außerdem Veränderungen im Tragwerk, deren Auswirkungen nur unter Beachtung der Beanspruchungsgeschichte und möglicher Materialschädigungen realitätsnah analysiert werden können. Für die Tragwerksanalyse bedeutet dies, dass ein Bauwerk unter Beachtung zeitabhängiger Einwirkungen und Bauteilwiderstände bemessen werden muss.

Dem planenden Ingenieur stehen für die praktische Bemessung von Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen mit dem EUROCODE 4 [46] Hilfsmittel zur Verfügung, welche im Brückenbau die genannten Einflüsse zugunsten einer elastischen Schnittgrößenermittlung stark vernachlässigen und deren Anwendung sich auf den klassischen, zwängungsarmen Verbundträger beschränkt. Allerdings steigt der damit verbundene manuelle Aufwand mit der Komplexität der Aufgabenstellung überproportional an. Nachgiebige Verbindungen der Verbundpartner können nicht erfasst werden. Die Bemessung im Hochbau erfolgt zumeist unter Vernachlässigung von Langzeiteinflüssen, wobei eine plastische Schnittgrößenermittlung möglich ist. Bei der Bemessung nachgiebiger oder teilweiser Verdübelungen ist man zurzeit auf einfache Konstruktionsformen oder produktbezogene Bemessungshilfen beschränkt. Die Verwendung realitätsnäherer Berechnungsverfahren zur Schnittgrößen- und Spannungsermittlung ist zulässig und schließt auch die nichtlineare Tragwerksanalyse mit ein. Forschung und Entwicklung versuchen in jüngerer Zeit verstärkt dieser Tendenz gerecht zu werden, indem sie verschiedene, teilweise auch produktbezogene Lösungen zur Verfügung stellen.

Mit dem Einsatz computergestützter Lösungsverfahren vollzog sich ein Wandel bei der Modellierung eines Tragwerks in ein statisches Modell. Dem steigenden Modellierungsaufwand durch immer detaillierter ausgeführte Modelle folgend besteht seitens der numerischen Analyse das Bestreben, die widersprüchlichen Ziele einer allgemeingültigen und dennoch problembezogenen praxisnahen Lösung zu vereinen. Dadurch werden die Tragwerksanalyse der Makrostruktur und der detaillierte Nachweis am Materialpunkt (Mikrostruktur) immer enger miteinander verknüpft. Die Fülle der dabei erzeugten Systeminformationen ist enorm und führt auch zu einem hohen Bedarf an Rechenleistung. Die praktische Anwendbarkeit derart komplexer Lösungsverfahren wird deshalb maßgebend durch ihre Flexibilität bei der problembezogenen Prozessabbildung sowie ihre numerische Stabilität und ihren Ressourcenbedarf bestimmt.

## 1.2 Zielstellung

Ziel der Arbeit ist das Bereitstellen eines allgemeinen numerischen Lösungsverfahrens für die deterministische Analyse praxisrelevanter, vorwiegend biegebeanspruchter Stahl-Beton-Verbundtragwerke des Hoch- und Brückenbaus. Dazu wurde ein Rechenmodell erarbeitet, mit dem das reale Tragverhalten während der gesamten Nutzungsdauer abgebildet werden kann. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die realitätsnahe Erfassung der den Gebrauchszustand eines Verbundtragwerkes charakterisierenden zeit- und lastabhängigen Verformungen, Rissbreiten und Schwingungen gelegt.

Um dieser Anforderung gerecht zu werden, ist eine vertiefte Kenntnis der in Bild 1.1 veranschaulichten signifikanten Einflussgrößen auf den Systemzustand und deren komplexes, zeitabhängiges Zusammenwirken erforderlich. Anschließend können dann die maßgebenden Größen durch geeignete Modelle in einem Berechnungskonzept erfasst und rechnerisch umgesetzt werden.

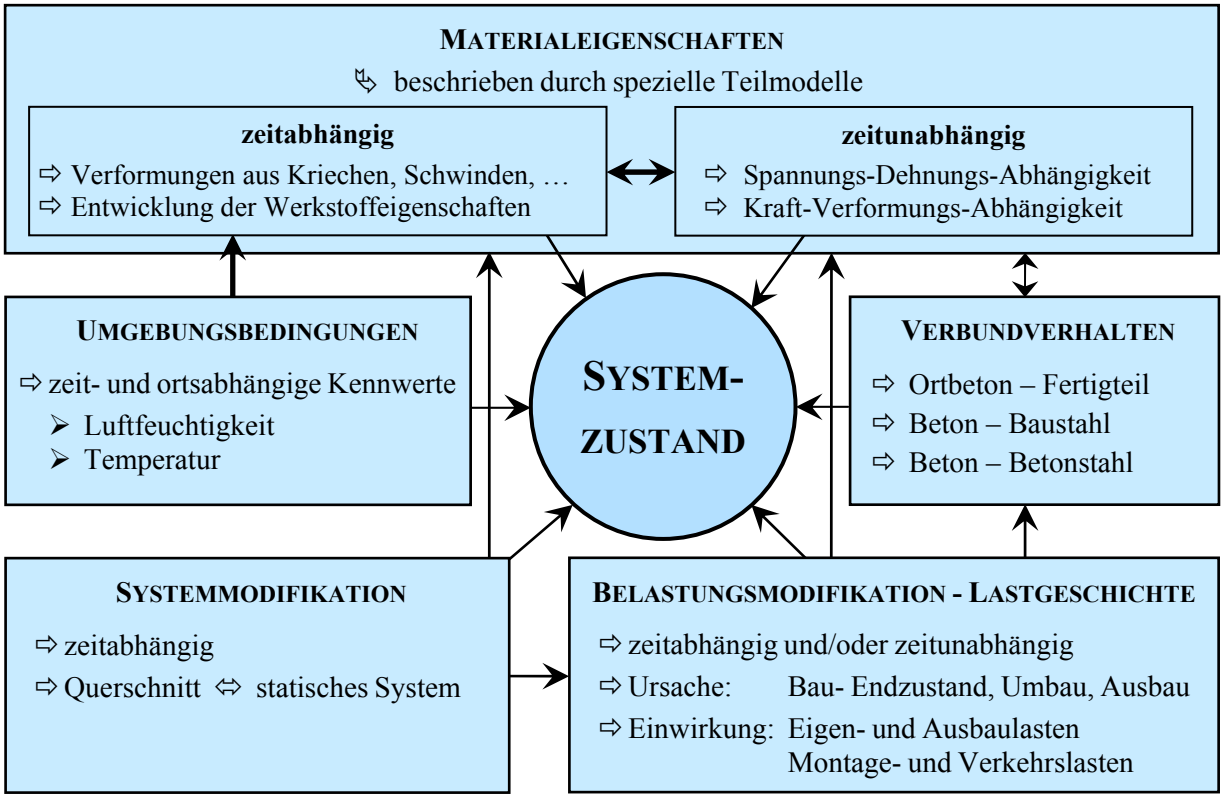



**Bild 1.1: Einflüsse auf den Systemzustand von Stahl-Beton-Verbundbauwerken und deren Zusammenwirken**

Im Einzelnen resultieren daraus folgende Bearbeitungsschwerpunkte:

- **Werkstoffmodellierung:** Aufstellen und Bewerten einer Auswahl von Stoffgesetzen, welche die materialspezifischen Besonderheiten der Verbundpartner, hier insbesondere des Betons, deren Zusammenwirken, deren Verbindungen sowie deren Verbindungsmittel hinreichend genau erfassen. Mit Blick auf das Verhalten der Gesamtstruktur, auf ein möglichst breites Anwendungsspektrum und auf einen akzeptablen Ressourcenverbrauch soll dabei insbesondere der Fragestellung nachgegangen werden, wie und mit welchem Modellierungsaufwand einzelne Materialphänomene eines Werkstoffes in ein universell anwendbares Gesamtmodell zu integrieren sind. Die Betrachtungen schließen eine Analyse hochfester Werkstoffe ein.
- **Statische Grundlösung:** Es erfolgt die Auswahl eines geeigneten statischen Lösungsansatzes, der den konstruktiven Besonderheiten von Verbundtragwerken in Form der erforderlichen Systemmodellierung und der zu berücksichtigenden Werkstoffabbildung mit vertretbarem numerischen Aufwand gerecht wird. Außerdem soll die Analyse mehrteiliger Verbundquerschnitte mit nachgiebigen Verbindungen möglich sein.
- **Zeitabhängige Systemmodellierung:** Durch das Zusammenführen der Werkstoffmodelle und der statischen Grundlösung unter einem erweiterten Lösungskonzept kann eine zeitabhängige Systembeschreibung erreicht werden. Um die Überschaubarkeit der notwendigen Eingangsgrößen sicherzustellen und damit eine Akzeptanz auch komplexer Verfahren für praktische Aufgabenstellungen zu ermöglichen, sind konzeptionelle Überlegungen zur zeitabhängigen Modellierung des Prozesses und der programmtechnischen Umsetzung erforderlich.

## 1.3 Vorgehensweise

Nach einer Einführung in diesem Kapitel stellt Kapitel 2 den Kenntnisstand rechnerischer Ansätze zur Modellierung und Berechnung vorwiegend biegebeanspruchter Verbundkonstruktionen mit starren und nachgiebigen Verbindungen dar. Bekannte Ansätze werden in ihren wesentlichen Merkmalen charakterisiert und bezüglich ihrer Anwendungsmöglichkeiten verglichen. Darauf aufbauend wird die Grundidee des mit der vorliegenden Arbeit programmtechnisch umgesetzten, verbesserten Lösungsverfahrens erörtert und die prinzipielle Lösungsstrategie umrissen. Durch eine Abgrenzung des Leistungsumfangs des Verfahrens auf ebene Stabwerke wird die Zielstellung hinsichtlich des Modellierungsaufwandes konkretisiert und damit die Randbedingungen der in den Kapiteln 3 und 4 behandelten Grundbausteine Werkstoffmodell und statische Grundlösung definiert.

In Kapitel 3 werden die für die Berechnung erforderlichen Materialeigenschaften der Verbundpartner Beton und Stahl sowie des gemeinsam gebildeten Verbundwerkstoffes Stahlbeton dargestellt. Weiterhin wird auf das Verbindungsmittel Kopfbolzendübel und den Verbund zwischen unterschiedlich altem Beton näher eingegangen. Dazu wird zuerst das Verhalten der Werkstoffe im Experiment unter dem Einfluss kurz- und langzeitig einwirkender Beanspruchungen beschrieben. Dies dient einerseits dazu, die Ursachen makroskopisch sichtbarer Verformungs- und Versagensmechanismen zu verstehen, andererseits kann dadurch eine realistische Abschätzung von Unschärfen der Materialparameter und damit eine objektive Beurteilung einer Vielzahl vorhandener Materialmodelle getroffen werden. Diese Betrachtungen schließen neben den Wirkungsmechanismen bei monotoner Belastungsänderung auch das Verhalten unter nicht ermüdungswirksamen, quasi-statischen Ent- und Wiederbelastungen ein.

Anschließend werden auf der Basis bekannter Modellansätze mögliche Varianten zur Werkstoffmodellierung diskutiert und die in die Software integrierten Materialmodelle angegeben. Der Beton nimmt dabei eine Schlüsselrolle ein. Materialphänomene wie das Kriechen unter Dauerlast und die hydratationsbedingte Veränderung der mechanischen Kenngrößen machen neben den quasi-statischen Eigenschaften des Festbetons eine von der Zeit abhängige Untersuchung des Werkstoffverhaltens erforderlich. Mit Blick auf die numerische Abbildung dieser Erscheinungen werden deshalb die mechanischen Eigenschaften des Festbetons, deren hydratationsbedingte Entwicklung im jungen Betonalter und die zeitabhängigen Verformungen infolge Kriechens, Schwindens und abfließender Hydratationswärme differenziert betrachtet. Insbesondere Aussagen zum Zugkriechen, Kriechen unter hoher Dauerlast sowie zum mehraxialen Kriechen sollen den Anwendungsbereich erweitern aber auch Grenzen verdeutlichen. Durch ausgewählte Beispiele werden bereits in diesem Kapitel die Auswirkungen bestimmter lokaler Effekte am Materialpunkt auf das globale Verhalten demonstriert.

Der zweite Schwerpunkt der Arbeit befasst sich in Kapitel 4 mit den numerischen Grundlagen des statischen Lösungsansatzes und deren Anwendung auf Tragkonstruktionen des Stahl-Beton-Verbundbaus mit mehrteiligen Querschnitten. Da es sich bei der Deformationsmethode um ein bereits bekanntes Verfahren handelt, erfolgt die Darstellung in einer auf die wesentlichen Aspekte reduzierten Form. Ausführlich wird jedoch die Erfassung nichtlinearer Einflüsse aufgezeigt. Mittels verschiedener lastgesteuerter Iterationsverfahren erfolgt die

Systemzustandsanalyse für die zeit- und lastabhängigen Nichtlinearitäten inkrementell iterativ. Ausgangspunkt ist jeweils das Aufstellen und die numerische Lösung des gekoppelten Stab-Differentialgleichungssystems. Für die integrierte Analyse der Eigenfrequenzen und -formen wird das ebenfalls bekannte numerische Vorgehen angepasst. Um die Auswirkungen nachgiebiger Verbindungen zu erfassen und damit den Anwendungsbereich erheblich zu erweitern, wird eine Erweiterung des Stab-Differentialgleichungssystem für eine beliebige Anzahl nachgiebiger Verbindungen in Richtung der Stabachse aufgezeigt und softwaretechnisch umgesetzt.

Das gesamte Lösungsverfahren wurde in einem Computerprogramm umgesetzt. Zu diesem Zweck wurde ein Stabwerksprogramm erstellt und um die Dimension Zeit erweitert. In Kapitel 5 werden die Grundlagen der programmiertechnischen Umsetzung und eine effiziente Möglichkeit der zeitabhängigen System- und Lastmodellierung veranschaulicht. Dieses Vorgehen gestattet die Beachtung der in Bild 1.1 dargestellten signifikanten Einflüsse und eine Analyse des Systemzustands eines Verbundtragwerkes zu beliebigen Zeitpunkten.

Die anschließende Gegenüberstellung von Simulationsergebnissen und von Messungen an Brückenbauwerken, von normativen Berechnungen sowie von numerischen Analysen mittels kommerzieller Rechenprogramme dient der Verifikation des Rechenansatzes und ermöglicht eine klare Aussage zur Leistungsfähigkeit des entwickelten Algorithmus (Kapitel 6).

Das abschließende Kapitel 7 fasst die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit zusammen und zeigt Ansatzpunkte für die weitere Forschung auf. Die Anlage enthält einige Ergänzungen zu den einzelnen Kapiteln, welche nicht unmittelbar für das Verständnis erforderlich sind, dieses jedoch vertiefen können.

„Eigentlich weiß man nur, wenn man wenig weiß;
mit dem Wissen wächst der Zweifel.“

*Johann Wolfgang von Goethe*

# Kapitel 2

# Modellbildung / Berechnungsverfahren

Seit etwa 1930 werden Tragwerke aus starr miteinander verbundenen Betonplatten und Stahlprofilen als klassische Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen ausgeführt und rechnerisch untersucht. Die zu diesem Zeitpunkt getroffene Annahme einer Schubkraftübertragung ohne Relativverschiebungen zwischen den betroffenen Teilquerschnitten gilt nicht in jedem Fall. Zum Anfang der fünfziger Jahre begann man sich daher, angeregt durch Versuche und theoretische Untersuchungen im Ingenieurholzbau, mit den Auswirkungen nachgiebiger Verbindungen in Bezug auf die Verformungen und die Schnittgrößenverteilung im Tragwerk auseinanderzusetzen (STÜSSI [137]).

Neben der Kraftübertragung durch die Verbundfuge wird das Trag- und Gebrauchsverhalten von Verbundkonstruktionen wesentlich durch die Langzeiteigenschaften des Betons und dessen Rissbildung und -entwicklung geprägt. Da Stahl im Gegensatz zu Beton keine ausgeprägte Kriech- und Schwindneigung zeigt, kann sich der Systemzustand des Tragwerks je nach Steifigkeitsverteilung im Querschnitt und im System mit der Zeit durch eine Lastumverteilung spürbar ändern. Da diese nichtlinearen Erscheinungen rechnerisch Beachtung finden müssen, ist das Verhalten des Gesamtsystems zeitabhängig abzubilden.

In den letzten Jahrzehnten wurden einige Arbeiten veröffentlicht, welche sich mit experimentellen Untersuchungen an und Berechnungsverfahren für Stahl-Beton-Verbundträger beschäftigen (z.B. [13], [22], [28], [41], [49], [61], [67]-[69], [91], [106], [124]). Während sich die Lösungsansätze für den starren Verbund vor allem mit den Auswirkungen der zeitabhängigen Betoneigenschaften Schwinden und Kriechen auseinandersetzen, ist die Erforschung nachgiebiger Verbindungen vorrangig auf eine geeignete Erweiterung der mechanischen Modelle in Form der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen im Querschnitt unter Beachtung realer Kraft-Schlupf-Beziehungen fokussiert.

Dieses Kapitel setzt sich mit der Darstellung und Bewertung statischer Lösungsansätze und praxisrelevanter Nachweisverfahren von überwiegend biegebeanspruchten Verbundkonstruktionen auseinander. Dabei stehen Ansätze im Vordergrund, welche die Abbildung eines Tragwerkes in ein Stabwerksmodell ermöglichen. Nach einer kurzen Darstellung der prinzipiellen Tragmechanismen und der Unterschiede starrer und nachgiebiger Verbindungen werden

zunächst die bekannten Bemessungsansätze für den starren Verbund hinsichtlich ihrer Möglichkeiten bei der Abbildung der in Bild 1.1 aufgezeigten zeitabhängigen Einflüsse und Anwendungsgrenzen diskutiert. Der Bezug zum aktuellen Stand der europäischen Normung schließt auch Entwicklungen mehrteiliger Verbundquerschnitte ein. Daran anschließend werden Lösungsansätze für nachgiebig verbundene Querschnittsteile betrachtet. Von besonderem Interesse ist dabei die numerische Behandlung von Querschnitten mit mehreren nachgiebigen Fugen.

Basierend auf dem Kenntnisstand der Forschung wird zum Ende dieses Kapitels die Grundidee des in dieser Arbeit entwickelten, verbesserten Lösungsverfahrens erörtert und die prinzipielle Lösungsstrategie dargestellt. Durch eine Abgrenzung des Leistungsumfangs werden die Anwendungsgrenzen des gewählten Verfahrens sowie die Randbedingungen der in den folgenden Kapiteln 3 und 4 behandelten Grundbausteine der Werkstoffmodelle und der statischen Grundlösung definiert und ihre Einordnung in den gesamten Lösungsprozess aufgezeigt.

## 2.1 Allgemeines

Die Berechnung im Verbundbau unterscheidet zwischen nachgiebiger und starrer Verbindung der einzelnen Teilquerschnitte. Unter Berücksichtigung verschiedener Elastizitätsmodule der Teilquerschnitte kann die Analyse der Strukturantwort bei starren Verbindungen in Analogie zu mehrteiligen homogenen Querschnitten erfolgen. Aus den Gesamtschnittgrößen werden die Beanspruchungen der Teilquerschnitte und Verbindungen auf der Grundlage von Querschnitts- und Steifigkeitsbeziehungen direkt ermittelt. Werden Querschnittsteile durch nachgiebige Verbindungsmittel miteinander verbunden, so ist dieses Vorgehen nicht mehr geeignet. Das unvollständige Zusammenwirken beeinflusst die Verträglichkeits- und die Gleichgewichtsbedingungen je Querschnittsteil. Die rechnerische Analyse wird durch das Verbundverhalten, welches durch die Schubkraft-Schlupf-Beziehung in der Verbundfuge ausgedrückt wird, bestimmt.

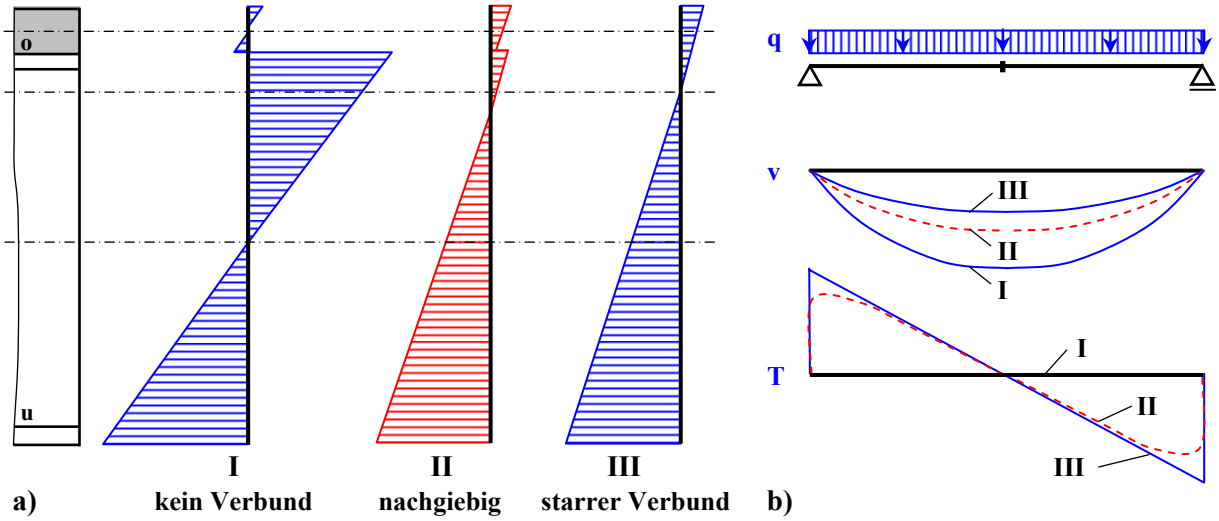



**Bild 2.1: Auswirkungen der Verbundsteifigkeit am Beispiel eines Biegeträgers**
**a) Dehnungsverteilung im Querschnitt**
**b) Verformungs- und Schubkraftverlauf**

Für die Ausbildung einer Schubspannung in der Verbundfuge existieren zwei Grenzfälle, zwischen denen sich das reale Tragverhalten zumeist einstellen wird. Werden keine Verbindungsmittel verwendet und Einflüsse aus Reibung vernachlässigt, so kann der Systemzustand aus der Summe der Einzelsteifigkeiten aller beteiligten Teilquerschnitte bestimmt werden. Dieser untere Grenzwert liefert am Beispiel des Biegeträgers die größten Verformungen und ist durch eine gebrochene Dehnebene mit einer Nulllinie in jedem Teilquerschnitt gekennzeichnet (Bild 2.1-I). Die Relativverschiebungen nehmen in diesem Fall ein Maximum an. In der Verbundfuge werden dabei keine Schubkräfte übertragen. Der obere Grenzwert wird bei einem starren Verbund erreicht. Am Biegeträger stellen sich die kleinsten Durchbiegungen ein und die Dehnebene ist durch eine einzige Nulllinie im Gesamtquerschnitt gekennzeichnet (Bild 2.1-II). Nachgiebige Verbindungen liefern Zustandsgrößen, welche sich zwischen den zuvor genannten Grenzen einstellen (Bild 2.1-III).

## 2.2 Kenntnisstand

### 2.2.1 Starrer Verbund

Für die praktische Berechnung von Stahl-Beton-Verbundträgern stehen verschiedene Rechenmodelle zur Verfügung (Bild 2.2), diese berücksichtigen die in Bild 1.1 genannten Effekte unterschiedlich detailliert.

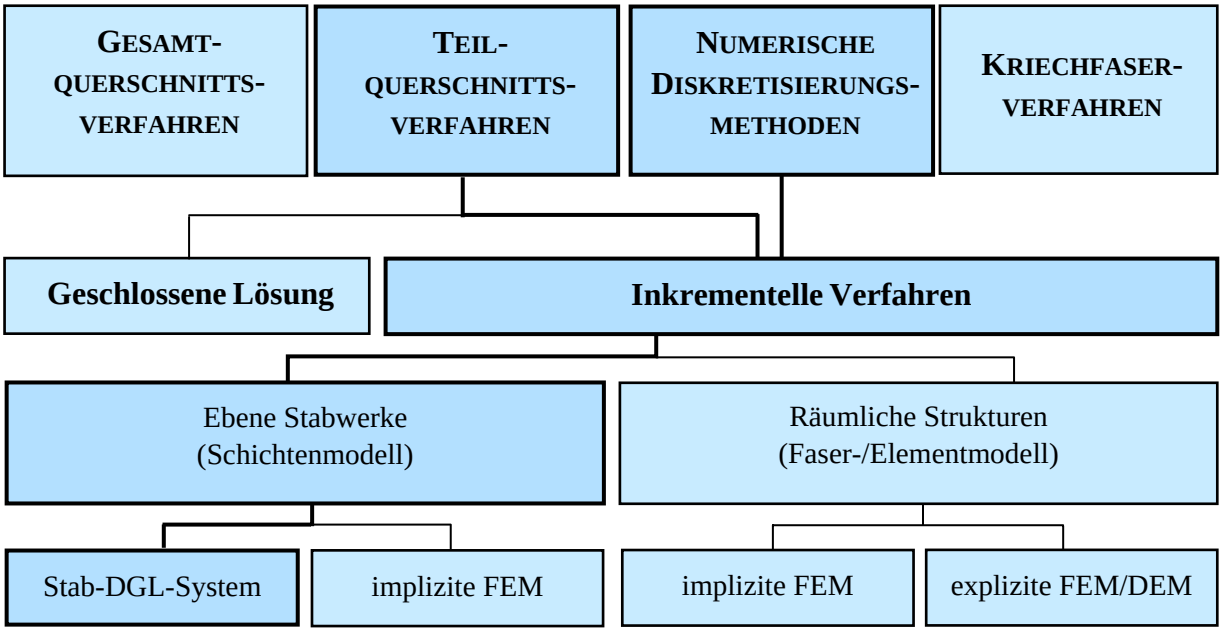



**Bild 2.2: Mögliche Verfahren zur Analyse des zeitabhängigen Systemverhaltens von Verbundkonstruktionen**

Die bekanntesten Methoden sind das Gesamtquerschnittsverfahren nach HÄNSEL [61] und das Teilquerschnittsverfahren nach SATTLER [124]. Weiterhin existieren inkrementelle Verfahren zur numerischen Integration der Spannungsgeschichte. Im Hinblick auf die numerische Erfassung nichtlinearen Materialverhaltens werden dabei der Betrachtungszeitraum und das System diskretisiert. In Schichtenmodellen ebener Stabwerke werden die Querschnitte parallel zu einer definierten Bezugsachse in Schichten unterteilt (z.B. SCHNEIDER [128], OZBOLT/MAYER [109]).

Die Finite-Elemente-Methode ermöglicht darüber hinaus für räumliche Stabstrukturen das Auflösen der Querschnitte in Fasern (Fasermodelle, z.B. KLUGER [73], SOFISTIK AG [133]). Im weiteren Sinne kann man diese auch als Sonderformen des Teilquerschnittsverfahrens betrachten. Die zentrale Differenzenmethode ist in Bild 2.2 nur zur Vervollständigung des Methodenüberblicks dargestellt, für die hier untersuchten Fragestellungen sind auf dieser Methode basierende Anwendungen derzeit nicht bekannt. Weiterhin ist noch das in seiner Anwendung sehr begrenzte grafisch-analytische Kriechfaserverfahren nach BUSEMANN [24] bekannt.

Die Auswahl eines geeigneten Berechnungsverfahrens zur Berücksichtigung der Einflüsse aus Schwinden und Kriechen ist von den speziellen konstruktiven und herstellungstechnischen Besonderheiten eines Bauwerkes abhängig. Die im Folgenden beschriebenen Verfahren sollen einen Überblick über die prinzipielle Vorgehensweise für stabartige Strukturen geben. Es wird zum einen der Fragestellung nachgegangen, welche Effekte nach Bild 1.1 wie genau erfassbar sind und wie groß der damit jeweils verbundene Modellierungs- und Rechenaufwand ist. Zum anderen lässt sich durch die erreichbare Qualität der zeitlichen Abbildung des gesamten Lebenszyklusses eines Bauwerkes erkennen, inwieweit eine Anpassung der Verfahren an tatsächliche Bauabläufe, besonders auch im Hinblick auf die Beurteilung kritischer Zustände, möglich wird.

#### 2.2.1.1 Gesamtquerschnittsverfahren

Das bekannteste Verfahren zur Berechnung von Verbundträgern unter Beachtung der Einflüsse aus Schwinden und Kriechen ist das Gesamtquerschnittsverfahren. Es bildet die Grundlage der Lösungsansätze für elementare Konstruktionsformen und wird in EUROCODE 4/DIN-FACHBERICHT 104 [46] als Verfahren zur Schnittgrößenermittlung angegeben.

Das Verfahren basiert auf der Idee, das Langzeitverhalten des Betons durch eine Abminderung seiner Querschnittswerte zu erfassen. Je nach Art der Einwirkung und deren Zeitverlauf (zeitlich konstant, zeitlich veränderlich, Betonschwinden, eingeprägte Verformungen) werden Reduktionszahlen für die Fläche und das Trägheitsmoment des Betongurts bestimmt. Damit ermittelte ideelle Gesamtquerschnittswerte bilden die Grundlage für weitere Rechnungen. Für die Ermittlung von Schnittgrößen, Verformungen und Spannungen bedeutet dies, dass je Einwirkung eine zugeordnete Steifigkeitsverteilung der Querschnitte des Systems zu untersuchen ist. Unter Zuhilfenahme eines Stabwerkprogramms kann die Berechnung von Schnittgrößen und Verformungen erfolgen und das Gesamtergebnis durch Summation über alle Wirkungsgrößen zusammengesetzt werden. Damit ist dieses Verfahren für einfache Systeme ohne speziell angepasste Rechenprogramme anwendbar. Sollen Bauzustände oder Belastungswechsel, die beispielsweise durch die Herstellung einer Fahrbahnplatte in Betonierabschnitten entstehen, Beachtung finden, so wächst der manuelle Arbeitsaufwand mit der Anzahl der zu untersuchenden Zustände des Systems erheblich an.

Bei den bisherigen, eigenen Betrachtungen wurde der Aspekt der Rissbildung im Betongurt, der eine physikalische Nichtlinearität darstellt, ignoriert. Wird die Zugfestigkeit im Betonquerschnitt überschritten, so bilden sich Risse aus und das Gleichgewicht des Systems muss wieder hergestellt werden. Dieser Vorgang steht aber im Widerspruch zu der angewendeten Superposition der Schnittgrößen, der Verformungen und der Spannungen einzelner Einwirkungen,

welche deshalb bei einer nichtlinearen Berechnung des Systemzustandes unzulässig ist. Demzufolge lässt sich die sukzessive Rissbildung der Betongurte mit dem Gesamtquerschnittsverfahren nicht erfassen. Aus diesem Grund ist das Verfahren für praktische Berechnungen an die Festlegung gerissener Tragwerksbereiche, wenn nötig auch unter Beachtung eines vom Bewehrungsgrad abhängigen Faktors für die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen, gebunden.

IBACH erweitert in [69] die Anwendung des Gesamtquerschnittsverfahrens auf Doppelverbundquerschnitte. Entsprechende Kriechbeiwerte und Reduktionszahlen für die Anwendung dieses Verfahrens auf derartige Tragwerke sind ebenfalls in EUROCODE 4/DIN-FB 104 [46] enthalten. Die zuvor genannten Randbedingungen und Grenzen gelten auch in diesem Fall.

#### 2.2.1.2 Teilquerschnittsverfahren

Grundgedanke des Teilquerschnittsverfahrens ist die Verteilung der am Gesamtquerschnitt des Verbundträgers vorhandenen Schnittgrößen Normalkraft und Moment auf die beiden Teilquerschnitte des Betons und des Gesamtstahls.

Ursprünglich geht die Beschreibung dieses Verfahrens auf SATTLER zurück [124]. Die zeitabhängigen, differenziellen Verformungsänderungen und Schnittgrößenumlagerungen werden im Verfahren durch ein lineares Differentialgleichungssystem beschrieben. Eine geschlossene Lösung lässt sich nur für Systeme mit zeitlich konstanten Steifigkeiten und Belastungsverhältnissen sowie unter der Annahme zeitlicher Affinität der Schwind- und Kriechansätze (Schwindbeginn $t_S$ entspricht dem Erstbelastungsalter $t_0$) ermitteln. Berechnet werden zunächst die Umlagerungen im Querschnitt und für statisch unbestimmte Systeme daran anschließend die resultierenden Schnittgrößenkorrekturen.

#### 2.2.1.3 Diskretisierungsmethoden

Die bisher betrachteten geschlossenen Differentialgleichungslösungen sind für praktische Anwendungen, bei denen sich sowohl Systemkenngrößen ändern, als auch physikalische Nichtlinearitäten auftreten, nur bedingt geeignet. Sie können jedoch für erste grundlegende Untersuchungen zur Auswahl des Systems und der Querschnitte von Vorteil sein. Eine Näherungslösung für den geschlossenen Lösungsansatz gelingt beispielsweise durch ein Differenzenverfahren. Dabei wird der betrachtete Zeitbereich in Intervalle unterteilt, innerhalb derer die kriecherzeugenden Beanspruchungen als konstant angesehen werden (Bild 2.3). Diese Vorgehensweise ist zwar numerisch aufwendiger, bietet jedoch den Vorteil, dass keine Einschränkungen zum zeitlichen Verlauf der Kriechfunktion bestehen. Außerdem können Effekte wie die zeitliche Entwicklung der Festigkeitseigenschaften des Betons und eine nicht-affine Entwicklung des Kriechens und Schwindens berücksichtigt werden. Um beim Differenzenverfahren die Anzahl der zu untersuchenden Zeitschritte zu minimieren, werden von BLESSENOHL [13] für die Berechnung innerhalb eines Zeitschritts verschiedene Annahmen über die Kriechzahlen und/oder das Belastungsalter (Anfangs- oder Mittelwert) getroffen. Die Verwendung mittlerer Kriechzahländerungen liefert bei gleicher Anzahl der Zeitschritte die beste Annäherung an die geschlossene Lösung. Über die Art der Schrittweitensteuerung werden jedoch keine Aussagen getroffen.

Eine weitere Herangehensweise ist durch die numerische Lösung der Differentialgleichung gegeben. HANNAWALD [60] wendet diese Vorgehensweise zur Beschreibung des dreidimensionalen Betonkriechens an. Als Vorteil gegenüber der integralen Betrachtungsweise ist dabei insbesondere die Möglichkeit der physikalisch konsistenten, dreidimensionalen Formulierung des Stoffgesetzes zu nennen. Die Genauigkeit einer Lösung wird auch hier durch die Auswahl der Schrittweite geprägt. Eine effiziente Möglichkeit zur automatischen Schrittweitensteuerung ist beispielsweise durch ein implizites RUNGE-KUTTA-Verfahren gegeben.

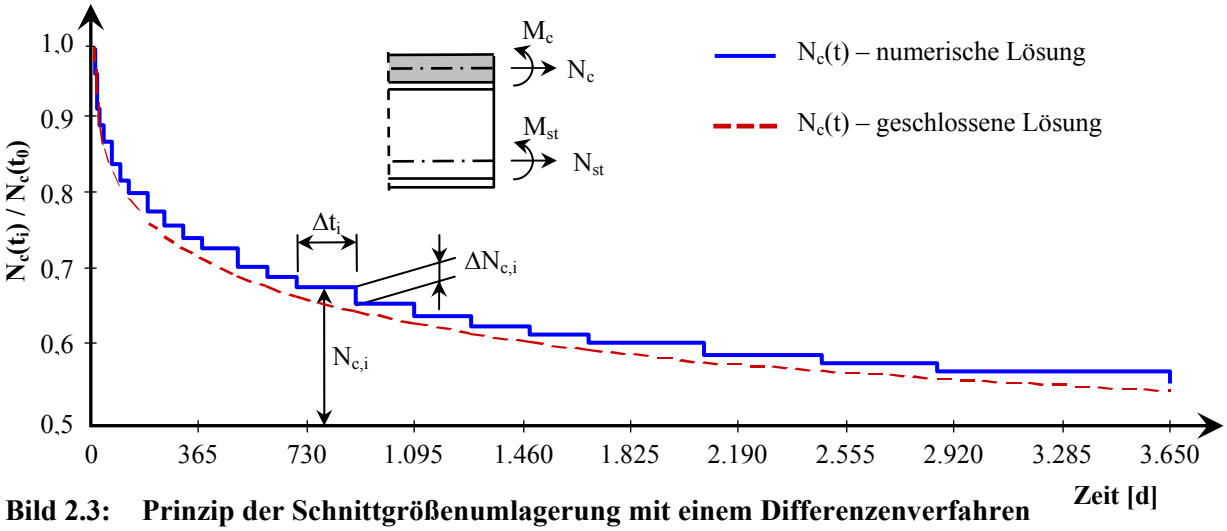



**Bild 2.3: Prinzip der Schnittgrößenumlagerung mit einem Differenzenverfahren (FLEDERER [49])**

OBHOLZER stellt in [106] und [107] ein Verfahren zur numerischen Berechnung von Verbundstabtragwerken auf der Basis der Lösung des gekoppelten Stab-DGL-Systems vor. Damit kann ein aus beliebig vielen, starr verbundenen Teilquerschnitten bestehender Gesamtquerschnitt analysiert werden. Die vorgenommene Diskretisierung der Zeitachse erlaubt eine iterative Berücksichtigung beliebiger Kriech- und Schwindgesetze sowie die Beachtung von System- und Belastungsmodifikationen. Mehrere Betonteilquerschnitte mit unterschiedlichen Betonierzeitpunkten können erfasst werden, müssen jedoch in den Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten linear beschrieben werden. Mittels Momenten-Krümmungs-Abhängigkeiten lassen sich unter Beibehaltung der querschnittsintegralen Betrachtungsweise die Auswirkungen sukzessiver Rissbildung durch effektive Steifigkeiten berücksichtigen. Einen derart angepassten Lösungsansatz stellt FLEDERER [49] vor.

Gegenüber einer Anwendung dieser Verfahren ist ein Nachweis gemäß EUROCODE 4/ DIN-FB 104 [46] offen. Im informativen Anhang L dieses Normenwerkes wird für die Bemessung der Betongurte von Straßen- und Eisenbahnbrücken ein Verfahren zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen angegeben. In Abhängigkeit von der Beanspruchungsart als Biegung oder Zug können verschiedene Momenten-Krümmungs- oder Normalkraft-Dehnungs-Abhängigkeiten Beachtung finden.

Im Rahmen weiterführender Ansätze erlaubt die Unterteilung des Querschnittes in Schichten bzw. Fasern die Berücksichtigung nichtlinearer Stoffgesetze am Materialpunkt. Die in Bild 1.1 genannten materialgebundenen Einflussgrößen können als nichtlineare Prozesse mittels geeigneter Modelle abgebildet werden. Zur Lösung der zugehörigen nichtlinearen Gleichungssysteme werden last- oder verformungsgesteuerte inkrementell-iterative Lösungsstrategien

verwendet. Für die Berechnung der zeitabhängigen Einwirkungen wird der Untersuchungszeitraum durch Zeitschritte diskretisiert (Bild 2.3). Zeitunabhängige Einwirkungen werden entsprechend durch Lastinkremente im Zeitpunkt berücksichtigt. Die chronologische Abfolge der Ereignisse ermöglicht es somit, das Tragverhalten während der gesamten Nutzungsdauer zu analysieren. Die Größe der erfassbaren Tragwerksverschiebungen ist bei diesem Vorgehen quasi nicht eingeschränkt.

Im Hoch- und Brückenbau lässt sich die Mehrzahl der Tragwerke des Stahl-Beton-Verbundbaus durch Stabwerke diskretisieren. Für deren Analyse stellt die numerische Integration des Stab-DGL-Systems eine logische und aus numerischer Sicht auch sehr effektive Alternative zu FE-Lösungen dar. Durch die Querschnittsdiskretisierung in Schichten entspricht im Fall ebener Strukturen das Modell einer zweidimensionalen Abbildung. Darauf aufbauende Lösungsansätze sind zum Beispiel von SCHNEIDER und BOGENSPERGER bekannt. SCHNEIDER stellt in [128] ein Vorgehen vor, mit dem das nichtlineare Verhalten ebener Stahlbeton-Stabtragwerke inkrementell iterativ analysiert werden kann. BOGENSPERGER [18] verwendet eine numerische Integration des DGL-Systems für räumliche Stabstrukturen des Brückenbaus. Für dünnwandige Querschnitte wird die Stabtheorie zur Berücksichtigung allgemeiner Querschnittsverwölbungen erweitert, zeitabhängige Einflüsse finden dabei keine Beachtung.

Zur Abbildung der in diesem Abschnitt beschriebenen zeitabhängigen Prozesse ist eine spezielle Software notwendig, da diese Verfahren einer Handrechnung nicht mehr zugänglich sind. Um deren Akzeptanz für praktische Fragestellungen zu verbessern, muss demnach ein universeller leistungsfähiger Lösungsalgorithmus in Verbindung mit überschaubaren Eingabe- und Kontrollmöglichkeiten zur Verfügung gestellt werden.

### 2.2.2 Nachgiebiger Verbund

Berechnungsverfahren für nachgiebig verbundene Querschnittsteile entwickelten sich in ihren Anfängen zumeist werkstoff- oder produktbezogen. Ihr Anwendungsbereich umfasst nahezu alle Disziplinen des konstruktiven Ingenieurbaus. Der Einsatz zusammengesetzter Querschnitte ist dabei verschiedenen Ursachen geschuldet. Während man im Holzbau von jeher bestrebt war, die von der Natur begrenzten Abmessungen durch das Zusammenfügen einzelner Teile zu vergrößern, besteht bei der Stahl-Beton-Verbundbauweise die Zielstellung darin, durch den materialgerechten Einsatz der Verbundpartner tragfähigere und damit auch wirtschaftlichere Bauwerke zu entwerfen. Weitere Anwendungsbereiche sind Sandwichkonstruktionen, Stahlbetonfertigteile mit nachträglicher Ortbetonergänzung sowie in jüngerer Zeit auch Verbundglaskonstruktionen. Die Erkenntnis, dass zum einen durch Bolzen, Dübel oder Klebeverbindungen eine Steigerung der Gesamtsteifigkeit und der Tragfähigkeit gegenüber den Einzelquerschnitten erzielt wird und zum anderen jedoch eine völlig starre Verbindung nicht oder nur bedingt realisierbar ist, führte zur Notwendigkeit, die Nachgiebigkeit in den Fugen auch rechnerisch zu erfassen. Dem breiten Anwendungsspektrum entsprechend ist die Anzahl der Arbeiten zu diesem Thema groß und vielfältig orientiert. Deshalb werden im Folgenden neben einem Überblick vor allem Lösungen aus dem Bereich der Stahl-Beton-Verbundbauweise sowie relevante, fachübergreifende numerische Ansätze dargestellt.

#### 2.2.2.1 Geschlossene Differentialgleichungslösungen

Angeregt durch erste theoretische Lösungsansätze für Biegeträger von STÜSSI [137] im Jahre 1945 sowie versuchstechnische, um 1950 ausgeführte Untersuchungen im Auftrag des Deutschen Stahlbauverbands wurden von HOISCHEN [68], HEILIG [67] und SATTLER [46] erste Berechnungsverfahren zur Analyse nachgiebig verbundener Träger entwickelt. Basierend auf den Annahmen linear elastischen Material- und Verbundverhaltens sowie der Gültigkeit der Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte innerhalb der Teilquerschnitte konnten in Analogie zum starren Verbund geschlossene Differentialgleichungslösungen für die wichtigsten Belastungsfälle von Einfeldträgern unter Berücksichtigung von Eigenspannungszuständen angegeben werden. Die Auswirkungen zeitabhängiger Betonverformungen bleiben dabei unberücksichtigt.

Im Jahr 1955 gab SATTLER [123] zunächst eine Näherungslösung mittels Fourier-Reihenentwicklung für die zeitlich veränderlichen Betonverformungen an. Diese basierte auf einer von DISCHINGER [36] angegebenen Differentialgleichung zur Erfassung des zeitabhängigen Dehnungszustandes im Beton. Der damit verbundene Rechenaufwand ist allerdings erheblich und die Lösung bleibt nach wie vor auf Spezialfälle beschränkt. In einem daraus abgeleiteten Näherungsverfahren wird deshalb die kontinuierliche Verbindung zwischen Stahl und Beton diskretisiert. Die Möglichkeit einer Dübelabstufung wird dabei ebenso wie die Anwendung bei statisch unbestimmten Systemen praktischen Anforderungen gerecht. Ein interner Freiheitsgrad je Dübel gestattet die Anwendung, ist jedoch sehr rechenintensiv was wiederum die praktische Brauchbarkeit erschwert. Durch die Vernachlässigung des Momentenanteils im Betonteilquerschnitt beschränken sich die Lösungen von SATTLER allerdings auf Verbundträger mit einer geringen Biegesteifigkeit des Betongurtes. Als Grenzwert wird $I_c \leq 0{,}2 \cdot I_a$ angegeben.

WAPENHANS [145] gibt 1983 auf der Grundlage der Elastizitätstheorie und unter Berücksichtigung des algebraischen Kriech- und Schwindansatzes nach TROST [140] für wichtige Lastfälle am Einfeldträger ein Berechnungsverfahren als geschlossene Lösung an. Der Lösungsansatz für den elastischen Verbund bei zeitunabhängigen Beanspruchungen entspricht dabei dem von HOISCHEN [68].

Von grundlegender Bedeutung für Verbundkonstruktionen des Holzbaus mit mehreren nachgiebigen Verbundfugen ist 1956 die Ableitung des so genannten „γ-Verfahrens“ von MÖHLER [97], welches noch heute in modifizierter Form im EUROCODE 5 [47] zu finden ist. Ebenfalls aus den Differentialgleichungslösungen am Einfeldträger abgeleitet werden Abminderungsbeiwerte bestimmt, die zu einer effektiven Biegesteifigkeit des Trägers führen. Gleichzeitig beginnt man zu dieser Zeit das im Nachweis interessierende Tragverhalten von Verbundkonstruktionen mit mehreren nachgiebigen Verbundfugen zu betrachten. Auf dieser Grundlage weitergeführte Arbeiten von SCHELLING [127] machten 1968 die praktische Anwendung des Verfahrens für Durchlaufträgersysteme möglich. SCHULER [130] löste 1987 für verschiedene Lastfälle das um die Übergangsbedingungen in den Verbundfugen erweiterte Stab-DGL-System. Unter Verwendung des Übertragungsmatrizenverfahrens können entlang der Trägerachse veränderliche Querschnitte und Verdübelungen abschnittsweise diskretisiert und in einem ebenen Stabwerk bei linear elastischem Materialverhalten erfasst werden.

Für Sandwichkonstruktionen wurde um 1970 der Betrachtungsweg von HOISCHEN durch STAMM/WITTE weiterentwickelt und spezialisiert, [134] fasst die Grundlagen zusammen. AICHER [3] greift 1987 die Analogie zwischen dreischichtigem Sandwichverbund und zweischichtigem nachgiebigen Verbund auf, um das γ-Verfahren dafür anwendbar zu machen. In dieser Arbeit angegebene normierte Diagramme für verschiedene Systeme und Lasten ermöglichen die Anwendung dieses numerisch aufwendigen Lösungsansatzes.

#### 2.2.2.2 Diskretisierungsmethoden

Mit zunehmender Entwicklung der Rechentechnik wurde die Problematik des nachgiebigen Verbundes immer wieder aufgenommen. Numerische Diskretisierungsmethoden gewannen wie beim starren Verbund an Bedeutung und stellen letztlich auch hier fachübergreifende, praktikable Lösungsansätze zur Verfügung. Die Entwicklung numerischer Lösungsmethoden für den nachgiebigen Verbund verläuft dabei parallel zu den zuvor beschriebenen, allerdings ist hier die Variationsbreite der möglichen Ansätze erheblich geringer.

Versuchsbegleitend wurden im Stahl-Beton-Verbundbau erste numerische Modelle entwickelt, welche die Nachgiebigkeit der Verbundfuge im Kurzzeitversuch unter Beachtung von nichtlinearem Materialverhalten abbilden. BÜRKNER [22] modelliert 1981 den Verbundträger mittels Scheiben- und Stabelementen. Zielstellung sind dabei Aussagen zum Einfluss der Nachgiebigkeit von Verbundträgern mit profiliertem Betongurt auf das Tragverhalten. EHLERT stellt ebenfalls 1981 in [41] einen auf der Deformationsmethode aufbauenden Lösungsansatz für stabförmige ebene Systeme vor. Durch die Verwendung komplexer, nichtlinearer Materialkennlinien sind in einem Schichtenmodell neben Rissbreitenuntersuchungen auf Gebrauchslastniveau auch Traglastanalysen möglich. SCHANZENBACH führt 1988 Traglastversuche an unterverdübelten Zweifeldträgern durch und rechnet diese mit einem FE-Programm nach, welches die Querschnitte durch geschichtete Stabelemente abbildet ([17] und [125]). Aufgrund der guten Übereinstimmung von Versuch und Rechnung wurden Bemessungsdiagramme zur Ermittlung der Grenzschnittgrößen entwickelt.

Derartige produktbezogene Bemessungsansätze fanden auch Eingang in die normative Nachweisführung für Verbundträger des Hochbaus. Gemäß EUROCODE 4/TEIL 1-1 [46] ist für Hochbauträger der Querschnittsklassen 1 und 2 eine teilweise Verdübelung zulässig. Im normativen Anhang E wird für Verbunddecken mit teilweiser Verdübelung ein Bemessungsverfahren zur Ermittlung der Längsschubkraftbeanspruchung angegeben. Weiterführende Berechnungen nach einer Theorie zur Berücksichtigung der teilweisen Verdübelung sind möglich. Im Verbundbrückenbau sind dagegen aufgrund der Ermüdungsbeanspruchung keine schubnachgiebigen Verbindungen zulässig.

Basierend auf dem Übertragungsmatrizenverfahren wird von ARIBERT/AZIZ [5] 1986 ein Berechnungsmodell vorgestellt, bei dem die Dübel nur durch Schub beansprucht werden. Die Schnittgrößen- und Verformungsberechnung kann dann mit einem geschlossenen Lösungsansatz erfolgen. Zur Beachtung des nichtlinearen Materialverhaltens werden dabei die Querschnitte in Fasern unterteilt. CUNZE OLVIERA LANA [28] untersucht mit diesem Modell nachgiebig verdübelte Verbundträger im Gebrauchszustand. Ziel war die Analyse zeitabhängiger Beanspruchungen aus Schwinden und Kriechen sowie der Rissbildung und -entwicklung

mit einem Vergleich zu normativen Regelungen. Die Anwendung beschränkt sich auf gerade Durchlaufträger in ebenen Systemen.

Auf der numerischen Lösung des Stab-DGL-Systems basierend stellt KNEIDL in [74] und [75] 1990 ein Verfahren zur nichtlinearen Analyse ebener Schichtbalkensysteme vor, welches nichtaffine Biegelinien der Schichtbalken nach Theorie I. und II. Ordnung berücksichtigt. Im Fall rechteckiger Schichtbalken kann außerdem die Schubverformung der Einzelquerschnitte erfasst werden. Der von KNEIDEL vorgestellte Lösungsansatz zeigt die prinzipiellen Anwendungsmöglichkeiten und -grenzen von ebenen Stablösungen auf und verdeutlicht damit den Übergang zu finiten Elementen.

Mit der Diskretisierung von Tragwerken durch finite Elemente ist man heute dazu in der Lage, die bereits beim starren Verbund angesprochenen physikalischen Nichtlinearitäten des Materials mit mehrschichtigen, nachgiebigen Verbundquerschnitten zu koppeln. Für den Anwendungsfall einer schubnachgiebigen Verbundfuge sind aus jüngerer Zeit Modellansätze für Verbundträger z.B. von GATTESCO [54], FAELLA/MARTINELLI [48] und SAPOUNTZAKIS/-KATSIKADELIS [120] bekannt. GOLLWITZER/GEBBEKEN [55] stellten 2004 ein FEM-Stabelement für mehrteilige nachgiebige Verbundquerschnitte vor, dessen praktische Anwendung sich an Beispielen des Ingenieurholzbaus orientiert und Berechnungen nach der Theorie II. Ordnung ermöglicht. Auf die Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearitäten wird jedoch nicht eingegangen.

Parallel dazu wurde und wird versucht, das komplexe Tragverhalten von Biegeträgern mit nachgiebigem Verbund so zu zerlegen, dass eine rechnerische Analyse mit in der Baupraxis gängigen Stabwerksprogrammen möglich wird. Beispielhaft soll das von KREUZINGER [79] entwickelte und von SCHOLZ [129] weiter vertiefte Verfahren der Schubanalogie genannt sein. Es beruht auf einer Überführung des realen Verbundquerschnitts in einen mehrteiligen Modellquerschnitt, mit dem dann das Tragsystem unter Verwendung von Pendelstäben in Querrichtung generiert wird. Der Ansatz ist für Druckbeanspruchungen nicht geeignet. Veränderliche Fugen- und Querschnittssteifigkeiten lassen sich zwar näherungsweise berücksichtigen, sind allerdings in ihren Anwendungsmöglichkeiten begrenzt.

## 2.3 Ein verbessertes Lösungsverfahren

Konzipiert man ein allgemeines Lösungsverfahren für Stahl-Beton-Verbundträger, so müssen vielfältige konstruktive Varianten Berücksichtigung finden. Dies erfordert zum einen aus baustatischer Sicht eine Abgrenzung der behandelbaren Tragwerksklassen. Zum anderen wird die Güte einer rechnerischen Vorhersage in großem Maße durch eine möglichst realitätsnahe, modellhafte Beschreibung des zeit- und lastabhängigen Materialverhaltens, bei Verbundkonstruktionen insbesondere des Betons, bestimmt. An den Abbildungsmöglichkeiten beider Bedingungen sollte sich ein angemessener Lösungsansatz orientieren.

### 2.3.1 Einordnung des Lösungsverfahrens

In Bild 2.2 wurden bereits die prinzipiellen Möglichkeiten, die bei der Analyse zeitveränderlicher Belastungsprozesse im Verbundbau bestehen, zusammengestellt. Mit Bezug auf den dargelegten Stand aktueller Lösungsansätze ist die Anwendung numerischer Diskretisierungsmethoden in Raum und Zeit ein für die Ziele dieser Arbeit adäquates Mittel (Bild 2.3). Das Tragverhalten der überwiegenden Mehrzahl von Verbundtragwerken des Hoch- und Brückenbaus kann mit Stabwerken hinreichend genau wiedergegeben werden. Diese Arbeit beschränkt sich deshalb auf Verbundkonstruktionen, deren Tragwerk sich durch einen ebenen Stabzug abstrahieren lässt. Dabei resultiert die Beschränkung auf ebene Strukturen im Wesentlichen aus einer noch unzureichenden Kenntnis des zeitabhängigen Betonverhaltens unter mehraxialer Beanspruchung. Für die Analyse von Stabtragwerken stellt die numerische Integration des Stab-DGL-Systems eine logische und aus numerischer Sicht sehr effektive Alternative zu FE-Lösungen dar. Auf diesem Ansatz basiert auch die statische Grundlösung dieser Arbeit, die nach der Deformationsmethode formuliert wird. Die Querschnittsdiskretisierung in Schichten ermöglicht gegenüber der querschnittsintegralen Betrachtungsweise die Verwendung komplexerer Werkstoffgesetze und eine entsprechende Analyse der resultierenden Auswirkungen in System und Querschnitt. Damit ist eine optimale Wechselwirkung zwischen lokalem Materialverhalten am Systempunkt und globalem Tragverhalten des Gesamtsystems gegeben. Bild 2.4 veranschaulicht die Grundidee des gewählten Lösungsverfahrens.

### 2.3.2 Vorgehensweise und Abgrenzung des Leistungsumfangs

Im Folgenden werden die Anforderungen an die Systemabbildung, die äußeren Belastungen sowie das Werkstoffverhalten zusammengestellt. Dazu finden die in Bild 1.1 dargestellten wesentlichen Einflüsse auf den Systemzustand einer Stahl-Beton-Verbundkonstruktion Beachtung. Für die Mehrzahl aller Anwendungsfälle zutreffend wird eine sinnvolle Annahme für die kinematische Hypothese getroffen. Alle genannten Einflüsse wurden vom Programm erfasst. Deshalb wird damit auch gleichzeitig der Leistungsumfang des realisierten Lösungsverfahrens wiedergegeben. Kapitel 5 stellt darüber hinaus eine anschauliche Möglichkeit zur zeitabhängigen Tragwerks- und Prozessmodellierung vor.

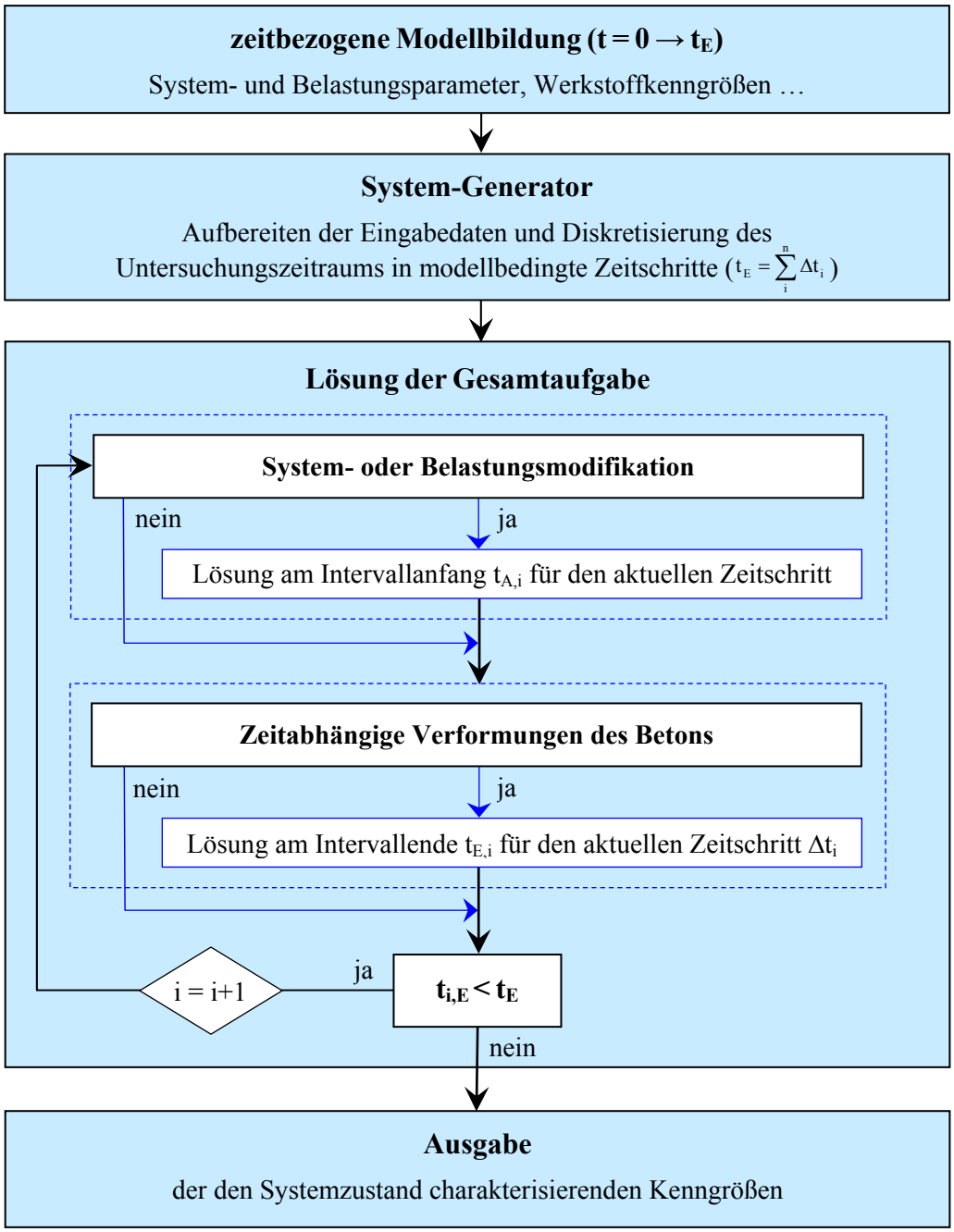



**Bild 2.4: Prinzip des gewählten Lösungsverfahrens für einen Untersuchungszeitraum**

### 2.3.2.1 Betrachtungszeitraum

Ordnet man den Beginn des Untersuchungszeitraumes (i.d.R. den Baubeginn) im Hinblick auf die Umgebungsbedingungen regional ein und stellt durch Betonierzeitpunkte den zeitlichen Bezug zum Gesamtprozess her, so ist es möglich, den Einfluss jahreszeitlich bedingter örtlicher Schwankungen von Luftfeuchtigkeit und Temperatur auf das Schwind- und Kriechverhalten des Betons zu berücksichtigen. Zugleich wird damit eine Möglichkeit geschaffen, die Auswirkungen unterschiedlicher Herstellungszeitpunkte (Sommer/Winter) auf den Systemzustand zu analysieren.

#### 2.3.2.2 Statisches System und Querschnitte

Die Randbedingungen für ein statisches Modell eines Verbundtragwerkes werden durch das Herstellungsverfahren und die materialspezifischen Eigenheiten der Verbundwerkstoffe geprägt. Orientiert an baupraktischen Belangen kann das statische System mit folgenden Möglichkeiten zeitveränderlich generiert werden:

- Mit Beschränkung auf die Haupttragrichtung wird das statische Modell über die Definition von ebenen Knoten, zwischen denen sich gerade Stäbe befinden, idealisiert.
- Querschnittssteifigkeiten können zeitlichen Veränderungen unterlegen sein, welche z.B. durch das Ergänzen von Querschnittsteilen oder auch die Rissbildung im Beton verursacht werden. Die daraus resultierende Problematik exzentrischer Schwereachsenlage zwischen benachbarten Stababschnitten wird umgangen, indem die Stabachse als eine von der Schwereachse des Querschnittes unabhängige Bezugsachse, als Referenzachse (r – r, z.B. Lagerachse), definiert wird. Damit erhält man einen zeitunabhängigen festen Bezug zwischen Querschnitt und Stabachse (Bild 2.5). Entlang der Stabachse können die Querschnitte in beiden Richtungen linear oder quadratisch veränderlich sein (z.B. Vouten des Stahlträgers).
- Der Anschluss von Stabenden an die Knoten darf Verformungsunstetigkeiten (Gelenke) in Form von Schnittkraftnullfeldern oder linear elastischen Übergangsbedingungen aufweisen. Eine Verbindung mehrerer Verformungsunstetigkeiten ist dabei möglich.

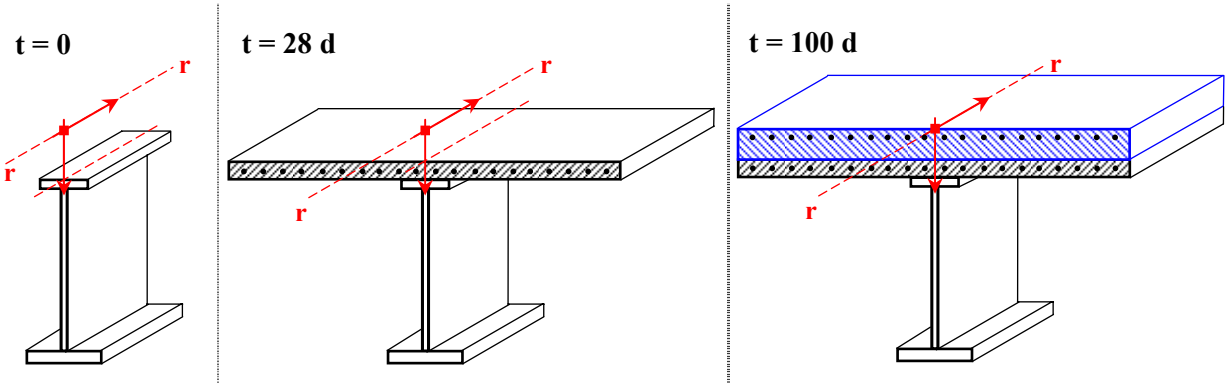



**Bild 2.5: Zuordnung zeitveränderlicher Querschnitte zur Stab-Referenzachse am Beispiel eines Verbundfertigteilträgers**

- Die Auflagerknoten können eine starre oder nachgiebige Lagerung aufweisen. Befindet sich die Referenzachse nicht in der Lagerachse, so besteht außerdem die Möglichkeit, Auflager exzentrisch anzuschließen. Praktische Bedeutung erlangt die Berücksichtigung dieses Effektes beispielsweise bei hohen Trägerquerschnitten. Mit der genannten Vorgehensweise werden auch die Horizontalverschiebungen im Endauflagerbereich unter Beachtung der Querschnittsverdrehung direkt erhalten.
- Die Verbundquerschnitte können sich aus einer beliebigen Anzahl von (Stahl-)Beton- und Stahlteilquerschnitten zusammensetzen. Zusätzlich ist die Definition weiterer zeitinvarianter Verbundwerkstoffe möglich.
- Einzelne Querschnittsteile können in beliebiger Reihenfolge hinzugefügt oder entfernt werden.

- Um der Charakteristik von Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen zu entsprechen, besteht einschränkend die Notwendigkeit, dass im gesamten Untersuchungszeitraum jedem Stab mindestens ein Stahlteilquerschnitt mit numerisch hinreichender Steifigkeit zugeordnet ist.
- Zur Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearitäten werden die Teilquerschnitte parallel zur Referenzachse in Schichten unterteilt. Bewehrungsstäbe werden als Einzelstäbe definiert, um auch unterschiedliche Stabdurchmesser und -abstände sowie die Bewehrung gevouteter Betonteilquerschnitte zu erfassen. Das Materialverhalten ist dann bezogen auf die Schwereachse jeder Schicht und jedes Stabes zu analysieren. Bei der numerischen Analyse ist damit unabhängig von der Geometrie des Gesamtquerschnitts die Verwendung komplexer, realitätsnaher Stoffgesetze möglich.

#### 2.3.2.3 Äußere Einwirkungen

Analog zu den Systemkenngrößen können die quasi-statischen Belastungen als zeitveränderliche Größen definiert werden. Um die Auswirkungen kurzzeitig auftretender Beanspruchungen wie extreme Temperaturdifferenzen oder schwere Lkw-Überfahrt ohne Langzeiteffekt zu berücksichtigen, werden diese möglicherweise den Systemzustand durch Rissbildung nachhaltig verändernden Ereignisse durch die Gleichsetzung von Anfangs- und Endzeitpunkt definiert.

Folgende äußere Einflüsse können berücksichtigt werden:

- An den Knoten
  - Zwangsbedingungen von Stützknoten
  - Einzellasten und Einzelmomente
- Im Stab
  - Linear veränderliche Streckenlasten
  - Außerhalb der Referenzachse mit starrem Hebel angreifende Einzellasten
  - Einzelmomente
  - Ungleichförmige Temperaturänderungen bei mehreren Teilquerschnitten auch über die Höhe eines Teilquerschnitts hinweg sowie in Stablängsrichtung linear veränderlich
  - Eigengewicht der einzelner Stabquerschnittsteile (optional)

#### 2.3.2.4 Kinematische Hypothese

Der Systemzustand wird nach Theorie I. Ordnung unter Beachtung der Stabtheorie nach Bernoulli bestimmt. Die Querschnitte bleiben dabei eben und formtreu. Dies setzt ein ausreichend großes Verhältnis von Stützweite zu Querschnittshöhe voraus, das durch die stabartigen Strukturen im Verbundbau zumeist gegeben ist. Die Querkraftgleitung kann vereinfacht über eine mittlere Gleitung am Gesamtquerschnitt berücksichtigt werden. Für die Verzerrungen und die Gleitung in einem Rechenschritt muss die Forderung “<< 1“ erfüllt sein.

Im erarbeiteten Algorithmus ist die Berücksichtigung mehrerer nachgiebiger Verbundfugen möglich. Der Gesamtquerschnitt bleibt dabei nicht mehr eben, da die Randfasern benachbarter Querschnittsteile an den Verbundfugen unterschiedliche Längsverschiebungen aufweisen

können. Diese Nachgiebigkeit bezieht sich allerdings ausschließlich auf die Verformungen in Stablängsrichtung, die Verdrehungen der Teilquerschnitte bleiben gleich. Innerhalb der von den Verbundfugen getrennten Querschnittsteile gelten weiterhin die Annahmen der technischen Biegetheorie.

#### 2.3.2.5 Material

Durch Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten werden die zeitunabhängigen Stoffgesetze der verwendeten Werkstoffe beschrieben. Da reale Bauwerke durch äußere Einwirkungen und durch Bauverfahren verschiedensten Beanspruchungswechseln unterlegen sind, schließt die Werkstoffmodellierung quasi-statische Be- und Entlastungen ein.

Zur realitätsnahen Vorhersage des Trag- und Verformungsverhaltens von Verbundkonstruktionen ist die Berücksichtigung der zeitabhängigen Materialphänomene Schwinden und Kriechen des Betons unerlässlich. Sie stellen einen wesentlichen Bestandteil des Lösungsverfahrens dar und gehen über zeitveränderliche Materialgesetze in die Berechnung ein.

In der Praxis werden herstellungsbedingt insbesondere die Betonbauteile des Brückenbaus häufig bereits etwa drei Tage nach dem Betonieren beansprucht. Um die hydratationsbedingte Festigkeitsentwicklung des jungen Betons zu erfassen, kann die zeitliche Entwicklung der mechanischen Werkstoffeigenschaften von Beton berücksichtigt werden. Diese Möglichkeit steht im speziellen Anwendungsfall optional zur Verfügung. Soll die Eigenspannungsentwicklung infolge abfließender Hydratationswärme mit einer zeitveränderlichen Temperatur-Gradiente näher betrachtet werden, so bietet sich dieses Vorgehen ebenfalls an.

#### 2.3.2.6 Rissmodellierung

Numerische Modelle zur makroskopischen Beschreibung der Rissbildung in Beton basieren heute üblicherweise entweder auf dem Konzept der verschmierten Risse (smeared crack) oder dem Konzept der diskreten Risse (discrete crack). Während man in diskreten Rissmodellen benachbarte Knoten einer Vernetzung beim Überschreiten der Zugfestigkeit voneinander trennt und zusätzliche Freiheitsgrade im System schafft, werden bei verschmierten Rissmodellen nur die konstitutiven Beziehungen am Materialpunkt durch entsprechende Modifikationen der Zugfestigkeit und Steifigkeit des Betons bei unveränderter Systemdiskretisierung angepasst. Der geringere numerische Aufwand verschmierter Rissmodelle ist ein wesentlicher Grund, weshalb sich diese für praktische Anwendungen bewährt haben. In dieser Arbeit wird deshalb das Konzept der verschmierten Risse angewendet.

#### 2.3.2.7 Verbundverhalten

Das nachgiebige Verbundverhalten zwischen Stahl und Beton oder Betonen unterschiedlichen Alters wird über multilineare Kraft-Schlupf-Beziehungen erfasst. Dabei können sich innerhalb eines Stabes sowohl die Dübelkennlinie als auch die Dübelanzahl ändern.

#### 2.3.2.8 Ergebnisse

Der Systemzustand des untersuchten Tragwerks kann bis zum Versagen zu jedem Untersuchungszeitpunkt an allen Integrationspunkten für jeden Stab durch folgende Größen dargestellt werden:

- Knotenverschiebungen, Schnittgrößen und
- mittlere Rissbreiten in Stahlbetonquerschnitten.

Bei Angabe eines Verdübelungsgrades in Verbundfugen werden außerdem die übertragenen Schubkräfte und bei nachgiebig verbundenen Querschnittsteilen der Schlupf in der Verbundfuge wiedergegeben.

Darüber hinaus sind an jedem Materialpunkt im System die:

- Dehnungen und
- Normalspannungen bekannt.

Im Fall einer Eigenwertanalyse werden darüber hinaus ausgewählte Eigenfrequenzen des Systems zu definierten Untersuchungszeitpunkten angegeben.

„Logisches Denken kann uns keinerlei Wissen über die empirische Welt vermitteln. Behauptungen, die durch rein logische Mittel aufgebaut werden, entbehren jeglicher Realität.“

*Albert Einstein*

# Kapitel 3

# Materialverhalten und verwendete Modelle

Die Zuverlässigkeit und die Wirtschaftlichkeit einer Tragwerksanalyse werden neben dem statischen Modell und dem verwendeten Lösungsansatz entscheidend durch die Qualität der eingesetzten Materialmodelle beeinflusst (Bild 1.1). Für den Entwurf, die Bemessung und die Ausführung von Verbundtragwerken sind daher eine möglichst genaue Kenntnis der angewendeten Werkstoffe, deren Verbindungen und deren Verbindungsmittel sowie deren Abstraktion in geeignete Modelle unerlässlich.

Üblicherweise wird das in Versuchen unter idealisierten Bedingungen beobachtete Materialverhalten für die Bemessung durch vereinfachte ein- oder mehraxiale mechanische Modelle abgebildet. Dabei sind neben dem lastabhängigen Verhalten, insbesondere beim Beton, auch zeitabhängige Materialphänomene zu beachten. Da in dieser Arbeit die Analyse des globalen Verhaltens einer Struktur in den Grenzzuständen der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit im Mittelpunkt steht, sind für die numerische Simulation Materialmodelle notwendig, mit denen die makroskopisch sichtbaren Mechanismen beschrieben werden.

Das stark unterschiedliche Verhalten der wesentlichen Werkstoff- und Verbundkomponenten macht im vorliegenden Kapitel eine differenzierte Betrachtung für:

- Beton
- Stahl (Baustahl und Betonstahl)
- Stahlbeton
- Verbindungsmittel (Kopfbolzendübel)

notwendig. Der Beton nimmt dabei eine Schlüsselrolle ein.

Für die genannten Materialien wird zuerst auf das prinzipielle Verhalten im Experiment eingegangen.

Insbesondere Brücken können während ihrer Herstellung und Nutzung kurzzeitig hohen Belastungen ausgesetzt sein. Um deren Auswirkungen auf das Gebrauchsverhalten realistisch abzuschätzen, müssen die Betrachtungen neben den Mechanismen bei stetiger Belastungsänderung auch das Verhalten unter nicht ermüdungswirksamen Ent- und Wiederbelastungen im inelastischen Bereich umfassen. In Übereinstimmung mit dem gewählten numerischen Lösungsansatz kann dabei eine Beschränkung auf das einaxiale Verhalten vorgenommen werden.

Zur qualitativen und quantitativen Beurteilung der aus Versuchen abgeleiteten Zusammenhänge wird das Dreiebenenkonzept (Mikro-, Meso- und Makroebene) benutzt. Es hilft einerseits die Ursachen makroskopisch sichtbarer Plastizierungsvorgänge und Versagensmechanismen zu verstehen, andererseits wird eine realistische Abschätzung von Unschärfen der Materialparameter und damit eine objektive Beurteilung einer Vielzahl vorhandener Materialmodelle möglich.

Bei der abschließenden Auswahl geeigneter Stoffgesetze für den zu entwickelnden Lösungsalgorithmus stehen neben einem möglichst breiten Anwendungsspektrum die Zuverlässigkeit und Plausibilität der Materialmodelle bei der Beurteilung von Versagensmechanismen im Vordergrund. Dabei ist ein Kompromiss zwischen der realitätsnahen Abbildung einzelner Effekte und einem vertretbaren Rechenaufwand unumgänglich. Unter dem Aspekt der Anwendung bei praxisrelevanten Problemstellungen werden dabei vordergründig Ansätze verwendet, deren Materialkennwerte normativ geregelt und zum Zeitpunkt der Planung bekannt sein können. Mit Blick auf die schichtenweise Querschnittsdiskretisierung im numerischen Lösungsansatz werden die angewendeten Materialmodelle in Form von:

- Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten

oder

- Kraft-Verformungs-Abhängigkeiten

bereitgestellt.

Für einige ausgewählte Modelle erfolgt eine Überprüfung der gewählten Rechenannahmen mit anderen bekannten Modellansätzen, Versuchsergebnissen und normativen Regelungen.

## 3.1 Beton

Beton ist ein Baustoff, der aus Zement als Bindemittel, Betonzuschlagsstoffen, Wasser und ggf. auch Zusatzstoffen entsteht. Seine Eigenschaften können durch die Güteklasse des Zements, die Zusammensetzung der Zuschläge und das jeweilige Mischungsverhältnis vorgegeben werden. Durch die Hydratation des Zementsteins nehmen die Festigkeiten und Steifigkeiten des Betons mit der Zeit zu. In Abhängigkeit vom Zeitpunkt der Prüfung, den Prüfungsrandbedingungen, der Einwirkungsdauer sowie der Beanspruchungsart sind deshalb variierende Kenngrößen zu verzeichnen. Da die Betonverformungen von verschiedenen Einflüssen abhängen und die physikalischen Vorgänge im Beton während der Verformung teilweise ungeklärt sind, existiert kein vollständiges Stoffgesetz zur Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens. Um das Materialverhalten für praktische Anwendungen zu beschreiben, werden daher in Abhängigkeit von der Art und Dauer einer Beanspruchung aus Versuchen abgeleitete Stoffgesetze und mechanische Größen definiert. Diese geben das makroskopisch sichtbare Verhalten wieder und erlauben damit die modellhafte Betrachtung des Betons als homogenes Material.

Da es ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist, das Verhalten von Stahl-Beton-Verbundtragwerken während der gesamten Nutzungsdauer eines Bauwerkes in einem ebenen Stabmodell rechnerisch zu erfassen, wird das einaxiale Verhalten von normal- und hochfesten Betonen deshalb in den nächsten Abschnitten unter folgenden Gesichtspunkten näher betrachtet:

- Mechanische Eigenschaften des Festbetons unter kurzeitiger Beanspruchung
- Zeitliche Entwicklung der mechanischen Werkstoffeigenschaften
- Zeitabhängige Verformungen

Als normative Bezugsquellen finden MODELCODE90 [96] und DIN 1045-1 [32] in Verbindung mit DAFSTB HEFT 525 [30] Beachtung.

### 3.1.1 Verformungskomponenten

Die Gesamtdehnung in einem belasteten Betonbauteil kann sich zu einem beliebigen Untersuchungszeitpunkt t additiv aus spannungsabhängigen und spannungsunabhängigen Anteilen zusammensetzen. Die Zeitabhängigkeit des Materialverhaltens bewirkt außerdem, dass sich auch unter konstanter Belastung die Anteile der einzelnen Komponenten an der Gesamtverformung kontinuierlich ändern:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_\sigma(t) + \varepsilon_K(t) + \varepsilon_S(t) + \varepsilon_H(t) \tag{3.1}$$

**Verformungen bei Belastungsänderung**: Eine äußere Beanspruchung bewirkt in einem Betonbauteil zunächst eine direkte (spontane) Tragwerksreaktion ($\varepsilon_\sigma(t)$). Die dabei vorhandene Steifigkeit wird durch das erreiche Spannungsniveau bestimmt. Mit Blick auf die zeitabhängigen Formänderungen des Betons unter Dauerlast sind bei dieser Verformungskomponente ein elastischer Anteil und ein plastischer Verformungsanteil infolge kurzzeitig einwirkender Beanspruchungen zu unterscheiden (($\varepsilon_\sigma(t) = (\varepsilon_{\sigma,el}(t) + (\varepsilon_{\sigma,pl}(t))$, wobei zur Bestimmung des Einflusses einer Dauerlast dabei nur der elastische Anteil berücksichtigt wird.

Auf die mechanischen Werkstoffeigenschaften des Festbetons sowie deren zeitliche Entwicklung im jungen Beton gehen die Abschnitte 3.1.3 und 3.1.4 näher ein.

**Lastunabhängige Verformungen:** Bereits ohne die Einwirkung äußerer Lasten schwindet Beton infolge Trocknung ($\varepsilon_S(t)$) und schrumpft infolge einer Volumenreduktion bei der Hydratation ($\varepsilon_H(t)$). Diese zeitveränderlichen Formänderungen des Betons werden unter dem Begriff lastunabhängige Verformungen zusammengefasst.

**Lastabhängige Verformungen:** Unter Dauerlast treten weitere Betonverformungen auf, die maßgebend vom Belastungsniveau, vom Betonalter bei Belastung sowie von der Zeitdauer der Einwirkung abhängig sind und aus der Viskoelastizität des Betons resultieren ($\varepsilon_K(t)$).

Auf die lastabhängigen und lastunabhängigen Verformungskomponenten wird in Abschnitt 3.1.5 näher eingegangen.

### 3.1.2 Festigkeitsklassen

Zur Klassifizierung von Beton wird gewöhnlich die im Alter von 28 Tagen ermittelte Druckfestigkeit des Festbetons verwendet. Sie stellt in den aktuellen Normen die zentrale Eingangsgröße zur Beschreibung der Festigkeits- und Formänderungskennwerte von Festbeton dar. Um eine Vergleichbarkeit von Prüfergebnissen sowie eine normenbasierte Klassifizierung zu ermöglichen, sind die Prüfkörperform und -größe, die Herstellung und Nachbehandlung sowie der Prüfvorgang selbst normativ geregelt (DIN EN 12390-2 [35] und DIN 1048-5 [33]). Gleiches gilt für die Umrechnung von Ergebnissen bei anderen Lagerungsbedingungen und abweichenden Prüfkörpern.

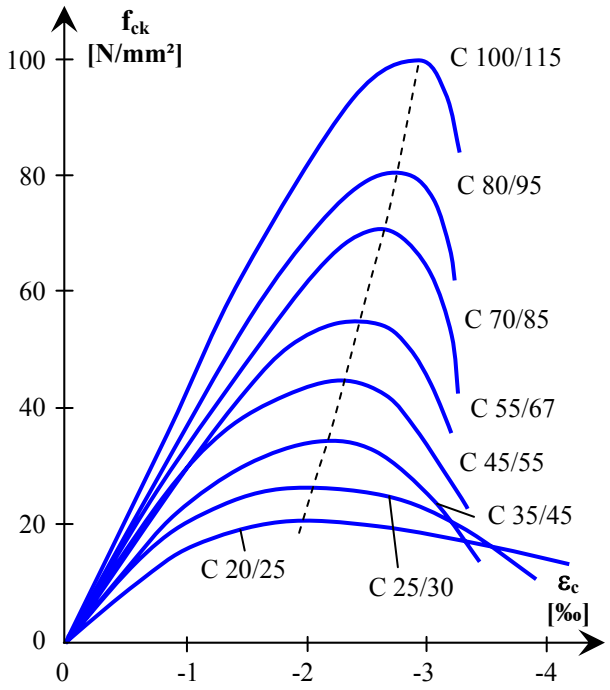



**Bild 3.1: Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten normal- und hochfester Betone**

Das Spektrum normativ geregelter Normalbetone erreicht nach DIN 1045 [32] charakteristische Zylinderdruckfestigkeiten von 100 N/mm² (Festigkeitsklasse C 100/115), dabei spricht man ab der Festigkeitsklasse C 55/67 von hochfestem Beton. Die mit der Bruchfestigkeit zunehmende

Sprödigkeit des Materials und Empfindlichkeit gegenüber einer Streuung der Ausgangsmaterialien ist ein signifikantes Unterscheidungsmerkmal normal- und hochfester Betone und macht deshalb ihre differenzierte Betrachtung erforderlich (Bild 3.1).

### 3.1.3 Mechanische Eigenschaften von Festbeton unter kurzzeitiger Beanspruchung

In diesem Abschnitt wird zunächst die im Experiment zu beobachtende Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit von Festbeton unter einaxialer, monotoner und wechselnder kurzzeitiger quasi-statischer Beanspruchung im Zug- und Druckbereich erläutert. Damit werden die Grundlagen des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens für die Werkstoffmodellierung und die Auswahl eines für diese Arbeit geeigneten Modells bereitgestellt. Aufgrund einer Vielzahl nationaler und internationaler Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet erfolgt eine Beschränkung auf Quellen, welche für das prinzipielle Verständnis geeignet sind.

Unter der Formulierung “kurzzeitige Beanspruchung“ werden in dieser Arbeit Prüfverfahren verstanden, welche die Materialkenngrößen für quasi-statische Berechnungen liefern.

#### 3.1.3.1 Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten bei einaxialer Beanspruchung

***Monotone Druckbeanspruchung***

Die experimentelle Ermittlung der einaxialen Druckfestigkeit des Betons erfolgt im verformungsgesteuerten Versuch an Würfel- oder Zylinderproben. In Bild 3.1 sind daraus erhaltene Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten für normal- und hochfeste Betone qualitativ dargestellt.

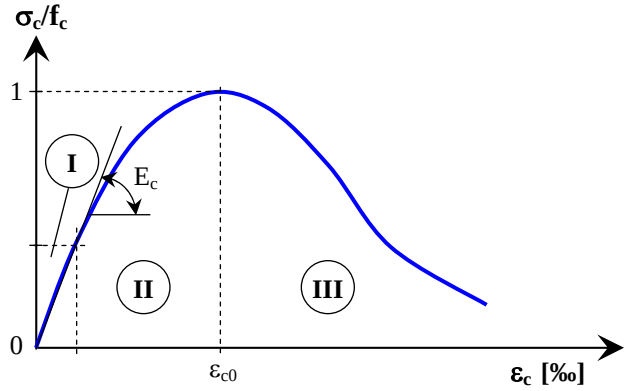



**Bild 3.2:**
**Einaxiale Druckspannungs-Dehnungs-Abhängigkeit normalfesten Betons**

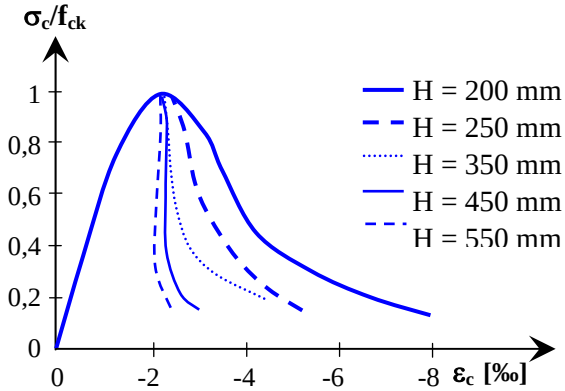



**Bild 3.3:**
**Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit normalfesten Betons, gemessen an unterschiedlich hohen Zylinderproben**

Bis auf ein Spannungsniveau von etwa 30 % - 50 % der Druckfestigkeit verläuft die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit normalfester Betone nahezu linear (Bild 3.2, Bereich I). Danach setzt eine Steifigkeitsreduktion ein, aus der eine zunehmende Nichtlinearität bis zur Bruchspannung resultiert (Bild 3.2, Bereich II). Bei hochfesten Betonen ist dagegen ein überproportionaler Anstieg des linear-elastischen Bereichs bis auf etwa 70 % - 85 % der Druckfestigkeit zu verzeichnen. Den anschließenden Nachbruchbereich (Strain-Hardening/ Bild 3.2, Bereich III) kennzeichnet eine stetige Festigkeitsabnahme. Charakteristisch ist dabei eine mit der Festigkeit

zunehmende Versprödung des Betons, welche bei höheren Festigkeiten zu einem starken Abfall der Tragfähigkeit, bei zunehmender Verformung im Nachbruchbereich, führt. Von JANSEN/-SHAH [70] durchgeführte Versuche an unterschiedlich hohen Zylindern (Bild 3.3) zeigen einen Einfluss der Probengeometrie auf den Verlauf des abfallenden Astes.

Die experimentellen Beobachtungen an Würfel- oder Zylinderproben (h/d = 2) können auf der Mesoebene durch das Festigkeitsverhältnis von Zuschlag und Zementstein und deren Verbund erläutert werden (Zwei-Phasen-Modell, z.B. VAN MIER [95]) und sind eng mit der Rissentstehung und Ausweitung in Querrichtung des Prüfkörpers verbunden. In normalfesten Betonen ist die Steifigkeit des Zuschlags deutlich größer als die des Zementsteins, bei hochfesten Betonen ist dieses Verhältnis nahezu ausgeglichen. LOCHER [86] begründet das mit der Kapillarporosität des Zementsteins, welche mit steigender Festigkeit durch den technologisch bedingten Einsatz feinkörniger Zusatzstoffe deutlich abnimmt.

Mit steigender Belastung wird der Vorbruchbereich in normalfestem Beton durch das Anwachsen der Risse infolge zu großer Querzugspannungen an den Korngrenzen eingeleitet. Ab ca. 70-90 % der Druckfestigkeit vereinigen sich die Mikrorisse und es bilden sich Rissbänder, die zu einer Auflockerung der Probe und zu einer fortschreitenden Zerstörung des Gefüges führen. Nach Erreichen der Bruchfestigkeit sind Bruchflächen parallel zur Kraftrichtung erkennbar, deren lokale Verformungen den Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit bestimmen und zur Entfestigung führen. Der von der Probengeometrie abhängige Verlauf des abfallenden Astes belegt eine Lokalisierung der Schädigung im Nachbruchbereich. Trägt man auf der Abszisse an Stelle der Dehnung die Verschiebungsänderungen des Betonkörpers auf, stellt sich eine etwa konstante Fläche unter der Last-Verschiebungskurve ein, die als ein Maß für die erforderliche Bruchenergie $G_f$ angesehen werden kann.

Im hochfesten Beton verhindern die gleichmäßigeren Festigkeiten in der Materialstruktur eine frühe Mikrorissbildung im Gefüge. Die zunehmende Versprödung des Materials bewirkt ein plötzliches Einsetzen der Rissbildung, was sich zum einen durch eine abnehmende Völligkeit der Parabel im Vorbruchbereich äußert und zum anderen den Nachbruchbereich deutlich verringert (vgl. Bild 3.2). Für das Bruchbild hochfester Betone ist gegenüber den normalfesten Betonen eine deutlich geringere Rauhigkeit der Bruchfläche charakteristisch, wobei die Risse aufgrund der ausgewogenen Steifigkeitsverhältnisse durch die Zuschläge verlaufen.

### *Zyklische Druckbeanspruchung*

Bild 3.4 zeigt das Verhalten normalfester Betone unter zyklischer Beanspruchung aus Versuchen von KARSAN/JIRSA [72] im Experiment. In Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen anderer Autoren ist zu erkennen, dass die Einhüllende der Hysteresen gut mit der Arbeitslinie bei monotoner (Erst)Belastung angenähert werden kann. Dies lässt die Folgerung zu, dass die Ent- und Wiederbelastung nur einen geringen Festigkeitsverlust und damit auch nur eine geringe Schädigung hervorrufen.

Bei Entlastung aus dem nichtlinearen Bereich nimmt auch die Steifigkeit des Betons gegenüber der Anfangssteifigkeit ab. Während im Vorbruchbereich ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen Ent- und Wiederbelastung besteht, zeichnet sich im Nachbruchbereich eine gegenüber der Wiederbelastung geringere Entlastungssteifigkeit ab. Da die Entlastungskurve jedoch nicht durch den Ursprung verläuft, ist offensichtlich ein Teil der Verzerrungen plastischer Art. Dabei ist zu erkennen, dass die plastische Dehnung mit der Abnahme der Steifigkeit verbunden ist, d.h. je größer die plastische Dehnung ist, umso größer ist die Schädigung des Betons.

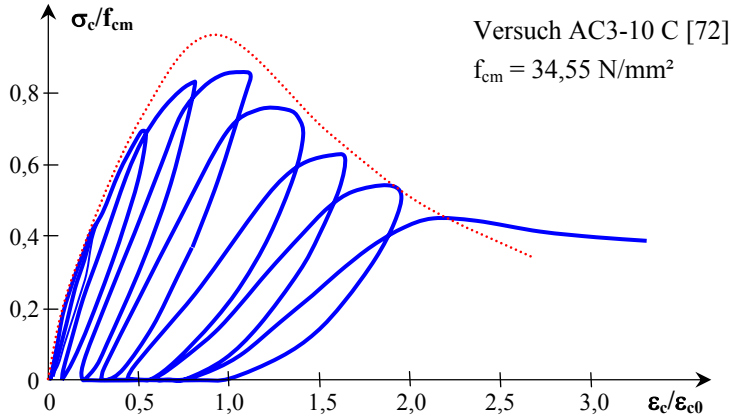



**Bild 3.4: Spannungs-Dehnungs-Hysteresen normalfesten Betons unter Druckschwellbeanspruchung (KARSAN/JIRSA [72])**

Von MORITA ET AL. [98] liegen darüber hinaus Versuchsergebnisse aus Druck-Zug-Wechselbeanspruchungen normalfester Betone vor. Diesen ist zu entnehmen, dass einerseits eine Druckvorschädigung des Betons eine Reduktion der Zugfestigkeit zur Folge hat, und dass andererseits die Rissbildung unter Zugbeanspruchung die Druckfestigkeit einer ungeschädigten Druckzone nicht beeinflusst. Bild 3.5 gibt die Versuchsergebnisse und das daraus abgeleitete Schädigungsmodell für die Zugfestigkeit wieder.

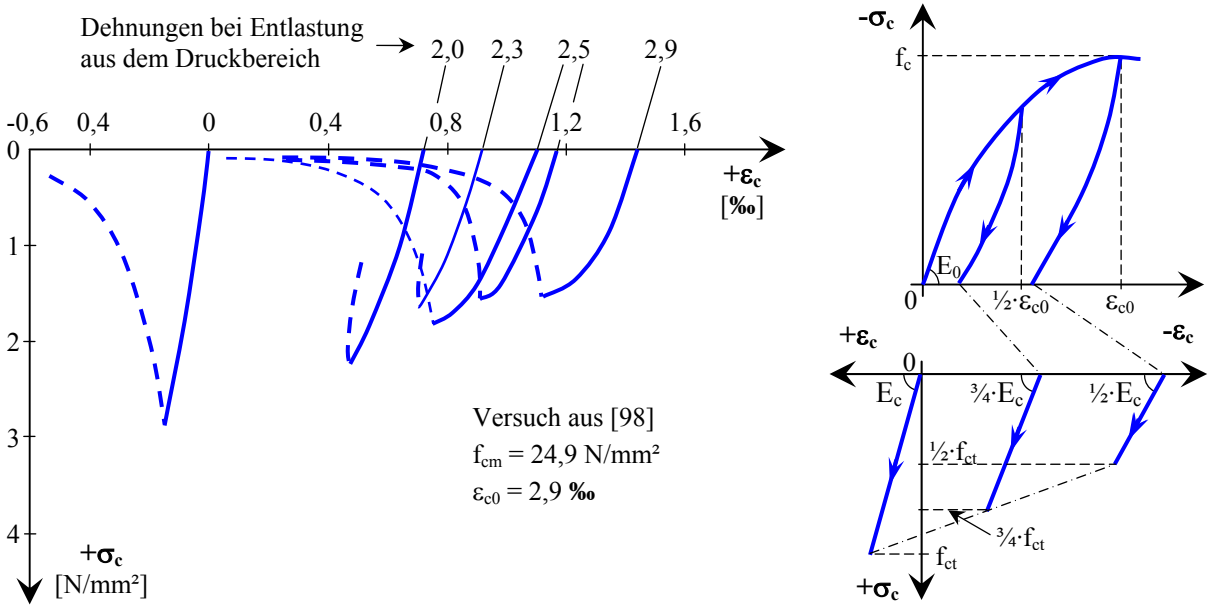



**Bild 3.5: Verringerung der Zugfestigkeit in Abhängigkeit vom erreichten Druckspannungsniveau – Versuch und empfohlenes Schädigungsmodell (MORITA ET AL. [98])**

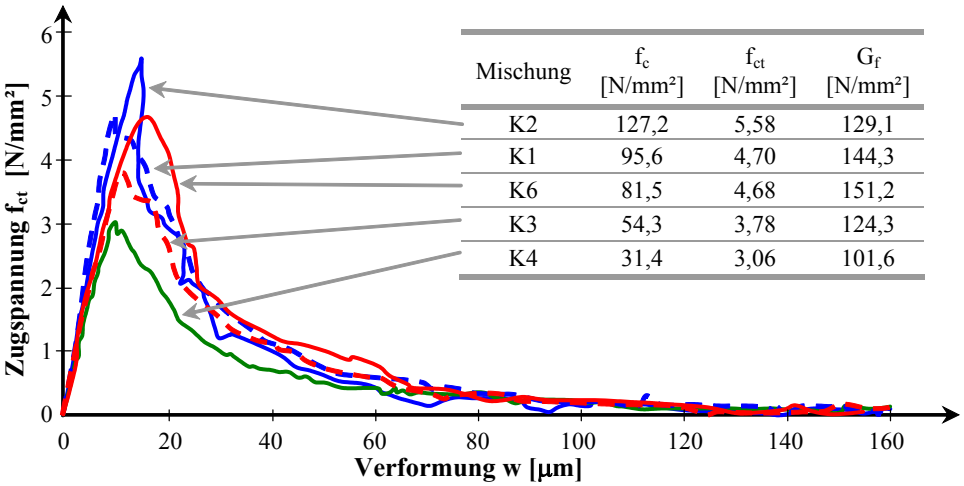
Einaxiale Druckwechselversuche mit unbewehrtem, hochfestem Beton sind dem Autor aus der Literatur bisher nicht bekannt. Experimente mit dreiaxial beanspruchten Zylinderproben nach LOKUGE ET AL. [87] zeigen jedoch, dass die für normalfeste Betone in Bild 3.4 geltenden Mechanismen der Be- und Entlastung im Nachbruchbereich prinzipiell auch auf hochfeste Betone übertragbar sind.

### *Zugbeanspruchung*

Das Zugtragverhalten von Beton kann mit Hilfe von zentrischen Zug-, Spaltzug- und Biegezugversuchen ermittelt werden. Allerdings lässt sich nur im zentrischen Zugversuch die Materialeigenschaft Zugfestigkeit direkt bestimmen. Auf einen solchen Versuch wird im Folgenden eingegangen.

Anhand der in Bild 3.6 dargestellten Spannungs-Gesamtverformungs-Abhängigkeiten kann der prinzipielle Versagensmechanismus von normalfestem und hochfestem Beton unter Zugbeanspruchung am besten veranschaulicht werden. Bis etwa 90 % der Zugfestigkeit verhält sich der Beton annähernd linear elastisch. Anschließend setzt eine Steifigkeitsreduktion ein, worauf der Bruch folgt. Bei weiterer Verformungssteigerung nimmt die Festigkeit ab. Der abfallende Ast im Entfestigungsbereich (Strain-Softening) ist durch einen anfänglich großen Festigkeitsabfall gekennzeichnet, lässt aber erkennen, dass im Beton über die Rissbildung hinaus offensichtlich eine Resttragfähigkeit besteht.

Experimente mit hochfestem Beton zeigen (REMMEL [112], Bild 3.6), dass die zentrische Zugfestigkeit mit steigender Festigkeit unterproportional zunimmt. Außerdem ist analog dem Druckbereich ein zunehmend spröderes Zugtragverhalten nach dem Überschreiten der Maximallast zu erkennen.




| Mischung | $f_c$ [N/mm²] | $f_{ct}$ [N/mm²] | $G_f$ [N/mm²] |
|---|---|---|---|
| K2 | 127,2 | 5,58 | 129,1 |
| K1 | 95,6 | 4,70 | 144,3 |
| K6 | 81,5 | 4,68 | 151,2 |
| K3 | 54,3 | 3,78 | 124,3 |
| K4 | 31,4 | 3,06 | 101,6 |

**Bild 3.6: Einaxiale Zugversuche an Betonproben verschiedener Festigkeiten (REMMEL [112])**

Die Phänomenologie der Rissbildung und des Rissfortschritts unter Zugbeanspruchung lässt sich anschaulich durch die Mikrorissbildung und -entwicklung im Betongefüge erläutern (Bild 3.7). Wie bereits erwähnt, weist Normalbeton bereits vor dem Aufbringen einer äußeren Beanspruchung Mikrorisse auf. Bei einer Laststeigerung über die Linearitätsgrenze (Punkt A) hinaus kommt es zur Bildung neuer und zum Zusammenwachsen der vorhandenen Mikrorisse. Ausgehend von einer Schwachstelle im Betongefüge bildet sich lokal ein Bereich mit erhöhter

Mikrorissdichte aus, der als Bruchprozesszone bezeichnet wird und um ein Vielfaches kleiner als die Probe selbst ist. Infolge einer Spannungskonzentration ist in diesem Bereich eine progressive Dehnungszunahme zu verzeichnen, welche zum Riss führt (Punkt B). Die benachbarten Bereiche außerhalb der Risszone weisen dadurch einen Dehnungsrückgang auf und verhalten sich weiterhin linear elastisch. Mit zunehmender Rissöffnung fallen die Dehnungen fast auf Null ab. Der zwischen B und C zu beobachtende Abfall in der Spannungs-Verformungs-Abhängigkeit ergibt sich aus der fortschreitenden Lokalisierung der zum endgültigen Trennriss führenden Mikro- und Mesorisse. Am Ende des Versuches liegt ein spannungsloser Prüfkörper mit einer Rissöffnung vor. Da sich die Gesamtverformung in Abhängigkeit von der Probengeometrie einstellt, ist eine verallgemeinerte Darstellung mittels einer Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit nicht möglich.

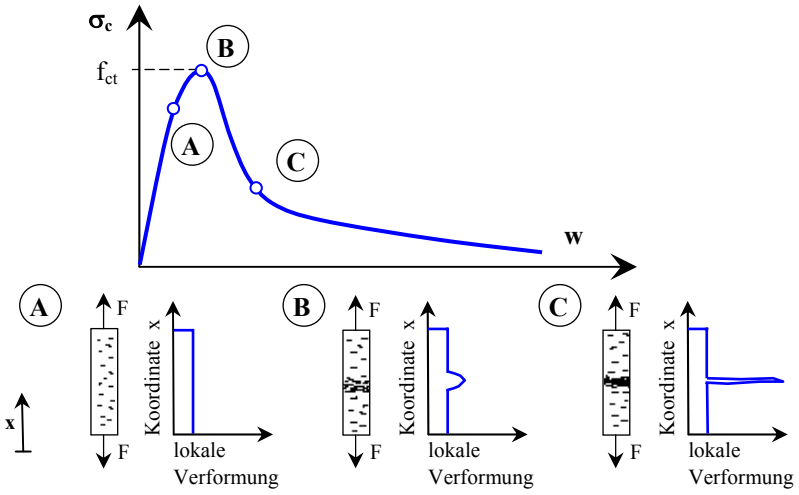



**Bild 3.7: Spannungs-Verformungs-Abhängigkeit einer zentrisch beanspruchten Zugprobe (DUDA [39])**

In den Konstruktionen des Stahl-Beton-Verbundbaus kommen ausschließlich bewehrte Betonquerschnitte zum Einsatz. Das Zugtragverhalten von Stahlbetonbauteilen wird dabei nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons maßgebend durch die Verbundwirkung zwischen den Einzelwerkstoffen Stahl und Beton und der daraus resultierenden Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen bestimmt (Tension-Stiffening). Das Strain-Softening des unbewehrten Betons ist dann von untergeordneter Bedeutung und wird in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons wird damit das Tragverhalten von bewehrten Betonbauteilen durch die Verbundwirkung zwischen den Einzelwerkstoffen Stahl und Beton bestimmt. Auf diese Problematik wird in Abschnitt 3.3. näher eingegangen

### 3.1.3.2 Festigkeits- und Formänderungskennwerte

Die einaxiale Druckfestigkeit des Betons wird wegen ihrer einfachen versuchstechnischen Bestimmung oft als Leitwert bei der Definition weiterer Werkstoffkennwerte verwendet. Dies erfolgt auf der Grundlage empirisch gewonnener Zusammenhänge, welche das makroskopische Verhalten prinzipiell wiedergeben.

Betrachtet man die großen Streuungen, welche die einzelnen Materialkennwerte des Betons aufweisen, erscheint ein solches verallgemeinertes Vorgehen als zweckmäßig. Mit Blick auf

den großen Festigkeitsbereich der betrachteten normal- und hochfesten Betone sollen deshalb in dieser Arbeit die normativen Regelungen der DIN 1045-1 [32], ergänzt um Angaben des MODELCODE90 [96], Anwendung finden. Zur objektiven Bewertung der Materialkennwerte werden im Folgenden neben dem analytischen Zusammenhang auch statistische Parameter zur Beurteilung der Streuungen angegeben.

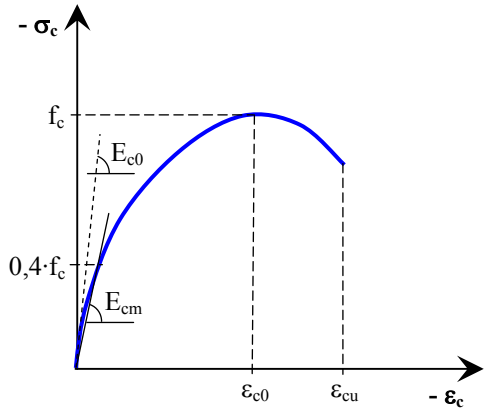



**Bild 3.8:**
**Prinzip des einaxialen Spannungs-Dehnungs-Zusammenhangs druckbeanspruchten Betons**

### *Druckfestigkeit*

Der Druckfestigkeit kommt beim Entwurf von Tragwerken mit Beton oder Stahlbetonbauteilen eine zentrale Bedeutung zu, da Druck die bevorzugte Beanspruchungsart des Betons darstellt. Deren Steigerung ist auch das primäre Ziel bei der Entwicklung und Verwendung hochfester Betone.

Wie bereits erwähnt, wird die Druckfestigkeit des Festbetons nach 28 Tagen an genormten Würfel- oder Zylinderproben bestimmt. Der daraus abgeleitete charakteristische Festigkeitswert entspricht im Allgemeinen dem normativ geregelten Fraktilwert einer angenommenen statistischen Normalverteilung. In DIN 1045-1 [32], Tabelle 9 liegt den Festigkeitsklassen die charakteristische Zylinderdruckfestigkeit $f_{ck}$ (5 %-Fraktil) als zentrale Kenngröße zugrunde. Für die mittlere Druckfestigkeit wird folgender Zusammenhang angegeben:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad [\mathrm{N/mm^2}] \tag{3.2}$$

Für normalfeste Betone beträgt der Variationskoeffizient unter der Annahme einer normalverteilten Größe etwa 15 %. Für hochfeste Betone ist eine deutliche Abnahme der Streuungen zu verzeichnen.

Da der Elastizitätsmodul des Betons nicht in gleichem Maße wie die Druckfestigkeit ansteigt und die plastischen Verformungsanteile im Vorbruchbereich mit zunehmender Festigkeit abnehmen, ist demzufolge auch eine unterproportionale Änderung der mit der Druckfestigkeit korrespondierenden Dehnung $\varepsilon_{c0}$ (Bild 3.8) zu verzeichnen. Für nichtlineare Berechnungen im Nachbruchbereich wird in den genannten Regelwerken außerdem eine Bruchdehnung $\varepsilon_{cu}$ definiert, welche etwa dem 0,5-fachen Wert der Druckfestigkeit auf dem abfallenden Ast zugeordnet ist. Die in DIN 1045-1 [32] der Festigkeitsklasse ohne eine formelmäßige Beziehung zugeordneten Dehnungen $\varepsilon_{c0}$ und $\varepsilon_{cu}$ geben den genannten Zusammenhang wieder.

### *Zugfestigkeit*

Die versuchstechnisch ermittelte Betonzugfestigkeit ist ungefähr um den Faktor 10 kleiner als die Druckfestigkeit. Bei hochfesten Betonen steigt das Verhältnis weiter bis zu 20 an.

In normativen Regelungen bezieht sich die Zugfestigkeit auf den einaxialen, zentrischen Zug. Rechnerisch wird die mittlere Zugfestigkeit $f_{ct}$ normalfester Betone üblicherweise mit dem von HEILMANN [66] empirisch ermittelten nichtlinearen Zusammenhang beschrieben:

$$f_{ctm} = 0{,}30 \cdot f_{ck}^{(2/3)} \qquad \text{bis C50/60} \tag{3.3}$$

Bei normalfesten Betonen kann der Zuschlagstoff die Festigkeit stark beeinflussen, wobei gebrochene Zuschläge einen Anstieg der Zugfestigkeit zur Folge haben. Begründen lässt sich dies durch die in Abschnitt 3.1.3.1 dargestellten strukturellen Zusammenhänge auf Mesoebene. Allerdings wird daraus auch ersichtlich, dass dieser Einfluss bei hochfestem Beton nicht gegeben ist. Versuche von REMMEL [112] zum Zugtragverhalten hochfester Betone belegen, dass die zentrische Zugfestigkeit bei steigender Druckfestigkeit geringer anwächst, als mit Gleichung (3.3) vorhergesagt. Darauf aufbauend wurde folgender empirischer Ansatz vorgeschlagen, der Eingang in DIN 1045-1 [32] fand:

$$f_{ctm} = 2{,}12 \cdot \ln(1 + f_{cm}/10) \qquad \text{ab C55/67} \tag{3.4}$$

Statistische Versuchsauswertungen zeigen, dass die Zugfestigkeit des Betons größeren Streuungen als die Druckfestigkeit unterliegt. Basierend auf einer Normalverteilung werden folgende Variationskoeffizienten für normalfeste Betone abgegeben: ZILCH ET AL. [147] 18 %, FLEDERER [49] 23 %.

### *Elastizitätsmodul*

Der Elastizitätsmodul beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen im niederen Druckspannungsbereich. Beeinflusst durch die Steifigkeit von Zuschlag und Zementstein sowie den Porengehalt kann seine Größe in weiten Grenzen variieren, wobei i.d.R. der mittlere Wert als rechnerische Kenngröße Verwendung findet. FLEDERER [49] gibt unter Ansatz einer Normalverteilung einen Variationskoeffizienten von etwa 15 % an.

In DIN 1045-1 [32] werden der Elastizitätsmodul $E_{c0}$ als Tangentenmodul im Koordinatenursprung der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit und der Elastizitätsmodul $E_{cm}$ als Sekantenmodul bei einer Spannung von $\sigma_c = 0{,}4 \cdot f_c$ unterschieden (vgl. Bild 3.8). Der Tangentenmodul liegt den Berechnungen unter Dauerlast zugrunde, der Sekantenmodul beschreibt die Steifigkeit bei Kurzzeitbelastung unter Berücksichtigung plastischer Anteile. Rechnerisch wird der Sekantenmodul zunächst aus der Zylinderdruckfestigkeit bestimmt und der Tangentenmodul daraus über folgenden Zusammenhang:

$$E_{cm} = 9.500 \cdot f_{cm}^{1/3} \qquad [\text{N/mm}^2] \tag{3.5}$$

$$E_{cm} = \alpha_i \cdot E_{c0} \qquad [\text{N/mm}^2] \qquad \text{mit: } \alpha_i = 0{,}8 + 0{,}2 \cdot \frac{f_{cm}}{88} \leq 1{,}0 \tag{3.6}$$

In MODELCODE90 [96] erfolgt diese Unterscheidung nicht:

$$E_{cm} = 21.500 \cdot (f_{cm}/10)^{1/3} \qquad [N/mm^2] \tag{3.7}$$

Der Einfluss der Art der verwendeten Gesteinskörnung auf den Elastizitätsmodul können nach DIN 1045-1 [32] und MODELCODE90 [96] über einen Beiwert $\alpha_E$ Beachtung finden:

| Art der Gesteinskörnung | MODELCODE90 [96] | DAFSTB HEFT 525 [30] |
|---|---|---|
| Basalt und dichten Kalkstein | 1,2 | 1,05 – 1,45 |
| Quarz und Quarzite | 1,0 | 0,80 – 1,20 |
| Kalkstein | 0,9 | 0,70 – 1,10 |
| Sandstein | 0,7 | 0,55 – 0,85 |

**Tabelle 3.1: von der Art der Gesteinskörnung abhängiger Beiwert $\alpha_E$**

Da die noch zu betrachtenden normativen Kriechansätze auf die jeweilige Formulierung des Elastizitätsmoduls Bezug nehmen, wurden beide Varianten in den Lösungsalgorithmus implementiert.

#### 3.1.3.3 Werkstoffmodellierung

***Erstbelastung im Druckbereich***

Die numerische Approximation der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit des Betons erfolgt bis zur Bruchfestigkeit i.d.R. durch eine Parabel oder einen Reihenansatz. Aus der Literatur sind dazu verschiedene Lösungen bekannt, welche übereinstimmend über die Parameter Bruchfestigkeit $f_c$ und zugehörige Dehnung $\varepsilon_{c0}$ sowie die Sekanten- und/oder Tangentensteifigkeit gemäß Bild 3.8 den Funktionsverlauf beschreiben. Wesentliches Unterscheidungsmerkmal ist die Völligkeit der Parabel in Bereich II sowie die mögliche Verwendung des Ansatzes im Nachbruchbereich.

Unstrittig ist die gute Annäherung von Versuchsergebnisse normalfester Betone im Vorbruchbereich durch eine quadratische Parabel oder deren Approximation durch ein Polynom vierten Grades. Die von SAENZ [121] und BUSJÄGER/QUAST [25] verwendeten Beziehungen weisen eine ähnliche Gleichungsstruktur auf. Durch Verwendung eines variablen Exponenten wird jedoch die Steuerung der Völligkeit der Parabel erlaubt und damit im Hinblick auf größere Betonfestigkeiten eine bessere Anpassung möglich. Die in DIN 1045 [32], EUROCODE 2 [44] und MODELCODE90 [96] angegebene Variante der SARGINschen Formulierung [122] ermöglicht die Einbeziehung des abfallenden Astes bis zur Bruchdehnung $\varepsilon_{cu}(0{,}5 \cdot f_c)$. Dieser Ansatz eignet sich für die Schnittgrößenermittlung im rechnerischen Bruchzustand (vgl. Bild 3.8). Darüber hinaus ist im MODELCODE90 [96] eine vereinfachte Möglichkeit zur Abbildung des Nachbruchverhaltens gegeben. Zwischen der Bruchfestigkeit ($f_c/\varepsilon_{c0}$) und der Dehnung bei $0{,}2 \cdot f_c$ ($0{,}2 \cdot f_c/n \cdot \varepsilon_{cu}$) wird ein linearer Verlauf mit anschließend konstant verlaufendem Spannungsniveau angenommen. Dem Anwendungsbereich genannter Normen entsprechend gelten diese Arbeitslinien für normal- und hochfeste Betone.

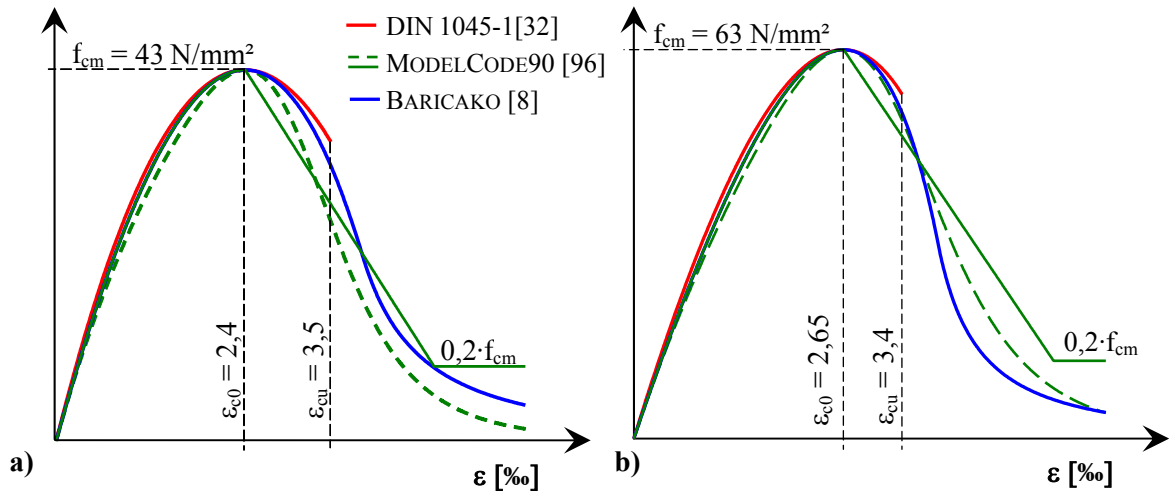



**Bild 3.9 Mathematische Beschreibungen der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit am Beispiel von: a) normalfestem Beton C35/45 und b) hochfestem Beton C55/67**

BARICAKO verwendet in [8] ein Modell, mit dem die Erstbelastungskurve in allen Bereichen durch eine modifizierte Form des Ansatzes von SARGIN [122] beschrieben wird. Über einen iterativ zu bestimmenden Parameter wird die Neigung des abfallenden Astes gesteuert. Darüber hinaus wird ein auf Versuchsauswertungen basierender, vereinfachter Vorschlag für die Anpassung der Arbeitslinien hochfester Betone gegeben.

Das von MENRATH in [91] verwendete Betonmodell basiert entgegen den bisher genannten Ansätzen auf Bruchenergien. Damit soll die beschriebene Abhängigkeit der Spannungs-Dehnungs-Linie von der Probengeometrie umgangen werden. Die Vorgehensweise wird an dieser Stelle nicht weiter verfolgt, allerdings werden die Grundlagen im Zusammenhang mit der Zugtragfähigkeit unbewehrten Betons im Nachbruchbereich dargestellt.

### *Ent- und Wiederbelastung im Druckbereich*

Möglichkeiten zur rechnerischen Idealisierung von zyklisch beanspruchtem Normalbeton sind beispielsweise in AOYAMA/NOGUCHI [2], BAHN/HSU [7] und CHEN [27] zusammengestellt.

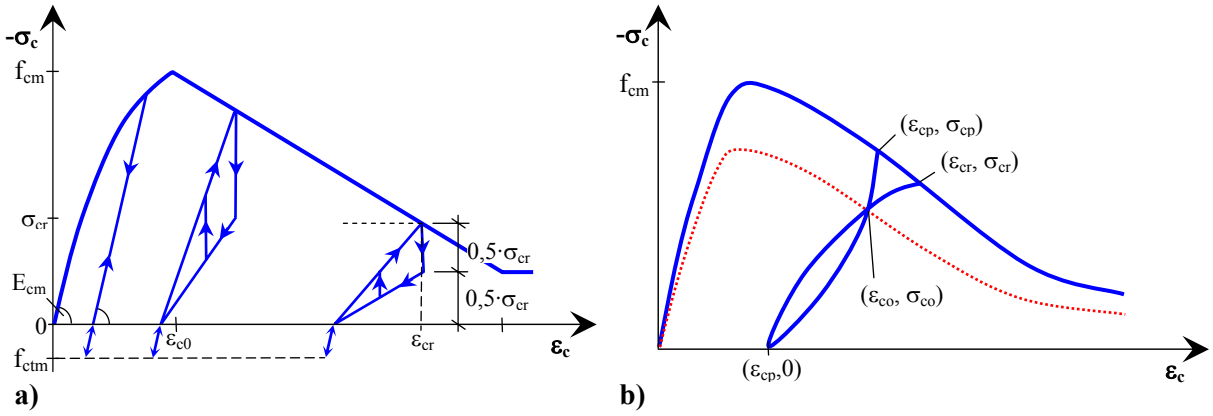



**Bild 3.10: Modelle zur Beschreibung der Hysteresen bei wechselnder Druckbeanspruchung, nach: a) BLAKELEY (aus [2]) und b) KARSAN/JIRSA [72]**

Die Mehrzahl der Modelle basiert auf der Annahme, dass die einhüllende Kurve der zyklischen Spannungs-Dehnungs-Hysteresen durch die Erstbelastungskurve beschrieben werden kann. Die plastische Dehnung $\varepsilon_{cp}$ und die Entlastungsdehnung $\varepsilon_{cr}$ auf der Einhüllenden bestimmen dabei die Form- und Steigung der Ent- und Wiederbelastungsäste (Bild 3.10). Je nach dem gewählten Detaillierungsgrad werden der Entlastungsast durch einen bilinearen oder konvexen Verlauf und die Belastung mit einer linear oder konkav verlaufenden Funktion anhand von Versuchsergebnissen approximiert. In Bild 3.10 ist das Prinzip zweier Modellansätze veranschaulicht.

***Zugbereich***

Das in Abschnitt 3.1.3.1 beschriebene Verhalten von Beton unter Zugbeanspruchung lässt sich bis zum Erreichen der Zugfestigkeit zunächst mit einer Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit erfassen. Nach MODELCODE90 [96] kann unter Berücksichtigung der bei etwa 90 % der Zugfestigkeit einsetzenden Rissbildung das Zugtragverhalten durch eine bilineare Funktion beschrieben werden. Der Zugfestigkeit wird dabei eine von der Festigkeitsklasse unabhängige Dehnung von 0,15 ‰ zugeordnet. Vereinfacht kann die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit bis zur Zugfestigkeit aber auch durch den Ansatz einer linearen Beziehung approximiert werden, deren Anstieg durch den Elastizitätsmodul unter Druckbeanspruchung bestimmt wird.

Wie bereits erwähnt, wird die Mitwirkung des unbewehrten Betons zwischen den Rissen nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

#### 3.1.3.4 Verwendete Rechenmodelle

Im vorangegangenen Abschnitt wurden wirklichkeitsnahe Modellierungsmöglichkeiten für Beton vorgestellt. In das Lösungsverfahren dieser Arbeit werden dagegen vergleichsweise einfache Werkstoffmodelle implementiert, welche das phänomenologische Verhalten normal- und hochfester Betone im nichtlinearen Bereich prinzipiell erfassen, um den numerischen Aufwand vor allem bei Ent- und Wiederbelastungen in komplexen Tragstrukturen möglichst gering zu halten.

***Druckbereich***

Mit Blick auf die lineare Abhängigkeit der Kriechverformungen bis zu einem Druckspannungsniveau von etwa 40 % der mittleren Bruchfestigkeit und die damit verbundene Gültigkeit des BOLTZMANNschen Superpositionsprinzips (Abschnitt 3.1.5.1 wird dieser Bereich linearisiert. Die Steigung der Geraden wird dabei durch den mittleren Elastizitätsmodul (Tangentenmodul bei DIN 1045-1 [32]) beschrieben.

Das Verhalten des Betons unter Druckbeanspruchung im nichtlinearen Bereich der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit ist für die in dieser Arbeit betrachteten Verbundkonstruktionen unter Gebrauchslasten nur von sekundärer Bedeutung. Es ist jedoch notwendig, um ggf. den schädigenden Einfluss kurzzeitig hoher Beanspruchungen eines Tragwerkes während der Herstellung oder Nutzung rechnerisch erfassen zu können und deren Auswirkungen auf die primär inter-

essierenden zeitabhängigen Verformungen zu analysieren. Dieser Bereich wird mit dem für normal- und hochfeste Betone geeigneten Modell von BARICAKO [8] erfasst:

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \frac{E_{cm} \cdot \varepsilon_c}{1 + \left(\frac{E_{cm} \cdot \varepsilon_{c0}}{f_{cm}} - \frac{f_{cn}}{f_{cn} - 1}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}}\right) + \frac{1}{f_{cn} - 1} \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}}\right)^{f_{cn}}} \tag{3.8}$$

Der Parameter $f_{cn}$ wird aus Gleichung (3.8) iterativ bestimmt, sodass die folgende Beziehung erfüllt wird:

$$\sigma_c(f_{ak} \cdot \varepsilon_{c0}) = 0{,}46 \cdot f_c \tag{3.9}$$

mit:

$$\begin{aligned} f_{ak} &= 2 && \text{für normalfesten Beton} \\ f_{ak} &= 1{,}57 - 0{,}0032 \cdot f_c && \text{für hochfesten Beton} \end{aligned} \tag{3.10}$$

und die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} &\sigma_c(\varepsilon_c = 0) = 0; && \sigma_c(\varepsilon_c = \varepsilon_{c0}) = f_{cm} \\ &\sigma_c'(\varepsilon_c = 0) = E_{cm}; && \sigma_c'(\varepsilon_c = \varepsilon_{c0}) = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

eingehalten sind.

Darüber hinaus wird die normativ geregelte Bruchdehnung (z.B. DIN 1045-1 [32]) als Versagens- bzw. Abbruchkriterium am Materialpunkt definiert (Bild 3.11).

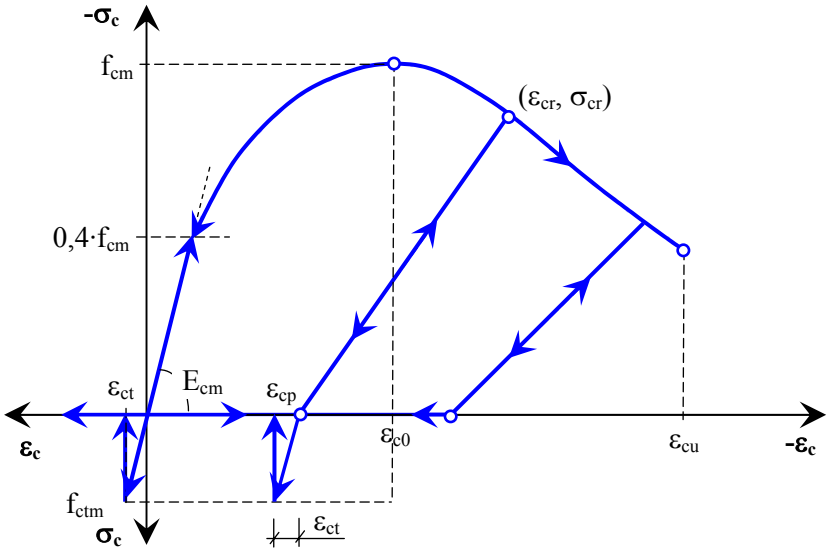



**Bild 3.11 Auf Faserebene verwendetes Rechenmodell für einaxial beanspruchten Beton einschließlich der Zugfestigkeitsschädigung beim Übergang in den Zugbereich**

Die Ent- und Wiederbelastungskurve von Normalbeton wird gemäß Bild 3.11 vereinfacht durch einen linearen Zusammenhang abstrahiert.

Für die plastische Dehnung $\varepsilon_{cp}$ bei vollständiger Druckentlastung findet für Normalbeton der Ansatz von MEYER [93] Anwendung:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cp} &= 0{,}27 \cdot \frac{\varepsilon_{cr}^2}{\varepsilon_{c0}} && \text{für}: \varepsilon_{cr} \le \varepsilon_{c0} \\ \varepsilon_{cp} &= 0{,}15 \cdot \frac{\varepsilon_{cr}^2}{\varepsilon_{c0}} + 0{,}2\varepsilon_{cr} && \text{für}: \varepsilon_{cr} > \varepsilon_{c0} \end{aligned} \tag{3.12a,b}$$

Für hochfeste Betone kommt der Vorschlag von BARICAKO [8] zur Anwendung:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cp} &= 0{,}1 \cdot \frac{\varepsilon_{cr}^2}{\varepsilon_{c0}} && \text{für}: \varepsilon_{cr} \le \varepsilon_{c0} \\ \varepsilon_{cp} &= 5 \cdot \frac{\varepsilon_{cr}^{1,5}}{\varepsilon_{c0}} \le 0{,}8 \cdot \varepsilon_{cr} && \text{für}: \varepsilon_{cr} > \varepsilon_{c0} \end{aligned} \tag{3.13a,b}$$

***Zugbereich***

In dieser Arbeit wird die Erstbelastung bis zum Erreichen der Zugfestigkeit durch einen linearen Zusammenhang beschrieben, deren Anstieg dem Elastizitätsmodul bei Druckbeanspruchung entspricht. Bei einer Entlastung aus dem nichtlinearen Druckbereich in den Zugbereich wird das in Bild 3.5 dargestellte vereinfachte Schädigungsmodell angewendet. Bis die plastische Dehnung $\varepsilon_{cp}$ die der Druckfestigkeit zugehörige Dehnung $\varepsilon_{c0}$, erreicht, bleibt der Zusammenhang bei Erstbelastung vereinfacht bestehen. Danach kann keine Zugfestigkeit mehr angenommen werden:

$$f_{ctm} = \begin{cases} f_{ctm} & \text{für}: \varepsilon_{cp} < \varepsilon_{c0} \\ 0 & \text{für}: \varepsilon_{cp} \ge \varepsilon_{c0} \end{cases} \tag{3.14}$$

Diese Vorgehensweise erfolgt in Abstimmung mit den Kenntnissen zum Zugtragverhalten von Stahlbeton (Abschnitt 3.3) Nach dem Erreichen der Zugfestigkeit wird die weitere Mitwirkung des Betons durch das in Abschnitt 3.3 näher betrachtete Verbundverhalten zwischen Stahl und Beton bestimmt.

### 3.1.4 Zeitliche Entwicklung der mechanischen Werkstoffeigenschaften von Beton

Bei Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen treten teilweise Probleme auf, die mit der Hydratation des Betons und der damit verbundenen Änderung der mechanischen Werkstoffeigenschaften vor allem im jungen Alter zusammenhängen. Dabei stehen die Auswirkungen zweier Einflüsse auf die Rissbildung und das Verformungsverhalten eines Tragwerkes im Mittelpunkt des Interesses. Das ist zum einen die hydratationsbedingte Temperaturentwicklung im Beton, welche als stoffliche innere Einflussgröße bereits in den ersten Tagen der Erhärtung Risse im Beton verursachen kann. Seine Dehnfähigkeit ist dabei für das Auftreten von Rissen entscheidend. Zum anderen wird bei den heute aktuellen Bauverfahren, insbesondere im Brückenbau, der Beton bereits im Alter von etwa 3 Tagen Belastungen (äußere Einflussgröße) unterworfen. Die Festigkeits- und Formänderungskennwerte der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit weisen zu diesem Zeitpunkt gegenüber den normativ geregelten Festbetoneigenschaften deutlich

geringere Werte auf. Bei der numerischen Analyse zeitveränderlicher Last- und Zwangsprozesse kann eine Berücksichtigung dieser Einflüsse für die Interpretation realer Tragwerksverformungen notwendig sein und wird deshalb in dieser Arbeit näher untersucht.

Zu den genannten Zeitpunkten unterliegen die Materialparameter des Betons noch starken Veränderungen. Die Betrachtung der hydratationsbedingten Einflüsse spaltet sich deshalb in zwei Bereiche auf:

- Beschreibung der Temperaturentwicklung im jungen Beton
- Zeitabhängige Entwicklung der mechanischen Werkstoffeigenschaften

Da es sich bei der Wärmeentwicklung im Beton um einen zeitveränderlichen Prozess handelt, wird auf diese Fragestellung zusammen mit den zeitabhängigen Verformungen des Betons im anschließenden Abschnitt 3.1.5 näher eingegangen. Die Güte einer numerischen Analyse der Beanspruchungen im jungen Beton wird maßgebend durch die Qualität des angewendeten Werkstoffmodells beeinflusst, wobei der Schwerpunkt auf der Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Werkstoffeigenschaften liegt. In diesem Abschnitt werden deshalb in der Literatur dokumentierte Zusammenhänge dargestellt und (soweit möglich) analytische Ansätze für eine rechnerische Prognose angegeben.

#### 3.1.4.1 Allgemeines

Der Erhärtungsprozess des Betons ist auf eine chemische Reaktion zurückzuführen, die unmittelbar nach dem Vermischen des Zements mit Wasser beginnt und als Hydratation bezeichnet wird. Sie führt zum Erhärten des Zementleims und damit zur Bildung des Zementsteins. Damit ist eine erhebliche Veränderung der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit des erhärtenden Betons sowie der mechanischen Formänderungs- und Festigkeitskenngrößen verbunden. Derartig zeitveränderliche Stoffgesetze sind derzeit in deutschen Normen nicht enthalten.

Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen ist die modellhafte Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Werkstoffeigenschaften des Betons nach dem Erstarrungsbeginn. Vorher auftretende, nahezu spannungslose, plastische Formänderungen werden nicht betrachtet. Daraus resultierende Schädigungen wie Risse können durch geeignete Nachbehandlungsmaßnahmen wie beispielsweise das Nachverdichten ohne Festigkeitsverlust kompensiert werden. Unter dem Begriff „Junger Beton“ wird im Folgenden ein Beton in einem Alter von weniger als 28 Tagen verstanden.

Die von LAUBE [82] postulierte Abhängigkeit der Werkstoffparameter vom erreichten Hydratationsgrad ist zurzeit Gegenstand intensiver Forschung. Eine Anwendung auf praktische Problemstellungen ist allerdings im Einzelfall auf die experimentelle Bestimmung des zeitlichen Verlaufs des Hydratationsgrades angewiesen. Für die in dieser Arbeit angestrebte verallgemeinerte Analyse globaler Tragwerksstrukturen kann dieser Ansatz daher gegenwärtig nicht angewendet werden. Deshalb wird auf diese Möglichkeit der Werkstoffbeschreibung im Folgenden nicht weiter eingegangen. Als weiterführende Literatur wird auf die Arbeiten von EIERLE [42], GUTSCH [58] und LAUBE [82] verwiesen.

Mit der Zugabe von Zusatzmitteln kann die Festigkeitsentwicklung junger Betone zielgerichtet beeinflusst werden. Da jedoch eine Vielzahl unterschiedlicher Zusatzmittel verfügbar und deren Kombination zulässig ist, wird in dieser Arbeit auf die daraus folgende Wirkung nicht eingegangen. Eine Ausnahme bilden die für die Verarbeitbarkeit von hochfesten Betonen technologisch notwendigen Fließmittel.

Umfangreiche experimentelle Untersuchungen an jungem Beton zeigen, dass sich die mechanischen Eigenschaften unterschiedlich schnell entwickeln (Bild 3.12). Auf der Basis einer qualitativen Beschreibung des makroskopischen Verhaltens wurden empirische Modelle entwickelt, die auch Eingang in den MODELCODE90 [96] fanden. Da deren Formulierung mit den bereits beim Festbeton eingeführten Kenngrößen möglich ist, stützt sich diese Arbeit ausschließlich auf solche Ansätze. Diese werden im Folgenden erläutert.

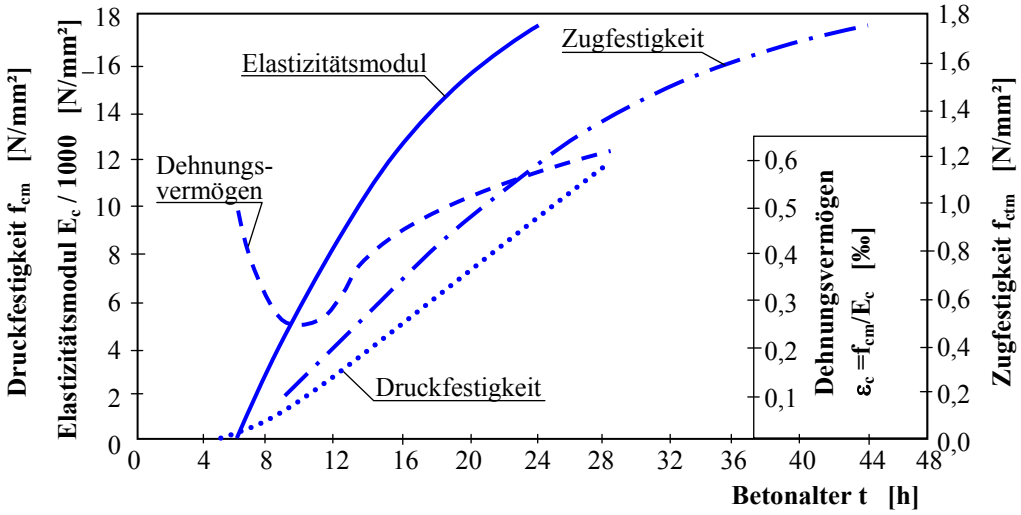



**Bild 3.12 Prinzip der altersabhängigen Entwicklung mechanischer Kenngrößen des Betons (LAUBE [82]).**

### 3.1.4.2 Festigkeiten und Elastizitätsmodul

Aus systematischen Parameterstudien sind die wesentlichen Parameter und deren Einfluss auf die Festigkeitsentwicklung tendenziell bekannt (z.B. LAUBE [82]):

- Eine wesentliche Einflussgröße stellt die Erhärtungstemperatur dar. Mit steigender Temperatur beginnt die Festigkeitsentwicklung früher, wobei die Erhärtungsgeschwindigkeit erheblich ansteigt. Besonders in den ersten 24 Stunden ist diese Reaktion sehr ausgeprägt. Allerdings wird durch anfänglich hohe Temperaturen die Endfestigkeit gegenüber einer niedrigeren Anfangstemperatur vermindert.
- Die Festigkeitsentwicklung setzt mit größerer Mahlfeinheit des Zements früher ein und die Erhärtungsgeschwindigkeit nimmt zu. Bei hochfesten Betonen ist der Einfluss der Zementart auf die Endfestigkeit nur von untergeordneter Bedeutung, jedoch wird die Frühfestigkeit deutlich von der Zementart bestimmt (KÖNIG ET AL. [77]).
- Mit abnehmendem Wasserzementwert wird die Erhärtungsgeschwindigkeit deutlich gesteigert. Dieser Effekt ist für die Festigkeitsentwicklung hochfester Betone von Interesse. Nach KÖNIG ET AL. [77] erreicht ein Beton mit einem w/z-Wert von 0,25 bereits nach zirka einem

Tag etwa 50 % der 28-Tagefestigkeit, obwohl die Festigkeitsentwicklung bedingt durch die Wirkung des Fließmittels erst nach etwa 12 Stunden überhaupt einsetzt.

Die folgenden Angaben und analytischen Beziehungen sind, wenn nicht zusätzlich eingeschränkt, ausschließlich für normalfeste Betone im Geltungsbereich des MODELCODE90 [96] anwendbar. Für hochfeste Betone sind derzeit nur qualitative Aussagen möglich. An dieser Stelle besteht ein weiterer Forschungsbedarf.

***Druckfestigkeit***

Die zeitliche Entwicklung der Betondruckfestigkeit ist nichtlinear. Der MODELCODE 90 [96] beinhaltet eine analytische Funktion, deren Ansatz für eine Lagerungstemperatur von 20°C Gültigkeit besitzt:

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm} \tag{3.15}$$

mit: $$\beta_{cc}(t) = \exp\left\{ s \cdot \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{0,5} \right] \right\}$$

| Zementtyp | s |
|---|---|
| RS | 0,20 |
| N/R | 0,25 |
| SL | 0,38 |

Der Parameter s berücksichtigt die Zementart und damit indirekt die Hydratationsbedingungen.

Wegen der zentralen Bedeutung der Druckfestigkeit wurden analog zu den Festbetoneigenschaften auch für den jungen Beton Modelle entwickelt, aus denen auf andere Eigenschaften wie die Zugfestigkeit und den Elastizitätsmodul geschlossen werden kann.

***Zugfestigkeit***

Die zeitliche Entwicklung der Betonzugfestigkeit wird nach LAUBE [82] im Wesentlichen durch die gleichen Faktoren wie die Druckfestigkeit beeinflusst. Wie Bild 3.12 zeigt, entwickelt sich die Zugfestigkeit allerdings etwas schneller als die Druckfestigkeit, jedoch geringer als der Elastizitätsmodul. MODELCODE 90 [96] beinhaltet dafür keinen analytischen Zusammenhang. Es darf vielmehr unter der Annahme einer zeitlichen Affinität der Festigkeitsentwicklung unter Druck- und Zugbelastung die beim Festbeton gültige Beziehung aus der Gleichung (3.3) angewendet werden.

***Elastizitätsmodul***

Zwischen der zeitlichen Entwicklung des Elastizitätsmoduls und der Druckfestigkeit besteht ein nichtlinearer Zusammenhang, wobei sich der Elastizitätsmodul schneller entwickelt (Bild 3.12). Im MODELCODE 90 [96] wird der Elastizitätsmodul in Abhängigkeit von der Druckfestigkeit folgendermaßen beschrieben:

$$E_{cm}(t) = \beta_{cc}(t)^{0,5} \cdot E_{cm} \tag{3.16}$$

***Streuung der Werkstoffeigenschaften jungen Betons***

Von GUTSCH werden in [58] Versuche zur Festigkeits- und Elastizitätsmodulentwicklung im Betonalter von 1, 2, 7 und 28-Tagen angegeben. Eine statistische Auswertung zeigt, dass die Messwerte zu allen Zeitpunkten durch eine Normalverteilung beschrieben werden können. Erwartungsgemäß nimmt die Streuung mit steigendem Hydratationsgrad ab. Bild 3.13 gibt die ermittelten Variationskoeffizienten als zeitbezogene Größen wieder. Für die 28-Tageswerte werden etwa die beim Festbeton genannten Variationskoeffizienten erreicht (vgl. Abschnitt 3.1.3.2). Der Auswertung liegen je Wert etwa 25 bis 60 Einzelversuche mit Portlandzement zugrunde.

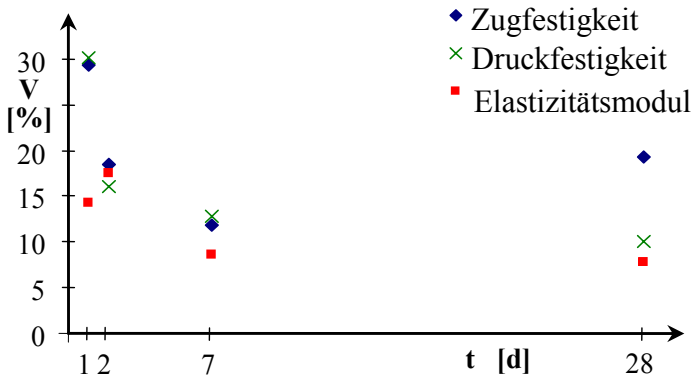



**Bild 3.13: Variationskoeffizienten bei zentrischer Zugfestigkeit, Druckfestigkeit und Elastizitätsmodul in Abhängigkeit von der Zeit (aus GUTSCH [58])**

### 3.1.4.3 Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit

Aus einer statistischen Auswertung fremder und eigener Versuchsergebnisse durch LAUBE [82] ist zu erkennen, dass ab einem Betonalter von etwa einem halben Tag im Zugbereich sowie bis etwa 40 % der Betondruckfestigkeit mit guter Näherung ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen angenommen werden kann (Bild 3.14).

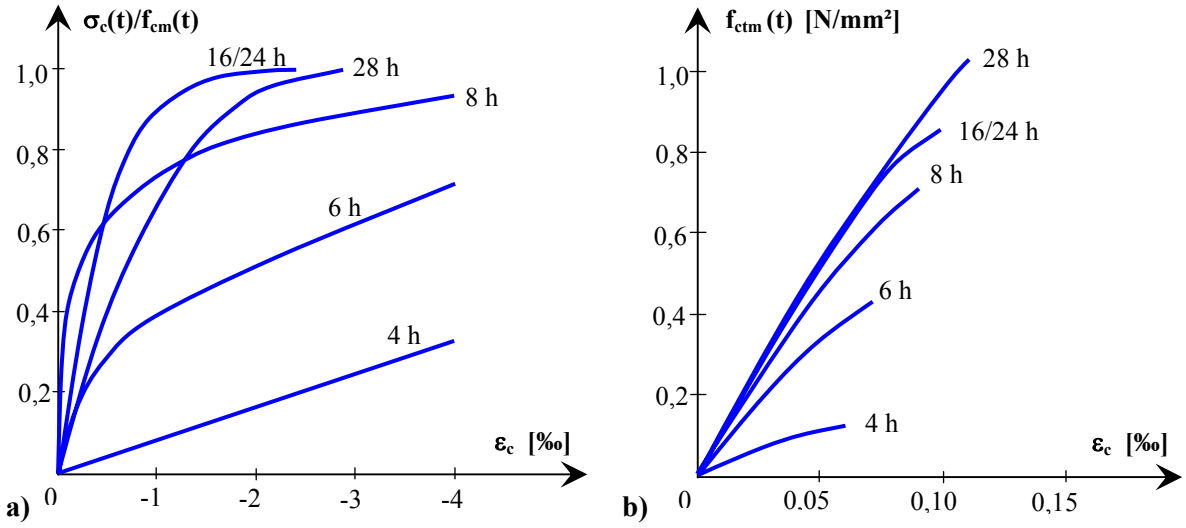



**Bild 3.14 Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit im jungen Beton unter a) Druck- und b) Zugbelastung zu verschiedenen Zeitpunkten (LAUBE [82]).**

Hinsichtlich der zur Druck- bzw. Zugfestigkeit korrespondierenden Bruchdehnung kann diesen Darstellungen und Bild 3.12 außerdem entnommen werden, dass mit Beginn des Erstarrens und

Erhärtens die anfangs sehr große plastische Verformbarkeit des Betons stark abfällt. Im vorliegenden Fall wird auf der Zug- und Druckseite nach etwa einem halben Tag ein Minimum erreicht. LAUBE [82] begründet dies mit der gegenüber den Festigkeiten schnelleren Entwicklung des Elastizitätsmoduls und der Verminderung viskoser Verformungsanteile. Anschließend steigt dieser Wert wieder an.

***Druckbereich***

Über die zeitliche Entwicklung der Druckspannungs-Dehnungs-Abhängigkeit sind aus der eingesehenen Literatur nur qualitative Aussagen möglich. Wie in Bild 3.14 ersichtlich, erfolgt innerhalb des ersten Tages der Übergang von der zu Beginn sehr gestreckten, jedoch nur wenig elastischen Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit zu der für erhärteten Beton typischen, parabelförmig gekrümmten Form. Aus sechs Versuchsserien zur Druckfestigkeitsentwicklung im jungen Betonalter leitet BYFORS in [26] einen empirischen Zusammenhang ab, der weitgehend unabhängig von der Betonzusammensetzung, Zementart und Temperatur ist:

$$\varepsilon_{c0}(t) = a \cdot f_{ck}(t)^{b} \tag{3.17}$$

| $f_{ck}(t)$ [N/mm²] | a | b |
|---|---|---|
| < 5 | 0,244 | -0,652 |
| > 5 | 0,0467 | 0,331 |

Eine Verallgemeinerung dieser Beziehung ist aufgrund der geringen Datenbasis nicht möglich, sie kann lediglich für erste Tastversuche herangezogen werden. An dieser Stelle besteht aus Sicht des Verfassers noch ein weiterer Forschungsbedarf.

***Zugbereich***

Das Zugbruchverhalten von erhärtendem Beton wurde im Hinblick auf die Entwicklung und Anwendung bruchmechanischer Modelle, vor allem für den jungen Beton, eingehend untersucht. Im verformungsgesteuerten zentrischen Zugversuch lässt sich unabhängig vom Alter ein dem Festbeton ähnlicher Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit, bzw. nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit Spannungs-Verformungs-Abhängigkeit erkennen (GUTSCH [58]). Die Zugbruchdehnung wächst dabei annähernd linear mit der Zugfestigkeit an.

#### 3.1.4.4 Verwendetes Rechenmodell

Die Angaben in diesem Abschnitt gelten ausschließlich für Betone im Gültigkeitsbereich des MODELCODE90 [96]. Druckfestigkeit, Zugfestigkeit und Elastizitätsmodul werden mit den in Abschnitt 3.1.4.2 dargestellten analytischen Beziehungen des MODELCODE 90 [96] in das Lösungsverfahren implementiert. Bei Annahme des gleichen linear elastischen Verhaltens unter Zug- und Druckbeanspruchung werden für die zugehörigen Elastizitätsmodule auch gleiche Werte angenommen. Die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit wird im Zugbereich in Analogie zum Festbeton bis zum Bruch linear-elastisch formuliert. Da für die Druckspannungs-Dehnungs-Abhängigkeit im nichtlinearen Bereich aus der eingesehenen Literatur keine Modellansätze verfügbar sind, erfolgt für den Beton bis zum Erreichen der 28-Tagefestigkeit eine Begrenzung der zulässigen Druckspannungen auf 40 % der zugehörigen, zeitabhängigen Druckfestigkeit.

### 3.1.5 Zeitabhängige Verformungen

Die zeitabhängigen Verformungen des Betons infolge Schwindens und Kriechens können eine bedeutsame Reduzierung der Tragwerkssicherheit von Betonkonstruktionen bewirken und haben damit einen wesentlichen Einfluss auf deren Dauerhaftigkeit. Da Stahl nicht wie Beton kriecht und schwindet, kann insbesondere das Trag- und Verformungsverhalten von Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen teilweise erheblich beeinflusst werden. Dabei ist unter gleichen Bedingungen eine Zunahme der Spannungsumlagerungen mit steigender Behinderung der freien Verformungen des Betonbauteils im Querschnitt (primäre Beanspruchungen) und System (sekundäre Beanspruchungen) zu verzeichnen. Ihre Auswirkungen können deshalb bei der Bemessung von Verbundkonstruktionen nicht mehr vernachlässigt werden.

Mit der zeitabhängigen Vorhersage dieser Materialphänomene setzt sich dieser Abschnitt auseinander. Nach einer kurzen Darstellung bekannter Ursachen werden praxisrelevante Einflüsse und deren qualitative Auswirkungen benannt, empirische bzw. rheologische Modelle diskutiert und auf deren numerische Umsetzung eingegangen. Mit Bezug auf die in Gleichung 3.1 dargestellten Verformungskomponenten des Betons werden dazu folgende Einflüsse unterschieden:

- Lastabhängige Verformungen (Kriechen)
- Lastunabhängige Verformungen (Schwinden, abfließende Hydratationswärme)

#### 3.1.5.1 Kriechen

Unter dem Begriff Kriechen wird üblicherweise die zeitliche Zunahme der Formänderungen des Betons unter einer Dauerlast verstanden. Ganz allgemein weist der Beton dabei ein Verformungsverhalten auf, das sich in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau und der Dehnungsgeschwindigkeit zeitlich in drei Bereiche unterteilen lässt (Bild 3.15). Das tertiäre Kriechen tritt nur bei Lasten oberhalb der Dauerstandsfestigkeit auf, die nach DIN 1045-1 [32] bei etwa 85 % der Kurzzeitdruckfestigkeit des Betons definiert ist. Für Gebrauchslasten ist das primäre Kriechen von Interesse, ein Bereich, der unter konstanten Bedingungen durch eine stetige Zunahme der Kriechdehnungen charakterisiert ist. Umstritten ist dabei allerdings, ob die Kriechdehnungen asymptotisch einem Endwert zustreben oder ob sie bei abnehmender Geschwindigkeit kontinuierlich anwachsen (MÜLLER [103]).

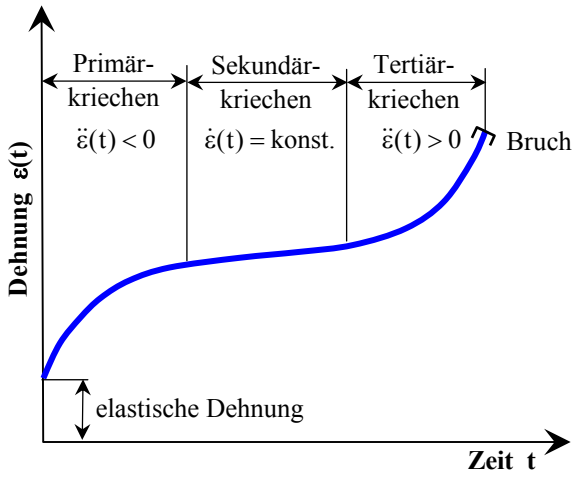



**Bild 3.15:**
**Allgemeine Darstellung der Kriechphasen des Betons in Form einer Zeit-Dehnungs-Kurve (MÜLLER [103])**

Dieses komplexe Verformungsverhalten von Beton unter Dauerlast macht für die folgenden Betrachtungen zunächst eine Beschränkung auf einaxiale Beanspruchungen im linearen Druckspannungsbereich erforderlich, da nur für diesen Fall umfangreiche experimentelle Untersuchungen vorliegen. Auf das Kriechen im nichtlinearen Druckspannungsbereich sowie das Verhalten unter Zug- und mehraxialer Kriechbeanspruchung wird im Anschluss eingegangen.

***Kriechkomponenten und Einflussgrößen***

In Bild 3.16 ist der makroskopisch sichtbare und durch Parallelproben weiter differenzierbare prinzipielle Verlauf der Verformungskomponenten des Betons (Gl. (3.1)) im Einstufenversuch dargestellt. Der Zeitpunkt $t_S$ bezeichnet darin den Beginn der Trocknung und $t_0$ das Betonalter bei Belastung mit einer konstanten Spannung $\sigma$. Zum Zeitpunkt $t_e$ wird die Probe vollständig entlastet.

Nach einer spontanelastischen Verformung $\varepsilon_{ci}(t_0)$ zum Zeitpunkt der Lastaufbringung nehmen die Dehnungen mit zunehmender Lasteinwirkungsdauer zeitabhängig weiter zu. Wird der Beton anschließend wieder entlastet, geht zuerst die elastische Verformung plötzlich zurück [$\varepsilon_{ci}(t_E)$]. Außerdem ist zeitlich verzögert auch ein teilweiser Rückgang der Kriechverformungen zu verzeichnen. Diese reversible Kriechkomponente wird als verzögerte Elastizität bezeichnet ($\varepsilon_{cd}$). Die abschließend verbleibende Kriechverformung, welche auch nach einer sehr langen Entlastungsdauer irreversibel bleibt, wird Fließdehnung genannt. Mit zunehmender Lasteinwirkungsdauer dominieren die irreversiblen Verformungsanteile gegenüber dem verzögert elastischen Anteil.

Die meisten Kriechversuche wurden an Proben durchgeführt, die Feuchte an die Umgebung abgeben können (unversiegelt). So ermittelte Kriechverformungen sind stets größer als die einer identischen Probe mit verhinderter Feuchteabgabe (versiegelt). Diese Beobachtung ermöglicht eine weitere Aufspaltung der Kriechanteile infolge Fließens in das Grundfließen einer vor Trocknung geschützten Probe und den trocknungsbedingten Anteil, das Trocknungsfließen.

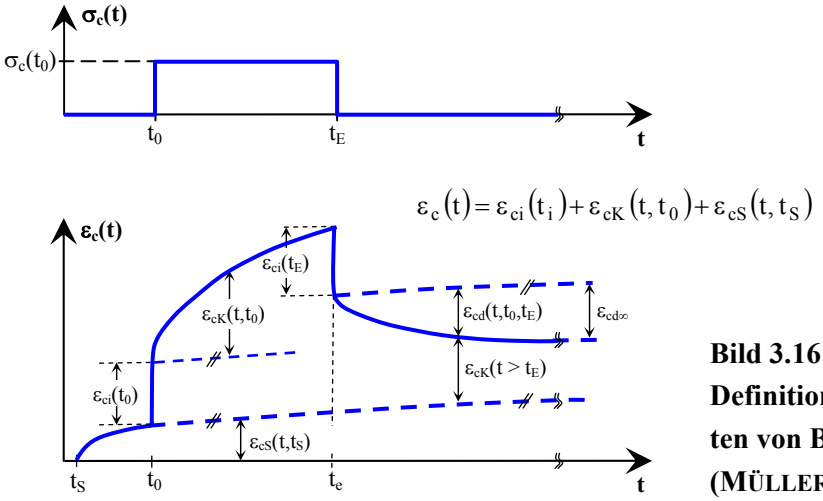



**Bild 3.16: Definition der Verformungskomponenten von Beton im Einstufenversuch (MÜLLER/KVITZEL [105])**

Auf der Basis einer Vielzahl weltweit durchgeführter systematischer Versuche an unterschiedlichen Betonen besitzt man heute einen guten Überblick über die wesentlichen praxisrelevanten Einflussgrößen auf das Kriechen im Gebrauchsspannungsbereich. Der Verlauf und das Ausmaß

des Kriechens werden neben der Belastungsgröße und dem Alter des Betons insbesondere durch die betontechnologischen Parameter Zementsteinvolumen, Wasser-Zement-Wert und Volumenanteil des Zuschlages beeinflusst. Weitere äußere Einflussgrößen sind die Luftfeuchtigkeit, die Querschnittsgeometrie des Bauteils, die Erhärtungsgeschwindigkeit des Zements und die Betondruckfestigkeit (MÜLLER [103]). Hinsichtlich der qualitativen Auswirkungen der einzelnen Einflüsse auf die Kriechverformungen kann zusammenfassend festgestellt werden, dass diese zunehmen, wenn:

- der w/z-Wert zunimmt,
- ein langsam erhärtender Zement verwendet wird,
- der Elastizitätsmodul oder der Volumenanteil des Zuschlages abnimmt,
- die kriecherzeugende Spannung ansteigt und die Lasteinwirkungsdauer zunimmt,
- die wirksame Bauteildicke und/oder die Umgebungsfeuchte abnehmen,
- die während der Belastung konstante Temperatur zunimmt, während eine längere Zeit einwirkende hohe Temperatur vor der Belastung zu einer Abnahme der Kriechverformungen führt.

Außerdem nehmen die Kriechverformungen zu, je früher der Beton belastet wird.

Zwischen den einzelnen Einflüssen bestehen darüber hinaus verschiedene Wechselwirkungen, die teilweise bekannt, jedoch durch systematische Versuche noch nicht ausreichend quantifiziert wurden (MÜLLER/KVITZEL [105]).

Wie bereits erwähnt, ist zwischen der kriecherzeugenden Spannung und der Kriechdehnung im Gebrauchslastbereich ein nahezu linear-elastischer Zusammenhang erkennbar. Die Grenze zum nichtlinearen Kriechen weist dabei eine signifikante Abhängigkeit von der Betonfestigkeit (Porosität) auf und wird für normalfesten, druckbeanspruchten Beton mit etwa 40 % der Druckfestigkeit zu Belastungsbeginn angegeben (MÜLLER/KVITZEL [105])

Die genannten Einflüsse und deren Auswirkungen sind gleichermaßen an normal- und hochfesten Betonen zu beobachten. Allerdings bewirkt die Festigkeitssteigerung und dabei technologisch bedingte Verringerung der Zementsteinporosität eine erhebliche Veränderung der quantitativen Auswirkungen der einzelnen Kriechkomponenten. Die wesentlichen Unterschiede zwischen den Kriechkomponenten beim normal- und hochfesten Beton sind in Bild 3.17 qualitativ dargestellt. Unter konstanten Bedingungen können nach MÜLLER/KVITZEL [105] folgende Aussagen zur qualitativen und quantitativen Veränderung der Kriechkomponenten bei hochfesten Betonen getroffen werden:

- Grundsätzlich ist die Gesamtkriechverformung bei hochfestem Beton erheblich kleiner als bei normalfestem Beton.
- Der Anteil aus Trocknungskriechen wird gegenüber normalfestem Beton erheblich kleiner, das Grundkriechen reduziert sich ebenfalls, jedoch nicht so stark wie das Trocknungskriechen.
- Das Verhältnis zwischen Trocknungs- und Grundkriechen sinkt mit zunehmender Festigkeit.

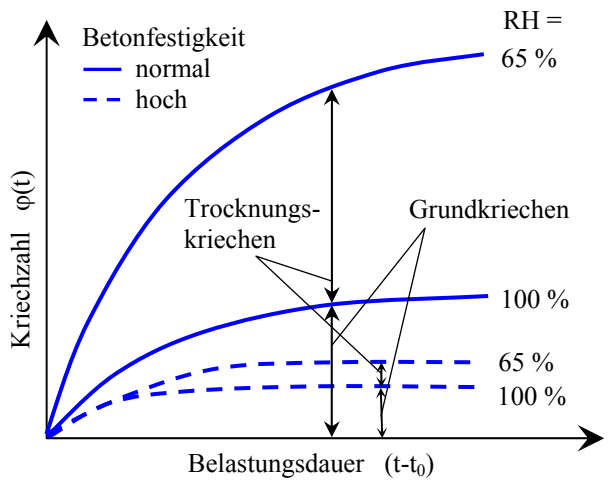



**Bild 3.17**
**Zeitlicher Verlauf des Kriechens von normal- und hochfestem Beton in Abhängigkeit vom Feuchtegehalt (MÜLLER/KVITZEL [105])**

### *Physikalische Ursachen*

Nach RÜSCH ET AL. [118] wird das Kriechen des Betons im Gebrauchslastbereich nahezu vollständig durch die zeitabhängigen Spannungen und Verformungen innerhalb der Zementsteinmatrix verursacht. Die Steifigkeiten der Normalzuschläge verhalten sich in diesem Bereich weitgehend elastisch und sind zeitinvariant. Erst bei höheren Spannungen führt das Risswachstum in der Kontaktzone zwischen Zuschlag und Zementstein zu einer zeitabhängigen Volumenabnahme.

Als allgemein gesichert gilt, dass das in den Poren des Zementsteins physikalisch gebundene Wasser eine entscheidende Rolle beim Kriechvorgang spielt. Auf dieser Annahme basierende Modellvorstellungen versuchen das Kriechen anhand von Platzwechselvorgängen der Wassermoleküle in der Adsorptionsschicht zwischen den Gelpartikeln zu beschreiben. Diese Schicht entsteht bei einem Feuchtegehalt von etwa 40 % bis 45 %, weshalb die Kriechdehnung und -geschwindigkeit oberhalb dieser Feuchte stark ansteigen. Unklar ist jedoch, ob die Wasserbewegung durch mechanischen Druck oder thermomechanisch ausgelöst wird (HANNAWALD [60]).

Zusammenfassend ist festzustellen, dass derzeit keine Klarheit darüber besteht, welche Mechanismen in welchem Umfang am Kriechvorgang beteiligt sind. Die im nächsten Abschnitt betrachteten mathematischen Formulierungen zum zeitlichen Verlauf des Betonkriechens stellen deshalb aus Versuchen abgeleitete empirische Ansätze dar, welche auf dem makroskopisch sichtbaren Verhalten bei Variation der genannten Einflussgrößen basieren.

### *Grundlagen der Beschreibung des Betonkriechens*

Zur anschaulichen Beschreibung der Einflüsse des Betonkriechens auf das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Beton hat sich die dimensionslose Kriechzahl $\varphi_K$ bewährt:

$$\varphi_{K,(t)}(t,t_o) = \frac{\varepsilon_{cK}(t,t_0)}{\varepsilon_{c,el}(t_0)} = \varepsilon_{cK}(t,t_0)\cdot\frac{E_c(t_0)}{\sigma_c(t_0)} \tag{3.18}$$

$$\varphi_{K,28}(t,t_o) = \frac{\varepsilon_{cK}(t,t_0)}{\varepsilon_{c,el,28}} = \varepsilon_{cK}(t,t_0)\cdot\frac{E_{c,28}}{\sigma_c(t_0)} \tag{3.19}$$

Danach gibt die Kriechzahl das Verhältnis zwischen einer unter Dauerlast auftretenden Zusatzdehnung und der elastischen Dehnung des Betons wieder. In Gleichung (3.18) wird die Kriechverformung auf die elastische Dehnung zum Zeitpunkt der Erstbelastung bezogen, in Gleichung (3.19) dient der Elastizitätsmodul des Betons im Alter von 28 Tagen als Bezugsgröße. Der Unterschied in den Kriechbeiwerten wird demzufolge durch den Faktor $\varepsilon_{c,el}(t_0)/\varepsilon_{c,el,28}$ bestimmt, wobei dieser bei sehr jung belastetem Beton dementsprechend groß sein kann. Auf Gleichung (3.18) basierende Ansätze finden vor allem bei Kriechberechnungen im jungen Beton Beachtung, in dieser Arbeit wird darauf nicht weiter eingegangen (z.B. EIERLE [42], GUTSCH [58]). Gleichung (3.19) bildet derzeit die allgemein anerkannte Grundlage der Berechnungsmethoden zur Analyse der Bauteilbeanspruchungen infolge Kriechens, die Arbeit schließt sich deshalb dieser Vorgehensweise an.

Wegen des annähernd linearen Zusammenhangs zwischen erzeugender Spannung und Kriechverformung im Bereich der Gebrauchsspannungen kann der Beton den linear-viskoelastischen Werkstoffen zugeordnet werden. Damit besteht bei einem zeitveränderlichen Spannungsverlauf die Möglichkeit, das Spannungs-Zeit-Verhalten auf der Basis des Superpositionsprinzips von BOLTZMANN [19] zu formulieren. Diese Annahme stellt für die rechnerische Analyse des Kriechens eine grundlegende Voraussetzung dar und ist gleichzeitig die Basis vieler aus der Literatur bekannter linearer Kriechansätze. Die gebräuchlichste Formulierung des integralen viskoelastischen Materialgesetzes mit Alterung lautet in allgemeiner Form:

$$\varepsilon_c(t,t_o) = J(t,t_0)\cdot\sigma_c(t_0) + \int_{t_0}^{t} J(t,\tau)\cdot\frac{\partial\sigma_c(\tau)}{\partial\tau}\cdot d\tau \tag{3.20}$$

Gleichung (3.20) beschreibt in allgemeiner Form die zeitliche Entwicklung der gesamten lastabhängigen Dehnung eines Betons, welche durch einen zum Zeitpunkt $t_0$ mit der Spannung $\sigma_c(t_0)$ ausgelösten Spannungsverlauf $\sigma_c(\tau)$ verursacht wird. Die Funktion $J(t,t_0)$ wird als Kriechfunktion (compilance function) bezeichnet und stellt die auf die Spannung bezogene Summe aus elastischer Dehnung und Kriechdehnung dar. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$J(t,t_o) = \frac{1}{E_c(t_0)}\cdot\left[1+\frac{E_c(t_0)}{E_{c,28}}\cdot\varphi_K(t,t_0)\right] \tag{3.21}$$

***Anwendung des Superpositionsprinzips***

In dieser Arbeit wird die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit aus Gleichung (3.20) mit einem Differenzenverfahren schrittweise gelöst. Um die Alterung des Betons zu erfassen, ist dabei in jedem Zeitschritt eine Summation über die bisherige Belastungsgeschichte erforderlich. Die gewählte Anwendung des Superpositionsprinzips und deren numerische Umsetzung werden im Folgenden beschrieben. Sie bildet die Grundlage des Lösungsverfahrens dieser Arbeit. Weitere Lösungsmöglichkeiten für Gleichung (3.20) werden beispielsweise von BLESSENOHL [14] und HANNAWALD [60] vorgestellt und hinsichtlich ihrer Vorhersagegenauigkeit und dem dazu erforderlichen Rechenaufwand verglichen.

Zur schrittweisen Analyse des Betonkriechens wird die Zeitachse zunächst in Zeitschritte $\Delta t_i$ unterteilt. Nähert man den Spannungsverlauf $\sigma_c(\tau)$ in der Integralgleichung (3.20) durch eine schrittweise konstante Stufenfunktion an und verwendet die mit Gleichung (3.19) gegebene zeitunabhängige Approximation der Kriechzahl zur Beschreibung der Kriechfunktion (Gl. (3.21)), lässt sich der Dehnungszuwachs infolge Kriechens für einen Zeitschritt $\Delta t_i$ als Summe der differenziellen Zuwächse aller Teilkriechprozesse im aktuellen Zeitschritt bestimmen. Durch Addition der Zuwächse des aktuellen Zeitschrittes mit den bisherigen Gesamtdehnungen werden die Gesamtverformungen des Betons erhalten.

Die gewählte Anwendung eines Differenzenverfahrens setzt eine konstante Spannung innerhalb der Zeitschritte voraus. Diese Forderung kann vor allem bei sehr jung belastetem Beton zumeist nur durch eine sehr feine Teilung der Zeitachse erfüllt werden. Im Hinblick auf eine Minimierung des Rechenaufwandes werden in Abschnitt 4.4.4 dazu notwendige Intervallteilungskriterien diskutiert.

Zur numerischen Lösung der Integralgleichung (3.20) ist außerdem noch eine Annahme bezüglich der Veränderung der Kriechzahlen innerhalb eines Zeitintervalls $\Delta t_i$ zu treffen. Dazu bieten sich drei Vorgehensweisen an (BLESSENOHL [14]):

- Methode der Anfangskriechzahlen
- Methode der gemittelten Kriechzahlen
- Methode mit gemitteltem Belastungsalter

In dieser Arbeit wird die Methode der Anfangskriechzahlen angewendet. Dabei werden die Dehnungsänderung und der Kriechbeginn bereits am Anfang eines Zeitintervalls wirksam (Bild 3.18). Dieses Vorgehen führt zu einer systematischen Überschätzung des tatsächlichen Spannungsverlaufs (vgl. auch Bild 2.3), was jedoch durch eine feinere Teilung der Zeitachse teilweise kompensiert werden kann. Vorteilhaft ist allerdings, dass bei veränderlichen Umgebungsbedingungen die Kriechzahlen ausschließlich aus den im aktuellen Zeitschritt gültigen Bedingungen resultieren. An dieser Stelle entsteht programmintern ein vergleichsweise geringerer Speicher- und Rechenaufwand. Eine genauere Darstellung und ein Vergleich der oben genannten Methoden ist beispielsweise in den Arbeiten von BLESSENOHL [14] und IBACH [69] enthalten.

Das beschriebene Vorgehen kann für die Dehnungszuwächse infolge Kriechens in einem Zeitschritt folgendermaßen formuliert werden:

$$\Delta\varepsilon_{cK}\left(t_i, t_{i-1}, t_o\right) = \sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\Delta\sigma_{cj}}{E_{c,28}} \cdot \Delta\varphi_K\left(t_j, t_{j-1}, t_0\right)\right] \tag{3.22}$$

Die Gesamtdehnung des Betons zum Zeitpunkt $t_i$ folgt damit zu:

$$\varepsilon_c\left(t_i, t_o\right) = \varepsilon_c\left(t_{i-1}, t_o\right) + \Delta\varepsilon_{c\sigma}\left(t_i, t_{i-1}\right) + \Delta\varepsilon_{cK}\left(t_i, t_{i-1}, t_0\right) + \Delta\varepsilon_{cS}\left(t_i, t_{i-1}, t_S\right) \tag{3.23}$$

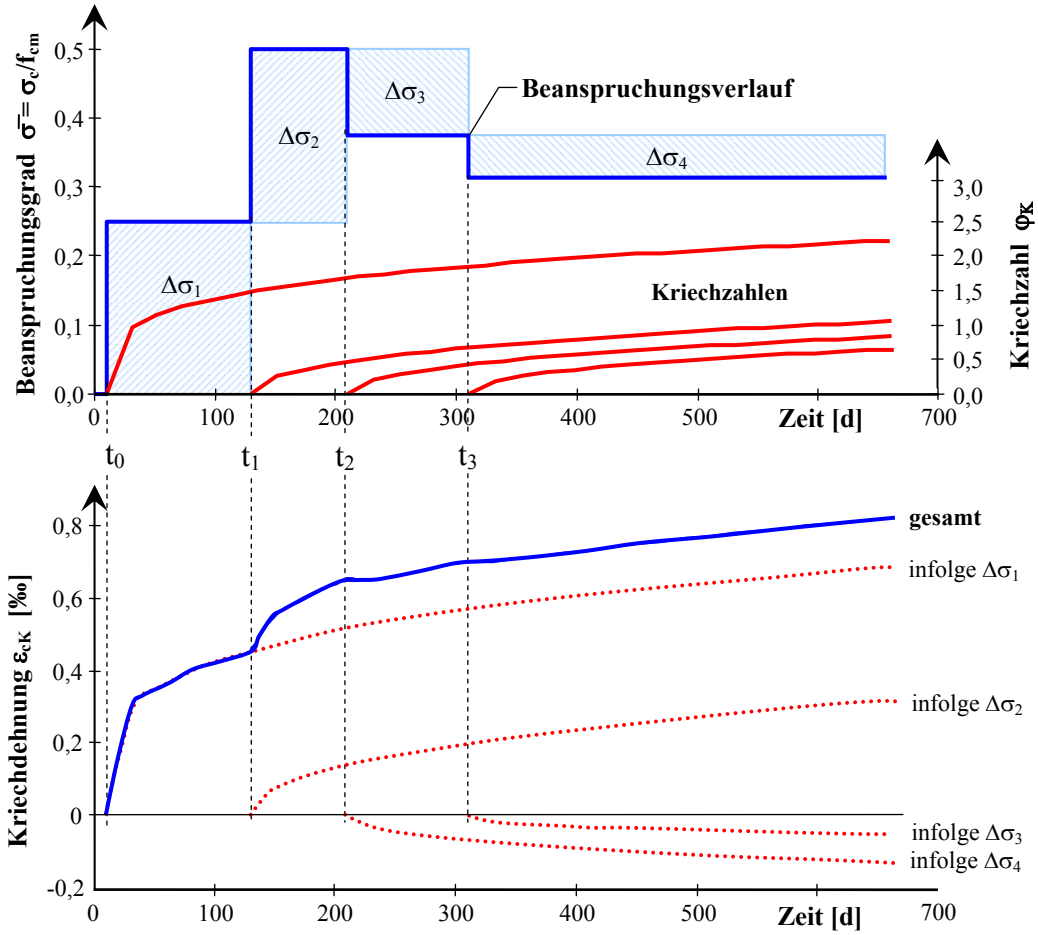



**Bild 3.18: Beispiel für die Ermittlung der Kriechdehnung mit dem RSM unter veränderlicher Beanspruchung (FLEDERER [49])**

### *Lineare Kriechansätze*

Die lineare Abhängigkeit zwischen dem zeit- und lastabhängigen Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Beton unter Gebrauchslasten stellt, wie bereits erwähnt, eine Idealisierung dar, um die Kriechverformungen des Betons unter veränderlichen Spannungen mit dem Superpositionsprinzip rechnerisch zu erfassen. Da die physikalischen Ursachen des Betonkriechens nicht hinreichend geklärt sind, erfolgt die zeitabhängige Formulierung der Kriechzahl bzw. der Kriechfunktion empirisch ggf. unter Verwendung rheologischer Modelle. Hinsichtlich ihrer mathematischen Formulierung werden dabei die aus der Literatur bzw. technischen Regelwerken bekannten wesentlichen Modelle der linearen Kriechtheorie in Produkt- und Summationsansätze unterschieden.

Die Besonderheit eines Produktansatzes besteht darin, dass die Funktionen zur Berücksichtigung vom Einfluss des Belastungsalters und des zeitlichen Verlaufs der Kriechverformung unter Dauerlast multiplikativ miteinander verknüpft werden. Dieser Ansatztyp liegt beispielsweise den Modellen von MODELLCODE90 [96], DIN 1045-1 [32] und dem Modell B3 (BAŽANT/BAWEJA [11]) zugrunde.

$$\varepsilon_{cK}(t,t_0) \approx g_1(t_0) \cdot f_1(t-t_0) \tag{3.24}$$

Für einen Summationsansatz ist dagegen die Aufspaltung der Kriechdehnung in die reversible verzögert elastische Verformung und das irreversible Fließen charakteristisch. Ein Beispiel dafür ist das Modell der DIN 4227 [34].

$$\varepsilon_{cK}(t,t_0) \approx g_2(t-t_0) + [f_2(t) - f_2(t_0)] \tag{3.25}$$

In einem verfeinerten Summationsansatz, dem Revised Summation Model (RS-Modell) nach MÜLLER/HILSDORF [104], wird das irreversible Fließen darüber hinaus in einen trocknungsbedingten Fließanteil (Trocknungsfließen) und das Grundfließen unterteilt. Die reversible verzögerte Elastizität wird als altersabhängige Funktion formuliert.

In der Praxis (Normung) haben sich überwiegend aus Gründen der besseren Handhabung die Produktansätze bewährt.

Aktuelle empirische Ansätze zur Vorhersage der mittleren Kriechdehnung eines Bauteils wurden und werden durch eine statistische Auswertung von Versuchsergebnissen hergeleitet und optimiert. Zur Vereinheitlichung und Vergrößerung der statistischen Datenbasis wurden im Auftrag des SUBCOMMITTEE 5 OF RILEM TC 107-CSP [114] weltweit durchgeführter Versuche zum einaxialen Druckkriechen im Gebrauchslastbereich und zum Schwinden zusammengetragen, nach einheitlichen Kriterien analysiert und bei Eignung in einer Datenbank dokumentiert. Für das Kriechen umfasst diese Datenbank derzeit etwa 520 Einzelversuche. Allerdings können nicht alle dieser Werte einer Modellfindung zugrunde gelegt werden, da teilweise nicht praxisrelevante Randbedingungen (Betonzusammensetzung, Lagerungsbedingungen, Erstbelastungszeitpunkt, etc.) gewählt wurden. Aus Tabelle 3.2 ist ersichtlich, dass aktuelle Vorhersageverfahren auf einer statistischen Grundlage von etwa 100 bis 150 Versuchen entwickelt wurden.

Bild 3.19 stellt verschiedene Vorhersagemodelle für einen verbundbautypischen Betonquerschnitt gegenüber. Daraus ist zu erkennen, dass die Kriechzahlen in einem konkreten Fall deutlich voneinander abweichen können. Diese Diskrepanz betrifft sowohl die Vorhersage der Endkriechzahl als auch deren zeitliche Entwicklung und ist im Wesentlichen auf folgende Annahmen bei der Modellfindung zurückzuführen (MÜLLER [103]):

- Die Verwendung unterschiedlicher Zeitfunktionen zur Beschreibung des Kriechverlaufs (Hyperbel-, Exponential-, Potenzfunktionen, etc.)
- Eine ungleiche Datenbasis, deren Auswahl durch die jeweiligen Verfasser individuell erfolgt (z.B. MÜLLER [103], S. 41 ff.)
- Die Anpassung der Kriechzahl an die Messwerte erfolgte teilweise per Hand. Neben subjektiven Kriterien ist dabei insbesondere die Wichtung einzelner Einflussgrößen unterschiedlich ausgeprägt.
- Eine Berücksichtigung verschiedener Eingabedaten zur Bestimmung der Kriechzahl. Dies betrifft insbesondere die Betonzusammensetzung (Tabelle 3.2).

Betrachtet man das große Anwendungsspektrum, für welches die Ansätze ausgelegt sind, und die vergleichsweise geringe statistische Datenbasis, so ist an dieser Stelle deutlich hervorzuheben, dass mit den Vorhersagemodellen ausschließlich das mittlere Kriechverhalten eines Betons bewertet werden kann. Aus den zuvor genannten Gründen ist dabei jedoch eine verschieden

genaue Anpassung an unterschiedliche Versuchsreihen zu erwarten. Wird beispielsweise bei einer Versuchsreihe der Einfluss eines Parameters unterschätzt, kann derselbe Einfluss bei einer anderen Versuchsreihe zu einer Überschätzung führen. Die Genauigkeit des Modell B3 von BAŽANT/BAWEJA [11] wird zum Beispiel maßgebend durch die Berücksichtigung der Volumenanteile von Zement, Wasser und Zuschlagstoffen geprägt. Europäische und deutsche Ansätze, wie das RS-Modell oder die Modelle des MODELCODE90 [96] und der DIN 1045 [32], berücksichtigen dagegen die Betonzusammensetzung zugunsten einer einfacheren Anwendung allein über die mittlere Betondruckfestigkeit.

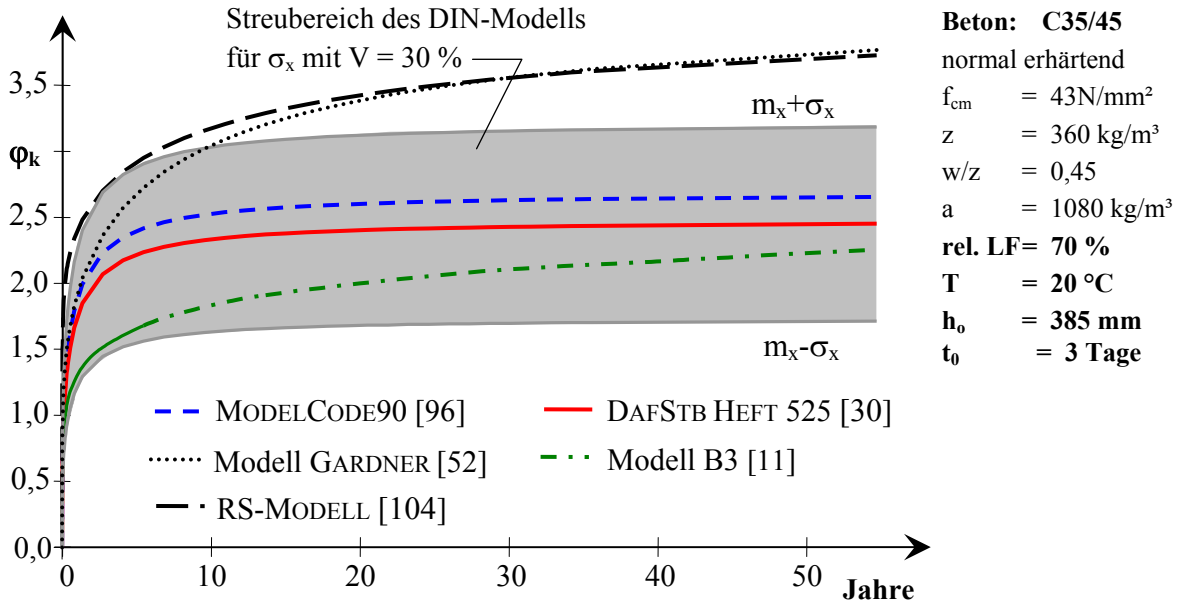



**Bild 3.19: Gegenüberstellung verschiedener Kriechansätze**

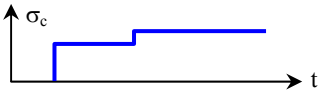
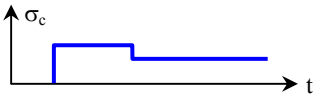
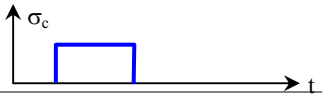
Tabelle 3.2 beinhaltet eine Übersicht der Anwendungsgrenzen und erforderlichen Eingangsgrößen einiger wesentlicher Kriechansätze. Bezüglich des angegebenen Variationskoeffizienten ist anzumerken, dass dieser durch den Anwendungsbereich eines Modells maßgebend beeinflusst wird und daher nur bedingt als Kriterium dienen kann.

Im Hinblick auf die numerische Analyse komplexer Tragwerksprozesse ist neben einer geeigneten Approximation der Kriechdehnung unter Dauerlast die Qualität des gewählten mathematischen Ansatzes bei veränderlicher Lastgeschichte von Interesse. Grundsätzliche Unterschiede sowie die Genauigkeit der Kriechvorhersage bei der Verwendung eines Produkt- oder Summationsansatzes wurde von MÜLLER/HILSDORF in [104] für verschiedene in der Praxis auftretende Fälle analysiert. Eine zusammenfassende Darstellung der Untersuchungsergebnisse enthält Tabelle 3.3.

| Kenngröße | MODELCODE90 [96] | DIN 1045-1 [32] | RSM [104] | Modell B3 [11] | GL2000 [52] |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_{cm}$ [N/mm²] | 20 - 88 | 20 - 108 | 20 - 70 | 17 - 70 | 20 - 70 |
| $E_c$ | $E_{cm,28}$ | $E_{c0m,28}$ | $E_{cm,28}$ | $E_{c0m,28}$ | $E_{cm,28}$ |
| RH [%] | 40 - 100 | 40 - 100 | 40 - 100 | 40 - 100 | 40 - 100 |
| Temp. [°C] | 5 - 80 | 10 - 30 | 5 - 80 | k.A. | k.A. |
| a/c | - | - | - | 2,5 - 13,5 | - |
| c [kg/m³] | - | - | - | 160 - 720 | - |
| w/c | - | - | - | 0,30 - 0,85 | 0,4 - 0,6 |
| Zementtyp | R, N, SL, RS | R, N, SL, RS | R, N, SL, RS | I, II, III | I, II, III |
| $h_0$ | x | x | x | x | x |
| $t_S$ [Tage] | k.A. | $\leq$ 14 | $\geq$ 1 | $t_S \leq t_0$ | $\geq$ 2 |
| $t_0$ [Tage] | k.A. | $\geq$ 1 | $\geq$ 1 | $t_0 \geq t_s$ | $\geq$ 2 |
| $V(J(t,t_0))$ [%] | $\pm$20 | $\pm$30 | $\pm$21 | ca. $\pm$15 | $\pm$30 |
| Datenbasis (Versuche) | 134 | ca. 150 | ca. 125 | > 100 | 185 |

k.A. … keine Angaben

**Tabelle 3.2 Anwendungsgrenzen, Eingangsgrößen und Vorhersagegenauigkeit einiger Modelle für das Betonkriechen**

| Belastungsgeschichte | Kriterium | Vorhersagegenauigkeit *) | |
|---|---|---|---|
| | | Produktansatz | Summationsansatz |
| konstante Spannung | Einfluss des Betonalters bei Erstbelastung | + | ○ |
| | zeitliche Entwicklung | + | ○ |
| Spannungszunahme |   | ○ | ○ |
| Spannungsabnahme |   | ○ | ○ |
| |   | – | ○ |
| Relaxation | Sehr junger Beton bei Erstbelastung, dickem Bauteil oder hoher rel. LF | – | ○ |
| | andere Fälle | ○ | ○ |

*) + … gut / o … mittel / – … schlecht

**Tabelle 3.3 Vergleich zwischen Produkt- und Summationsansatz bezüglich der Vorhersagegenauigkeit des Betonkriechens bei Belastungsänderung (MÜLLER/HILSDORF [104])**

Generell zeigt sich, dass die Summationsansätze gegenüber den Produktansätzen besser geeignet sind, das experimentell zu beobachtende Verformungsverhalten bei Entlastung zu beschreiben. Dieser Vorteil wird durch die Formulierung der verzögerten Elastizität als eigenständige Verformungskomponente erzielt. Je größer der Entlastungsgrad, umso deutlicher tritt dieser Unterschied hervor. Mit einem Produktansatz lässt sich allerdings der Verlauf der Kriechverformungen über die gesamte Belastungsphase für verschiedene Belastungsalter zutreffend beschreiben, was bei einem Summationsansatz wie dem nach DIN 4227 [34] vor allem bei kürzeren Belastungszeiträumen nicht gegeben ist.

Um diese Schwäche des Summationsansatzes zu kompensieren, wurde von MÜLLER [103] das in MÜLLER/HILSDORF [104] in vereinfachter Form veröffentlichte RS-Modell entwickelt. Dies gelingt durch die Aufspaltung des irreversiblen Fließens in die Anteile Grund- und Trocknungsfließen:

$$\varphi_K(t,\tau,t_0) = \varphi_d(t,\tau) + \varphi_{fb}(t,\tau,t_0) + \varphi_{fd}(t,\tau,t_0) \tag{3.26}$$

Die einzelnen Terme haben dabei folgende Merkmale:

Verzögerte Elastizität ($\varphi_d$):
- Linear von der äußeren Beanspruchung abhängig
- Altersabhängig → die Alterung beeinflusst Größe und Verlauf
- Durch die Betonzusammensetzung und klimatische Bed. beeinflusst

Grundfließen ($\varphi_{fb}$):
- Linear von der äußeren Beanspruchung abhängig
- Verwendung einer logarithmischen Funktion ohne Endwert

Trocknungsfließen ($\varphi_{fd}$):
- Nichtlinear von der äußeren Beanspruchung abhängig
- Durch klimatische und geometrische Bedingungen beeinflusst
- Verwendung einer Hyperbel → Annäherung an einen Endwert

Als rheologisches Modell kann dieses Verhalten durch in Reihe geschaltete Kelvin- und Dämpfungs-Elemente ausgedrückt werden (Bild 3.20). Die Kelvin-Elemente erfassen die verzögerte Elastizität, wobei deren Anzahl die Vorhersagegenauigkeit bestimmt. Mit den Dämpfungselementen werden die beiden Fließanteile modelliert.

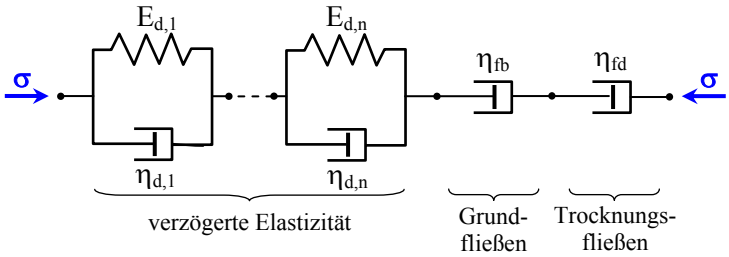



**Bild 3.20 Rheologisches Modell des RS-Modells zu Gleichung (3.26)**

### *Nichtlineares Kriechen*

Aus experimentellen Untersuchungen zum Betonkriechen im nichtlinearen Druckspannungsbereich ist eine überproportionale Zunahme der Kriechdehnungen bekannt (MÜLLER [103], ROTTLER [117]). Unter einer konstant einwirkenden Spannung ist die Nichtlinearität dabei kurz nach der Belastung am größten und sinkt ebenso wie der wirksame Belastungsgrad mit zunehmender Belastungsdauer ab. Auf der Basis systematischer Versuche können von

ROTTLER [117] die Belastungshöhe, das Erstbelastungsalter und die Dauer einer Lasteinwirkung als wesentliche, die Überproportionalität und ihren zeitlichen Verlauf beeinflussende Größen angegeben werden. Zum nichtlinearen Kriechen bei veränderlicher Spannung liegen dem gegenüber nur wenige, zum Teil widersprüchliche Versuchsergebnisse vor, sodass eine zuverlässige modellhafte Beschreibung derzeit noch nicht möglich ist.

Für das im vorangegangenen Abschnitt angesprochene RS-Modell sowie die Ansätze des MODELCODE90 [96] und der DIN 1045-1 [32] besteht die Möglichkeit, das nichtlineare, spannungsabhängige Anwachsen der Kriechdehnungen unter Dauerlast im Bereich zwischen 40 % und 60 % der Betondruckfestigkeit durch Multiplikation mit einer Exponentialfunktion abzuschätzen. Beim RS-Modell werden außerdem die Anteile aus Grund- und Trocknungsfließen mit verschiedenen Funktionen beschrieben, um die im Experiment zu beobachtende geringere Nichtlinearität des Grundfließens zu beachten. Eine zusammenfassende Darstellung und Diskussion bekannter Ansätze zur Erfassung der Überproportionalität beim nichtlinearen Betonkriechen beinhaltet die Arbeit von ROTTLER [117]. Deren Anwendung ist ausschließlich auf die Einwirkung einer konstanten Dauerlast beschränkt (MÜLLER/HILSDORF [104]). Werden die Beziehungen bei veränderlicher Spannung angewendet, führt das Vorgehen bei Laststeigerung zu einer Unterschätzung der Kriechverformungen und bei einer Entlastung zu einer Überschätzung des Rückkriechens. Dieses Verhalten ist unabhängig vom Kriechansatz zu beobachten.

Auf der Grundlage eigener Versuche wird von ROTTLER [117] eine Formulierung für den Nichtlinearitätsindex n angegeben, welche neben der Beanspruchungshöhe auch die Beanspruchungsdauer berücksichtigt:

$$n = e^{10\cdot\overline{\sigma}^5} + \frac{(3{,}5\cdot\overline{\sigma})^3}{(t-t_0)+8} \quad \text{mit } \overline{\sigma} \le 0{,}7 \tag{3.27}$$

Mit diesem Ansatz wird eine gute Übereinstimmung von Messung und Modell für Betone erzielt, die im Alter von 28 Tagen belastet wurden. Bei Erstbelastungen im Bereich von einem Tag bis drei Tagen wird damit allerdings die zeitliche Entwicklung der Nichtlinearität überschätzt.

Abschließend soll kurz auf ein von SHEN [131] vorgeschlagenes rheologisches Modell eingegangen werden, da es vor allem in jüngerer Zeit vermehrt im Rahmen nichtlinearer Strukturanalysen Verwendung findet (z.B. DIENER [31], BOCKHOLD/STANGENBERG [15]). Der Ansatz basisiert im linearen Bereich zunächst auf einem POYNTING-THOMSON-Modell. Zur Beschreibung des überproportionalen Ansteigens der Kriechdehnungen werden die im linearen Bereich ideal-elastischen, rheologischen Grundelemente durch mathematische Terme ersetzt, um über einen Beiwert eine beanspruchungsabhängige Variation zwischen ideal-elastisch und ideal-plastisch zu ermöglicht. Ein auf der Grundlage eigener Versuche abgeleiteter Nichtlinearitätsfaktor diente dabei zur Kalibrierung des Modells. Allerdings liegen diesem nur Versuche mit einem Erstbelastungsalter von mindesten zwei Monaten und einer Versuchsdauer von maximal sieben Tagen zugrunde. Nach BAŽANT ET AL. [12] ist die gewählte Formulierung nur unter diesen Bedingungen gültig, als Stoffgesetz für jüngeren oder länger belasteten Beton ist der

Ansatz jedoch ungeeignet, da der Einfluss der Alterung auf die verzögerte Elastizität nicht richtig abgebildet wird.

***Zugkriechen***

Bislang wurden nur wenige experimentelle Untersuchungen zum Betonkriechen unter Zugbeanspruchung durchgeführt (z.B. aus KORDINA ET AL. [78], WAGNER [144]). Durch Parallelversuche mit gleich großer Druck- und Zugbeanspruchung wurde dabei versucht, das zweifelsfrei vorhandene Zugkriechen bezogen auf das statistisch umfangreicher abgesicherte Druckkriechen zu beschreiben.

Die folgende Zusammenfassung gibt die von KORDINA ET AL. [78] aus eigenen Versuchen getroffenen Schlussfolgerungen wieder. Sie stimmen im Wesentlichen mit den Aussagen anderer Autoren überein.

- Bis zum untersuchten Belastungsniveau von 70 % der Zugfestigkeit ist eine Spannungsproportionalität der Kriechverformungen zu verzeichnen.
- Die Kriechbeiwerte liegen in der Größenordnung der parallel dazu durchgeführten Versuche zum Druckkriechen.
- Die Dauerstands-Zugfestigkeit tritt etwa bei 75 % der zentrischen Zugfestigkeit auf.
- Für das Zugkriechen deutet sich gegenüber dem Druckkriechen ein stärkerer Einfluss der Umgebungsbedingungen, des Zementgehaltes und des w/z-Wertes an.

Basierend auf diesen Ergebnissen wird vorgeschlagen das Zugkriechen biegebeanspruchter Bauteile näherungsweise mit den bekannten linearen Kriechansätzen für druckbeanspruchte Bereiche zu erfassen. Dieser Vorschlag wurde optional in den Kriechansatz dieser Arbeit übernommen.

Ergänzend sei der Umfang der Versuche erwähnt, aus denen diese Angaben resultieren: Je Belastungsalter ($t_0$ = 3, 8 und 13 Monate) und Kriechspannung (40 %, 60 % und 80 % von $f_{ctm}$) wurden zwei versiegelte und zwei unversiegelte Proben untersucht. Die Belastungsdauer betrug vier Monate (112 Tage).

***Zweiaxiales Kriechen***

Im Stahl-Beton-Verbundbau sind vor allem bei vorgespannten Tragwerken mehraxiale Beanspruchungszustände mit hohen Druckspannungsverhältnissen zu verzeichnen. Speziell im Verbundbrückenbau wird die Quervorspannung einer Fahrbahnplatte vorteilhaft genutzt, um schlanker zu bauen und damit leichtere und wirtschaftlichere Konstruktionen zu erhalten. Unter der Einwirkung einer Dauerlast ist dabei in den druckbeanspruchten Feldbereichen die Hauptspannungsrichtung oftmals durch die Quervorspannung geprägt. Bei der Bemessung dieser Konstruktionen ist es jedoch bislang üblich, die Tragfähigkeitsnachweise im Fall ebener Modelle mit den einaxialen Stoffgesetzen des Betons für beide Tragrichtungen getrennt zu führen oder bei Verwendung von räumlichen FE-Anwendungen die Nachweise unter Berücksichtigung mehraxialer Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit für die kurzzeitigen Festbetoneigenschaften zu erbringen. In beiden Fällen wird das Kriechen durch normativ geregelte

Ansätze erfasst, die auf eindimensionalen Betrachtungen basieren. Eine gegenseitige Beeinflussung findet keine Beachtung. Um der Fragestellung nachzugehen, ob und wie die Quervorspannung der Fahrbahnplatte einer Verbundkonstruktion das Trag- und Verformungsverhalten unter Dauerlast beeinflusst, wird im Folgenden der Kenntnisstand zum Kriechen unter zweiaxialer Druckbeanspruchung dargelegt.

Der größte Teil der experimentellen Untersuchungen zum Betonkriechen wurde bisher an einaxial druckbeanspruchten Proben durchgeführt. Unter mehraxialer Beanspruchung liegen nur wenige Versuchsergebnisse vor, wobei sich diese im Wesentlichen auf Druckbeanspruchungen konzentrieren (LANIG [81]). In der Erwartung, dass eine Vorhersage der mehraxialen Kriechverformungen auf der Basis einaxialer Kriechversuche möglich wird, wurden die Versuche an ein- und mehraxial druckbeanspruchten Parallelproben durchgeführt. Zum mehraxialen Kriechen unter kombinierter Zug- und Druckbeanspruchung liegen in der eingesehenen Literatur kaum Untersuchungen vor, was auf grundlegende versuchstechnische Schwierigkeiten bei der Durchführung und zusätzliche Probleme bei der messtechnischen Erfassung der sehr kleinen Verformungen zurückzuführen ist.

Die in der Literatur dokumentierten Versuche liefern zunächst sehr widersprüchliche Ergebnisse. Um eine objektive Bewertung zu ermöglichen, wurden diese im Rahmen einer Studienarbeit von DÄBRITZ [29] zunächst hinsichtlich ihrer Kompatibilität mit den Eignungskriterien der RILEM-Datenbank (RILEM TC 107 [114]) für einaxiale Kriechersuche analysiert. Auf der Basis dieser Kriterien verbleiben für nähere Betrachtungen insgesamt 52 Versuche von vier Autoren (ARTHANARI [6] (1966), GOPALAKRISHNAN [56] (1968), LANIG [81] (1988), MEYER [94] (1967)). Ergänzt um Angaben zum mehraxialen Spannungszustand ist das Ergebnis in Anlage I enthalten. Alle weiteren, zumeist älteren Versuche, sind in der Regel unzureichend dokumentiert oder lassen Probleme bei der Durchführung und messtechnischen Erfassung der teilweise sehr kleinen Messgrößen erkennen. Nach näherer Betrachtung der Versuchsabläufe und Autorenkommentare wurden von den oben genannten Versuchen wiederum nur die Versuche von GOPALAKRISHNAN [56] und LANIG [81] als aussagekräftig angesehen.

Die Experimente umfassen Versuche an versiegelten und unversiegelten Proben teilweise mit anschließender Entlastung. Das Beanspruchungsverhältnis zwischen Quer- und Längsdruck betrug etwa 0,5 und 1, die maximale Belastungsdauer war bei LANIG [81] 90 Tage. Sie stellen die Grundlage der folgenden Aussagen dar.

In Bild 3.21 sind für verschiedene Spannungsverhältnisse die Kriechverformungen in Längsrichtung ($\sigma_x$) und Querrichtung ($\sigma_y$) aus den Versuchen von LANIG [81] an versiegelten und unversiegelten Proben dargestellt. Es zeigt sich, dass unter einaxialer Druckbeanspruchung die Kriechverformungen am größten sind, wobei dabei auch senkrecht zur Belastung Kriechverformungen zu verzeichnen sind. Das negative Vorzeichen resultiert dabei aus einer elastischen Dehnung in Querrichtung (Zugkriechen). Mit zunehmendem Querdruckverhältnis $\sigma_y/\sigma_x$ verringern sich die Kriechverformungen in Längsrichtung und nähern sich bei gleichem Längs- und Querdruck an. Diese Zusammenhänge sind aus den Versuchen von GOPALAKRISHNAN [56] ebenfalls erkennbar.

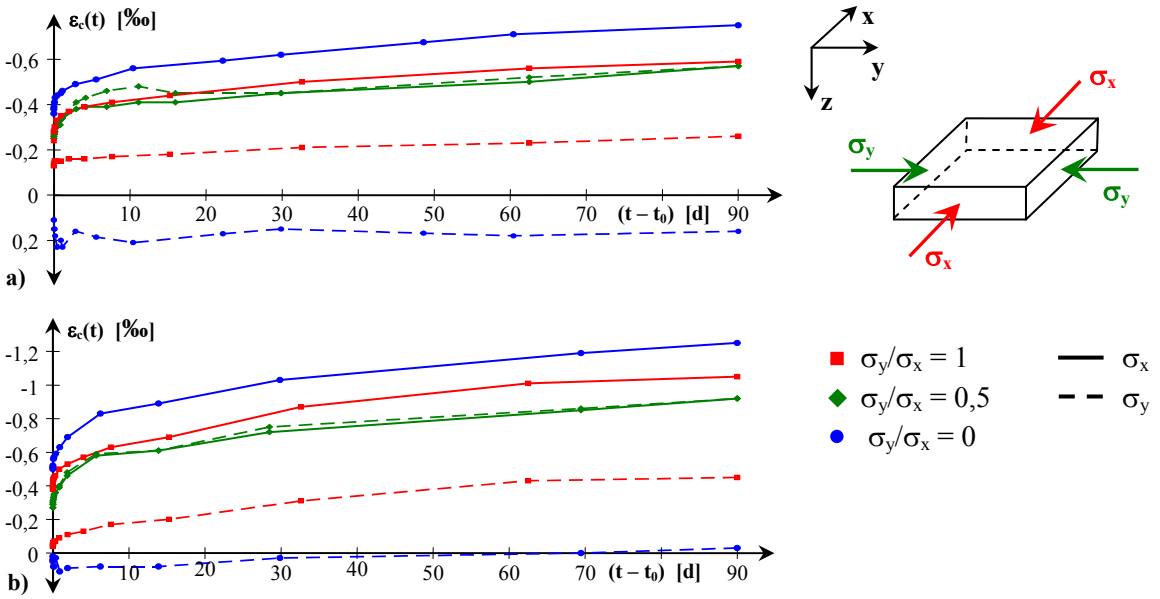



**Bild 3.21 Ergebnisse zweiaxialer Kriechversuche von LANIG [81]**
**a) versiegelte und b) unversiegelte Proben**

Aus den Versuchen von LANIG [81] ist außerdem erkennbar, dass sich zwischen $\sigma_y = 0{,}5 \cdot \sigma_x$ und $\sigma_y = \sigma_x$ die Kriechverformungen geringer reduzieren als zwischen $\sigma_y = 0$ und $\sigma_y = 0{,}5 \cdot \sigma_x$ (Bild 3.22-a). Der gleiche Effekt, jedoch nicht so ausgeprägt, ist ebenfalls aus den Versuchen von GOPALAKRISHNAN [56] ersichtlich. Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Beobachtung, dass bis zu einem Spannungsverhältnis von $\sigma_y = 0{,}5 \cdot \sigma_x$ die Kriechverformungen in der Nebentragrichtung zunächst nur unterproportional zunehmen (Bild 3.22-b).

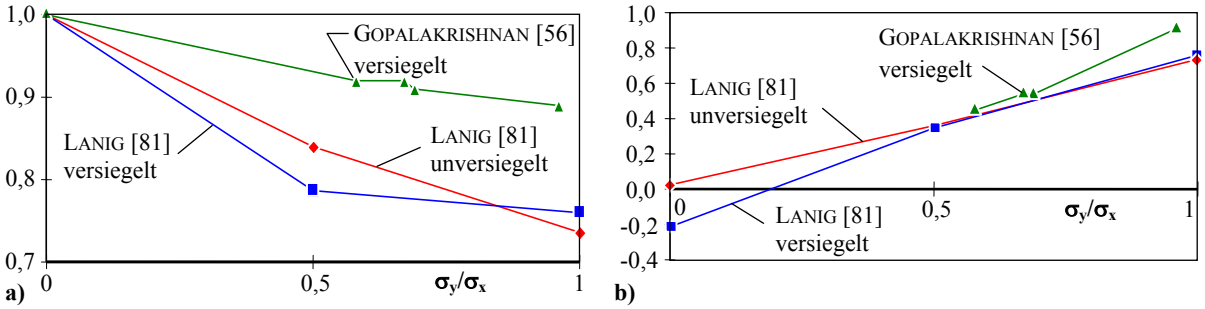



**Bild 3.22 Normierte Darstellung der Kriechdehnungen in Abhängigkeit vom Spannungsverhältnis in Längs- und Querrichtung a) in der Haupttragrichtung und b) in der Nebentragrichtung (Bezugsgröße: Kriechdehnung bei einaxialer Beanspruchung)**

Mit den dargestellten Versuchsergebnissen ist eine erste qualitative Beurteilung der Auswirkungen des zweiaxialen Kriechens bezogen auf den einaxialen Fall möglich, Tendenzen sind erkennbar. Allerdings erfordern genauere quantitative Aussagen weitere systematische Versuche zur Bestätigung. Die bisher vorliegenden Ergbnisse weisen eine zu große Streuung auf.

Anhand der vorliegenden Versuche konnte zunächst bestätigt werden, dass anliegender Querdruck einen Einfluss auf die Kriechverformung eines Betonkörpers in Längsrichtung hat. Bei gleichen Druckverhältnissen in Längs- und Querrichtung ist in den vorliegenden Fällen eine Reduzierung der einaxialen Kriechdehnungen um etwa 15 % zu erkennen, wobei der Einfluss der Umgebungsfeuchte hier sehr gering ist. Außerdem ist zu erkennen, dass die

Kriechverformungen der Hauptlastrichtung immer in einem bestimmten Verhältnis zum einaxialen Kriechen stehen. Dieses Verhältnis ist über die Zeit nahezu konstant.

Für quer vorgespannte Verbundbrücken kann daraus gefolgert werden, dass durch eine Quervorspannung die zeitabhängigen Verformungen des Tragwerkes in Brückenlängsrichtung beeinflusst werden. Da eine Quervorspannung meistens den größeren Druckspannungsanteil unter Dauerlast liefert, ist eine erhebliche Reduzierung der Kriechverformungen in Längsrichtung zu erwarten. Für ein übliches Druckspannungsverhältnis zwischen Längs- und Querrichtung von etwa 0,5 ist nach Bild 3.22-b eine Verringerung der Kriechdehnung in Längsrichtung auf etwa 40 % der einaxialen Kriechdehnung zu erwarten. Diese Feststellung könnte eine mögliche Ursache dafür sein, warum die rechnerische Vorhersage von Überbauverformungen die real auftretenden Durchbiegungen oftmals deutlich überschreitet. Auf diesem Gebiet besteht noch grundlegender Forschungsbedarf.

***Verwendetes Rechenmodell***

Das Revised Summation Model wurde für die hier behandelten Tragwerke als ein geeigneter Ansatz empfunden und deshalb als Standardverfahren in das Lösungsverfahren implementiert. Neben der vorteilhaften Anwendung bei Beanspruchungsänderungen weist das Verfahren eine gegenüber den anderen Modellen vergleichbare Streuung der Abweichungen von Versuchsergebnissen auf. Der von MÜLLER/HILSDORF [104] vorgeschlagene Algorithmus zur Beschreibung des linearen Kriechens ist in Anlage II zusammenfassend dargestellt. Eine wesentliche Grundlage dieses Ansatzes stellt die Reduzierung der benutzerdefinierten Modellparameter auf eine möglichst kleine Anzahl dar; Parameter, die beim praxisüblichen Entwurfs- bzw. Bemessungsprozess zu Verfügung stehen:

- Charakteristische Zylinderdruckfestigkeit des Betons
- Abmessungen eines Bauteils
- Mittlere relative Luftfeuchtigkeit der Umgebung
- Zeitpunkt der Erstbelastung, ggf. der Beanspruchungsänderung
- Belastungsdauer

Bei entsprechender Kenntnis können weitere Parameter genauer spezifiziert und verwendet werden:

- Zementart und seine Erhärtungsgeschwindigkeit
- Erhöhte oder verminderte Temperatur während der Belastungsdauer

Da das RS-Modell derzeit ausschließlich für die Anwendung normalfester Betone konzipiert ist, wird das Vorhersagemodell der DIN 1045-1 [32] als Wahlmöglichkeit ebenfalls in das Lösungsverfahren integriert. Mit den in DAFSTB HEFT 525 [30] enthaltenen Gleichungen zur Beschreibung des Kriechverhaltens liegt damit ein Ansatz vor, der die Abschätzung der Kriechdehnungen auch für hochfeste Betone ermöglicht.

Der Anwendungsbereich beider Modelle umfasst in seiner ursprünglichen Form zunächst den linearen Druckspannungsbereich bis zu einem Belastungsgrad $\overline{\sigma}$ von 40 % der mittleren Betondruckfestigkeit.

Beim Überschreiten der Linearitätsgrenze wird in dem programmierten Lösungsverfahren die Berechnung zunächst unterbrochen. Das nichtlineare Kriechen des Betons kann dann für Belastungsgrade bis 60 % optional durch einen modellbezogenen Nichtlinearitätsfaktor erfasst werden. Diese Entscheidung ist in Abhängigkeit vom System und der noch folgenden Belastungsgeschichte individuell zu treffen. Nach ROTTLER [117] ist bei biegebeanspruchten Betonbauteilen eine Superposition in diesem Bereich noch vertretbar.

Ein Überschreiten des unter Dauerlast zulässigen maximalen Belastungsgrades hat ein lokales Versagen am Materialpunkt und damit den Abbruch der Berechnung zur Folge.

Da aus den Betrachtungen zum Zugkriechen ein dem linearen Druckbereich ähnliches Verhalten erkennbar ist, kann die Kriechzahlberechnung im Lösungsverfahren ebenfalls wahlweise in den Zugbereich bis zum Erreichen der mittleren Zugfestigkeit übertragen werden. Für mehraxiale Dauerbelastungen wurde wegen der noch bestehenden Modellunsicherheiten kein Ansatz in das Lösungsverfahren implementiert.

Wird die Struktur eines Betonbauteils während seiner Lebensdauer durch System- oder Belastungsmodifikationen beschädigt (Rissbildung, Druckschädigung infolge einer kurzzeitig einwirkenden hohen äußeren Belastung) und im Anschluss daran wieder einer Dauerbeanspruchung unter Gebrauchslasten ausgesetzt, kommen die genannten Kriechmodelle unverändert zum Einsatz.

#### 3.1.5.2 Schwinden

Das Schwinden von Beton ist als eine lastunabhängige, teilweise reversible Volumenabnahme definiert. Die Ausdehnung von Beton bei Wasseraufnahme wird als Quellen bezeichnet. Der zeitliche Ablauf und die physikalischen Ursachen von Schwindvorgängen gelten als weitgehend geklärt. Unter konstanten Umgebungsbedingungen kann der Prozess mit einer abklingenden Zeitfunktion beschrieben werden, die sich asymptotisch einem Endwert annähert.

***Komponenten und Einflüsse***

Unter dem Begriff Schwinden werden die folgenden vier Komponenten zusammengefasst (MÜLLER/KVITZEL [105]):

- Trocknungsschwinden
- Schrumpfen (chemisches und autogenes Schwinden)
- Kapillarschwinden (plastisches Schwinden)
- Karbonatisierungsschwinden

Das Kapillarschwinden tritt im frischen, noch verarbeitbaren Beton als Folge eines frühen Wasserverlusts an der Oberfläche auf und steigt mit zunehmendem Mehlkorngehalt an. Durch eine geeignete Nachbehandlung und Mischungszusammensetzung kann es jedoch nahezu

vollständig vermieden werden. Das Karbonatisierungsschwinden, durch Umkristallisierungsvorgänge und die Freisetzung von zuvor molekular gebundenem Wasser verursacht, ist nur auf die Randzone eines Bauteils beschränkt und bei üblichen Bauteilabmessungen vernachlässigbar gering.

Primäre Ursache des Schwindens normalfester Betone ist das durch die Feuchtigkeitsabgabe an die Umgebung ausgelöste Trocknungsschwinden. Das Schrumpfen von Beton wird durch ein gegenüber den Ausgangstoffen Wasser und Zement geringeres Reaktionsprodukt (chemisches Schwinden) und die innere Austrocknung des Zementsteins (autogenes Schwinden) ausgelöst. Die mit der Festigkeitssteigerung des Betons einhergehenden mikrostrukturellen Gefügeveränderungen begünstigen diese Effekte und haben zur Folge, dass das Schrumpfen bei hochfestem Beton nicht mehr vernachlässigt werden kann. Nach MÜLLER/KVITZEL [105] ist das Schrumpfen bei extrem hochfesten Betonen (ab 150 N/mm²) sogar als maßgebende Komponente zu betrachten. In Bild 3.23 sind die Verformungsanteile des Trocknungsschwindens und des Schrumpfens in Abhängigkeit von der Betonfestigkeit qualitativ dargestellt.

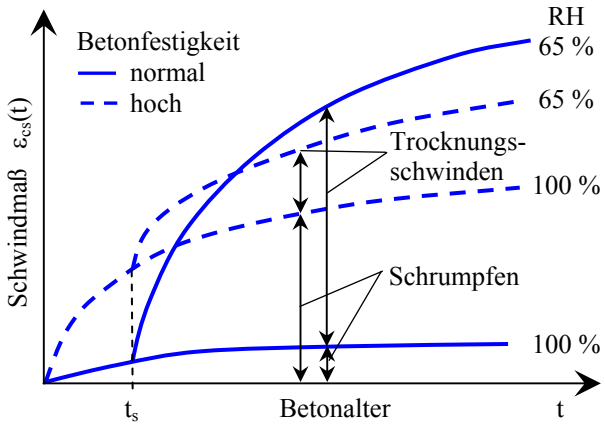



**Bild 3.23**
**Zeitlicher Verlauf des Trocknungsschwindens und Schrumpfens in Abhängigkeit von den Umgebungsbedingungen (MÜLLER/KVITZEL [105])**

Aufgrund zahlreicher systematischer Schwindversuche an unterschiedlichen normal- und hochfesten Betonen besitzt man heute einen guten Überblick über die verschiedenen Einflussparameter des Schwindens (KÖNIG ET AL. [77], MÜLLER/KVITZEL [105]). Danach wird das Schrumpfen ($\varepsilon_{cas}$) ausschließlich durch betontechnologische Parameter beeinflusst. Primären Einfluss auf das Trocknungsschwinden ($\varepsilon_{cds}$) haben dagegen die Umgebungsbedingungen und Bauteilabmessungen, da die verantwortlichen Diffusionsprozesse durch ein Feuchtigkeitsgefälle verursacht werden. Das Trocknungsschwinden ist bei Widerbefeuchtung teilweise reversibel, wobei dieser Effekt mit steigendem Wasserzementgehalt abnimmt und sich mit zunehmendem Betonalter verstärkt. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Schwindverformungen mit:

- abnehmender Umgebungsfeuchte und steigender Temperatur anwachsen,
- zunehmendem Zementsteingehalt des Betons und abnehmender Zuschlagsteifigkeit wachsen,
- sinkendem w/z-Wert, insb. das Schrumpfen bei Werten kleiner 0,4, ausgeprägt ansteigen,
- steigender Mahlfeinheit und einem hohen Alkaligehalt des Zements sich vergrößern,
- Verwendung von Silikastaub (vor allem Hüttensand) ansteigen und sich durch das Zumischen von Flugasche reduzieren.

### *Mathematische Beschreibung*

Ähnlich dem Kriechen ist das Schwinden von betontechnologischen Parametern abhängig, welche einem Ingenieur während der Planungsphase nicht oder nur unzureichend genau zur Verfügung stehen. Deshalb orientiert sich die Entwicklung praktisch anwendbarer Vorhersagemodelle ebenfalls an Kenngrößen, die bereits während der Planungsphase bekannt sind oder sicher eingeschätzt werden können:

- Schwindbeginn $t_S$
- Umgebungsbedingungen (relative Luftfeuchtigkeit RH und Temperatur T)
- Mittlere Betondruckfestigkeit $f_{cm}$ und verwendeter Zementtyp (langsam (SL), normal/-schnell (N, R) und hochfest-schnell (RS) erhärtender Zement)
- Betonfläche $A_c$ und luftberührter Umfang $u_c$ (wirksame Bauteildicke $h_0$)

Aktuelle empirische Ansätze zur Vorhersage der mittleren Schwindverformungen eines Bauteils wurden und werden analog dem Kriechen durch eine statistische Auswertung der in der RILEM-Datenbank (RILEM TC 107 [114]) dokumentierten Versuchsergebnisse hergeleitet und optimiert. Als statistische Datenbasis stehen dafür etwa 425 Messreihen zur Verfügung.

In Bild 3.24 ist der zeitliche Verlauf einiger in der Fachwelt anerkannter Ansätze am Beispiel eines für die Fahrbahnplatte von Verbundbrücken typischen Betonquerschnittes veranschaulicht.

Hinsichtlich der Anwendungsgrenzen dieser Modelle gelten die bereits beim Kriechen in Tabelle 3.2 enthaltenen Größen. Der Variationskoeffizient der Schwinddehnung wird mit einer Größenordnung von etwa 30 % (MODELCODE90 [96]) bis 35 % (DIN 1045-1 [32]) angegeben. Die statistischen Auswertungen basieren auf etwa 130 Versuchen.

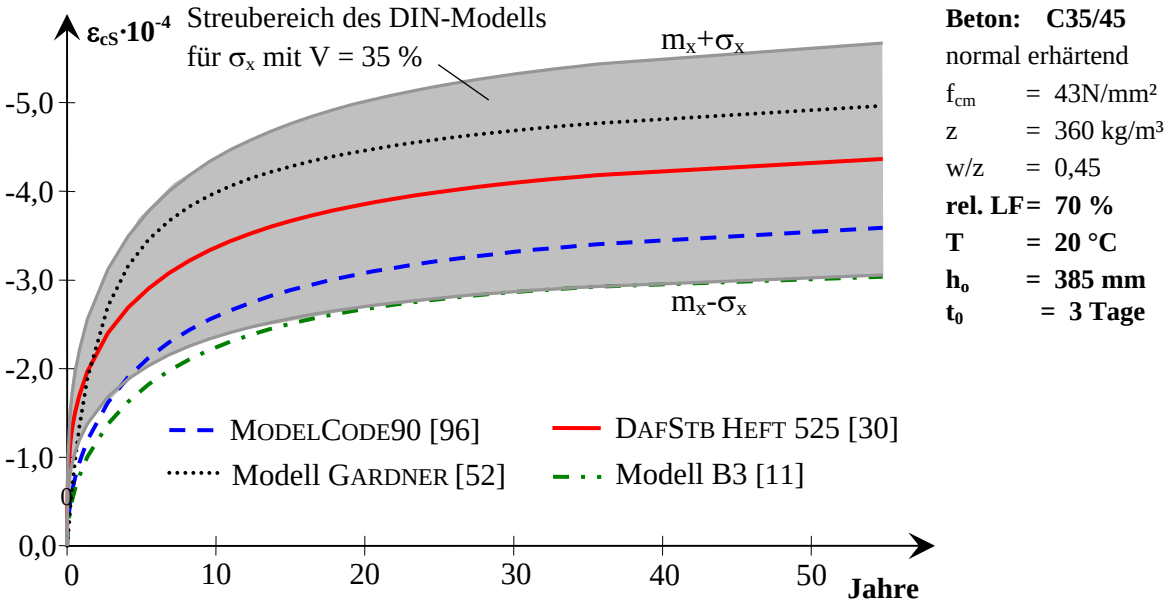



**Bild 3.24: Gegenüberstellung verschiedener Schwindmodelle**

### *Verwendetes Rechenmodell*

In dieser Arbeit wird das in DAFSTB HEFT 525 [30] dokumentierte Schwindmodell der DIN 1045-1 [32] angewendet. Es spiegelt den aktuellen Stand der Forschung gut wider und ermöglicht als bisher einziger Schwindansatz die Betrachtung normal- und hochfeste Betone durch die bereits angesprochene additive Verknüpfung der Schwindkomponenten Trocknungskriechen und Schrumpfen. Dabei wird von einer konstanten Schwinddehnung über die gesamte Querschnittshöhe des Betonbauteils ausgegangen. Im Anlage III ist der Algorithmus, ergänzt um die damit kompatiblen Modifikationen des MODELCODE90 [96] für veränderliche Temperaturen, dokumentiert.

Bei der zeitschrittweisen numerischen Analyse der Zuwächse des Systemzustandes am Ende eines betrachteten Zeitintervalls $\Delta t_i$ wird die zugehörige Änderungsrate der Schwinddehnung $\Delta\varepsilon_{cS}^{i}(t_{i-1}, t_i, t_s)$ gemäß Bild 3.25 bestimmt. Eine Veränderung der Umgebungsbedingungen oder der wirksamen Bauteildicke, z.B. nach dem Ausschalen des Betons, kann dabei durch die Anpassung der Modellparameter der Schwindfunktion in den zugehörigen Zeitschritten Beachtung finden. Die resultierende Gesamtschwinddehnung folgt demnach zu einem Betrachtungszeitpunkt $t_i$ aus der Summation aller bisher ermittelten Änderungsraten bestimmt werden:

$$\varepsilon_{cS}(t, t_s) = \sum_i \Delta\varepsilon_{cS}^{i}(t_{i-1}, t_i, t_s) \tag{3.28}$$

Das in Bild 3.25 dargestellte Vorgehen bei der Diskretisierung des Schwindansatzes führt analog zum Kriechen zu einer systematischen Überschätzung der daraus resultierenden Zwangsverformungen vor allem im jungen Beton. Gegenüber den bereits beim Kriechen genannten Alternativen ist dieses Vorgehen jedoch aus numerischer Sicht einfacher zu realisieren, und der auftretende Fehler lässt sich durch eine geeignete Schrittweitensteuerung minimieren (siehe dazu Abschnitt 4.4.4).

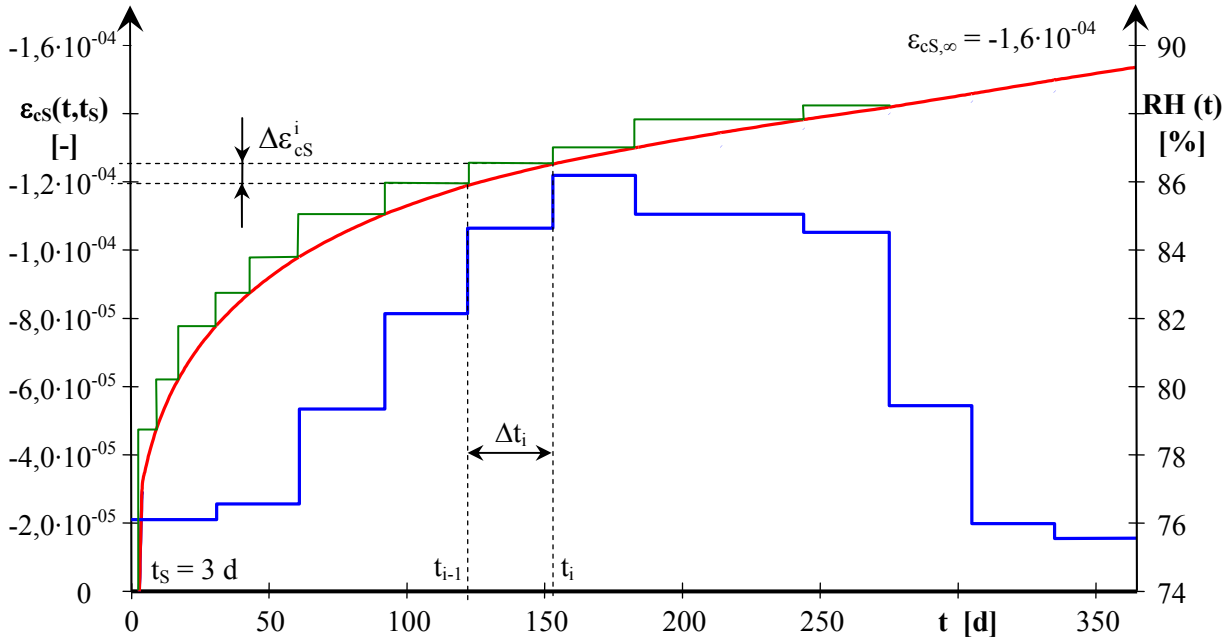



**Bild 3.25 Berechnung der Schwinddehnung bei abschnittsweise veränderlichen Umgebungsbedingungen (Betonquerschnitt nach Bild 3.24)**

### 3.1.5.3 Abfließende Hydratationswärme

Eine möglichst zutreffende Abschätzung der hydratationsbedingten Temperaturentwicklung im Beton und die damit verbundene frühe Rissbildung sind von großer praktischer Bedeutung und seit langem Gegenstand der Forschung. Nach einer kurzen Darstellung der Auswirkung einer behinderten Temperaturdehnung auf den Spannungszustand im jungen Beton werden anschließend die wesentlichen, den Systemzustand von Verbundbrücken beeinflussenden Größen benannt und auf die resultierenden Tragwerksreaktionen eingegangen. Abschließend werden die angewendeten numerischen Grundlagen zur Behandlung dieser zeitabhängigen Beanspruchung aufgezeigt.

***Temperatur- und Spannungsverlauf im jungen Beton bei behinderter Temperaturdehnung***

Die Hydratation ist, wie bereits erwähnt, ein exothermer Prozess, bei dem Wärme freigesetzt wird (Bild 3.26-a). Insbesondere im jungen Beton schreitet der Hydratationsprozess zügig voran. Bei Verformungsbehinderung kann dies zu Temperaturspannungen und beim Überschreiten der Betonzugfestigkeit zu Rissen im jungen Betonalter führen.

Bild 3.26 zeigt den zeitlichen Verlauf der Betontemperatur sowie der mittleren Bauteilspannungen bei behinderter Temperaturdehnung. Die anfängliche Erwärmung löst erst dann Druckspannungen aus, wenn der Elastizitätsmodul des Betons so groß ist, dass die Wärmedehnung einen messbaren Widerstand leistet ($T_{01}$). Mit steigender Temperatur entstehen ab diesem Zeitpunkt im Beton Druckspannungen, welche bei $\sigma_{c,max}$ ein Maximum erreichen. Dieser Prozess vollzieht sich in einem Zeitraum von wenigen Stunden. Die Steifigkeit des Betons ist dabei noch gering und das Relaxationsvermögen dementsprechend hoch. Aus diesem Grund sind im Beton nur kleine Druckspannungen zu verzeichnen. Mit dem Erreichen der Maximaltemperatur setzt eine allmähliche Abkühlung im Beton ein, d.h. die abfließende Wärmemenge ist größer als die hydratationsbedingte Wärmeentwicklung. Dadurch verkürzt sich der Beton wieder, die Druckspannungen werden abgebaut und erreichen bei einer Temperatur $T_{02}$ den Wert Null.

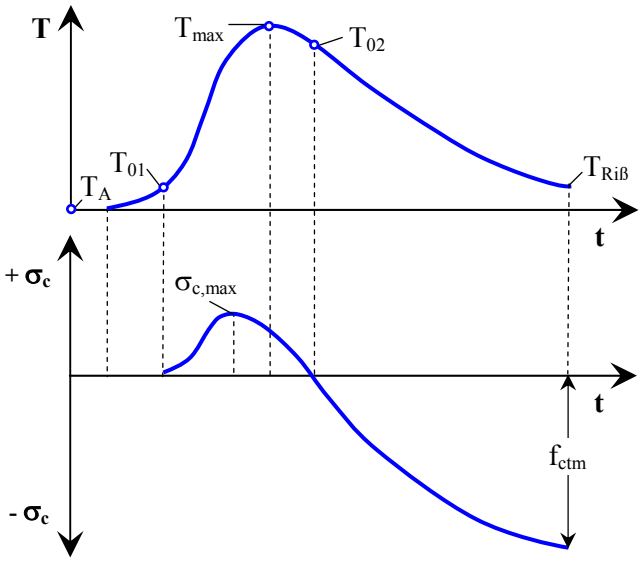



**Bild 3.26**
**Temperaturkurve und Spannungsantwort im jungen Beton bei behinderter Temperaturdehnung**

Das mit zunehmender Steifigkeitsentwicklung abnehmende Relaxationsvermögen bewirkt, dass die Temperatur $T_{02}$ größer als die ursprüngliche, spannungsauslösende Temperatur $T_{01}$ ist. Eine weitere Abkühlung des Bauteils hin zur Umgebungstemperatur kann schließlich beim Erreichen einer kritischen Temperatur $T_{Riss}$ Zugspannungen im Beton verursachen, welche die Zugfestigkeit überschreiten und zur Rissbildung führen.

***Hydratationswärmeentwicklung in der Fahrbahnplatte von Verbundbrücken***

Systematische experimentelle und theoretische Untersuchungen zur hydratationsbedingten Temperaturentwicklung in den Fahrbahnplatten von Verbundbrücken sind beispielsweise von PAMP [110] und DUCRET/LEBET [38] bekannt. Ziel beider Arbeiten ist ein vereinfachter Ansatz, mit dem die Auswirkungen des Hydratationsprozesses auf den Spannungszustand im Verbundträger abgeschätzt werden können.

Von PAMP [110] durchgeführte Untersuchungen zur Auswirkungen der Hydratation bei Verbundbrücken zeigen, dass die zeitliche Temperaturentwicklung unter Beachtung der Wärmeabgabe des Betons an die Umgebung im Wesentlichen durch eine Kombination der folgenden Parameter erfasst werden kann, die auch als Konstanten der Temperaturfeldgleichung verstanden werden können:

- Zementgehalt
- Ausgangstemperatur des Frischbetons
- Wärmeleitfähigkeit des Betons
- Umgebungstemperatur
- Dicke des Betonbauteils
- Wärmeisolierung bzw. Betonschalung

Diese Komponenten bilden die Grundlage eines Rechenmodells zur zeitschrittweisen Ermittlung der während der Hydratation entstehenden Temperaturfelder im Beton. Aus diesem sehr komplexen Lösungsansatz wird außerdem anhand von Parameterstudien eine Näherungslösung vorgestellt, welche in stark vereinfachter Form ein Abschätzen der Auswirkungen der abfließenden Hydratationswärme bei Systemen mit zweistegigen Plattenbalken- oder Hohlkastenquerschnitten gestattet. Unter Verwendung eines Bemessungsdiagramms kann ein Hydratationsmaß $\varepsilon_H$ bestimmt werden, mit dem sich der hydratationsbedingte Spannungszustand in einem Tragwerke zu einem Zeitpunkt von fünf Tagen nach dem Betonieren abschätzen lässt. Damit dieser Ansatz praktischen Anforderungen gerecht wird, finden nur Kenngrößen Eingang, welche bereits zum Planungszeitpunkt als bekannt vorausgesetzt werden können (ideelle Plattendicke, Wärmedurchlasswiderstand der verwendeten Abdeckung, volumetrische Wärmeentwicklung des Zements, Querschnittsfaktor). Alle weiteren Größen, dies betrifft vor allem die Umgebungsbedingungen, gehen über Mittelwerte in das Diagramm ein. Nachteilig ist zum einen, dass zwischen den Eingangsgrößen des Diagramms kein analytischer Zusammenhang mehr besteht, zum anderen wird durch die vielen Vereinfachungen letztlich nur noch eine grobe Näherung des Hydratationsmaßes im Sinne einer Grenzwertbetrachtung möglich. Als Größenordnung für überschlägige Berechnungen wird ein Hydratationsmaß (Vordehnung) von $\varepsilon_H = -14 \cdot 10^{-5}$ für Wintermonate und $\varepsilon_H = -26 \cdot 10^{-5}$ für Sommermonate angegeben.

Basierend auf Versuchen mit unterschiedlichen Steifigkeitsverhältnissen zwischen Stahlträger und Beton formulieren DUCRET/LEBET [38] eine Bestimmungsgleichung für die aus dem Hydratationsprozess resultierende Betonzugspannung. Mit diesem Wert kann die 28-Tage Zugfestigkeit des Betons abgemindert werden. Parameterstudien zeigen einen geringen Einfluss bei Steifigkeitsverhältnissen zwischen Beton und Stahlträger kleiner 0,05. Eine signifikante Reduzierung der effektiven Betonzugfestigkeit sowie ein erhöhtes Rissrisiko im Beton sind bei einem Verhältnis größer 0,12 zu erwarten. Die experimentellen Untersuchungen umfassen normalfeste Betone mit normal erhärtendem Zement, bei denen keine besondere Maßnahmen zur Verringerung der Hydratationswärme und deren zeitlichen Verlauf getroffen wurden.

Messungen der hydratationsbedingten Temperaturentwicklung in den Fahrbahnplatten von Verbundbrücken liefern die in Bild 3.27 dargestellten charakteristischen Zeitverläufe für Sommer- und Wintermonate (Schweiz). Deutlich ist zu erkennen, dass durch eine Abnahme der Umgebungstemperatur der Hydratationsprozess verlangsamt wird.

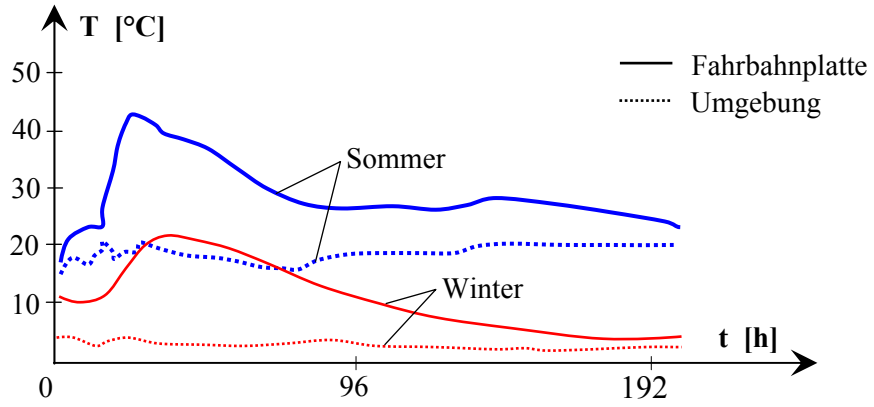



**Bild 3.27 Temperaturentwicklung in der Fahrbahnplatte einer Verbundbrücke beim Betonieren in Sommer- und in Wintermonaten (nach DUCRET/LEBET [38])**

### *Verwendetes Rechenmodell*

Für das in dieser Arbeit entwickelte Lösungsverfahren wird die hydratationsbedingte Temperaturentwicklung im Beton durch eine über den Betonquerschnitt konstante Temperaturverteilung abstrahiert. Es werden zwei Möglichkeiten zur Berücksichtigung der Auswirkungen einer Temperaturentwicklung infolge abfließender Hydratationswärme implementiert:

- Zum einen besteht die Möglichkeit, mit der Definition eines wirksamen Hydratationsmaßes und des zugehörigen Einwirkungszeitpunktes nach dem Betonieren die Auswirkung der hydratationsbedingten Temperaturentwicklung und damit eine Reduzierung der wirksamen Zugfestigkeit des Betons, vereinfacht zu erfassen. Als Anhaltpunkte für Sommer- und Wintermonate können die bereits genannten Werte von PAMP [110] Beachtung finden.
- Die zweite, ausführlichere Variante besteht darin, die hydratationsbedingte Wärmeentwicklung des Betons durch einen zeitveränderlichen Temperaturgradienten zu beschreiben. Zusammen mit den in Abschnitt 3.1.4 angegebenen zeitabhängigen mechanischen Werkstoffeigenschaften werden dann abschnittsweise die mechanischen Tragwerksreaktionen bestimmt. Dazu wird der Einwirkungszeitraum analog dem Schwinden und Kriechen in Zeitintervalle unterteilt, innerhalb derer die Materialeigenschaften als konstant angenommen

werden können. Für eine konstante Temperaturänderung $\Delta T_i$ als inkrementelle Beanspruchungsänderung wird die Änderung des Systemzustandes analysiert (Bild 3.28). Im Gegensatz zum Schwinden und Kriechen ist während der Hydratation eine Zunahme der Steifigkeiten im Beton mit der Zeit zu verzeichnen. Die Änderung des Systemzustands kann deshalb direkt aus der Temperaturänderung des aktuellen Zeitschritts mit den zugehörigen mittleren Steifigkeiten des Betons bestimmt werden.

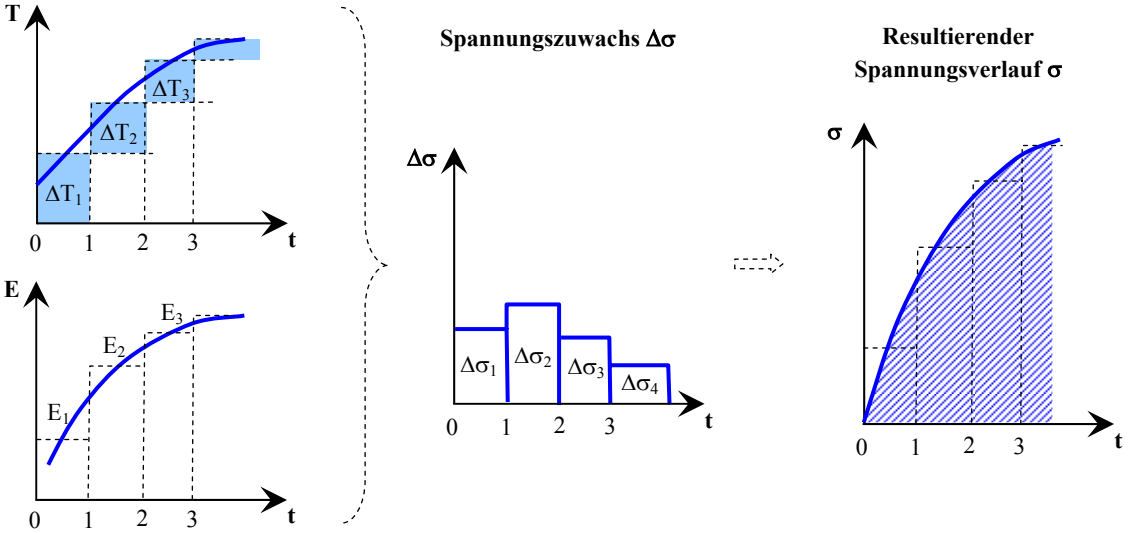



**Bild 3.28 Bestimmung der Spannungen bei behinderter Temperaturdehnung im jungen Beton**

## 3.2 Stahl

Unabhängig vom endgültigen Erzeugnis besteht der im Bauwesen verwendete Stahl aus dem Grundmaterial Eisen sowie Kohlenstoff, Eisenbegleitern und weiteren Legierungselementen. Durch deren Mengenanteile, das Herstellungsverfahren und eine eventuelle Nachbehandlung können die Eigenschaften anwendungsspezifisch gesteuert werden. Aus Gründen der Schweißbarkeit ist der Kohlenstoffgehalt allerdings auf maximal 0,2 % zu begrenzen. Die in Bild 3.29 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit geben einen Überblick über das mögliche Festigkeitsspektrum typischer Stahlerzeugnisse.

In diesem Abschnitt werden die mechanischen Eigenschaften der im Bauwesen zurzeit angewendeten Bau- und Betonstähle betrachtet. Dabei wird sich von Beginn an auf naturharte, wärmebehandelte Baustähle und kaltverformte Betonstähle beschränkt. Anschließend wird auf die aktuellen normativen Regelungen bezüglich der Festigkeits- und Formänderungskennwerte von Bau- und Betonstahl eingegangen, mögliche Werkstoffmodelle dargestellt und zum Schluss das in der Arbeit bevorzugte Rechenmodell vorgestellt.

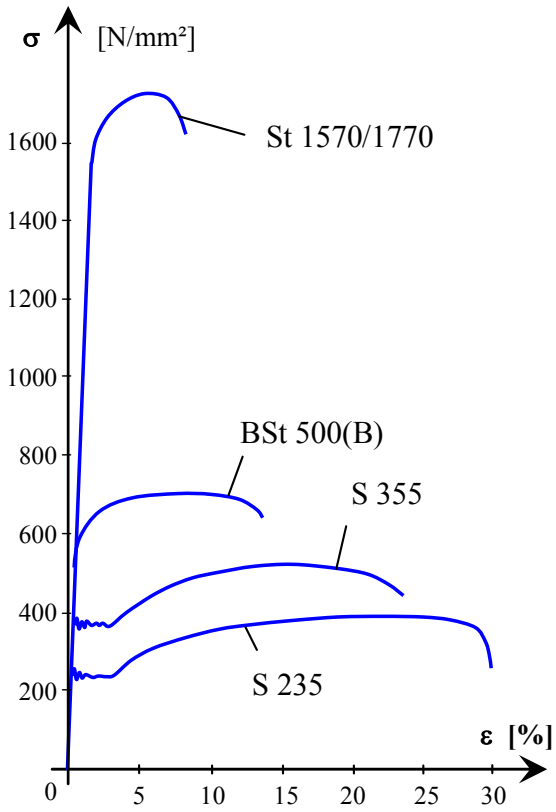



**Bild 3.29: Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten unterschiedlicher Stahlsorten**

### 3.2.1 Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit

Im Vergleich zu Beton kann Stahl als ein homogenes, alterungsunabhängiges Material bezeichnet werden, dessen Verformungsverhalten durch eine zeitunabhängige Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit charakterisiert ist.

Die einaxiale, statische Arbeitslinie des Stahls wird aus verformungsgesteuerten Zugversuchen gewonnen, da Zug die bevorzugte Beanspruchungsart des Stahls darstellt. Unter konstanter Dehngeschwindigkeit sind bei kaltgereckten und naturharten Stählen die in Bild 3.29 und Bild 3.30 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten zu beobachten.

Bis zum Erreichen der Streckgrenze weisen alle Stahlsorten zunächst ein nahezu linear elastisches Verhalten auf (Bereich I). Im plastischen Bereich wird der Verlauf dann maßgebend durch das Herstellungsverfahren beeinflusst. Das Kaltrecken des warmgewalzten Ausgangsmaterials bewirkt z.B., dass bei kaltverformten Stählen keine ausgeprägte Streckgrenze mit Fließplateau, sondern ein stetiger Übergang in den plastischen Verfestigungsbereich zu verzeichnen ist. Bei warmverformten unlegierten Stählen mit niedriger Streckgrenze ist diese

dagegen deutlich erkennbar. Es schließt sich ein ausgeprägtes Fließplateau an (Bereich II). Im weggesteuerten Versuch bildet sich zunächst eine obere Streckgrenze $R_{eH}$ aus. Als Nennwert der Streckgrenze $f_y$ wird im Allgemeinen dieser Wert bzw. das Spannungsniveau bei einer bleibenden Dehnung von 0,2 % angegeben. Bei weiterer Verformungssteigerung fällt die Spannung zunächst auf die untere Streckgrenze $R_{eL}$ ab. Das anschließende Fließplateau ist durch eine geringfügig höhere Spannung $R_{eM}$ mit unregelmäßigen Schwankungen gekennzeichnet. Am Ende des Fließbereiches ist mit Erreichen der Verfestigungsdehnung $\varepsilon_v$ für die weitere Verformungszunahme eine erneute Laststeigerung erforderlich. Die obere Grenze des Verfestigungsbereiches (Bereich III) wird Zugfestigkeit genannt ($R_m \equiv f_u$), und stellt die auf den Anfangsquerschnitt bezogene höchste aufnehmbare Zugkraft dar. Ihr ist die Gleichmaßdehnung ($A_g \equiv \varepsilon_u$) zugeordnet. Beim Überschreiten dieses Schwellenwertes beginnt sich der Querschnitt einzuschnüren (Bereich IV). Der zur Spannungsübertragung verfügbare Querschnitt nimmt in diesem überkritischen Bereich schneller ab als die aufnehmbare Spannung steigt, was schließlich zum Bruch führt. Die Bruchdehnung $\varepsilon_r$ ist abhängig von der Festigkeit des Stahls und stellt ein Maß für die Duktilität dar. Sie wird umso geringer, je höher die Festigkeit ist (Bild 3.29). Außerdem ist die Verformungsfähigkeit eines warmgewalzten Stahls deutlich größer als die eines kaltverformten.

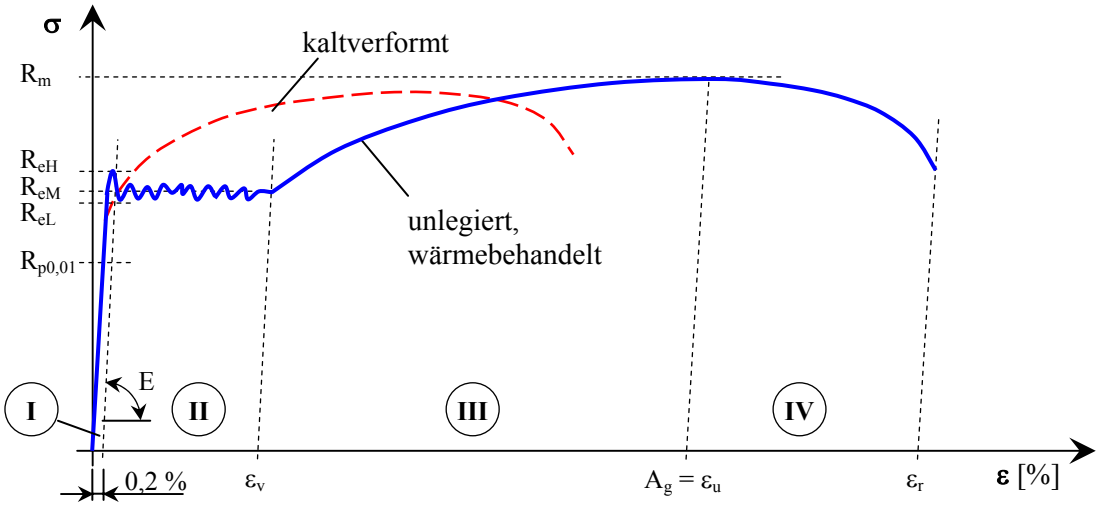



**Bild 3.30: Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit kalt- und warmverformter Betonstähle - Prinzip**

Das Tragverhalten unter Zugbeanspruchung kann auch auf den Druckbereich übertragen werden. Bei den Betonstählen wird dabei vorausgesetzt, dass diese ausreichend gegen seitliches Ausweichen gesichert sind. Andernfalls ist die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit für den Druckbereich zu modifizieren.

1886 wurden von BAUSCHINGER [99] die ersten Untersuchungen zum plastischen Werkstoffverhalten von Schweißeisen unter wechselnder Beanspruchung durchgeführt. Die gewonnenen, grundlegenden Erkenntnisse (BAUSCHINGER-Effekt) sind charakteristisch und von allgemeiner Gültigkeit für die im Bauwesen verwendeten Stähle. Danach verursachen wechselnde Beanspruchungen Spannungshysteresen (Bild 3.31), die im plastischen Bereich bei Spannungsumkehr die Streckgrenze in der anderen Richtung vermindern (Bild 3.31) bzw. an Stelle eines ausgeprägten Fließplateaus eine gekrümmte Form der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit bewirken. Damit ist beim Stahl keine isotrope Verfestigung im Sinne der klassischen

Plastizitätstheorie zu verzeichnen, sondern eher eine Kombination aus kinematischer und isotroper Verfestigung, bei der sich der Abstand zwischen den Fließgrenzen unter Zug- und Druckbeanspruchung nur gering ändert. Allerdings ist die Größe der Verschiebung der Fließebene sehr stark vom Betrag der Vorverformungen bzw. der erfolgten Vorverformungsverfestigung abhängig.

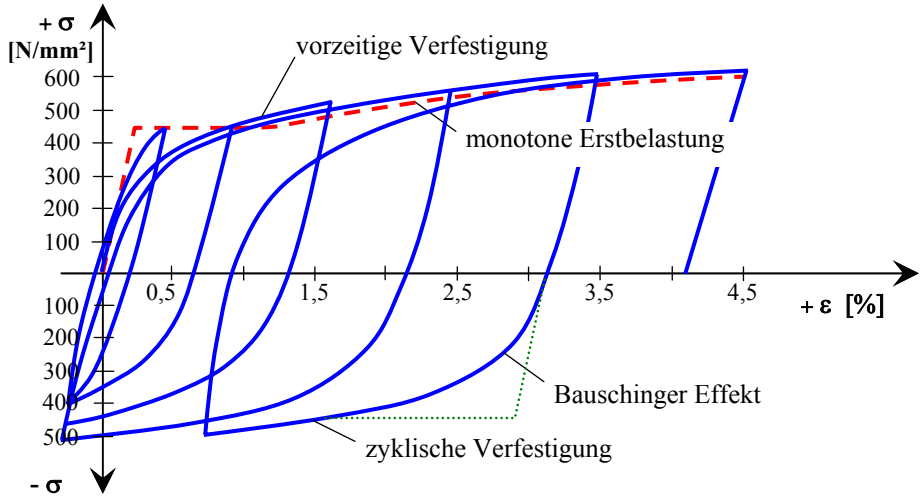



**Bild 3.31: Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit eines warmgewalzten Stahls unter zyklischer Belastung**

Die elastischen Festigkeitseigenschaften von Stahl werden für praktische Belange im Wesentlichen durch die Parameter Elastizitätsmodul und Streckgrenze definiert. Deren Nennwerte weisen im Vergleich zu Beton sehr geringe Streuungen auf. Zur statistischen Beschreibung werden von FLEDERER [49] folgende Angaben gemacht:

- Streckgrenze: logarithmische Normalverteilung, Variationskoeffizienten ≈ 7 %
- Elastizitätsmodul: normalverteilte Größe, Variationskoeffizienten ≈ 2 %.

Anzumerken ist allerdings, dass die Streckgrenze von in der Praxis verwendeten Bau- und Betonstählen teilweise erheblich die normativ geregelten Mindestanforderungen überschreitet. Dies erschwert die rechnerische Vorhersage von Verformungen und planmäßigen Schnittgrößenumlagerungen.

### 3.2.2 Baustahl

Der Baustahlquerschnitt nimmt bei den in dieser Arbeit betrachteten Verbundquerschnitten eine zentrale Rolle ein. Das Vorhandensein von mindestens einem Stahlteilquerschnitt "mit ausreichender Steifigkeit" an jeder Stelle im Tragwerk während der gesamten Nutzungsphase wird als grundlegende Voraussetzung und "Reserve" für die numerische Stabilität des Lösungsalgorithmus angesehen. Die erforderliche Mindeststeifigkeit sollte sich dabei individuell an den vorhandenen Querschnittssteifigkeiten im System orientieren.

Eine Berücksichtigung der Interaktion von Schub- und Normalspannungen ist mit dem gewählten Differentialgleichungsansatz nicht möglich (vgl. Abschnitt 4.2.1). Schubverformungen können jedoch vereinfacht über die Definition von Schubfläche und Schubmodul des Stahls erfasst werden. Damit beschränken sich auch die Betrachtungen zum mechanischen

Verhalten der Baustähle auf die alleinige Wirkung von Normalspannungen im Rahmen eindimensionaler Materialgesetze. Dieses Vorgehen ist im Fall großer Querkraftbeanspruchungen im inelastischen Bereich nicht geeignet bzw. kritisch zu betrachten.

**Normenbezug** In EUROCODE 3 [45] ist die Verwendung der normalfesten Baustähle S 235, S 275 und S 355 sowie der hochfesten Baustähle S 420 und S 460 normativ durch die Angabe von Mindestanforderungen an die charakteristischen Werte der Festigkeiten und Formänderungen geregelt. Der Einsatz hochfester Baustähle ist allerdings im Brückenbau derzeit nicht zulässig (EUROCODE 3-2/DIN-FACHBERICHT 103 [45]). Gleiches gilt, mit Ausnahme außergewöhnlicher Lastfallkombinationen, für die Anwendung nichtlinearer Berechnungsmethoden bei der Schnittgrößenermittlung. Tabelle 3.4 gibt die Duktilitätsanforderungen des EUROCODE 3 [45] für plastische Schnittgrößenermittlungen im Hoch- und Brückenbau wieder.

| | Hochbau (EC 3-1 [45]) | Brückenbau (EC 3-2 [45]) |
|---|---|---|
| Verhältnis $(f_u / f_y)_k$ | $\geq 1{,}2$ | $\geq 1{,}1$ |
| Bruchdehnung $\varepsilon_u$ [%] | $\geq 15$ und $\geq 20 \cdot \varepsilon_y$ | $\geq 15$ und $\geq 15 \cdot \varepsilon_y$ |

**Tabelle 3.4 Festigkeits- und Formänderungskennwerte von Betonstahl nach DIN 1045-1 [32]**

Der rechnerische Elastizitätsmodul wird mit 210.000 N/mm² angegeben.

### 3.2.3 Betonstahl

In Stahlbetonbauteilen von Verbundkonstruktionen werden die Betonstähle vorwiegend durch Zugkräfte beansprucht. Ihre Stabform bedingt i.d.R. einen einachsigen Spannungszustand, der für die folgenden Betrachtungen von Interesse ist. Die Hauptanforderungen an den Betonstahl sind eine hohe Festigkeit bei gleichzeitig großem Verformungsvermögen, gute Verbundeigenschaften sowie die Schweißbarkeit. Mit dem heute fast ausschließlich angewendeten Thermex-/Tempcore-Verfahren[1] kommen nach RUßWURM/SCHÄFER [119] i.d.R. vergütete Betonstähle zum Einsatz.

**Normenbezug** Nach DIN 1045-1 [32] ist die Anwendung auf gerippte Betonstähle mit normaler (A) und hoher (B) Duktilität sowie einem charakteristischen Wert der Streckgrenze von 500 N/mm² (5 %-Fraktil) beschränkt. MODELCODE90 [96] sieht darüber hinaus eine Betonstahlklasse (S) für seismische Beanspruchungen mit entsprechend hohen Duktilitätsanforderungen vor.

Die mathematische Abbildung der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit darf durch ein bilineares Modell, elastisch mit Verfestigung, erfolgen (Bild 3.32). Tabelle 3.5 beinhaltet die dafür erforderlichen Parameter. Das Überschreiten der zulässigen Grenzdehnung $\varepsilon_{tk}$ gilt als lokales Versagenskriterium.

---

**1** Markenbezeichnung der Association Tempcore, Lüttich (Belgien) für Betonstahl. Beim Tempcore-Verfahren durchläuft der Stahl unmittelbar nach dem Walzen eine Wasserkühlstrecke, wodurch die Randzone aus etwa 1.000 bis 1.100°C abgeschreckt wird. Auf dem Kühlbett gleichen sich die Temperaturen von Randschicht und Kern aus, was in etwa einem Anlassen entspricht.

| | BSt 500 (A) | BSt 500 (B) | BSt 500 (S) (MC90 [96]) |
|---|---|---|---|
| Streckgrenze $f_{yk}$ [N/mm²] | | 500 | |
| Verhältnis $(f_t / f_y)_k$ | ≥ 1,05 | ≥ 1,08 | ≥ 1,15 |
| Stahldehnung unter Höchstlast $\varepsilon_{tk}$ [%] | 2,5 | 5,0 | 6,0 |
| Elastizitätsmodul $E_S$ [N/mm²] | 200.000 (210.000 nach EC 4 [46]) | | 200.000 |

**Tabelle 3.5 Festigkeits- und Formänderungskennwerte von Betonstahl nach DIN 1045-1 [32]**

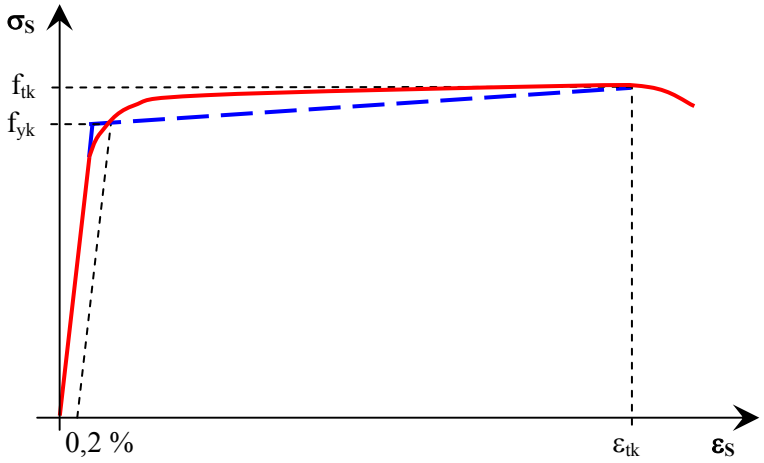



**Bild 3.32: Rechenannahme der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten des Betons nach DIN 1045-1 [32]**

### 3.2.4 Werkstoffmodellierung

Aus der Literatur ist eine Vielzahl mathematischer Modelle zur Annäherung der statischen Arbeitslinie von Stählen bekannt. Diese reichen von einfachen bilinearen Modellen mit ideal plastischem oder verfestigendem Materialverhalten (z.B. in MEHLHORN [90]) bis hin zu sehr detaillierten und mehrparametrigen Funktionen, mit denen die Materialkennlinien kaltverformter und warmgewalzter Stähle unter Beachtung der Fließplateauausbildung und des Nachbruchverhaltens sehr genau abbildet werden können (z.B. CHEN [27]).

Die Ent- und Wiederbelastungen werden i.d.R. mittels kinematischer Verfestigung oder einer Approximation aus isotroper und kinematischer Verfestigung beschrieben. Analog der Erstbelastung sind in der Literatur Modelle mit unterschiedlichsten Detaillierungsraden angegeben (z.B. MEHLHORN [90], CHEN [27]).

### 3.2.5 Verwendetes Rechenmodell

In dieser Arbeit findet ein bilineares, elasto-plastisches Werkstoffmodell gemäß Bild 3.33 Anwendung. Bei Ent- und Wiederbelastung im plastischen Bereich kann das Materialverhalten durch eine Kombination aus kinematischer und isotroper Verfestigung beschrieben werden. Dieses Modell eignet sich für warmgewalzte Baustähle und kaltverformte Betonstähle gleichermaßen und wird damit den Anforderungen dieser Arbeit an ein Stoffgesetz für den Bau- und Betonstahl gerecht.

Zur Modellbeschreibung sind ausschließlich die normativ geregelten Kennwerte Streckgrenze $f_y$, Fließdehnung $\varepsilon_y$, Bruchspannung $f_u$, Bruchdehnung $\varepsilon_u$ erforderlich. Über den Verfestigungsparameter $h_v$ ($\in$ [0,1]) kann der Anteil der isotropen Verfestigung an der Gesamtverformung gesteuert werden. Die Be- und Entlastungssteifigkeit wird mit der elastischen Anfangssteifigkeit unter Vernachlässigung der Ausrundung der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit angenommen.

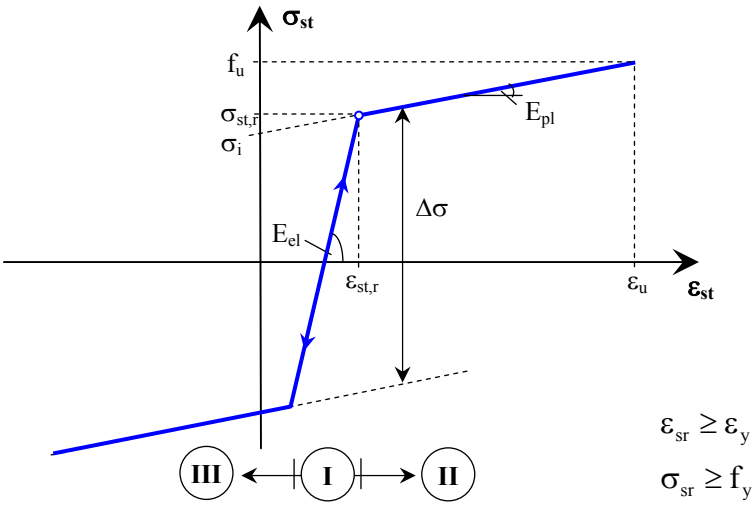



**Bild 3.33: Verwendetes bilineares Materialgesetz mit Ent- und Wiederbelastung**

Die Bestimmungsgleichungen für die Bereich I bis III, sowie das Parameterupdate der internen Größen lauten (z.B. LEIHKAUF [85]):

**Bereich I:** $\varepsilon_{st,r} - \frac{\Delta\sigma}{E_{el}} \le \varepsilon_{st} \le \varepsilon_{st,r}$

$$\sigma_{st}(\varepsilon_{ts}) = \sigma_{st,r} + E_{el} \cdot (\varepsilon_{st} - \varepsilon_{st,r}) \tag{3.29}$$

**Bereich II:** $\varepsilon_{st,r} < \varepsilon_{st} < \varepsilon_u$

$$\sigma_{st}(\varepsilon_{st}) = \sigma_{st,r} + E_{pl} \cdot (\varepsilon_{st} - \varepsilon_{st,r}) \tag{3.30}$$

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma + 2 \cdot h_v \cdot (\sigma_{st} - \sigma_{st,r}); \quad \sigma_{st,r} = \sigma_{st}; \quad \varepsilon_{st,r} = \varepsilon_s \tag{3.31}$$

**Bereich III:** $-\varepsilon_u < \varepsilon_{st} < \varepsilon_{st,r} - \frac{\Delta\sigma}{E_{el}}$

$$\sigma_{st}(\varepsilon_{st}) = \sigma_{st,r} - \Delta\sigma - E_{pl} \cdot \left(\varepsilon_{st} + \varepsilon_{st,r} - \frac{\Delta\sigma}{E_{el}}\right) \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} &\Delta\sigma = \Delta\sigma - 2 \cdot h_v \cdot (\sigma_{st} - \sigma_{st,r} + \Delta\sigma); \\ &\sigma_{st,r} = \sigma_{st} + \Delta\sigma; \ \varepsilon_{str} = \varepsilon_{st} + E_{el} \cdot \Delta\sigma \end{aligned} \tag{3.33}$$

Verzerrungen oberhalb der Bruchdehnung stellen auf Faserebene ein lokales Versagenskriterium dar und führen zum Abbruch der Berechnung.

## 3.3 Stahlbeton

Der Verbundwerkstoff Stahlbeton besteht aus den Einzelwerkstoffen Beton und Betonstahl. Das Zusammenwirken beider Komponenten, der Verbund, ist eine Grundvoraussetzung für das Funktionieren dieses Werkstoffs, denn die Verbundwirkung ermöglicht über die Rissbildung hinaus eine Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (Tension-Stiffening). Bei gutem Verbund ist der zur Kraftübertragung gehörige Schlupf klein, d.h. die auftretenden Rissbreiten und Rissabstände sind gering. Es stellt sich ein homogenes Rissbild ein.

Stahl-Beton-Verbundträger werden im Brückenbau derzeit nahezu ausschließlich ohne Längsvorspannung im Betongurt ausgeführt. Deshalb ist die Beachtung des Tension-Stiffening für eine realitätsnahe Systemanalyse auf Gebrauchs- und Traglastniveau unerlässlich. Hinsichtlich der Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit sind vor allem Aussagen zum Verformungsverhalten sowie zu Rissbreiten und Rissabständen und deren zeitliche Entwicklung von praktischem Interesse.

Die Erfassung der ursächlichen Mechanismen des Verbundverhaltens zwischen Betonstahl und Beton unter Zugbeanspruchung, der Mitwirkung des Betons sowie der Rissbildung und -entwicklung ist seit Jahren Gegenstand intensiver Forschung. Im Folgenden wird deshalb kein umfassender Überblick angestrebt. Anhand des Verhaltens eines Stahlbetonkörpers im einaxialen Zugversuch soll vielmehr das prinzipielle Tragverhalten veranschaulicht und auf die bisher als wesentlich bekannten Einflüsse hingewiesen werden. Dazu wird nur auf Arbeiten eingegangen, die für das Verständnis der Problematik von grundlegendem Interesse sind. Die Betrachtungen schließen hochfesten Beton ein.

### 3.3.1 Verbundverhalten

Das Zusammenwirken von Baustahl und Beton wird durch den Verbund zwischen beiden Baustoffen bestimmt. Die in der Kontaktfläche stattfindende Kraftübertragung setzt sich bei gerippten Betonstählen aus den Anteilen Haft-, Scher- und Reibungsverbund zusammen. Bild 3.34 veranschaulicht das Prinzip der Kraftübertragung am Beispiel eines zugbeanspruchten Stabes.

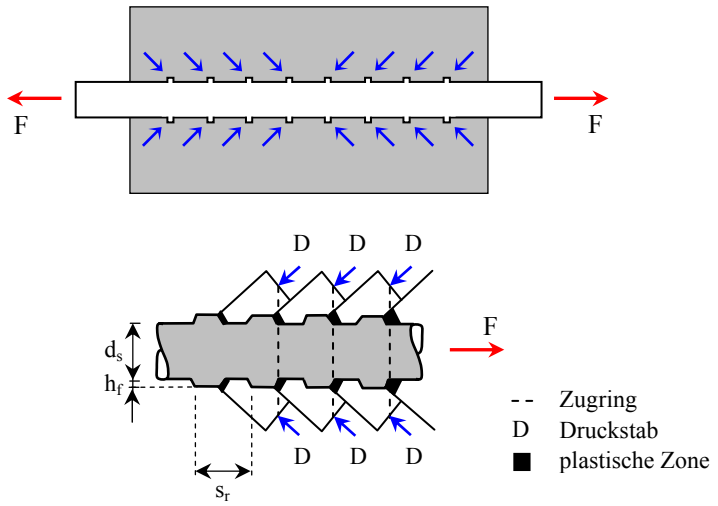



**Bild 3.34: Prinzip der Kraftübertragung zwischen Betonstahl und Beton (KÖNIG ET AL. [77])**

#### 3.3.1.1 Kurzzeitige Belastung

Als wesentlichste, das Verbundverhalten im Kurzzeitversuch beeinflussende Parameter sind bekannt:

- Betonfestigkeit
- Verbundbereich
- Oberflächengestalt des Betonstahls
- Stabdurchmesser
- bezogene Rippenfläche

Auf die sehr komplexen Fragestellungen der Verbundkraftübertragung, mögliche Versagensarten sowie daraus abgeleitete Verbundmodelle soll nicht näher eingegangen werden. Generell basiert die überwiegende Mehrzahl der bekannten Rechenmodelle derzeit auf der im Experiment makroskopisch sichtbaren Beobachtung, dass durch den Schlupf Verbundspannungen aktiviert werden. Darauf aufbauende Theorien gehen davon aus, dass die Größe der Verbundspannungen bestimmt, in welchem Maße das Zusammenwirken zwischen Betonstahl und Beton gegeben ist. Einen guten Überblick zum aktuellen Kenntnisstand geben die Arbeiten von ECKFELDT [40] und ELIGEHAUSEN ET AL. [43].

Zur Formulierung von Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen wurden zahlreiche Versuche an Auszieh- und Dehnkörpern mit kurzer Einbindetiefe durchgeführt. Trotz stark streuender Versuchsergebnisse vor allem im Bereich kleiner Verschiebungen (Gebrauchslasten) sowie einer erkennbar ausgeprägten Orts- und Probekörperabhängigkeit wird der Zusammenhang üblicherweise mit einer Potenzfunktion abstrahiert. Dies darf jedoch nicht darüber hinweg täuschen, dass an dieser Stelle ein weiterer, umfassender Klärungsbedarf besteht.

$$\tau_v(x) = A \cdot f_{cm} \cdot s(x)^N \tag{3.34}$$

mit: A, N … empirische Parameter

Auf der Basis statistischer Auswertungen einiger weniger in der Literatur dokumentierter Versuche postuliert FLEDERER [49] die Parameter A und N als normalverteilte Größen mit einem Variationskoeffizienten von 20 %. Als Mittelwerte ergeben sich in Abhängigkeit von den Verbundbedingungen folgende Werte:

| Verbundbedingung | A | N |
|---|---|---|
| schlecht | 0,56 | 0,40 |
| normal | 0,58 | 0,30 |
| gut | 0,60 | 0,20 |

**Tabelle 3.6 Parameter der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung (FLEDERER [49])**

### 3.3.1.2 Verbundkriechen

Neben äußeren Belastungen beeinflussen auch die zeitabhängigen Verformungen des Betons infolge Schwindens und Kriechens das Verformungsverhalten gezogener Stahlbetonkörper über die Rissbildung hinaus. Unter lang andauernder und wiederholter Belastung ist eine Verringerung der Verbundwirkung, d.h. eine Zunahme des Schlupfes unter konstanter Verbundspannung zu verzeichnen. Diese Erscheinung wird als Verbundkriechen bezeichnet. Am Stahlbetonkörper sind eine Zunahme der Verformungen und eine Vergrößerung der Rissbreiten und damit eine deutliche Abnahme der Tension-Stiffening-Wirkung zu verzeichnen.

Eine grundlegende Arbeit zu den Gesetzmäßigkeiten des Verbundkriechens unter Gebrauchsbelastung stammt von FRANKE [50]. Er stellt den Zusammenhang zwischen Stahlspannung, Verbundspannung und Schlupf als Funktion der Belastungsdauer dar und zeigt, dass eine geschlossene analytische Lösung nicht möglich ist. Die deshalb von FRANKE [50] entwickelte Näherungslösung basiert auf isochronen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen für den aufsteigenden Ast der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung. Danach kann die Schlupfzunahme durch das Verbundkriechen mit einer linearen Kriechfunktion $\varphi_v(t)$ unabhängig vom Anfangsschlupf $s_0$ beschrieben werden:

$$s(t) = s_0 \cdot \left(1 + \varphi_v(t)\right) \tag{3.35}$$

mit:

$$\varphi_v(t) = \left(1 + 10 \cdot t\right)^{0,0802} - 1 \,;\, t \ldots \text{ Belastungsdauer in Tagen} \tag{3.36}$$

Formuliert man das Verbundgesetz nach Gleichung (3.34) unter Verwendung dieser Beziehung zeitabhängig:

$$\tau_v(x,t) = \frac{A \cdot f_{cm}}{(1 + \varphi_v(t))} \cdot s(x,t)^N \tag{3.37}$$

ergibt sich der in Bild 3.35 dargestellte zeitliche Verlauf der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung. Hierzu sei erwähnt, dass experimentelle Untersuchungen nur für Zeiträume von maximal 2000 Stunden (~ 84 Tage) bekannt sind. Prognosen über die Lebensdauer eines realen Bauwerkes sind mit Versuchen nicht annähernd belegt, hier besteht Forschungsbedarf.

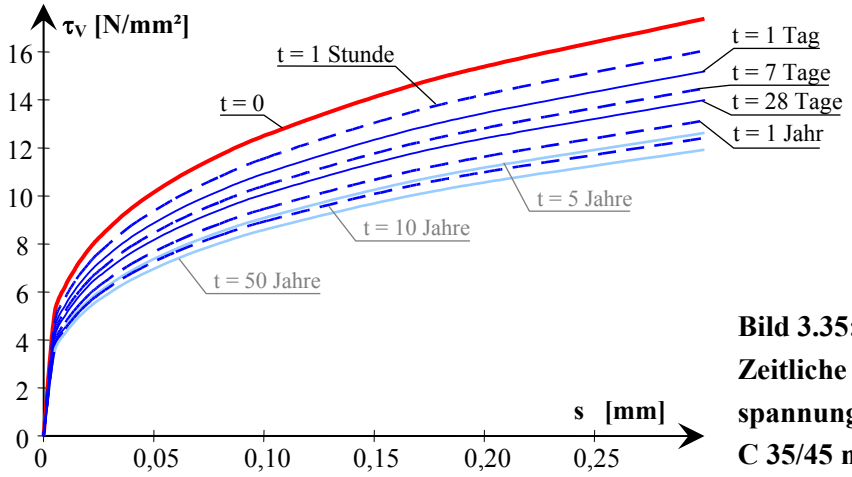



**Bild 3.35: Zeitliche Entwicklung der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung eines C 35/45 nach Gleichung (3.37)**

Auf der Basis der Versuche von FRANKE [50] und eigenen experimentellen Untersuchungen wurden z.B. von ROHLING [115] und SIPPEL [132] ähnliche Modellvorschläge unterbreitet. Dies erfolgt im Wesentlichen durch eine Veränderung der Kriechfunktion (Gl. (3.36)). SIPPEL [132] erweitert die Anwendung auf den gesamten Traglastbereich. Dazu ist jedoch kritisch anzumerken, dass dies aufgrund der geringen und stark streuenden Datenbasis nur durch eine starke Abstraktion der Versuchsergebnisse erfolgen kann.

Wichtiger ist es, nach Meinung des Verfassers, hier zunächst einen Überblick über verschiedene praxisrelevante Einflussparameter zu gewinnen, um die Erscheinung Verbundkriechen besser verstehen und qualitativ beurteilen zu können. Aus den Arbeiten von FRANKE [50] und ROHLING [115] sind zusammenfassend bisher folgende Aussagen möglich:

- Ab einem Erstbelastungsalter von etwa 28 Tagen ist das Verbundkriechen nahezu zeitunabhängig. Im jungen Betonalter ist dies nicht der Fall, je jünger der Beton umso größer sind die auftretenden Verbundkriechverformungen.
- Die Verbundkriechzahl nimmt mit steigender bezogener Rippenfläche des Betonstahls ab.
- Das Verbundkriechen normalfester Betone ist näherungsweise von der Betongüte und Zementart unabhängig.
- Bis zu etwa 50 % der maximal aufnehmbaren Verbundspannung $\tau_u$ ist das Verbundkriechen unabhängig von der Beanspruchungshöhe (lineares Kriechen)
- Die elastischen Rückverformungen bei vollständiger Entlastung sind gering. Nach ROHLING [115] beträgt die elastische Spontanverformung etwa 10 %, ein Anteil verzögerter Elastizität wird mit ca. 4 % angegeben. Hier sind Parallelen zu den bekannten Kriechfunktionen druckbeanspruchten Betons zu erkennen (vgl. Abschnitt 3.1.5.1).

Zur Absicherung dieser Angaben und einer besseren quantitativen Beurteilung des Verbundkriechens besteht weiterer Klärungsbedarf.

### 3.3.2 Mechanisches Verhalten eines Stahlbetonkörpers im einaxialen Zugversuch

Experimentell kann die Mitwirkung des Betons sehr gut an Zugkörpern untersucht werden. Eine Übertragung des beobachteten Spannungs-Dehnungs-Verhalten auf Biegeträger ist möglich, wenn der Zugbereich entsprechend diskretisiert wird.

#### 3.3.2.1 Monotone Zugbeanspruchung

Bild 3.36 veranschaulicht den im Folgenden näher betrachteten Spannungsverlauf im Beton und Betonstahl entlang der Stabachse. Die Beanspruchung des Betonstahls wird über Verbund im Lasteinleitungsbereich in den umgebenden Beton eingeleitet. Ab einer bestimmten Entfernung von der Lasteinleitung ist bis zum Erreichen der Zugfestigkeit des Betons über die gesamte Probenlänge zunächst ein linear elastisches Verhalten zu verzeichnen, dessen Verlauf durch die Steifigkeit des Stahlbetonquerschnitts im Zustand I beschrieben werden kann (Bild 3.36-a). Die Dehnungen im Beton und Betonstahl sind gleich, es liegt ein kraft- und formschlüssiger Verbund vor.

Bei weiterer Laststeigerung setzt die Erstrissbildung im Querschnitt mit der geringsten Betonzugfestigkeit ein. Im Rissquerschnitt kann der Beton nicht mehr zur Kraftübertragung herangezogen werden, der Betonstahl muss die vollständige Zugkraft übernehmen (Bild 3.36-b). Der auftretende Schlupf bewirkt eine Rissöffnung. Dabei werden Verbundspannungen aktiviert, die unmittelbar neben dem Riss eine lokal begrenzte Kräfteumlagerung vom Stahl zurück in den Beton bewirken. Nach einer bestimmten Risseinleitungslänge sind die Dehnungen im Beton und Stahl wieder gleich groß. Im Anfangsstadium der genannten Erstrissbildung ist der Rissabstand erheblich größer als die erforderliche Risseinleitungslänge. Bei weiterer Zugkraftsteigerung wird auch in Bereichen höherer Betonzugfestigkeit in ungestörten Bereichen das Rissniveau erreicht, es kommt zu einer weiteren Rissteilung. Eine Änderung des Rissbildes ist so lange zu verzeichnen, bis die vom Stahl übertragene Verbundkraft die Zugtragfähigkeit des Betons nicht mehr erreicht. Die Rissbreiten nehmen während dieser Phase der Erstrissbildung nur gering zu. Nach abgeschlossener Rissbildung verbleibt ein Stahlbetonstab, in dem es nur noch vereinzelt zur Rissbildung kommt. Es stellt sich ein abgeschlossenes Rissbild ein, bei dem die Rissbreiten mit steigender Spannung sukzessive zunehmen (Bild 3.36-c).

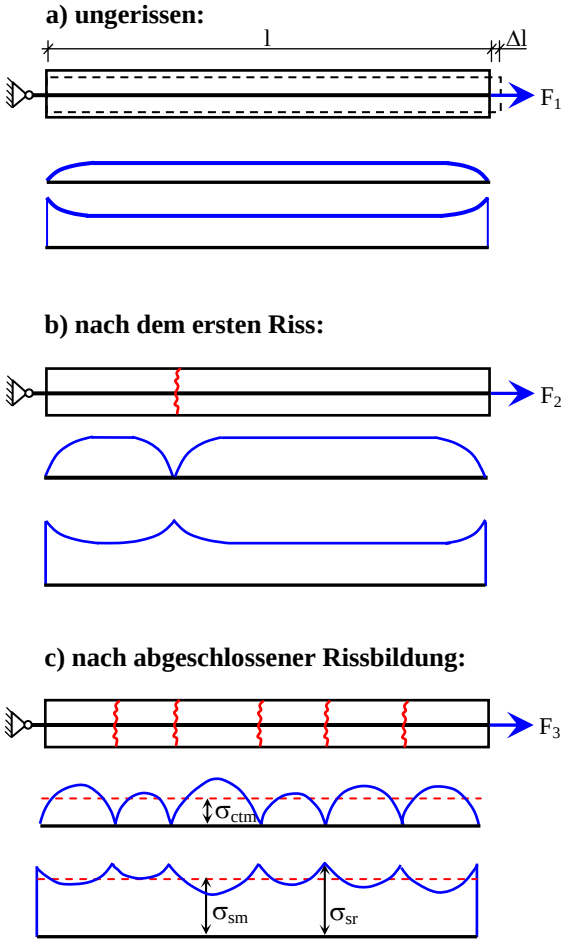



**Bild 3.36:**
**Spannungen des Betons und Betonstahls in einem Stahlbetonzugstab**
**(ELIGEHAUSEN ET AL. [43])**

Trägt man die mittleren Spannungs- und Dehnungsänderungen über die gesamte Probenlänge auf, erhält man den in Bild 3.37 veranschaulichten mittleren Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen. Die zuvor beschriebenen Mitwirkungseffekte sind darin qualitativ gegenüber der reinen Stahlkennlinie darzustellen. In Bereich I ist der Probekörper ungerissen, die Steifigkeit des Stahlbetonquerschnitts bestimmen die Einzelsteifigkeiten von Beton und Stahl. Bereich II ist durch die Erstrissbildung gekennzeichnet. Charakteristisch ist eine große Dehnungsänderung bei geringer Spannungszunahme, der Funktionsanstieg spiegelt etwa die Streuung der Betonzugfestigkeit innerhalb des zugbeanspruchten Bereiches wider. Im Bereich der abgeschlossenen Rissbildung (Bereich III) ist gegenüber dem reinen Zustand II weiterhin eine deutliche Mitwirkung des Betons zu erkennen. Mit zunehmender Duktilität des Betonstahls ist eine geringere Mitwirkung des Betons zu erwarten.

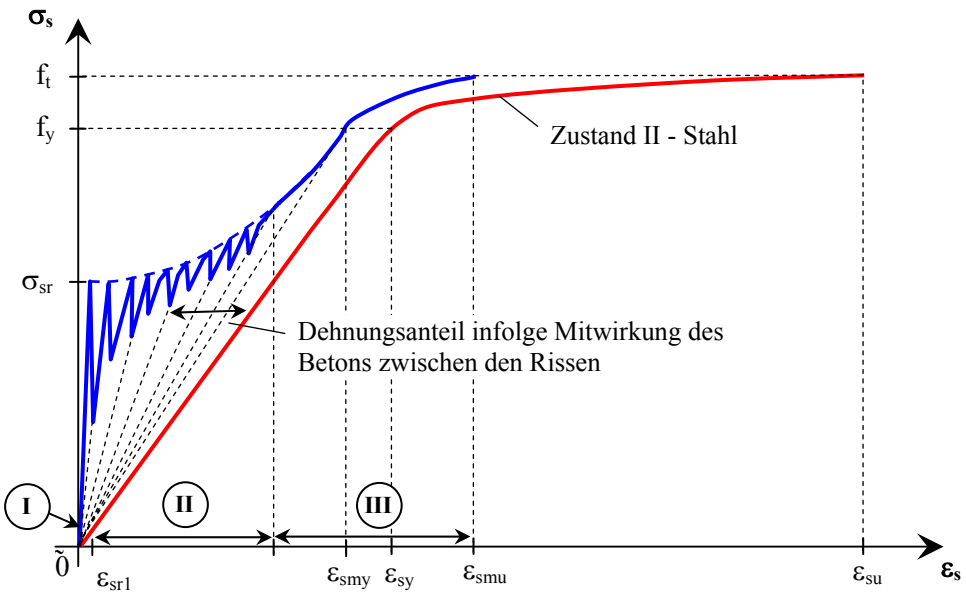



**Bild 3.37: Idealisierte Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit eines Stahlbetonzugkörpers (ELIGEHAUSEN ET AL. [43])**

Aus systematischen Untersuchungen zur Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen sind folgende wesentliche Einflussgrößen und deren qualitative Abhängigkeiten bekannt:

- Mit zunehmender Rissbildung und zunehmendem Bewehrungsgrad nimmt die Versteifungswirkung durch den Verbund ab.
- Ein Anstieg der Verbundsteifigkeit und der Betonfestigkeit erhöhen die Versteifungswirkung. Unter gleichen Randbedingungen ist deshalb die Mitwirkung bei Bauteilen aus hochfestem Beton etwas größer als bei normalfestem Beton.

### 3.3.2.2 Ent- und Wiederbelastung

Zur Ent- und Wiederbelastungen von Stahlbetonbauteilen existieren gegenüber der monotonen Beanspruchung vergleichsweise nur wenige systematische Untersuchungen.

Einen guten Überblick über das Verhalten im Zugschwellbereich bietet die Arbeit von GÜNTHER [57]. Auf der Basis systematischer experimenteller Untersuchungen unter monoton steigender, schwellender und unter langzeitiger Belastung wurden die prinzipiellen Beziehungen zwischen mittlerer Dehnung und auf die Stahlquerschnittfläche bezogener Spannung gezielt analysiert. Bild 3.38 gibt exemplarisch die Ergebnisse eines Versuchs wieder. Alle Versuche weisen bei einer völligen Entlastung aus dem Bereich der abgeschlossenen Rissbildung, unabhängig von der Lastwechselzahl und den geometrischen Versuchsrandbedingungen, eine Residualdehnung von etwa 0,2 ‰ auf. Außerdem ist unter Dauerlast und langzeitigen Schwellbeanspruchungen mit konstanter Ober- und Unterlast erwartungsgemäß eine Abnahme der Mitwirkungseffekte zu verzeichnen (Verbundkriechen). Wird der Traglastversuch abschließend über das Niveau der bisherigen Oberlast hinaus weitergeführt, nähert sich der Verlauf wieder dem bei monotoner Laststeigerung an.

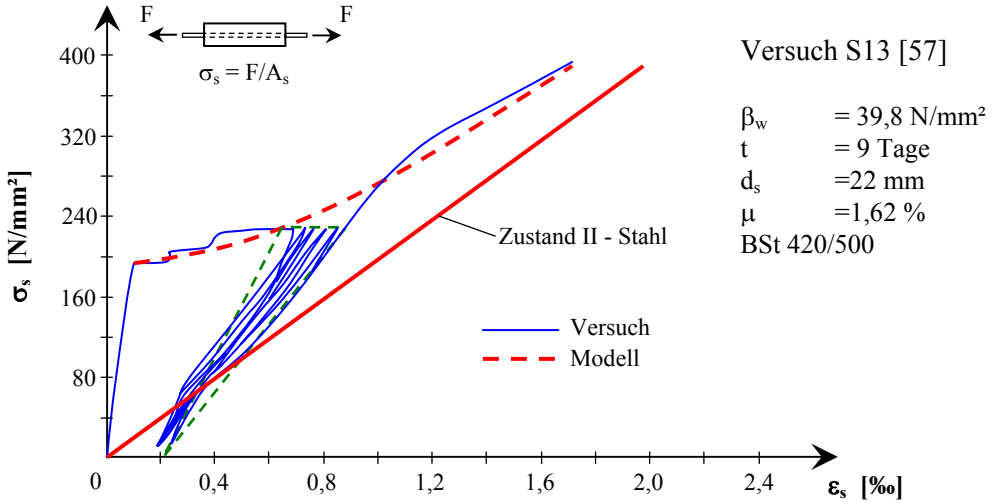



**Bild 3.38: Idealisierte Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit eines Stahlbetonzugkörpers unter Zugschwellbeanspruchung im Kurzzeit- und Dauerversuch (GÜNTHER [57])**

Die Residualdehnung lässt sich durch Gefügeänderungen des hochbeanspruchten Betons in der Umgebung der Bewehrungsrippen begründen. Die Schädigung des Betons in der Kontaktfläche verhindert ein Schließen des Rissquerschnitts bei völliger Zugentlastung, dies kann nur durch das Aufbringen einer Druckspannung geschehen. Im Betonstahl verbleibt eine Zugkraft als Eigenspannungszustand. Da allerdings die Größe der verbleibenden Dehnung von der Anzahl der Risse je Längeneinheit abhängig ist, kann die Residualdehnung keine feste Größe sein. Versuche von ELIGEHAUSEN ET AL. [43] zeigen, dass auch bei Entlastungen im Bereich der Erstrissbildung bereits plastische Dehnungsanteile zu verzeichnen sind. Ent- und Wiederbelastung lassen auch hier einen gegenüber der Anfangssteifigkeit geringeren Anstieg erkennen. Systematische Untersuchungen liegen dazu allerdings nicht vor.

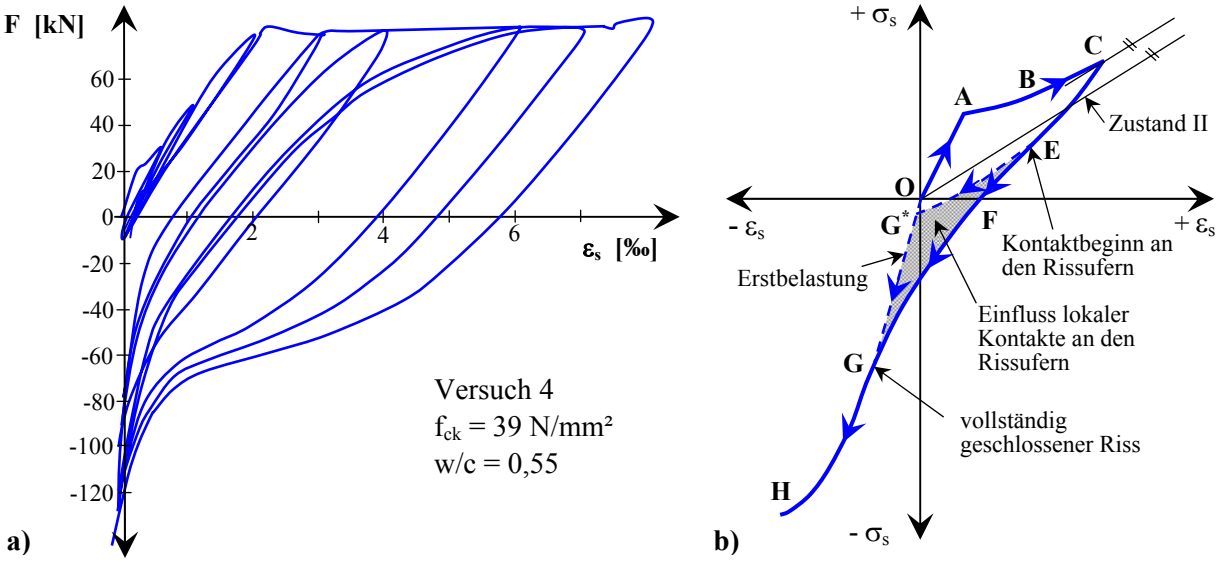



**Bild 3.39: Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit von Stahlbeton beim Übergang vom Zug- in den Druckbereich a) Versuch b) schematische Darstellung des Tragmechanismus (MORITA ET AL. [98])**

Für zyklische Druck-Zug-Wechselbeanspruchungen an Stahlbetonproben sind aus der Literatur nur wenige gezielte Untersuchungen bekannt. Eine gute Übersicht des prinzipiellen Tragmechanismus gibt die Arbeit von MORITA ET AL. [98]. Bild 3.39 zeigt die Ergebnisse eines

Versuchs und das daraus abgeleitete qualitative Ingenieurmodell. Analog den Beobachtungen im Zugschwellbereich verbleibt bei vollständiger Entlastung eine residuale Dehnung (Punkt F). Zum völligen Schießen eines Risses wird eine Druckspannung erforderlich, deren Größe mit zunehmender Zugschädigung nur geringfügig zunimmt (Bereich G*-G). Sind diese lokalen Einflüsse überwunden, geht die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit des zuggeschädigten Stahlbetonquerschnitts in den für Erstbelastungen charakteristischen Verlauf über (Linie OGH).

### 3.3.3 Werkstoffmodellierung

Die aufgezeigten Zusammenhänge verdeutlichen, dass die Ermittlung der realen Steifigkeiten und Rissbreiten in Stahlbetonquerschnitten ein sehr komplexes Problem darstellt, welches insbesondere durch die gegenseitige Beeinflussung einzelner Faktoren geprägt ist. Detaillierte numerische Analysen sind derzeit nur mit einem sehr hohen Rechenaufwand realisierbar.

Die nachgiebige Verbindung zwischen Betonstahl und Beton kann beispielsweise mit einer Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung erfasst werden. Allerdings verliert dabei die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte ihre Gültigkeit. Für die in dieser Arbeit fokussierten Strukturen ist der damit verbundene numerische Aufwand allerdings nicht gerechtfertigt. Zur Berechnung der Schnittgrößen und Verformungen komplexer Tragstrukturen sind daher Lösungsansätze erforderlich, mit denen das makroskopische Verhalten eines Stahlbetonquerschnittes gut abgebildet werden kann. Im Gegensatz dazu erfordert die Analyse von Rissbreiten und deren zeitliche Entwicklung eine genauere Betrachtung lokaler Dehnungsdifferenzen im Rissquerschnitt.

#### 3.3.3.1 Tension-Stiffening

Bei der Beschreibung des Leistungsumfangs des vorgestellten Lösungsverfahrens wurde in Abschnitt 2.3.2.6 bereits die verschmierte Rissmodellierung postuliert. Dabei wird der nachgiebige Verbund zwischen Betonstahl und Beton durch eine im Integrationsabschnitt verschmierte Betrachtungsweise unter Beibehaltung der Ebenenhypothese erfasst. Als Ergebnis dieser Vereinfachungen kann das Tension-Stiffening bei einer querschnittsintegralen Betrachtungsweise durch Momenten-Krümmungs-Abhängigkeit oder Normalkraft-Dehnungs-Abhängigkeit erfasst werden. Im Fall einer schichtenweisen Querschnittsdiskretisierung erfolgt dies auf der Basis modifizierter Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten des Betons **oder** Betonstahls. Aktuelle Bemessungsrichtlinien (z.B. DIN 1045-1 [32], EUROCODE 4 [46]) stellen für beide Diskretisierungsvarianten Kennlinien zur Verfügung. Auf diese, sowie aus der Literatur bekannte weiterführende Modelle wird im Folgenden näher eingegangen.

HANSWILLE stellt in [62] einen Lösungsansatz vor, bei dem Rissbreiten, Rissabstände und das Verformungsverhalten eines zugbeanspruchten Betongurts im Zusammenhang betrachtet werden. Im Mittelpunkt steht dabei das Verhalten von Verbundträgern unter Gebrauszustandstypischen Einwirkungen. Auf der Basis des Verbundgesetzes nach Gleichung (3.34) wird für die Ermittlung der genannten Größen analytisch ein Zusammenhang formuliert. Durch eine kontinuierliche, verbundorientierte Theorie wird insbesondere der Einfluss von Eigenspannungszuständen auf die Erstrissbildung und die resultierenden Rissbreiten rechnerisch erfasst.

Für numerische Analysen werden daraus Steifigkeitsbeziehungen des Gesamtquerschnitts in Form von mittleren Momenten-Krümmungs-Abhängigkeiten im Rissquerschnitt erhalten. Wird die zugrunde liegende Verbundspannungs-Schlupf-Abhängigkeit zeitabhängig formuliert, lässt sich außerdem das Verbundkriechen in den Ansatz integrieren (siehe dazu z.B. FLEDERER [49]).

Bei einer schichten- oder faserweisen Diskretisierung des Stahlbetonquerschnittes wird das Materialverhalten über Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten abgebildet. Bis zur Betonzugfestigkeit werden bei vollem Verbund die Stoffgesetze von Baustahl und Beton zunächst getrennt betrachtet. Der Einfluss des Tension-Stiffening findet dann mit Beginn der Rissbildung und des nachgiebigen Verbundverhaltens durch eine Modifikation der Beton- oder Betonstahlkennlinie Beachtung, die funktionalen Formulierungen basieren dabei auf empirischen Ansätzen. Im Folgenden wird auf verschiedene Modellansätze, die darin erfassbaren Einflussgrößen und die numerische Handhabung beider Varianten eingegangen.

Wird die Kennlinie des Betonstahls modifiziert, bewirkt das Tension-Stiffening eine Reduzierung der (mittleren) Stahldehnung. Im Abschnitt 3.3.2.2 wurde dieser Bezug bereits qualitativ aufgezeigt (Bild 3.37). Bild 3.40 gibt den Ansatz nach DIN 1045-1 [32] (DAFSTB HEFT 525 [30]) wieder. Während der Erstrissbildung symbolisiert der Steifigkeitsanstieg die Streuung der Betonzugfestigkeit zwischen dem 5 %- und 95 %-Fraktilwert. Der Einfluss des Verbundkriechens bei Dauerbeanspruchung wird durch einen Abminderungsfaktor $\beta_t$, d.h. eine Reduzierung der Mitwirkung berücksichtigt (vgl. Bild 3.38). Soll die Stahlkennlinie im Bereich plastischer Dehnungen detaillierter abgebildet (Fließplateau und Wiederverfestigung) werden, können der Arbeit ELIGEHAUSEN ET AL. [43] zwei aus Versuchen abgeleitete vereinfachte Modelle entnommen werden.

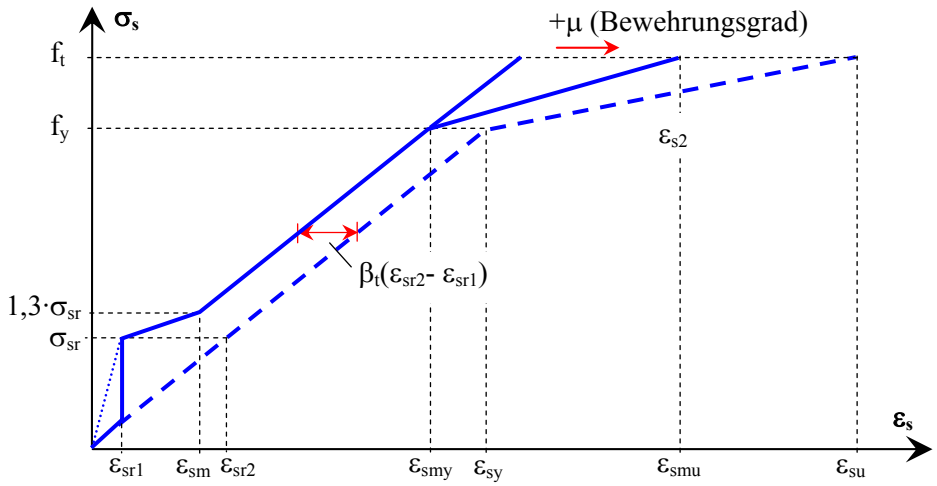



**Bild 3.40: Modifizierte Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit für Betonstahl zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (nach DAFSTB HEFT 525 [30])**

Mit Beginn der Rissbildung müssen bei dieser Variante die Beanspruchungen des Betons mit einem Mal vollständig in den Betonstahl umgelagert werden. Insbesondere bei niedrigen Bewehrungsgraden und lastgesteuerten Iterationsverfahren können dabei aus numerischer Sicht durch zu große Steifigkeitssprünge Konvergenzprobleme auftreten (siehe dazu Abschnitt 4.3.1).

Soll das Tension-Stiffening in der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit des Betons Beachtung finden, wird diese nach Erreichen der Zugfestigkeit modifiziert. Ein abfallender Ast beschreibt das Nachbruchverhalten des Betons und damit die beanspruchungsabhängige Spannungsumlagerung vom Beton in den Betonstahl. In Bild 3.41 sind einige bekannte Ansätze veranschaulicht. Das modifizierte Betonstoffgesetz wird dabei unabhängig vom Bewehrungsgrad und der Bewehrungsanordnung im Querschnitt in allen Schichten gleichermaßen verwendet. Insbesondere bei dicken Querschnitten ist die damit ebenfalls verbundene Annahme einer gleichmäßigen Bewehrungsverteilung oftmals nicht gerechtfertigt. Die Folge kann eine ungenaue Vorhersage der Verformungen sein, sie fallen zu gering aus. Nach STEMPNIEWSKI/EIBL [136] können deshalb nur bei stabartigen Strukturen befriedigende Ergebnisse erzielt werden.

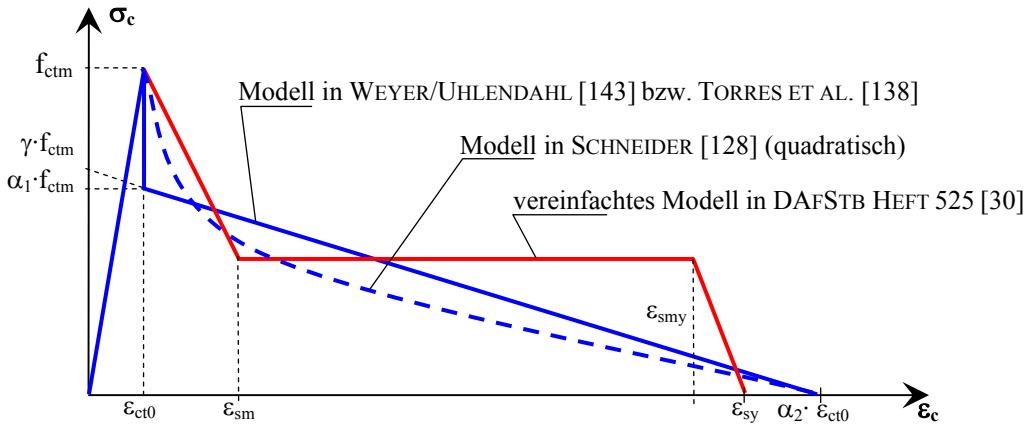



**Bild 3.41: Möglichkeiten zur Abbildung des Tension-Stiffening auf der Betonseite**

Unter Berücksichtigung folgender Zusammenhänge kann bis zur Bruchdehnung des Betonstahls eine gute Vorhersagegenauigkeit, unabhängig vom gewählten funktionalen Ansatz, erzielt werden. Zunächst sollte der abfallende Ast einen größeren Steifigkeitsabfall aufweisen, wodurch die Erstrissbildung symbolisiert wird. Durch einen anschließend flach abfallenden Ast, mit einem Nulldurchgang im Bereich der Fließdehnung des Stahls, kann eine gute Konvergenz im Bereich der Traglast erzielt werden.

Versuchsnachrechnungen von WEYER/UHLENDAHL [143] an biegebeanspruchten Verbundträgen zeigen, dass mit einem Steifigkeitssprung bei Erreichen der Betonzugfestigkeit und einem anschließend linear abfallenden Ast zuverlässige Ergebnisse erzielt werden (Faktoren $\gamma$ und $\alpha_2$ im Bild 3.41). $\gamma$ sollte danach zwischen 0,5 und 0,7 liegen. Ähnliche systematische Untersuchungen für Stahlbetonträger sind von TORRES ET AL. [138] bekannt. Ausgehend von den normativen Momenten-Krümmungs-Abhängigkeiten des EUROCODE 2 [44] werden aus Vergleichsrechnungen und statistischen Untersuchungen für die Faktoren $\alpha_1$ und $\alpha_2$ analytische Zusammenhänge formuliert. Diese berücksichtigen den vorhandenen Bewehrungsgrad, die Betondeckung, den Abstand der Bewehrungslagen. Der Einfluss einer Normalkraftbeanspruchung kann ebenfalls einbezogen werden.

Aus numerischer Sicht stellt die Berücksichtigung des Tension-Stiffening-Effekts auf der Betonstahlseite die effizientere, da stabilere Lösung dar. Im Rahmen von FE-Analysen findet sie deshalb bevorzugt Anwendung.

#### 3.3.3.2 Rissabstände und Rissbreiten

Aufgrund verschiedener Einflussfaktoren (Streuung der Betonzugfestigkeit, Schwinden, Hydratation, etc.) ist es nicht möglich, die genaue Lage von Rissen in Stahlbetonbauteilen und die zu erwartenden Rissbreiten rechnerisch zu bestimmen. Nach KÖNIG/TUE [76] sind die Dicke und Dichtigkeit der Betondeckung bei Rissbreiten bis 0,4 mm die maßgebenden Faktoren für den Korrosionsschutz des Betonstahls. Bei den bekannten Verfahren handelt es sich deshalb immer um Näherungslösungen, wobei eine Überschreitung der Rechenwerte nicht auszuschließen ist.

Mittlere Rissbreiten $w_m$ können vereinfacht durch die Integration der mittleren Stahldehnung $\varepsilon_{sm}$ über die Risseinzugslänge $l_E$ bestimmt werden:

$$w_m = \varepsilon_{sm} \cdot l_E \tag{3.38}$$

Dabei beschreibt die Risseinleitungslänge den Abstand zweier Punkte, in denen keine Relativverschiebungen zwischen Betonsstahl und Beton auftreten. In der Phase der Erstrissbildung liegt keine Überschneidung der Risseinzugslängen vor, so dass in der Mitte zwischen zwei Rissen die Stahl- und Betondehnungen gleich sind. Am Ende der Einleitungslänge kann sich beim Überschreiten der Betonzugfestigkeit ein neuer Riss bilden. Liegt ein abgeschlossenes Rissbild vor, entspricht der Rissabstand etwa der Risseinzugslänge. Die Festlegungen in normativen Regelwerken gehen deshalb immer von einer querschnittsabhängigen Annahme des mittleren Rissabstandes aus.

Die Rissbreiten und deren zeit- und lastabhängige Entwicklung sind außerdem in starkem Maße vom Verbundverhalten abhängig. Ein schlechter Verbund führt ebenso wie ein geringerer Bewehrungsgrad zu größeren Erstrissbreiten und größeren Rissabständen. Infolge des Verbundkriechens ist unter Dauerlast außerdem eine Verringerung der Verbundwirkung zu verzeichnen.

Bei querschnittsintegraler Betrachtungsweise können mit Hilfe eines Verbundgesetzes Gleichgewichtsbedingungen am Querschnitt formuliert und daraus Gleichungen für Rissschnittgrößen und Rissbreiten abgeleitet werden (z.B. HANSWILLE [62], ELIGEHAUSEN ET AL. [43]). Die in dieser Arbeit verwendete schichtenweise Querschnittsdiskretisierung, verbunden mit der „verschmierten Rissbildung“ im Tension-Stiffening-Ansatz, liefert bereits mittlere Materialdehnungen. Demzufolge sind für eine Rissbreitenabschätzung gemäß Gleichung (3.38) Angaben zum mittleren Rissabstand erforderlich. Dazu kann auf verschiedene Modelle aus Normung und Forschung zurückgegriffen werden. Eine Beurteilung derartiger Ansätze wird in dieser Arbeit nicht angestrebt.

### 3.3.4 Verwendetes Rechenmodell

Für allgemeine Tragwerksanalysen wird das Tension-Stiffening über eine modifizierte Betonkennlinie erfasst. Dazu wird der speziell an Verbundträgern untersuchte Ansatz von WEYER/-UHLENDAHL [143] in einer erweiterten Form angewendet. Bild 3.42 veranschaulicht die beim Stahlbeton gegenüber Bild 3.11 modifizierte Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit des Betons.

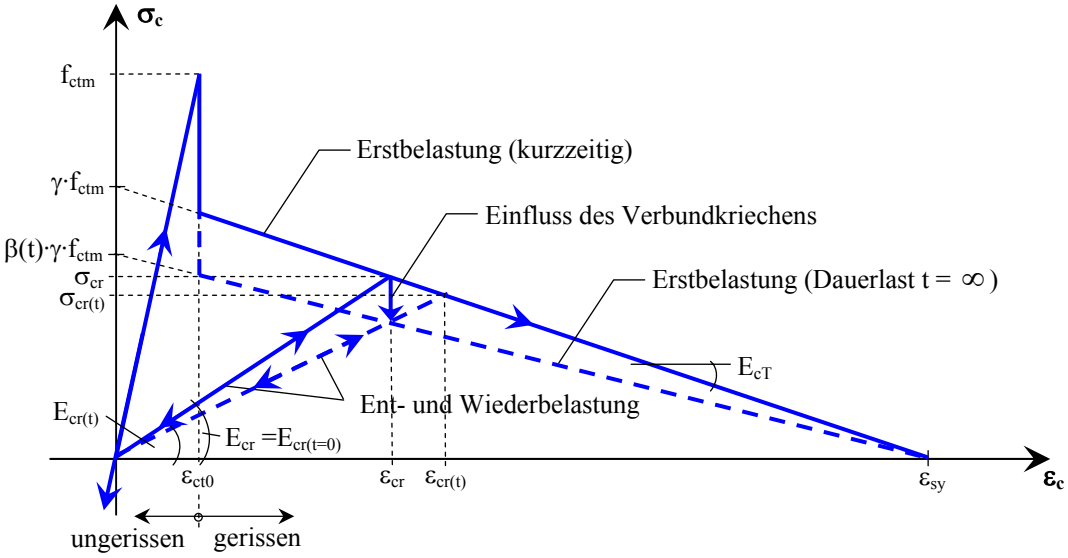



**Bild 3.42: Verwendete Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit für zugbeanspruchten Beton unter Beachtung des Tension-Stiffening-Effekts**

Im abfallenden Ast der Betonzugspannung ($\varepsilon_c > \varepsilon_{ct0}$) wird die Erstbelastung durch folgende Funktion beschrieben:

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \gamma \cdot f_{ctm} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{sy}}\right) \cdot \beta(t) \tag{3.39}$$

Bei Ent- und Wiederbelastung lautet der Zusammenhang:

$$\varepsilon_{cr(t)} = \gamma \cdot f_{ctm} \cdot \left(E_{cr} + E_{cT}\right)^{-1}; \sigma_{cr(t)} = E_{cr} \cdot \varepsilon_{cr(t)} \tag{3.40}$$

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = E_{cr(t)} \cdot \varepsilon_c \tag{3.41}$$

Der Einfluss des Verbundkriechens bei Dauerlasten wird stark vereinfacht über einen Reduktionsfaktor im abfallenden Ast erfasst. Über den zeitlichen Verlauf von $\beta(t)$ sind aus DAFSTB HEFT 525 [30] nur ein Faktor 1 für kurzzeitige Lasten und von 0,625 unter Dauerlast ($t = \infty$) bekannt, für den zeitabhängigen Verlauf liegen keine Angaben vor. Aus diesem Grund wird im Materialmodell dieser Arbeit folgende vom Erstbelastungsalter unabhängige Beziehung von FRITSCHE [51] verwendet:

$$\beta(t) = \frac{1}{1 + 0{,}124 \cdot t^{0{,}169}} \quad ; \text{ t in Stunden} \tag{3.42}$$

Mit diesem Ansatz wird die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit im abfallenden Ast unter Dauerbelastung sukzessive angepasst. Eine Belastungssteigerung über das bisher erreichte Dehnungsniveau hinaus erreicht zunächst wieder die Erstbelastungsfunktion bei Kurzzeitbeanspruchung. Bei anschließender Dauerlast setzt die beschriebene Reduktion der Spannungen infolge Verbundkriechen dann wieder ein.

Bei Ent- und Wiederbelastung wird der Verlauf der Kennlinie in beiden Fällen vereinfacht durch den Koordinatenursprung und den Punkt der maximal erreichten Betonzugdehnung gelegt. Aus lokalen Gefügeänderungen resultierende plastische Verformungen bleiben unberücksichtigt, da deren Größe sowie das Spannungsniveau bei völliger Rissschließung quantitativ nicht ausreichend belegt sind. An dieser Stelle besteht Forschungsbedarf. Ungeklärt ist auch, ob eine Druckvorschädigung des Betons zu einer Reduzierung des Tension-Stiffening führt. In Übereinstimmung mit dem Rechenmodell des Betons (Bild 3.11) wird deshalb auf eine druckschädigungsabhängige Veränderung der Zugfestigkeit verzichtet.

Beim Übergang in den Druckbereich wird die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit der einzelnen Materialien wieder aufgenommen.

Mittlere Rissbreiten werden nach Gleichung (3.38), die einzelnen Komponenten dieser Beziehung unter Verwendung der in DIN 1045-1 [32] angegebenen Beziehung bestimmt.

## 3.4 Verbundsicherung zwischen Baustahl und Beton

Die Ausführungen in diesem Abschnitt beziehen sich zunächst auf die Verbundsicherung in Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen aus normalfesten Baustählen und Betonen. Auf die speziellen Besonderheiten der zurzeit noch unzureichend erforschten Problematik der Verbundsicherung bei Anwendung von hochfestem Stahl und Beton wird abschließend in Abschnitt 3.4.6 eingegangen.

### 3.4.1 Allgemeines

Im Stahl-Beton-Verbundbau wird durch eine schubkraftübertragende Verdübelung das Zusammenwirken von Betongurt und Stahlprofil realisiert. Primäre Aufgabe der Verdübelung ist es, ein tragfähiges und zuverlässiges Zusammenwirken der Verbundpartner zu garantieren. Dazu wurden verschiedene Arten von Verbindungsmitteln für eine kontinuierliche oder konzentrierte Kraftübertragung entwickelt (Betondübel, Blockdübel, Kopfbolzendübel, Perfobondleiste, Schenkeldübel, Schlaufenanker, Winkelstahldübel, Zahnleisten etc.). Der Kopfbolzendübel (KBD) ist dabei das in der Praxis am meisten verwendete und im Versuch am häufigsten untersuchte Verbindungsmittel. Die bevorzugte Anwendung ist zum einen auf die große Duktilität der KBD und zum anderen auf das schnelle und rationelle Aufbringen dieser auf den Stahlobergurt durch das Bolzenschweißen mit Hubzündung zurückzuführen, außerdem lassen sich mit dieser Technik Bolzenschweißungen mit der erforderlichen Qualität reproduzierbar durchführen.

Nach der Herstellung des Betongurts werden zwei Arten von Verbundträgern unterschieden. Während im Brückenbau die klassische Ausführung des Verbundträgers mit massiver Vollbetonplatte Anwendung findet, hat sich im Hochbau für Geschossdecken die Verwendung von profilierten Blechen mit Aufbeton als wirtschaftliche Bauweise etabliert (Bild 3.43). Die Profilbleche werden dabei vorwiegend rechtwinklig zum Stahlträger verlegt und dienen als verlorene Schalung. Die äquidistante Anordnung von KBD in den Sicken der Profilbleche stellt dafür die einzige effektive Verdübelungsmöglichkeit dar. Da deren Anwendung zurzeit auch im Brückenbau unstrittig ist, wird sich im folgenden auf das Verbindungsmittel Kopfbolzendübel beschränkt und bezüglich deren Befestigung das Bolzenschweißverfahren mit Hubzündung vorausgesetzt.

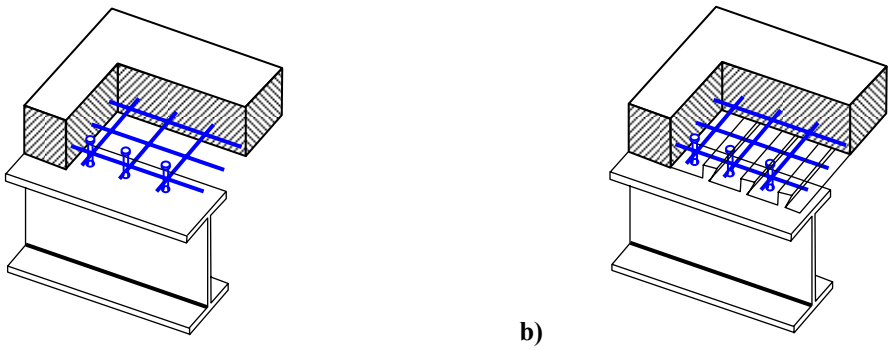



**Bild 3.43: Übliche Konstruktionsformen von Verbundträgern mit: a) massivem Betongurt und b) profiliertem Betongurt**

Eine wesentliche Eigenschaft der KBD ist ihre Nachgiebigkeit beim Aufbringen einer Schubkraft. Dies kann zu Relativverschiebungen in der Verbundfuge und damit zum unvollständigen Zusammenwirken der Verbundpartner führen. Nach der Verbundwirkung wird deshalb zwischen starrem und nachgiebigem Verbund unterschieden. Ein zweiter wesentlicher Punkt ist die Tragfähigkeit der Verbundfuge. Voller Verbund (volle Verdübelung) ist gegeben, wenn das Versagen eines Trägers durch dessen Biegetragfähigkeit bestimmt wird, d.h. eine ausreichende Anzahl von Verbindungsmitteln zur Verfügung steht, um die Schubkräfte zu übertragen. Ist dies nicht der Fall, sondern wird das Versagen des Trägers durch die Tragfähigkeit der Verdübelung bestimmt, liegt ein Teilverbund (Unterverdübelung) vor. Um der im Brückenbau normativ geregelten Forderung nach einer starren Verdübelung gerecht zu werden, werden in der Praxis eine Vielzahl von KBD angeordnet, die bewirken, dass die auftretenden Relativverschiebungen klein sind und damit kaum einen Einfluss auf die Teilschnittgrößen haben. Im Hochbau wird dagegen der Teilverbund (Verdübelungsgrade bis zu 50 %) im Zusammenhang mit profilierten Betongurten planmäßig genutzt, um die hohe Duktilität der KBD bei der Lastumlagerung zum Abbau von Spannungsspitzen zielgerichtet auszunutzen. Die Auswirkungen der Relativverschiebungen auf die Spannungsverteilung in den Teilquerschnitten sind dann auf jeden Fall zu berücksichtigen.

Die Tragfähigkeit von Kopfbolzendübeln wird überwiegend in Scherversuchen – so genannten Push-Out- oder Pull-Out-Versuchen – ermittelt. Daraus abgeleitete Dübelformeln bilden die Grundlage für Nachrechnungen und normative Bemessungsansätze. Trägerversuche sind ebenfalls bekannt, diese sind insgesamt jedoch aufwendiger und schwieriger auszuwerten. Da bereits die Versuchsrandbedingungen und der Aufbau von Scherversuchen einen wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis haben, sind in EUROCODE 4-1, ABSCHN. 10 [46] die Konstruktion der Versuchskörper sowie die Durchführung und Auswertung der weggesteuerten Versuche geregelt. Einige kritische Anmerkungen im Hinblick auf Verbundträger mit profiliertem Betongurt werden z.B. von BECKER [13] und MENSINGER [92] gemacht.

### 3.4.2 Zum Tragverhalten von Kopfbolzendübeln

#### 3.4.2.1 Statische Beanspruchung

Bild 3.44 zeigt typische Last-Verformungs-Abhängigkeiten (Dübelkennlinien) von KBD bei statischer Belastung unter veränderlicher Geometrie des Betongurts. Charakteristisch sind eine große Steifigkeit bei niedrigen Beanspruchungen und eine hohe Duktilität im Bereich der Traglast. Außerdem ist zu erkennen, dass sich der Tragmechanismus eines KBD in einer Vollbetonplatte erheblich von dem mit profiliertem Betongurt unterscheidet. Bei Profilblechen stellt sich geometrieabhängig ein unterschiedliches Tragverhalten ein, für das zwei Maxima charakteristisch sind. Die Rippengeometrie ist dabei für das erreichbare Traglastniveau entscheidend. Sie liegt bei hinterschnittenen Profilen (z.B. Holorib-Bleche) ca. 10 % höher als bei Trapezblechen mit offener Rippengeometrie, welche eine untere Grenze darstellen.

Aus Bild 3.44 ist ebenfalls ersichtlich, dass mit zunehmender Nachgiebigkeit auch die Anforderungen an die Duktilität der KBD steigen. EUROCODE 4-1 [46] regelt einerseits die erforderlichen Werkstoffeigenschaften für das Grundmaterial des KBD ähnlich dem Baustahl

($f_u/f_y \geq 1{,}2$ , $\varepsilon_u \geq 12\%$ ), andererseits werden Vorgaben zu den geometrischen Abmessungen des KBD (z.B. Schaftdurchmesser, Dübellänge) gemacht. Bezüglich der Duktilität ist außerdem ein charakteristischer Wert des Verformungsvermögens von 6 mm angegeben.

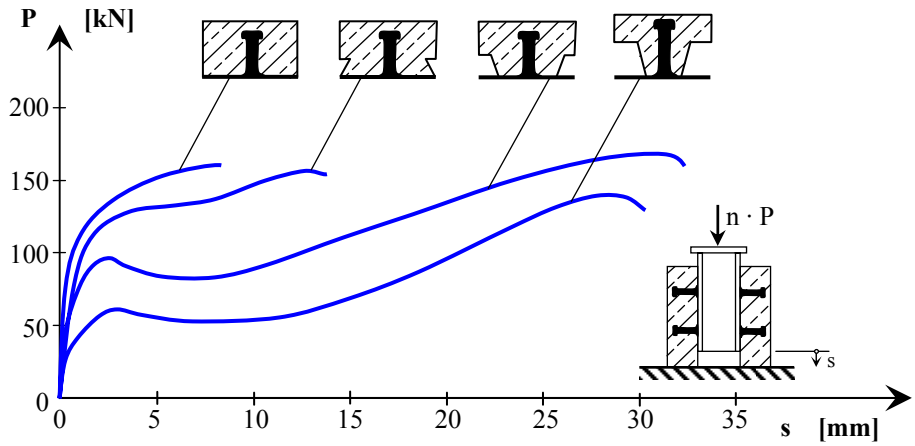



**Bild 3.44: Last-Verformungs-Abhängigkeiten von Kopfbolzendübeln**

Das Trag- und Verformungsverhalten von KBD wird maßgebend durch die Betonumgebung beeinflusst. Diese bewirkt ein komplexes, lokales Wechselspiel zwischen Beton, Dübel und Schweißwulst, welches bei statischer und besonders unter wechselnder Beanspruchung zeitlich veränderlich ist.

LUNGERSHAUSEN [88] entwickelte anhand von Versuchen, Federmodellen und FE-Berechnungen Ingenieurmodelle für die Lastabtragung in Vollbetonplatten sowie in profilierten Betongurten. Dazu wird der Tragmechanismus qualitativ in verschiedene Anteile zerlegt, welche helfen, das Gesamttragverhalten von KBD bei statischer Beanspruchung zu verstehen. Es wird davon ausgegangen, dass eine ausreichende Betondeckung über dem Dübelkopf ein Versagen durch das vorzeitige Ausbrechen des Betons bzw. eines Teils der Betonrippe konstruktiv verhindert.

**Vollbetonplatten** Für Vollbetonplatten ist charakteristisch, dass die Schubkraft zu Beginn im Wesentlichen über den Dübelfuß in den Betongurt eingeleitet wird (Traganteil A in Bild 3.45 a). Dabei spielt der Schweißwulst eine große Rolle, da er die Lasteinleitungsfläche vergrößert, und den Bolzen am Fußpunkt entlastet. Im Beton bildet sich dort lokal ein mehraxialer Spannungszustand aus, der bereits auf Gebrauchslastniveau zu einer Schädigung führt und eine zunehmende Verschiebung des Bolzenfußes und damit eine stärkere Biegebeanspruchung des Dübelschafts (Traganteil B) zur Folge hat. Bei etwa 60 % bis 70 % der Bruchlast treten erste plastische Biegeverformungen im unteren Dübelschaftbereich auf, denen nach SCHEELE [126] Bolzenverschiebungen mit etwa 0,25 mm - 0,5 mm zugeordnet werden können. Der Dübelkopf verhindert eine vertikale Verschiebung des Dübels im Beton. Dadurch wird im Dübelschaft eine Betonzugkraft ausbildet, deren Horizontalkomponente den Traganteil C bildet. Die vom Dübelkopf abgesetzten Druckstreben aktivieren in der Verbundfuge Reibungskräfte (Traganteil D). Bei weiterer Laststeigerung tritt das Versagen als ein Schub-Zugbruch im Dübelschaft oberhalb des Schweißwulstes auf.

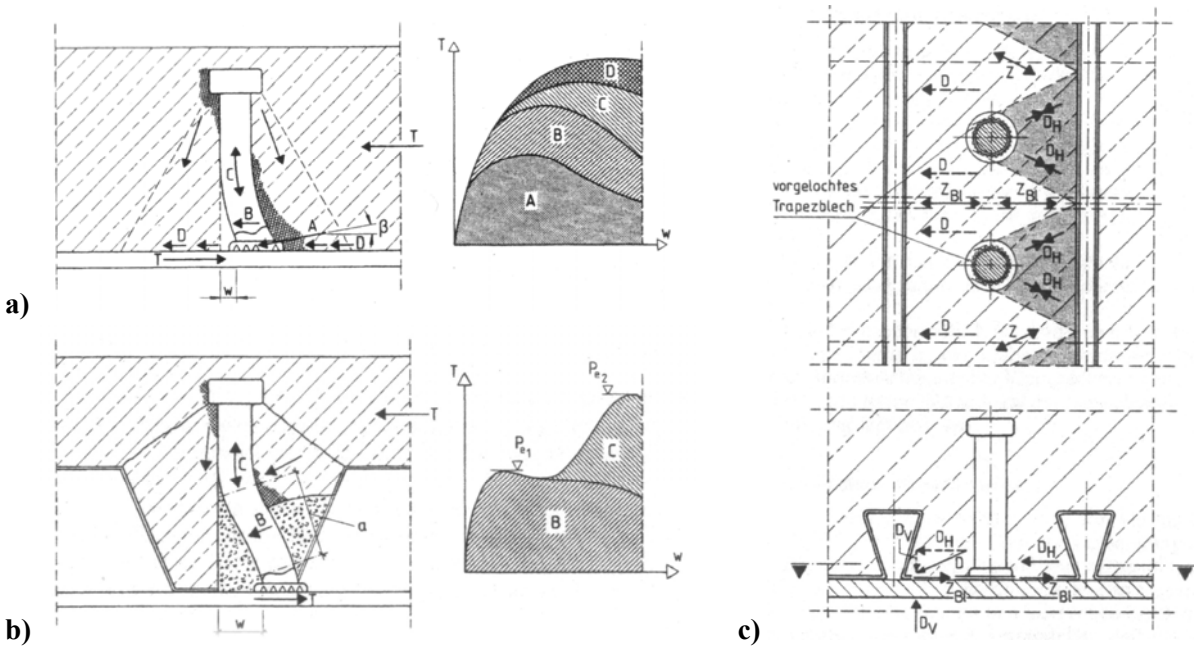



**Bild 3.45: Tragmodelle für Kopfbolzendübel: a) in Vollbetonplatten, b) in Trapezblechprofilen und c) für den Kräfteverlauf bei der Schubkrafteinleitung in Profilblechen mit hinterschnittener Geometrie (nach LUNGERSHAUSEN [88])**

**Profilbleche** Werden Profilbleche mit Rippengeometrie verwendet, beeinflusst die Profilgeometrie die Schubkrafteinleitung am Dübelfuß und damit das Tragverhalten. Deshalb werden im Folgenden Profilbleche mit offener Geometrie (Trapezblechprofile) und mit hinterschnittener Blechgeometrie (Holoribbleche) unterschieden.

***Trapez:*** Im Fall der in Bild 3.45 b dargestellten hohen Rippe kann die Schubkraft nicht am Dübelfuß eingeleitet werden, sondern muss über das Profilblech und die Betonrippe „zurückgehängt“ werden. Beim Überschreiten der Betonzugfestigkeit bricht der Beton vor dem Dübelschaft heraus, weshalb eine Schubübertragung über den Schweißwulst (Traganteil A der Vollbetonplatte) nicht möglich ist und die Schubkraft nur durch Biegung übertragen werden kann (Traganteil B). Das erste Maximum lässt sich durch die Bildung von Fließgelenken im Dübelschaft interpretieren. Die dabei übertragbare Querkraft wird durch den Abstand a der Fließgelenke bestimmt. Bei einer weiteren Laststeigerung wird analog der Vollbetonplatte durch den Dübelkopf eine Zugkraft im Dübelschaft aufgebaut, deren Horizontalkomponente den Traganteil C bewirkt. Das Versagen wird durch das Abreißen des Dübels über dem Schweißwulst (Versagen der Zugstrebe) oder durch das Ausbrechen eines Teils der Betonrippe (Versagen der Druckstrebe) erfolgen.

***Holorib:*** In Profilblechen mit hinterschnittener Geometrie können aufgrund des größeren Betonvolumens bei geringen Dübelkräften noch Schubkräfte im Bereich des Dübelfußes unter Ausnutzung der Betonzugfestigkeit rückverankert werden. Nach deren Überschreiten wird die Rückverankerung allein durch das Profilblech übernommen. Dabei kann sich die in Bild 3.45 c dargestellte Druckstrebe D zum Teil im Rippenbereich der Kopfbolzen abstützen, und deren Horizontalkomponente $D_H$ über eine Zugkraft Z im Profilblech in den Rippenbereich vor dem Dübel übertragen werden. Die für das Gleichgewicht erforderliche Druckstrebe kann sich dabei im Beton am Dübelschweißwulst abstützen.

Die parallel zur Verbundfuge auftretenden Relativverschiebungen zwischen Stahl und Beton stellen in den bisherigen Ausführungen die primär zu berücksichtigende Kenngröße bei der Verbundsicherung dar und stehen deshalb im Mittelpunkt der Untersuchungen. Senkrecht zur Verbundfuge wird von einem festen Kontakt der Materialien ausgegangen, was sich auch in den Modellen in einem geringen Traganteil infolge Reibung äußert. Experimentelle Untersuchungen z.B. von SCHEELE [126] zeigen, dass dies im Scherversuch nicht immer gegeben ist. Verglichen mit den Schlupfgrößen in Trägerlängsrichtung ist deren Größe jedoch klein, ein Einfluss auf die Dübeltragfähigkeit ist nicht erkennbar. Bei Verbundträgern kann davon ausgegangen werden, dass die abhebenden Kräfte durch das Eigengewicht der Betonplatte überdrückt werden. Ähnliche experimentelle Untersuchungen und numerische Vergleichsrechnungen liegen von ARIBERT/AZIZ [5] vor. In deren Ergebnis kann der Einfluss abhebender Kräfte quer zur Verbundfuge als vernachlässigbar gering angesehen werden.

#### 3.4.2.2 Ent- und Wiederbelastung

Umfangreiche Versuche zum Trag- und Verformungsverhalten von KBD unter veränderlicher Beanspruchung zeigen, das dieses von einer Vielzahl von Parametern abhängig ist. Neben den im nachfolgenden Abschnitt näher betrachteten Einflüssen aus dem Versuchsaufbau und -ablauf sowie den Versuchsabmessungen und Randbedingungen werden die Tragfähigkeit und zugehörigen Verformungen bereits nach wenigen quasi-statischen Lastwechseln wesentlich durch das Phänomen der Materialermüdung geprägt. Die Last-Verformungs-Abhängigkeiten weisen deshalb in Abhängigkeit von:

- der Ober- und Unterlast,
- einer Schwell- oder Wechselbeanspruchung und
- der Anzahl der Lastwechsel

unterschiedliche Verläufe auf. Darüber hinaus wird die Anzahl der aufnehmbaren Lastzyklen durch eine kraft- oder weggesteuerte Versuchsdurchführung wesentlich beeinflusst. Die Veranschaulichung des prinzipiellen Trag- und Verformungsverhaltens unter zyklischer Belastung kann dabei zunächst unabhängig von der Geometrie des Betongurts erfolgen.

In Bild 3.46-a ist die Last-Schlupf-Abhängigkeit eines statischen Traglastversuchs mit vollständiger Druck-/Zugentlastung von unterschiedlichen Beanspruchungsniveaus und anschließender Wiederbelastung bis zum Erreichen der Tragfähigkeit dargestellt. Versuchsergebnisse verschiedener Autoren zeigen übereinstimmend, dass die Einhüllende der Arbeitslinie gut mit derjenigen bei statischer Beanspruchung angenähert werden kann. Auffallend sind außerdem die gegenüber der Anfangssteifigkeit großen und nahezu gleichen Ent- und Wiederbelastungssteifigkeiten. Das in Bild 3.46-b dargestellte Last-Verformungsverhalten unter zyklischer Schwellbeanspruchung bestätigt dieses Verhalten ebenfalls für eine größere Lastwechselzahl.

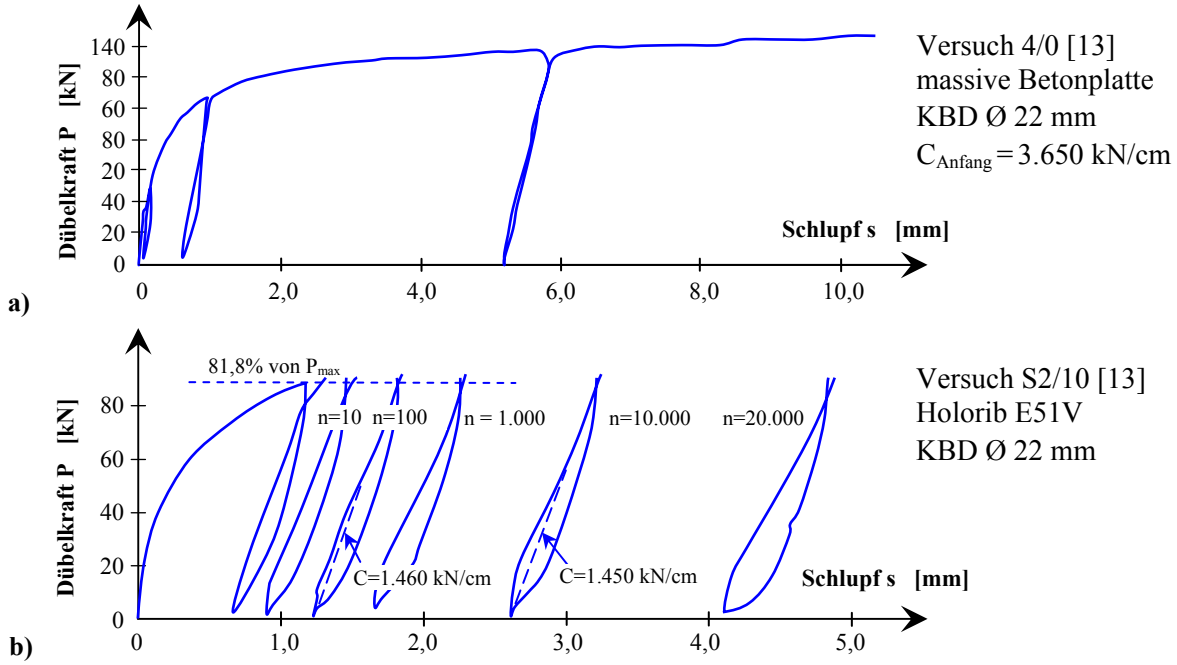



**Bild 3.46: Kraft-Schlupf-Hysteresen bei Ent- und Wiederbelastung im Schwellbereich: a) quasi-statisch, b) zyklisch (nach BECKER [13])**

Wechselbeanspruchungen nahe der Tragfähigkeit bewirken ein weitaus komplexeres Strukturverhalten. Forschungsarbeiten zu dieser Problematik sind selten und werden i.d.R im Zusammenhang mit den Auswirkungen seismischer Tragwerksbeanspruchungen experimentell näher untersucht (low-cycle fatique). Dementsprechend liegen bisher nur wenige Versuchsergebnisse, oftmals mit konstanter Verschiebungsamplitude, vor. In Bild 3.47 sind die Ergebnisse kraftgeregelter quasi-statischer Versuche von HAWKINS/MITCHELL [64] und SCHEELE [126] mit Ober- und Unterlasten bis in den hoch nichtlinearen Bereich dargestellt. Das Versagen bereits nach 4 - 6 Lastwechseln lässt deutlich eine Reduzierung der Tragfähigkeit erkennen. Außerdem beeinflusst offensichtlich der Schädigungsgrad in der einen Beanspruchungsrichtung den ansteigenden Ast bei Belastungsumkehr. Im Bereich des Beanspruchungswechsels selbst tritt keine kraftlose Dübelverformung auf. Allerdings ist eine Abnahme der Völligkeit der Hysterese mit zunehmender Lastwechselzahl zu verzeichnen. Bereits die vierte in Bild 3.47a dargestellte Hysterese lässt sich durch einen linearen Zusammenhang idealisieren. Das Versagen tritt nach dem Überschreiten des bisherigen Beanspruchungsmaximums auf der Zug- oder Druckseite auf, und ist in beiden Fällen bei etwa 85 % der statischen Tragfähigkeit zu verzeichnen. Ähnliche Untersuchungen und Schlussfolgerungen auf der Basis weggeregelter Versuche sind beispielsweise von BURSI/GRAMOLA [23] bekannt.

Das zyklische Verhalten im Gebrauchslastbereich ist im Hinblick auf die Dauerstandsfestigkeit, z.B. dynamisch beanspruchter Brückenbauwerke infolge Verkehrs, von besonderem Interesse (high-cycle fatique). In Bild 3.48 sind dafür typische Last-Schlupf-Hysteresen eines weggeregelten Versuchs veranschaulicht. Ähnlich den quasi-statischen Versuchen in Bild 3.47 ist die Völligkeit der Hysteresen bei kleinen Lastwechselzahlen zu erkennen. Darüber hinaus ist eine fortschreitende Schädigung, d.h. eine Zunahme der Schlupfverformungen mit zunehmender Lastwechselzahl (Bild 3.46-b und Bild 3.48) charakteristisch und Gegenstand aktueller Forschungen.

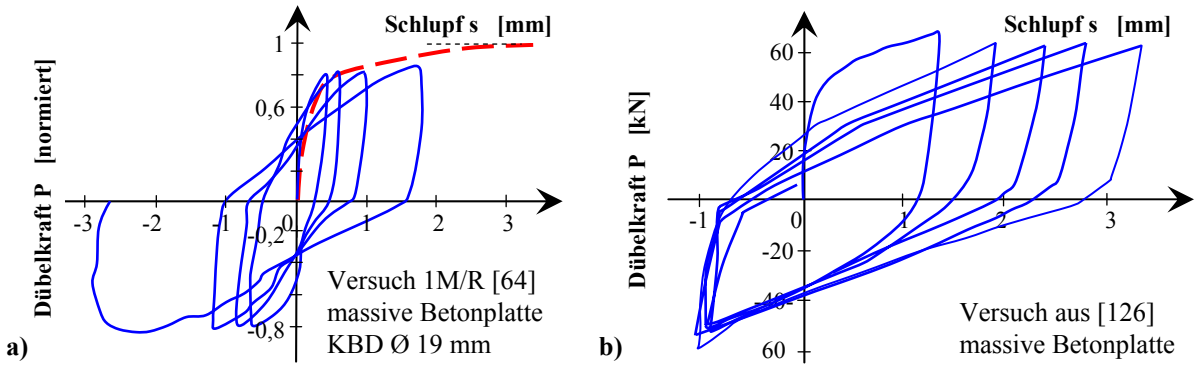



**Bild 3.47: Last-Schlupf-Hysteresen kraftgesteuerter quasi-statischer Beanspruchungswechsel im Traglastbereich: a) nach HAWKINS/MITCHELL [64] und b) nach SCHEELE [126]**

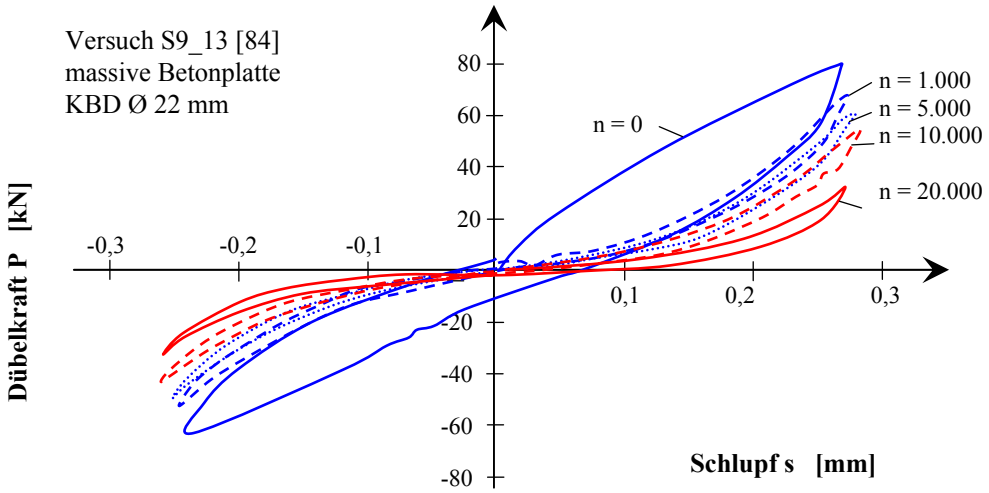



**Bild 3.48: Last-Schlupf-Hysteresen unter zyklischer, weggeregelter Wechselbeanspruchung auf Gebrauchslastniveau (LEFFER [84])**

Anhand der Modelle von LUNGERSHAUSEN [88] kann das Verhalten im Versuch mit der Gefügeveränderung (Zerbröseln) des hochbeanspruchten Betonbereichs am Dübelfuß interpretiert werden. Bei einer Entlastung im Schwellbereich bleibt der Kontakt zwischen Dübel und Beton zunächst bestehen. Die geringen elastischen Rückverformungen (Bild 3.46) werden überwiegend aus der abnehmenden Biege- und Zugbeanspruchung des KBD (Traganteile B und C) resultieren. Unter Wechselbeanspruchung geht jedoch der Kraftschluss zwischen Beton und Dübelschaft verloren. Bei vollständiger Entlastung verbleibt eine Schlupfgröße. Das geschädigte Betongefüge im Bereich des Dübelschaftes behindert bei den ersten Belastungswechseln eine kraftlose Rückverformung. Mit zunehmender Zyklenanzahl wird dieser „zerbröselte“ Beton beidseits des Dübelschaftes und im Bereich des Dübelkopfes immer mehr verdichtet (vgl. Bild 3.45 a). Aus diesem Effekt resultiert die Abnahme der Völligkeit der Hysteresen in Bild 3.47. Schließlich stellt sich die bei Dauerbeanspruchungen im Gebrauchslastbereich zu verzeichnende nahezu kraftlose Schlupfverformung auf das bisher erreichte Verformungsniveau ein. Der KBD wird dabei überwiegend auf Biegung beansprucht. Die daraus resultierende Zunahme der Kerbspannungen parallel zum Dübelschaft führt letztlich zum Ermüdungsversagen, wobei Wechselbeanspruchungen diesen Prozess erheblich beschleunigen.

### 3.4.3 Einflüsse auf das Trag- und Verformungsverhalten von Kopfbolzendübeln

Aus zahlreichen Scherversuchen an KBD in Vollbetonplatten und profilierten Betongurten besitzt man heute einen guten Überblick über die prinzipiellen Auswirkungen verschiedener praxisrelevanter Einflüsse auf den Dübelkraft-Schlupf-Verlauf. Die Profilierung des Betongurts macht darüber hinaus eine differenzierte Betrachtung dieser Konstruktionsform erforderlich. Zusammenfassend kann zunächst festgestellt werden, dass folgende Einflüsse das Trag- und Verformungsverhalten maßgebend verändern:

- Die Steigerung der Betonfestigkeitsklasse bewirkt einen Anstieg der Tragfähigkeit. Ab etwa der Festigkeitsklasse C30/37 ist kaum noch eine Zunahme zu verzeichnen, da dann i.d.R. das Dübelversagen maßgebend wird (LUNGERSHAUSEN [88] bzw. JENISCH [71]).
- Neben der Betondruckfestigkeit spielt die Qualität des Betons in der Umgebung des Bolzens eine wichtige Rolle für das Tragverhalten des KBD. Fehlstellen bewirken eine Festigkeitsverringerung und mit zunehmendem Größtkorndurchmesser steigt die Festigkeit bei gleichzeitiger Zunahme der Streuung der Versuchsergebnisse. Das für den klassischen Verbundträger übliche Betonieren parallel zur Dübelachse führt verglichen mit liegenden KBD (z.B. BREUNINGER [20]) oder dem Betonieren senkrecht zur Dübelachse (MAEDA ET AL. [89]) zu einer größeren Tragfähigkeit.
- Die konstruktiv erforderliche Längs- und Querbewehrung in der Betonplatte führt zu einem Anstieg der Tragfähigkeit in der Verbundfuge.
- Der Dübelkopf und der Schweißwulst am Bolzenfuß ermöglichen erst den im vorigen Abschnitt beschriebenen Tragmechanismus (LUNGERSHAUSEN [88]) und sind daher zwingend erforderlich.
- Eine zunehmende Zugfestigkeit des Bolzenmaterials bewirkt einen Anstieg der Traglast.
- Längsdruck und Querbiegung wirken sich günstig aus, d.h. sie führen zu höheren Anfangssteifigkeiten und einem geringeren Lastabfall bei großem Schlupf.
- Basierend auf Versuchen mit 19, 22 und 25 mm Dübeldurchmesser ist bei zunehmendem Dübeldurchmesser ein deutlicher Anstieg der Tragfähigkeit bei ausreichender Duktilität zu verzeichnen (HANSWILLE ET AL. [63]).

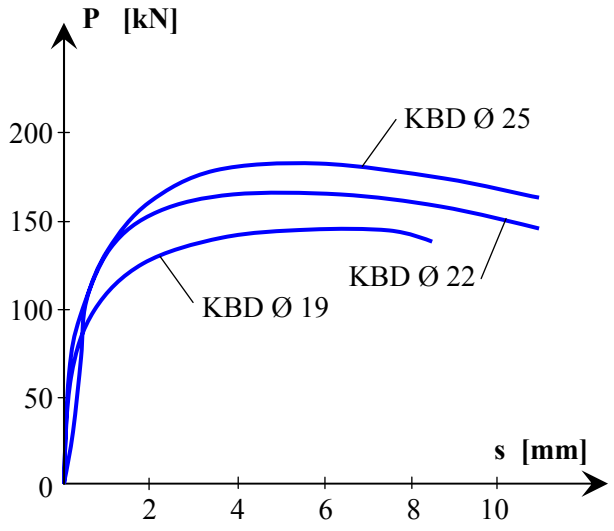



**Bild 3.49: Last-Verformungs-Abhängigkeiten von KBD mit: 19 mm, 22 mm und 25 mm Durchmesser (HANSWILLE ET AL. [63])**

- Durch eine Ummantelung des Bolzenschaftes am Fußpunkt oder Bolzen mit Fußverstärkung kann die Duktilität der Verbindung bei gleich bleibender Tragfähigkeit erheblich gesteigert werden (SCHEELE [126]).
- Das Reißen des Betongurts im Bereich negativer Momentenbeanspruchung reduziert die Dübelsteifigkeit und -tragfähigkeit (BECKER [13]).

Speziell für profilierte Betongurte sind außerdem folgende Einflüsse aus Versuchen bekannt:

- Mit steigender Rippenschlankheit von Trapezblechprofilen (Verhältnis Rippenhöhe/Rippenbreite) ist eine stetige Abnahme der Dübeltragfähigkeit zu verzeichnen (LUNGERSHAUSEN [88]).
- Durch eine zusätzliche Rippenbewehrung und vor allem eine örtliche Verstärkung in den Rippenzellen lässt sich die Tragfähigkeit deutlich steigern (BODE/KÜNZEL [16])
- Das Durchschweißen der Dübel führt gegenüber Dübeln mit vorgelochtem Blech zu einer etwas höheren Tragfähigkeit, allerdings auch zu einem stärkeren Lastabfall nach Erreichen des Maximums (BECKER [13]).

### 3.4.4 Modellierung der Last-Schlupf-Charakteristik

Zur Beschreibung des komplizierten Tragverhaltens des Verbundmittels Kopfbolzendübel existieren bisher keine einfachen mechanischen Berechnungsmodelle. In der Literatur vorhandene Ansätze wurden empirisch auf der Grundlage von Versuchen bestimmt. Dabei ist jedoch zu beachten, dass durch die genannte Abhängigkeit der Dübelkennlinien vom Versuchsaufbau und eine Vielzahl von Versuchsrandbedingungen eine Vergleichbarkeit der weltweit durchgeführten Versuche nicht oder nur eingeschränkt möglich ist. Somit liegt den einzelnen Ansätzen zum einen eine sehr geringe Datenbasis zugrunde und zum anderen geben sie i.d.R. nur das unter speziellen Randbedingungen ermittelte Verhalten wieder und erklären die teilweise großen Abweichungen. Eine Verallgemeinerung ist daher kritisch zu betrachten.

Wie bereits erwähnt, wird die bemessungsrelevante statische Dübeltragfähigkeit aus den Ergebnissen von Scherversuchen bestimmt. Die Biegung der Betonplatte infolge Beanspruchungen senkrecht zur Verbundfuge stellt jedoch einen Einfluss beim Verbundträger dar, welcher im Scherversuch nicht erfasst werden kann. Haftung und Reibung erhöhen dabei die übertragbaren Schubkräfte, außerdem werden die Zugkräfte im Dübelschaft reduziert. Die Vernachlässigung dieser Effekte liefert bei Versuchsnachrechnungen für druckbeanspruchte Bereiche auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse, d.h. größeren Schlupf als im Traglastversuch.

#### 3.4.4.1 Statische Dübelkennlinie

In Tabelle 3.7 sind einige Ansätze zur analytischen Beschreibung der Last-Verformungs-Abhängigkeit von KBD zusammengestellt und in Bild 3.50 veranschaulicht. Mit Ausnahme des Ansatzes von GATTESCO [53] wird der Verlauf in Abhängigkeit von der charakteristischen Dübeltragfähigkeit $P_{max}$ angegeben. OLLGARD ET AL. [108] schlagen auf der Grundlage einer statistischen Auswertung von 48 Scherversuchen mit Vollbetonplatte eine exponentielle Last-

Verformungs-Abhängigkeit vor (KBD Ø 16 mm u. Ø 19 mm, Normal- und Leichtbeton: ($18{,}4 \leq f_{cm} \leq 35$)N/mm² unterschiedlicher Zusammensetzung).

| Verfasser | Beziehung |
|---|---|
| ARIBERT/AZIZ [5] | $P = P_{max} \cdot \left(1 - e^{-0{,}7 \cdot s}\right)^{0{,}8}$ |
| BECKER [13] | $P = P_{max} \cdot \dfrac{12 \cdot \dfrac{s}{s_{max}} - \left(\dfrac{s}{s_{max}}\right)^{1{,}6}}{1 + 10 \cdot \left(\dfrac{s}{s_{max}}\right)}$ <br> mit: $s_{max} = 2{,}5$ mm |
| GATTESCO [53] | $P = \alpha \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{\beta \cdot s}{\alpha}\right)}\right) + \gamma \cdot s$ <br> $\alpha, \beta, \gamma$ … experimentell zu bestimmende Parameter |
| LEBET [83] | $P = P_{max} \cdot \left(\dfrac{4{,}3 \cdot s}{1 + 4{,}3 \cdot s}\right)$ |
| OLLGARD ET AL. [108] | $P = P_{max} \cdot \left(1 - e^{-0{,}7 \cdot s}\right)^{0{,}4}$ |

**Tabelle 3.7: Ansätze für statische Dübelkennlinien**

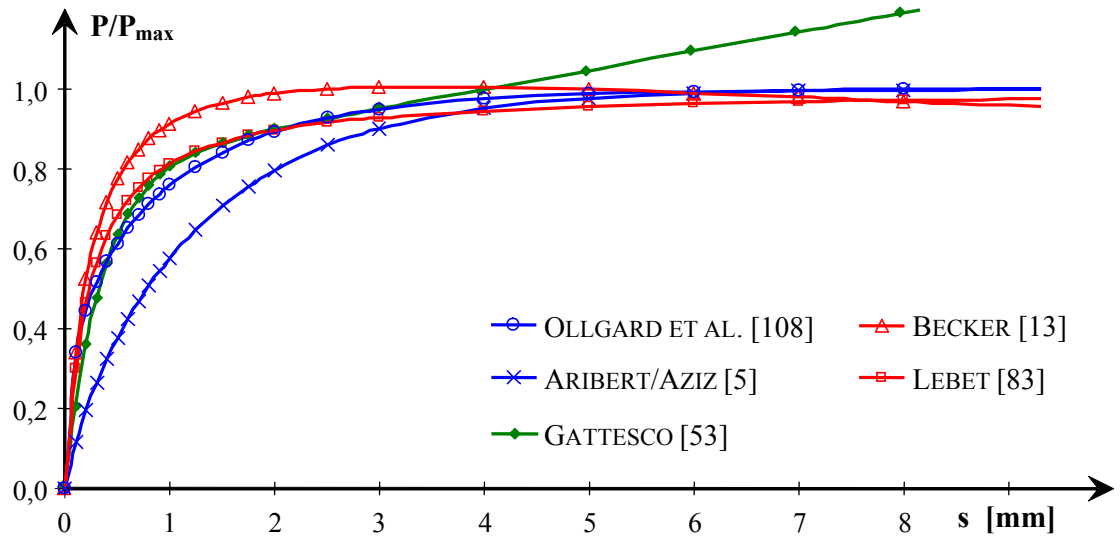



**Bild 3.50: Vergleich numerischer Beschreibungen von Dübelkennlinien**

ARIBERT/AZIZ [5] verändern den Exponenten von 0,4 auf 0,8 und erzielen damit einen auffallend weichen Verlauf. Begründet wird dieses Vorgehen mit dem bei stetiger Laststeigerung abnehmenden Reibungsverbund zwischen Betongurt und Stahlprofil. Die von LEBET [83] vorgeschlagene Kurve resultiert aus Push-Out-Versuchen mit KBD Ø 22 mm (Vollbetonplatte). Charakteristisch ist eine große Anfangssteifigkeit. Allerdings wird die Traglast erst bei großen Schlupfdeformationen erreicht. Auf eigenen Versuchsergebnissen basierend kommt BECKER [13] zu der Schlussfolgerung, dass mit den genannten Ansätzen die Dübelkennlinien auch für Holoribbleche zu nachgiebig beschrieben werden. Der von ihm vorgeschlagene Ansatz kann durch die Vorgabe einer der Traglast zugehörigen Schlupfverformung modifiziert werden. Die Kurve von GATTESCO [53] ähnelt bei kleinen Verformungen sehr der von LEBET [83]. Aufgrund

des linearen Anteils ist sie jedoch im Bereich der Dübeltraglast monoton ansteigend und damit nicht für Traglastberechnungen geeignet. Die experimentell zu bestimmen Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ , welche von GATTESCO in [53] nur für einen Beton C 30/37 und KBD Ø 19 mm angegeben werden, macht eine Anwendung von Versuchen abhängig.

#### 3.4.4.2 Statische Dübeltragfähigkeit - Dübelformeln

Als Dübelformeln werden die Ansätze zur Ermittlung der maximalen bzw. charakteristischen statischen Dübeltragfähigkeit bezeichnet. Die statische Dübeltragfähigkeit wird in der Literatur durch verschiedene Gleichungen beschrieben, welche zum Teil stark voneinander abweichende Ergebnisse liefern. Eine Zusammenstellung verschiedener Ansätze ist z.B. in den Arbeiten von LEFFER [84] und MENSINGER [92] enthalten.

Aktuelle europäische und amerikanische Normen basieren auf der Nachweisgleichung von OLLGARD ET AL. [108], die aus 48 Scherversuchen mit Vollbetonplatte gewonnen wurden:

$$P_{max} = 0{,}5 \cdot A_S \cdot \sqrt{f_{cm} \cdot E_{cm}} \leq A_S \cdot f_u \tag{3.43}$$

Danach wird die statische Dübeltragfähigkeit in Abhängigkeit von der Querschnittsfläche $A_S$ des Bolzens, und der Betonfestigkeitsklasse bestimmt. Als oberer Grenzwert kann die aufnehmbare Scherkraft des Dübelschaftes unter Verwendung der Zugfestigkeit $f_u$ des Bolzenmaterials angesehen werden.

In EUROCODE 4-1 [46] findet eine modifizierte Form der Gleichung (3.43) Anwendung:

$$P_{max} = k \cdot \left(0{,}29 \cdot \alpha \cdot d_S^2 \cdot \sqrt{f_{ck} \cdot E_{cm}} \leq 0{,}8 \cdot A_S \cdot f_u\right) \tag{3.44}$$

Der Faktor k ($k_l$ bzw. $k_t$ nach EUROCODE 4-1, ABSCHN. 6.3 [46]) ist ein Abminderungsfaktor, mit dem die Profilierung des Betongurtes sowie die Ausrichtung der Profilrippen längs oder quer zur Trägerachse erfasst werden kann. Über den Beiwert $\alpha$ findet das Verhältnis der Dübelhöhe zum Dübeldurchmesser Beachtung. Die Zugfestigkeit des Bolzens ist auf 500N/mm² begrenzt.

Gleichung (3.44) darf nach Eurocode 4-1 [46] nur bei Dübeldurchmessern von 19 und 22 mm Anwendung finden. Versuche von HANSWILLE ET AL. [63] zeigen jedoch, dass dieser Ansatz auch auf Dübel mit einem Durchmesser von 25 mm übertragen werden kann.

#### 3.4.4.3 Dübelkennlinie bei Ent- und Wiederbelastung

Gemäß dem in Abschnitt 3.4.2.2 veranschaulichten Tragverhalten unter wechselnden Beanspruchungen muss bei der Werkstoffmodellierung zwischen Schwell- und Wechselbeanspruchungen unterschieden werden. Empirische Modelle sind lediglich für Teilbereiche vorhanden. Bezüglich der Lastwechselanzahl wird im Folgenden davon ausgegangen, dass diese sehr gering ist. Schädigende Einflüsse infolge Materialermüdung werden somit vernachlässigt.

Die einzig bekannte analytische Formulierung des Materialverhaltens bei Ent- und Wiederbelastung ist das Modell von GATTESCO [53]. Unter Verwendung der bereits im vorherigen Abschnitt aufgezeigten Erstbelastungskurve können die Ent- und Wiederbelastung sowie die

sukzessive Schlupfzunahme in Vollbetonplatten beschrieben werden. Allerdings muss das Modell durch eine Vielzahl experimentell zu bestimmender Konstanten kalibriert werden. Da nur für wenige Versuche Informationen vorliegen und die mathematische Modellbeschreibung sehr aufwendig ist, ist es für praktische Anwendungen ungeeignet und wird deshalb im Weiteren nicht näher untersucht.

Quasi-statische Lastwechsel im Schwellbereich können basierend auf den in Bild 3.46 dargestellten Versuchsergebnissen vereinfacht durch einen linearen Zusammenhang zwischen Ent- und Wiederbelastung abgebildet werden (BECKER [13]). In der Literatur existieren zu dieser Hypothese allerdings kaum Angaben, so dass hier in Ergänzung der statischen Dübelkennlinien ein Forschungsbedarf besteht.

Für den Tragmechanismus von KBD unter Wechselbeanspruchungen auf Traglastniveau sind aus der eingesehenen Literatur keine Werkstoffmodelle bekannt. An dieser Stelle besteht ein grundlegender Forschungsbedarf.

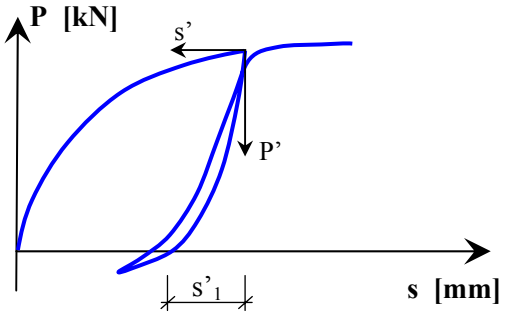



**Bild 3.51:**
**Werkstoffmodell nach GATTESCO [53]**

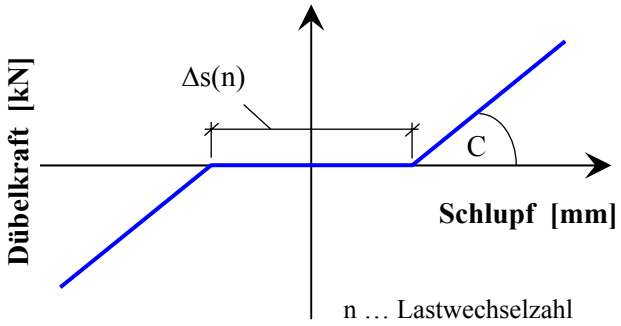



**Bild 3.52:**
**Vereinfachtes Stoffmodell für zyklische Beanspruchungen unter Gebrauchslast**

Ergänzend sei an dieser Stelle erwähnt, dass Wechselbeanspruchungen im Gebrauchslastbereich oftmals durch einen trilinearen Zusammenhang gemäß Bild 3.52 beschrieben werden können (z.B. LEFFER [84]). Dieser gilt nach der Erstbelastung für alle Be- und Entlastungen, benötigt allerdings einen, hier nicht näher betrachteten, funktionalen Zusammenhang für den zu erwartenden ermüdungsbedingten Schlupfzuwachs. Als Anstieg wird auch hier die Tangentensteifigkeit an den Ursprung bei Erstbelastung verwendet.

### 3.4.5 Verwendetes Rechenmodell

Wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt wurde, ist anhand der eingesehenen Literatur eine verallgemeinerte Formulierung der statischen Last-Schlupf-Charakteristik von Kopfbolzendübeln derzeit nicht möglich. Normative Regelungen beinhalten neben der maximalen Dübeltragfähigkeit nur konstruktive Angaben zur Sicherung der Duktilitätseigenschaften des Bolzens. Aussagen über mögliche Schlupfgrößen bei Erreichen der Tragfähigkeit oder Anfangssteifigkeiten können nicht gemacht werden, da sich versuchsbezogene Zusammenhänge stark auf die dabei speziell vorliegenden Verhältnisse beziehen und damit beschränken. Als Anhaltspunkt für die im rechnerischen Bruchzustand in der Verbundfuge von Vollbetonplatten auftretenden Verschiebungen werden z.B. von ROIK/HANSWILLE [116] auf der Grundlage

eigener Scherversuche 0,5 bis 1,3 mm angegeben. Die zugehörigen Verschiebungen im Gebrauchslastbereich werden mit 0,35 mm benannt.

Für numerische Analysen besteht in dem entwickelten Lösungsansatz deshalb die prinzipielle Möglichkeit, zwischen starrem und nachgiebigem Verbund zu unterscheiden. Beim starren Verbund kann eine übertragbare Schubkraft je Längeneinheit als lokales Versagenskriterium definiert werden. Im Fall des nachgiebigen Verbunds sollte sich die Formulierung einer entsprechenden Schubkraft-Schlupf-Beziehung an den im Einzelfall vorliegenden konstruktiven Gegebenheiten orientieren bzw. in erster Näherung eine der in Abschnitt 3.4.4.1 angegebenen Dübelkennlinien Verwendung finden. Aus diesem Grund können für Versuchsnachrechnungen in dieser Arbeit die realen Erstbelastungskurven mittels multilinearer Beziehungen oder die Dübelkennlinie von OLLGARD ET AL. [108] approximiert werden. Um beim nachgiebigen Verbund außerdem Ent- und Wiederbelastungen zu erfassen, wurde unter Vernachlässigung der genauen Kraft-Verformungs-Abhängigkeit der Verdübelung ein Modell gemäß Bild 3.53 implementiert. Dabei findet ein lastwechselabhängiger Zuwachs der Schlupfverformungen (Ermüdung) keine Beachtung.

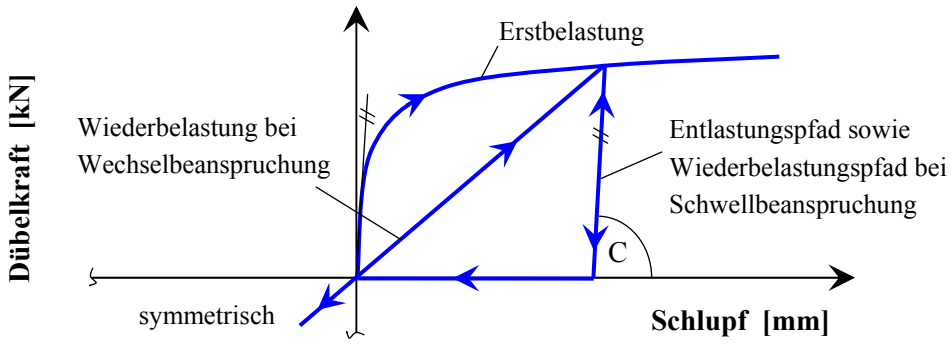



**Bild 3.53: Verallgemeinertes Rechenmodell unter Beachtung statischer Ent- und Wiederbelastungen**

### 3.4.6 Tragverhalten von Kopfbolzendübeln bei Verwendung hochfester Werkstoffe

Das Trag- und Verformungsverhalten von KBD in hochfestem Beton unterscheidet sich von dem in normalfestem Beton. Zur Darstellung der prinzipiellen Tragmechanismen und Wirkungsprinzipien wird sich in den folgenden Ausführungen auf die in den Arbeiten DÖINGHAUS [37] und HEGGER ET AL. [65] dokumentierten Ergebnisse aus Forschungsvorhaben am Institut für Massivbau der RWTH Aachen gestützt.

Die bereits bei normalfesten Betonen mit zunehmender Betonfestigkeit zu verzeichnende Versagensform Stahlversagen am Dübelfuß ist danach für KBD in hochfestem Beton stets maßgebend. Mit zunehmender Festigkeit des Betons werden die Verformungen des KBD eingeschränkt, die große Einspannwirkung des hochfesten Betons behindert eine Biegeverformung des Dübelschaftes nahezu vollständig. Damit ist der in normalfesten Betonen signifikante Traganteil aus der Zugkraft im Dübelschaft nur gering und die in Abschnitt 3.4.2 beschriebenen Modelle von LUNGERSHAUSEN [88] verlieren ihre Gültigkeit.

Nach DÖINGHAUS [37] konzentrieren sich die Verformungen des KBD in hochfestem Beton auf den unteren Dübelbereich direkt über dem Schweißwulst. Dort wird der KBD ausschließlich auf Schub beansprucht. In Bild 3.54 ist das aus Versuchen abgeleitete Tragmodell veranschaulicht. Ein Großteil der Schubkraft wird demnach zunächst analog dem Modell von LUNGERSHAUSEN [88] über den Schweißwulst am Dübelfuß eingeleitet (Traganteil $P_W$). Bei weiterer Laststeigerung bildet sich jedoch im Beton am Dübelfuß nur sehr lokal begrenzt ein Druckkeil aus, dessen hohe mehraxiale Druckbeanspruchung zu einer Schädigung des Betons führt. Mit zunehmenden Relativverschiebungen kann sich der restliche Betonkörper bei gleichzeitiger Verformung des Dübelschaftes oberhalb des Schweißwulstes über den Druckkeil hinweg schieben (Traganteil $P_D$). Reibungskräfte in der Scherfuge führen zu einer weiteren Schädigung im Druckkeil und aus Gleichgewichtsgründen zu einer zunehmenden Scherbeanspruchung im Schweißwulst. Bei Erreichen der Traglast schert der Dübel dann direkt oberhalb des Schweißwulstes ab.

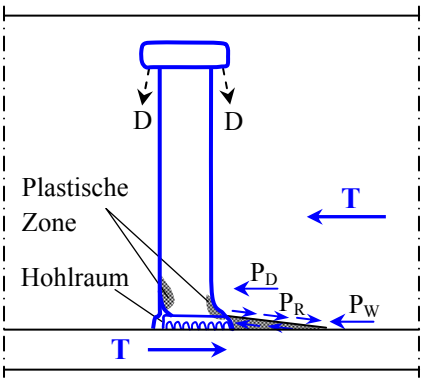



**Bild 3.54:**
**Tragmodell von KBD in hochfestem Beton (DÖINGHAUS [37])**

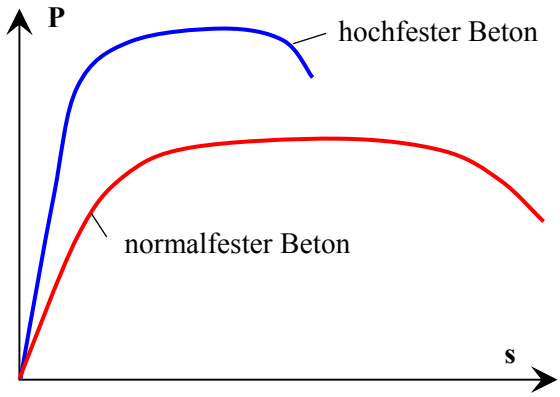



**Bild 3.55:**
**Typische Last-Verformungs-Abhängigkeiten von KBD in normal- und hochfestem Beton**

Dieses Tragverhalten führt einerseits zu einer Traglaststeigerung, andererseits jedoch zu einer deutlichen Abnahme der Duktilität (Bild 3.55). Die Forderung des EUROCODE 4-1 [46] nach einer Bruchverformung größer 6 mm ist dabei ohne besondere konstruktive Maßnahmen nicht mehr zu realisieren. Parameterstudien an modifizierten Konstruktionsdetails zeigen, dass eine Verbesserung der Duktilitätseigenschaften bei gleichzeitiger Zunahme der Tragfähigkeit durch folgende Maßnahmen erzielt werden kann:

- Vergrößerung des Schweißwulstes
- Verwendung eines hochfesten Grundwerkstoffes für den Kopfbolzendübel
- Verstärkung des Dübelschaftes mit einer Hülse aus Metall oder einem ultrahochfesten Betonmantel.
- Anordnung von Doppeldübeln ohne zwischenliegende Querbewehrung (Achsabstand ca. 40-50 mm). Die unterschiedliche Beanspruchung der Dübel ist hier allerdings mit einer Abnahme der Tragfähigkeit verbunden.

Die Tragfähigkeit kann aus den Traganteilen des Dübelschaftes und des Dübelschweißwulstes beschrieben werden.

## 3.5 Verbund unterschiedlich alter Betone

Fertigteilträger mit nachträglicher Ortbetonergänzung ermöglichen beim Neubau von Verbundbrücken die wirtschaftliche Kombination normal- und höherfester Betone. Verringerte Querschnitte lassen schlankere und damit leichtere Konstruktionen entstehen. Außerdem bieten sich neue Möglichkeiten für den Fertigteiltransport und die Montage. Ein weiteres, in Zukunft immer mehr an Bedeutung gewinnendes Anwendungsgebiet nachträglicher Ortbetonergänzungen stellen Erhaltungs- und Instandsetzungsmaßnahmen an bestehenden Bauwerken dar.

Um ein möglichst homogenes Tragverhalten und ggf. eine Tragfähigkeitssteigerung zu erzielen, kommt der verformungsarmen Schubkraftübertragung zwischen den Betonschichten eine maßgebende Bedeutung zu. Aus der Literatur sind verschiedene Untersuchungen zur Fugentragfähigkeit derartiger Konstruktionen bekannt (z.B. ACKERMANN/BURKHARDT [1] RANDL/WICKE [111]; TSOUKANTAS/TASSIOS [139]). Diese zeigen, dass sich der Schubwiderstand einer bewehrten Fuge im Wesentlichen durch drei Traganteile beschreiben lässt (Bild 3.56-a):

- Adhäsion als stoffliche Komponente
- Reibung (Haft- und Gleitreibung) als Ursache für eine belastungsabhängige Pressung senkrecht zur Fuge
- Dübelwirkung der Fugenbewehrung.

Bild 3.56-b stellt diese Anteile qualitativ in Abhängigkeit von der auftretenden Fugenrelativverschiebung gegenüber. Daraus ist ersichtlich, dass deren Wirksamkeit maßgebend durch die Relativverschiebung parallel zur Verbundfuge bestimmt wird.

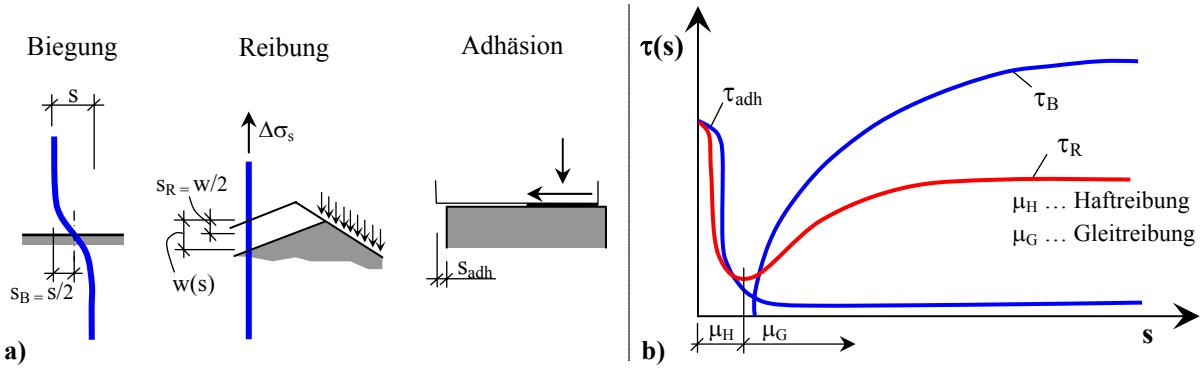



**Bild 3.56: a) Mechanismen der Schubübertragung zwischen bewehrten Betonbauteilen (nach TSOUKANTAS/TASSIOS [139])**
**b) Schematische Darstellung der Schubspannungs-Verschiebungs-Abhängigkeit der Einzelkomponenten (nach ACKERMANN/BURKHARDT [1])**

Die gesamte Schubspannung in einer Verbundfuge zwischen Betonbauteilen ergibt sich damit zu:

$$\tau(s) = \tau(s)_{adh} + \tau(s)_R + \tau(s)_B \tag{3.45}$$

Je rauer die Fuge, umso größer werden die Anteile aus Reibung und Kohäsion. Bei glatten Fugen überwiegt dagegen die Dübelwirkung. Systematische Versuche von RANDL/WICKE [111] zeigen, dass mit zunehmender Rauhigkeit eine Verhakung der Kontaktflächen erreicht wird, die

zu der genannten Steigerung der Schubtragfähigkeit führt. Bei großen Oberflächenrauhigkeiten reduziert sich der Biegewiderstand der Fugenbewehrung danach auf ca. 15 % bis 20 % des Gesamtwiderstandes. Speziell für Sanierungsmaßnahmen bietet sich dadurch eine Möglichkeit, den erforderlichen Verdübelungsgrad zu reduzieren und damit die Wirtschaftlichkeit einer solchen Maßnahme zu verbessern. Allerdings bewirkt die Steigerung der Rauhigkeit auch einen Anstieg der Verschiebungen senkrecht zur Verbundfuge. Versuche von RANDL/WICKE [111] weisen bei sandgestrahlten Oberflächen im Bruchzustand quer zur Fuge etwa die 0,5-fachen Verschiebungen der Längsrichtung auf. Bei Neubauten sollte deshalb weiterhin die Fugenbewehrung die bevorzugte Lösung sein.

Bekannte Vorhersagemodelle des Schubwiderstandes unbewehrter und bewehrter Betonfugen basieren auf einer additiven Verknüpfung der in Gleichung (3.45) genannten Einflüsse (z.B. DIN 1045-1 [32], RANDL/WICKE [111]). Unabhängig vom auftretenden Schlupf wird dabei eine Superposition der Traganteile durchgeführt, obwohl diese zu unterschiedlichen Verformungs- und Belastungszuständen gehören. Über zugehörige oder zulässige Relativverschiebungen werden keine Aussagen gemacht. Für numerische Betrachtungen ist es deshalb sinnvoll, anhand des zu erwartenden Schlupfs ein Kriterium für den starren und nachgiebigen Verbund festzulegen. ACKERMANN/BURKHARDT [1] schlagen folgende Abgrenzungen vor:

| Verbund | zulässige Relativverschiebungen |
|---|---|
| starr | $0 \leq s \leq 0{,}02$ mm |
| quasi-starr | $0{,}02 < s \leq 0{,}05$ mm |
| nachgiebig | $0{,}05 < s$ |

**Tabelle 3.8 Abgrenzung zwischen starrem und nachgiebigem Verbund (ACKERMANN/BURKHARDT [1])**

Im entwickelten Lösungsansatz kann die Fugennachgiebigkeit bei der Schubkraftübertragung rechnerisch berücksichtigt werden. Dazu ist im konkreten Anwendungsfall eine Verbundkraft-Schlupf-Beziehung als multilineare Beziehung in den Lösungsansatz zu implementieren. Dieses Vorgehen schließt Ent- und Wiederbelastungen ein. Beim starren Verbund besteht analog den KBD die Möglichkeit, das Überschreiten einer übertragbaren Schubkraft je Längeneinheit als lokales Versagenskriterium zu definieren.

„Die Mathematik befriedigt den Geist durch ihre außerordentliche Gewissheit.“

*Johannes Kepler*

# Kapitel 4

# Analyse quasi-statischer Last- und Zwangsprozesse

Das Verhalten der Verbundpartner Stahl und Beton und ihrer Verbindungen zeigt, dass die statische Berechnung des Systemverhaltens von Stahl-Beton-Verbundtragwerken bereits auf Gebrauchslastniveau die Berücksichtigung verschiedener zeitabhängiger und zeitunabhängiger physikalischer Nichtlinearitäten erforderlich macht. Im Zusammenhang mit herstellungs-, sanierungs- und nutzungsbedingten System- oder Belastungsmodifikationen können die daraus resultierenden Tragwerksbeanspruchungen im numerischen Sinne als quasi-statische zeitveränderliche Last- und Zwangsprozesse verstanden werden.

In diesem Kapitel werden die numerischen Grundlagen für die in dieser Arbeit gewählte schrittweise statische Analyse des Systemzustandes von Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen vorgestellt. Die physikalischen Nichtlinearitäten werden dabei durch eine inkrementell-iterative Lösungsstrategie erfasst, wobei sowohl zeit- als auch lastabhängige Einwirkungen die Ursache für eine Diskretisierung des Betrachtungszeitraumes sein können.

Die Systemzustandsanalyse der durch ebene Stabsysteme idealisierten Tragwerke erfolgt mit der Deformationsmethode. Den Ausgangspunkt der Lösung in jedem Inkrement bildet die Formulierung der Wirkungsgrößen an den Rändern der Einzelstäbe des Systems. Dieses Vorgehen führt unter Beachtung einer Momenten-Normalkraft-Interaktion auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, dessen Lösung numerisch mit einem RUNGE-KUTTA-Verfahren vierter Ordnung erfolgt. Für ausschließlich in Stablängsrichtung nachgiebige Verbundfugen zwischen den Querschnittsteilen wird eine Erweiterungsmöglichkeit des Stab-DGL-Systems aufgezeigt.

Es wird gezeigt, wie Bauverfahren, z.B. das Entfernen von Hilfsstützen oder die nachträgliche Ortbetonergänzung von Verbundträgerfertigteilen, in einem realitätsnahen Modell Beachtung finden, wie sich die Auswirkungen von Eigenspannungszuständen berücksichtigen lassen und wie nichtlineare Stützungen realisiert werden. Eine Eigenwertanalyse bei kontinuierlicher Massebelegung im Querschnitt ist ebenfalls Bestandteil der Untersuchungen.

Auf numerische Probleme bei der Anwendung wird hingewiesen sowie auf Möglichkeiten eingegangen, wie diese unter hinreichender Genauigkeit vereinfacht abgebildet oder durch eine entsprechende Systemmodellierung berücksichtigt werden können.

## 4.1 Vorgehensweise bei der nichtlinearen Analyse des Systemzustandes

### 4.1.1 Zusammenhang zwischen den Parametern des Systemzustandes

Bei der statischen Analyse eines Tragwerkes werden folgende den Systemzustand eines Tragwerkes beschreibende Größen verbunden:

- Einwirkungen
- Schnittgrößen/Spannungen
- Verzerrungen
- Verschiebungen

Mittels Gleichgewichtsbedingungen leiten sich aus den Einwirkungen die Spannungen bzw. die Schnittgrößen ab. Der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen/Spannungen und den Verzerrungsgrößen kann durch Stoffgesetze beschrieben werden, schließlich erfolgt die Verknüpfung der Verzerrungen und der Verschiebungen über die kinematischen Beziehungen. Die erforderlichen Gleichgewichtsbedingungen, Stoffgesetze und kinematischen Beziehungen können dabei lineare oder nichtlineare Abhängigkeiten aufweisen. Dementsprechend sind die Auswirkungen auf die sich einstellenden Verschiebungen ebenfalls diesem Zusammenhang unterlegen.

Wie im vorangegangen Kapitel 3 dargestellt, weisen die in dieser Arbeit betrachteten Einzelwerkstoffe und Verbindungen von Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen bereits auf Gebrauchslastniveau teilweise ein signifikant nichtlineares Materialverhalten auf. Die Nichtlinearitäten umfassen dabei zeitabhängige und zeitunabhängige Einflussgrößen. Eine Lösung dieser Problemstellung führt oftmals auf nichtlineare Differentialgleichungssysteme, deren bekannte Lösungsansätze in einem nichtlinearen algebraischen Gleichungssystem resultieren. Bei der Analyse komplexer zeit- und lastabhängiger Prozesse hat sich deshalb, begünstigt durch die Entwicklung der Rechentechnik, eine inkrementelle Betrachtungsweise unter Verwendung iterativer Lösungsverfahren als vorteilhaft und universell anwendbar erwiesen. In dieser Arbeit wird diese Grundidee übernommen. Im Kontext mit den zuvor benannten Beziehungen der Zustandsgrößen eines Tragwerkes stellt die bereichsweise Linearisierung daher ein geeignetes numerisches Mittel dar, mit dessen Hilfe die bekannten linearen Zusammenhänge der Wirkungsgrößen abschnittsweise ihre Gültigkeit behalten. Die gewählte Vorgehensweise bei der Diskretisierung und schrittweisen quasi-statischen Lösung für Last- und Zwangsprozesse wird im Folgenden erörtert.

### 4.1.2 Diskretisierung (in Raum und Zeit)

Die numerische Analyse des zeitveränderlichen Systemzustandes erfolgt in dieser Arbeit wegen des nichtlinearen Materialverhaltens inkrementell-iterativ. Dazu ist es zum einen notwendig, den Betrachtungszeitraum in Zeitintervalle zu unterteilen, an deren Grenzen numerische Lösungen zu bestimmen sind. Zum anderen ist eine Diskretisierung des statischen Systems erforderlich. Die Vorgehensweise wird im Folgenden erörtert.

***Zeitintervallteilung***

Entsprechend der chronologischen Abfolge der generierten Systemveränderungen wird der untersuchte Betrachtungszeitraum zuerst in **globale Zeitintervalle** unterteilt, welche durch genau ein statisches System mit den zugehörigen Querschnitten gekennzeichnet sind. Die anschließende weitere Fein-Unterteilung eines globalen Intervalls wird notwendig, wenn eines der folgenden Ereignisse eintritt oder die Notwendigkeit zur Berechnung weiterer Kenngrößen besteht:

- Veränderungen der äußeren Beanspruchung
- Wechsel der Umgebungsbedingungen
- Benutzerdefinierte Berechnungszeitpunkte

Die daraus resultierenden Intervalle werden als **lokale Zeitintervalle** bezeichnet (Bild 4.1). Diese Teilung des Untersuchungszeitraumes in globale und lokale Intervalle kann vor der eigentlichen Tragwerksberechnung im System-Generator (Bild 2.4) erfolgen und stellt zugleich eine erste Kontrollmöglichkeit dar.

Die Anwendung eines Differenzenverfahrens für die schrittweise Analyse des zeitabhängigen Materialverhaltens ist an die Annahme einer zeitlich konstanten kriecherzeugenden Beanspruchung gebunden (vgl. Bild 2.3). Diese Forderung ist jedoch nur für Zeitschritte erfüllt, in denen die resultierenden Schnittkraft- und Verformungsänderungen hinreichend klein sind (siehe Abschnitt 3.1.5 und 4.4.4). Anderenfalls besteht auch hier die Notwendigkeit, die lokalen Intervalle weiter in **Kriechintervalle** zu unterteilen ($\Delta t_i$ in Bild 4.1). Diese Unterteilung kann erst zu Beginn eines lokalen Intervalls erfolgen, da die Beachtung des aktuellen Systemzustands erforderlich ist. Aus diesem Grund ist außerdem vorab keine Aussage über die Dauer der Berechnung und die Anzahl der erforderlichen Zeitschritte möglich.

***Stufenweise Lastaufbringung***

Bei physikalisch nichtlinearem Materialverhalten werden das Konvergenzverhalten sowie die Ergebnisqualität einer numerischen Berechnung maßgebend durch die Größe der aufgebrachten Belastungsänderung bestimmt. Im Algorithmus besteht deshalb die Möglichkeit, die auftretenden äußeren Belastungen sowie die Korrekturgrößen aus Systemmodifikationen zum jeweiligen Zeitpunkt in mehreren Laststufen aufzubringen (Bild 4.1).

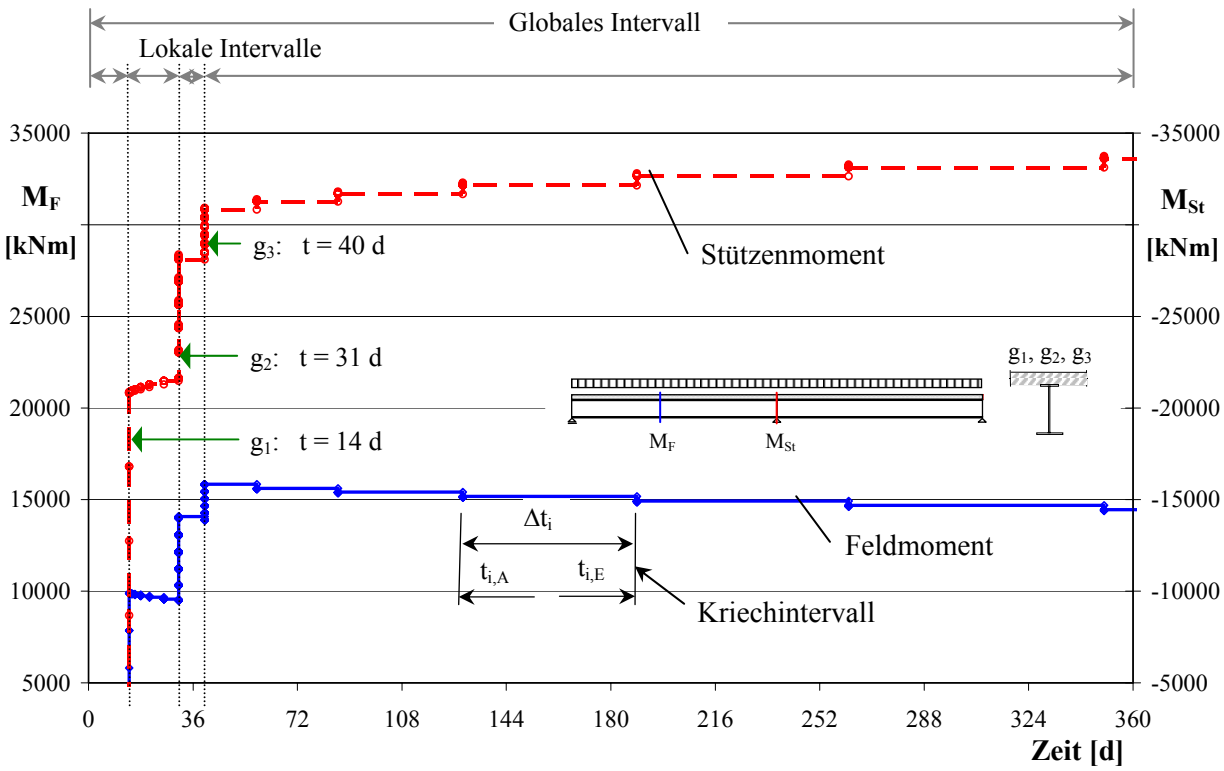



**Bild 4.1: Prinzip der inkrementell-iterativen Systemanalyse am Beispiel der Momentenumlagerung eines Zweifeldträgers mit drei Belastungsstufen**

### *Lösung an den Intervallgrenzen*

Wird eine Intervallteilung durch System- oder Belastungsmodifikationen verursacht, so erfolgt am Anfang des Kriechintervalls ($t_{i,A}$) die Analyse der daraus resultierenden Strukturantwort. Die Rechnung am Ende des Kriechintervalls ($t_{i,E}$) erfasst die Einflüsse aus den zeitabhängigen Verformungen des Betons des aktuellen Intervalls $\Delta t_i$ (Bild 4.1). Da sich die Beanspruchung infolge Kriechens aus der Summe aller bisherigen Teilkriechprozesse am Betongurt zusammensetzt (Abschnitt 3.1.5.1), geht die Beanspruchungsgeschichte des Bauteils in die Lösung ein.

Treten physikalische Nichtlinearitäten auf, so müssen die daraus resultierenden Veränderungen des Systemzustandes in geeigneter Weise erfasst werden. Aus der Summation der Zuwächse der einzelnen Komponenten wird der Systemzustand des Tragwerkes zu jedem Untersuchungszeitpunkt wiedergegeben.

### *Stab- und Querschnittsdiskretisierung*

Die Einzelstäbe des Systems werden in Stababschnitte diskretisiert. Um die Anwendung komplexer Materialgesetze zu ermöglichen, werden die Querschnitte außerdem in Schichten unterteilt.

### 4.1.3 Gesamtlösung

Bei einer linearen Systemanalyse mit der Deformationsmethode lautet das Gleichungssystem der unbekannten inkrementellen Knotenverschiebungen:

$$\underline{\widetilde{K}}_L \cdot \underline{\widetilde{v}} = \underline{\widetilde{P}} \tag{4.1}$$

Hierin bedeuten: $\underline{\widetilde{K}}_L$ … lineare Systemsteifigkeitsmatrix
$\underline{\widetilde{P}}$ … Vektor der Belastungen an Stab- und Knoten
$\underline{\widetilde{v}}$ … Vektor der Knotenverschiebungen

Bei der inkrementell-iterativen Lösung nichtlinearer Problemstellungen behalten die Ansätze der linearen Elastizitätstheorie abschnittsweise ihre Gültigkeit. Die in Gleichung (4.2) enthaltenen Δ-Größen symbolisieren dabei die Zuwächse der jeweiligen Größen innerhalb eines Iterationsschrittes im betrachteten Inkrement. Durch Nichtlinearitäten verursachte Korrekturgrößen werden über den Vektor $\Delta\underline{\widetilde{R}}$ erfasst und das Gleichungssystem (4.1) entsprechend erweitert.

$$\underline{\widetilde{K}}_{NL} \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}} = \Delta\underline{\widetilde{P}} - \Delta\underline{\widetilde{R}} \tag{4.2}$$

Bei dieser inkrementell-iterativen Vorgehensweise muss die kinematische Hypothese innerhalb der aktuellen Beanspruchungsstufe erfüllt sein. Für die Gesamtlösung besteht deshalb zunächst keine einschränkende Forderung bezüglich der Größe von Verschiebungen und Rotationen.

$$\underline{\widetilde{v}}_{(n)}^{[k]} = \sum_{n} \sum_{i=0}^{k-1} \left( \Delta\underline{\widetilde{v}}_{(n)}^{[i]} \right) + \Delta\underline{\widetilde{v}}_{(n)}^{[k]} \tag{4.3}$$

mit: n … Inkrementzähler
k … Iterationsschrittzähler

Die Systemsteifigkeitsmatrix $\underline{K}_{NL}$ in Gleichung (4.2) ist von den aktuellen Materialparametern und Federcharakteristiken abhängig. Der Schnittgrößen- und Verschiebungszustand wird dafür am Anfang eines jeden Inkrements bzw. Iterationsschrittes durch eine geeignete linear-elastische Spannungs-Dehnungs- oder Kraft-Verformungs-Abhängigkeit beschrieben.

Das Konvergenzverhalten, speziell die Konvergenzgeschwindigkeit des zur Gleichgewichtskorrektur gewählten Iterationsverfahrens, wird maßgebend durch die nichtlinearen Charakteristiken auf dem aktuellen Beanspruchungsniveau bestimmt (WRIGGERS [144]). Für die Analyse von Tragwerken, bei denen Gebrauchstauglichkeitskriterien im Vordergrund stehen, stellen dazu lastgesteuerte Iterationsverfahren nach NEWTON-RAPHSON oder die direkte Iteration geeignete Lösungsansätze dar. Bei Untersuchungen zum Systemverhalten im kritischen und überkritischen Bereich (Tragsicherheit) führen dagegen oftmals nur verschiebungsgesteuerte Iterationsalgorithmen (z.B. Bogenlängenverfahren) zum Erfolg.

Innerhalb eines Inkrements stehen im programmierten Lösungsalgorithmus drei verschiedene Iterationsverfahren zur Verfügung:

- NEWTON-RAPHSON-Verfahren
- Modifiziertes NEWTON-RAPHSON-Verfahren
- Direktes Iterationsverfahren mit Sekantensteifigkeit

Mit Bezug auf die vorrangig gebrauchszustandstypischen Beanspruchungen der hier untersuchten Verbundtragwerke findet zunächst das NEWTON-RAPHSON-Verfahren oder seine modifizierte Form als "Standardverfahren" Verwendung. Diese Entscheidung ist zu Beginn der Rechnung zu treffen. Das direkte Iterationsverfahren mit Sekantensteifigkeit findet nur dann Anwendung, wenn bei den zuvor genannten Verfahren Konvergenzprobleme zu erwarten sind. Abschnitt 4.3 geht auf die problembezogene Anwendung der genannten Verfahren sowie die Konvergenzkriterien näher ein.

Im Mittelpunkt der linearisierten Systemanalyse innerhalb einer Laststufe steht die Berechnung der Strukturantwort am Gesamtsystem mittels der vollständigen Deformationsmethode. Das Struktogramm in Bild 4.2 zeigt den prinzipiellen Rechenablauf.

Auf den Ansatz der statischen Grundlösung für die Zuwächse und Korrekturgrößen innerhalb eines Iterationsschrittes und die angewendeten numerischen Verfahren wird in den nachfolgenden Abschnitten eingegangen. Dabei erfolgt zunächst eine Beschränkung auf den starren Verbund, anschließend wird eine Erweiterungsmöglichkeit für den nachgiebigen Verbund vorgestellt. Die Unterscheidung zwischen starrem und nachgiebigem Verbund ist erforderlich, da für den starren Verbund die praktischen Aufgabenstellungen und Anwendungsmöglichkeiten des Algorithmus komplexer sind, beim nachgiebigen Verbund sind demgegenüber Einschränkungen erforderlich.

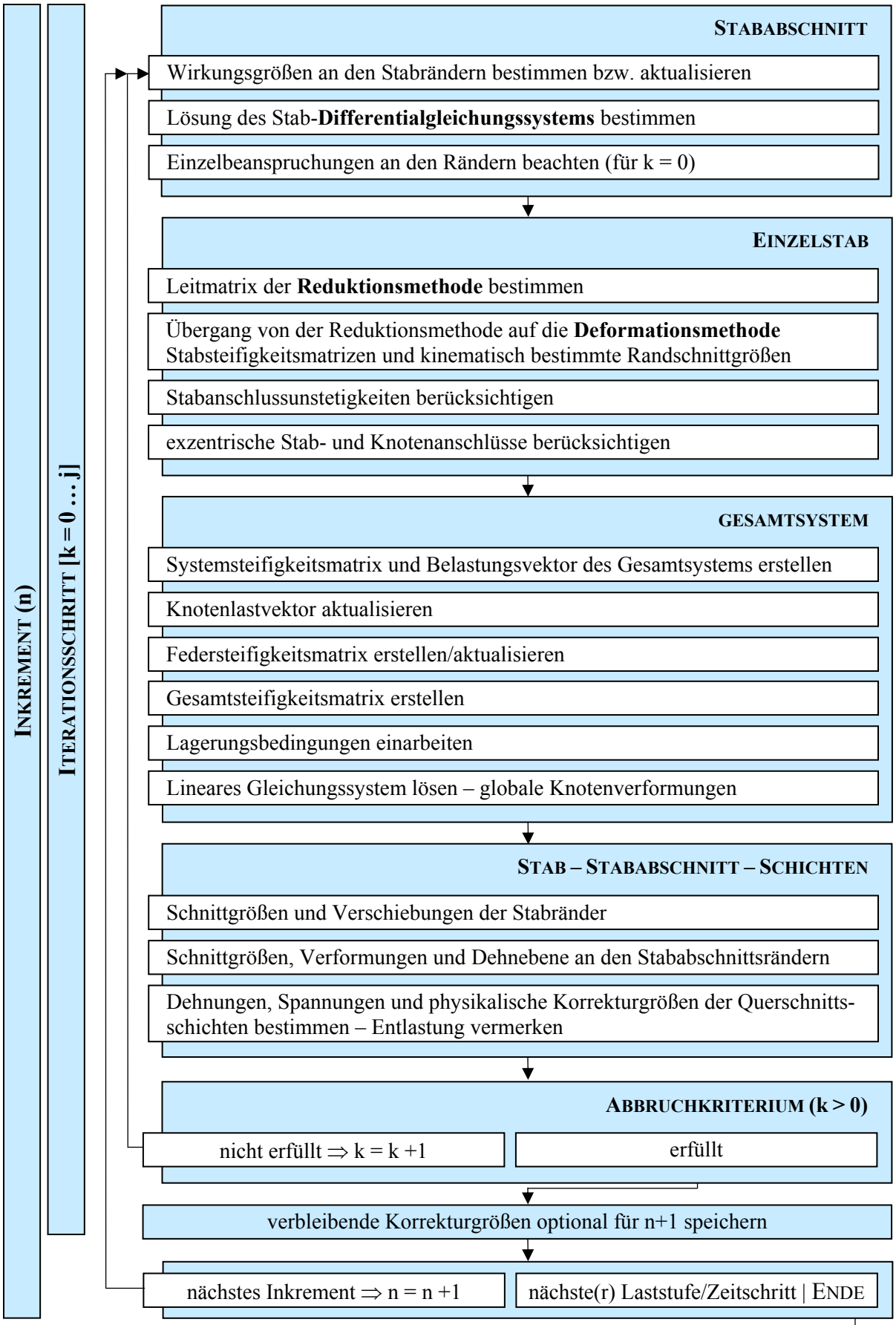



**Bild 4.2: Ablauf der Lösung in einem Inkrement – Prinzip der statischen Grundlösung**

## 4.2 Statische Grundlösungen für die Zuwächse in einem Iterationsschritt

Den Ausgangspunkt der Berechnungen in jedem Iterationsschritt stellt die abschnittsweise Formulierung des DGL-Systems für die Wirkungsgrößen eines Stabes und dessen numerische Integration dar. Die im Folgenden beschriebene Vorgehensweise orientiert sich an der Arbeit von SCHNEIDER [128]. Das Ergebnis beschreibt den Zusammenhang zwischen den Wirkungsgrößen der Stabränder, wobei das erhaltene Gleichungssystem für einen Stab formal der Leitmatrix der Reduktionsmethode(auch Übertragungsmatrizenverfahren) entspricht. Anschließend werden daraus die Stabsteifigkeitsmatrizen und Belastungsvektoren des kinematisch bestimmt gelagerten Einzelstabes erhalten. Dieses Vorgehen erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen sofort und stellt eine sehr effiziente Alternative zu FE-Modellen bei der Lösung von Stabtragwerken dar. Die Kopplung der Stäbe des Systems erfolgt unter Berücksichtigung von Stabanschlussunstetigkeiten und -exzentrizitäten an Knoten zur Gesamtstruktur. Unter Beachtung von Knotenbeanspruchungen und -stützungen wird daraus ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Zuwächse der Knotenverschiebungen gebildet. Die anschließende Analyse der Wirkungsgrößen im Stab liefert bei vorhandener Nichtlinearität Korrekturgrößen, welche für den anschließenden Iterationsschritt die Beanspruchungen an den Integrationspunkten im Stab darstellen.

### 4.2.1 Differentialgleichungssystem des ebenen Stabes

#### 4.2.1.1 Kinematische Beziehungen

Die Verschiebungs- und Verdrehungskomponenten der Ränder eines Stabes werden durch die den Koordinatenhauptachsen x, y, z zugeordneten Verschiebungen u, w und die Verdrehung φ beschrieben. Bild 4.3 zeigt bei Vernachlässigung von Anteilen höherer Ordnung den prinzipiellen Verschiebungs- und Schnittgrößenzustand an einem differenziellen Stabelement im unverformten und im verformten Zustand.

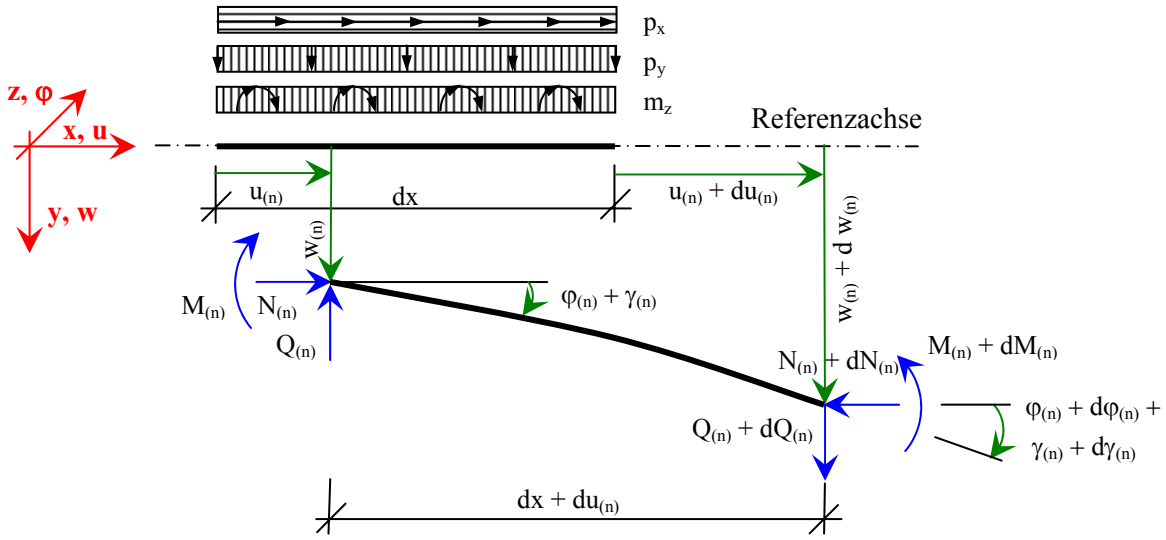



**Bild 4.3: Verzerrungs-Verschiebungs-Abhängigkeiten des differentiellen Elements im unverformten und im verformten Zustand**

Die Beanspruchungen eines Stabelements resultieren aus einer längenbezogenen Änderung der Verschiebungen, den Verzerrungen. Unter der Voraussetzung eines linearen Zusammenhangs zwischen den Verformungen und den Verzerrungen $((\varepsilon_r; dw/dx; \gamma) << 1)$ kann die Längenänderung eines Stababschnittes direkt als Dehnungsänderung definiert und die kinematischen Beziehungen bezüglich der Referenzachse formuliert werden:

$$\frac{d\Delta u}{dx} = \Delta\varepsilon_{r,Einw} \tag{4.4}$$

$$\frac{d\Delta w}{dx} = \Delta\gamma + \Delta\varphi \tag{4.5}$$

$$\frac{d\Delta\varphi}{dx} = \frac{d\Delta\varphi_{Einw}}{dx} \tag{4.6}$$

Dabei symbolisiert das $\Delta$ hier bereits die Änderung der Verzerrungsgrößen innerhalb des aktuellen Iterationsschritt [k] eines Inkrements (n) infolge äußerer und innerer Einwirkungen. Aus dieser Formulierung ist ersichtlich, dass die bereits genannten Forderungen für den linearen Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Verzerrungen zunächst nur im betrachteten Iterationsschritt einzuhalten sind.

#### 4.2.1.2 Stoffgesetze – Schnittgrößen-Verzerrungs-Abhängigkeiten

Stoffgesetze stellen den oftmals nichtlinearen Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungs- bzw. Schnittgrößen her. Für einen aus mehreren Schichten zusammengesetzten Verbundquerschnitt (Bild 4.4a) können die Dehnungen der Schichtschwerachsen in einem Inkrement unter Beachtung der Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte aus den Verformungskenngrößen der Referenzachse abgeleitet werden (Bild 4.4b).

$$\Delta\varepsilon_L(y) = \Delta\varepsilon_r - \frac{d\Delta\varphi}{dx} \cdot y_L \tag{4.7}$$

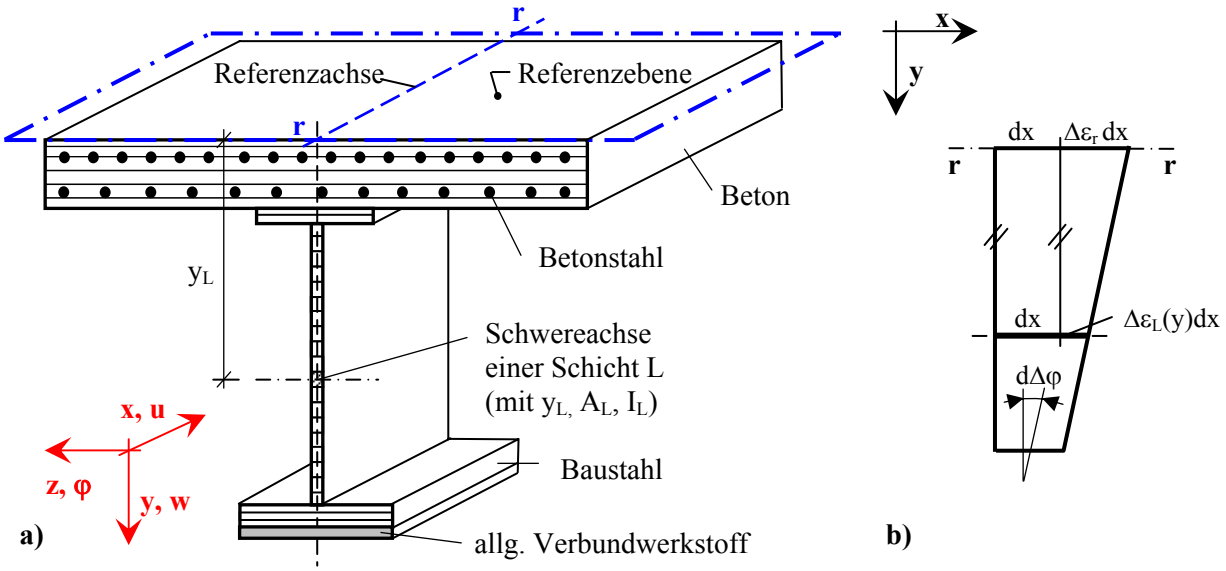



**Bild 4.4: geschichteter Querschnitt: a) Schichtung und b) Dehnungsverteilung im Querschnitt infolge der Zuwächse in einem Inkrement**

Das inkrementell-iterative Vorgehen ermöglicht dabei, ausgehend vom vorhandenen Beanspruchungsniveau, eine Linearisierung der Materialgesetze in jedem Iterationsschritt (Bild 4.5). Zusammen mit einer ausreichend feinen Schichtung der Querschnitte ist damit die Verwendung komplexer Stoffgesetze möglich.

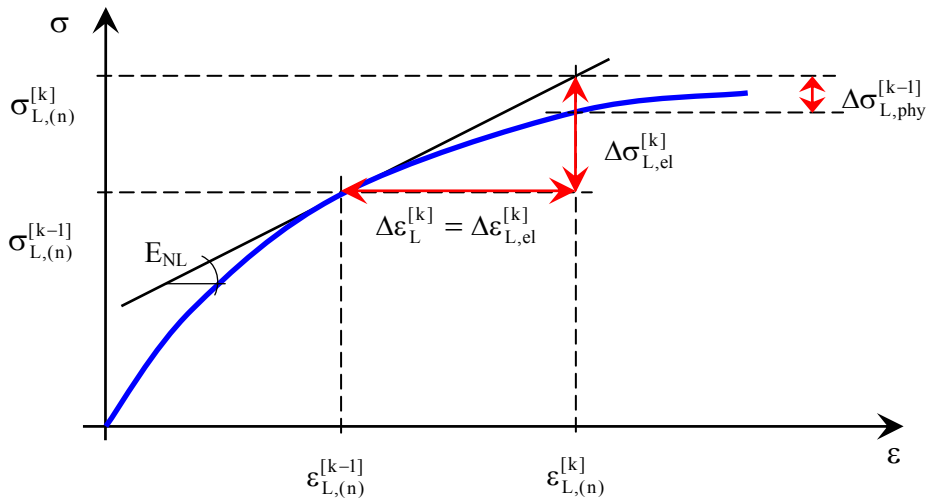



**Bild 4.5: Tangentenlinearisierung der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit einer Schicht L im Iterationsschritt [k]**

Mit der abschnittsweisen Linearisierung wird die Gültigkeit des HOOKE'schen Gesetzes für die Zuwächse innerhalb jeder Schicht in einem Iterationsschritt unterstellt.

$$\Delta\sigma^{[k]}_{L,(n)}(y) = E_{NL,L} \cdot \Delta\varepsilon_L(y) \tag{4.8}$$

Die Schnittgrößenzuwächse einer Schicht können dazu folgendermaßen formuliert werden:

$$\Delta N^{[k]}_{L,(n)} = \int \Delta\sigma^{[k]}_{L,(n)}(y) \cdot dA \tag{4.9}$$

$$\Delta M^{[k]}_{L,(n)} = \int \Delta\sigma^{[k]}_{L,(n)}(y) \cdot y_L \cdot dA \tag{4.10}$$

Über den Zusammenhang zwischen den Gleichungen (4.7) bis (4.10) ist es möglich, das Biegemoment M und die Normalkraft N einer Schicht mit der Krümmung $d\Delta\varphi/dx$ und der Dehnung $\varepsilon_r$ in der Referenzachse (M-N-Interaktionsmodell) zu koppeln. Eine ausführliche Herleitung dieser Zusammenhänge ist in der Arbeit von SCHNEIDER [128] erörtert. In Verbindung mit dem modifizierten NEWTON-RAPHSON-Verfahren wird von einer Tangentenlinearisierung der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit ausgegangen. Dabei entspricht der E-Modul aller Iterationsschritte eines Inkrements dem Tangentenmodul zu Beginn des aktuellen Lastinkrements. Dieses Vorgehen bereitet bei großen Steifigkeitserhöhungen numerische Probleme. Diesbezügliche Untersuchungen in Abschnitt 4.3 zeigen, dass bei der Verwendung lastgesteuerter Iterationsverfahren durch die Kombination verschiedener Varianten des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens mit direkten Iterationsverfahren gleichwertige Ergebnisse erzielt werden. Daher wird im Folgenden der E-Modul unabhängig von der Wahl des Iterationsverfahrens mit $E_{NL}$ bezeichnet.

Der Normalkraft- und Momentenanteil einer Schicht (Index L) können für den k-ten Iterationsschritt im n-ten Lastinkrement bezogen auf die Referenzachse folgendermaßen angegeben werden:

$$N_{L,(n)}^{[k]} = N_{L,(n)}^{[k-1]} + \Delta N_{L,(n)}^{[k]} \tag{4.11}$$

$$M_{L,(n)}^{[k]} = M_{L,(n)}^{[k-1]} + \Delta M_{L,(n)}^{[k]} \tag{4.12}$$

$\Delta N_{L,(n)}^{[k]}$ und $\Delta M_{L,(n)}^{[k]}$ beschreiben dabei die Zuwächse im aktuellen Iterationsschritt. Gemäß Bild 4.5 setzen sie sich aus den Anteilen infolge linear elastischen Materialverhaltens abzüglich der Korrekturgrößen des vorherigen Iterationsschrittes zusammen und werden durch das Einsetzen von Gleichung (4.7) in die Gleichungen (4.9) und (4.10) erhalten.

$$\Delta N_{L,(n)}^{[k]} = N_{\varepsilon,L} \cdot \Delta\varepsilon_{r,(n)}^{[k]} + N_{\varphi,L} \cdot \left(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\right)_{(n)}^{[k]} - \Delta N_{L,phy,(n)}^{[k-1]} \tag{4.13}$$

$$\Delta M_{L,(n)}^{[k]} = M_{\varepsilon,L} \cdot \Delta\varepsilon_{r,(n)}^{[k]} + M_{\varphi,L} \cdot \left(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\right)_{(n)}^{[k]} - \Delta M_{L,phy,(n)}^{[k-1]} \tag{4.14}$$

mit:

$$N_{\varepsilon,L} = \left(\frac{\partial N_L}{\partial \varepsilon_r}\right)_{NL} = \left(E_{NL} \cdot A\right)_L \qquad N_{\varphi,L} = \left(\frac{\partial N_L}{\partial \frac{d\varphi}{dx}}\right)_{NL} = -\left(E_{NL} \cdot A \cdot y\right)_L \tag{4.15a,b}$$

$$M_{\varepsilon,L} = \left(\frac{\partial M_L}{\partial \varepsilon_r}\right)_{NL} = \left(E_{NL} \cdot A \cdot y\right)_L \qquad M_{\varphi,L} = \left(\frac{\partial M_L}{\partial \frac{d\varphi}{dx}}\right)_{NL} = -\left(E_{NL} \cdot \left(I + A \cdot y^2\right)\right)_L \tag{4.16a,b}$$

Nichtlineare Stoffgesetze bewirken bei lastgesteuerten Iterationsverfahren die in Bild 4.5 angegebenen Korrekturgrößen $\Delta\sigma_{phy}$. Diese stellen im nachfolgenden Iterationsschritt die Einwirkungen dar und werden am Ende eines Iterationsschrittes für jede Schicht ermittelt. Die zugehörige Schnittgrößenkorrektur ergibt sich zu:

$$\Delta N_{L,phy,(n)}^{[k-1]} = \Delta\sigma_{L,phy}^{[k-1]} \cdot A_L \tag{4.17}$$

$$\Delta M_{L,phy,(n)}^{[k-1]} = \Delta N_{L,phy}^{[k-1]} \cdot y_L \tag{4.18}$$

Die daraus am Gesamtquerschnitt resultierenden Schnittgrößen werden anschließend durch die Summation über alle Schichten L erhalten:

$$\Delta N_{(n)}^{[k]} = \sum_L \Delta N_{L,(n)}^{[k]} \tag{4.19}$$

$$\Delta M_{(n)}^{[k]} = \sum_L \Delta M_{L,(n)}^{[k]} \,. \tag{4.20}$$

Mit den tangentialen Steifigkeiten

$$N_\varepsilon = \sum_L N_{\varepsilon,L} \qquad N_\varphi = \sum_L N_{\varphi,L} \tag{4.21a,b}$$

$$M_\varepsilon = \sum_L M_{\varepsilon,L} \qquad M_\varphi = \sum_L M_{\varphi,L} \tag{4.22a,b}$$

und physikalischen Korrekturgrößen am Gesamtquerschnitt

$$\Delta N^{[k-1]}_{phy,(n)} = \sum_L \Delta N^{[k-1]}_{L,phy,(n)} \tag{4.23}$$

$$\Delta M^{[k-1]}_{phy,(n)} = \sum_L \Delta M^{[k-1]}_{L,phy,(n)}\,, \tag{4.24}$$

erhält man die Schnittgrößen- bzw. Dehnungszuwächse in Matrizendarstellung:

$$\begin{vmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{vmatrix}^{[k]}_{(n)} = \begin{vmatrix} N_\varepsilon & N_\varphi \\ M_\varepsilon & M_\varphi \end{vmatrix}_{NL} \cdot \begin{vmatrix} \Delta\varepsilon_r \\ \dfrac{d\Delta\varphi}{dx} \end{vmatrix}^{[k]}_{(n)} + \begin{vmatrix} \Delta N_{phy} \\ \Delta M_{phy} \end{vmatrix}^{[k-1]}_{(n)} \tag{4.25}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta\varepsilon_r \\ \dfrac{d\Delta\varphi}{dx} \end{vmatrix}^{[k]}_{(n)} = \begin{vmatrix} N_\varepsilon & N_\varphi \\ M_\varepsilon & M_\varphi \end{vmatrix}^{-1}_{NL} \cdot \left( \begin{vmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{vmatrix}^{[k]}_{(n)} - \begin{vmatrix} \Delta N_{phy} \\ \Delta M_{phy} \end{vmatrix}^{[k-1]}_{(n)} \right). \tag{4.26}$$

Die Querkraft-Gleitungs-Abhängigkeit wird davon unabhängig linear formuliert:

$$\Delta\gamma^{[k]}_{(n)} = \gamma = \frac{1}{G \cdot A_s} \tag{4.27}$$

### 4.2.1.3 Gleichgewichtsbedingungen

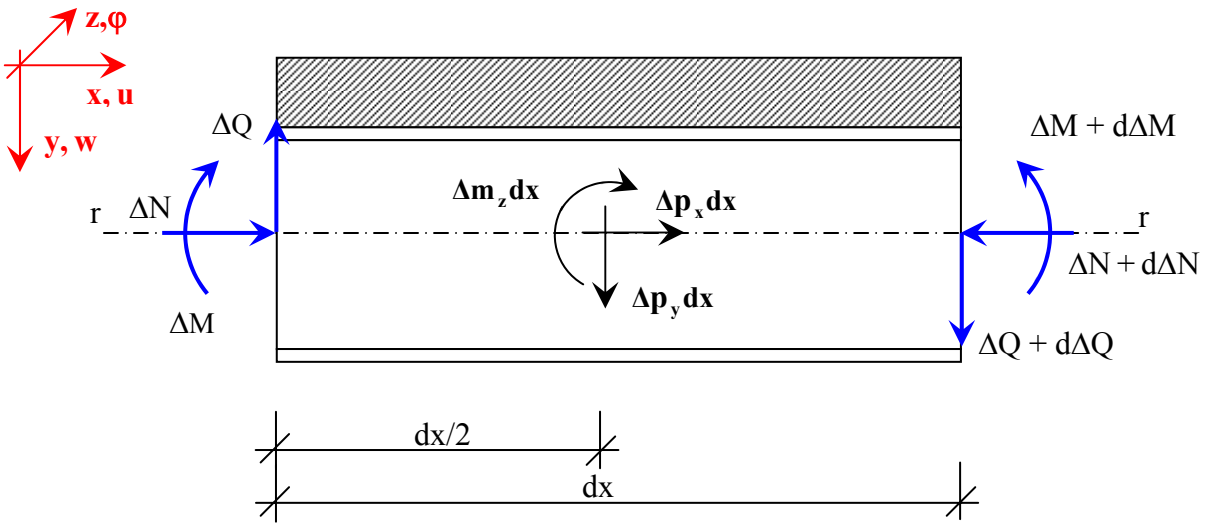



**Bild 4.6: Gleichgewicht am unverformten differentiellen Stabelement**

Werden die Wirkungsgrößen am unverformten differenziellen Stabelement gemäß Bild 4.6 angetragen, so ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen für die Δ-Zuwächse innerhalb eines Iterationsschrittes zu:

$$\sum H = 0: \qquad \frac{d\Delta N}{dx} = \Delta p_x \tag{4.28}$$

$$\sum V = 0: \qquad \frac{d\Delta Q}{dx} = -\Delta p_y \tag{4.29}$$

$$\sum M = 0: \qquad \frac{d\Delta M}{dx} = \Delta m_z + \Delta Q \tag{4.30}$$

#### 4.2.1.4 Zusammenführen der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbeziehungen in einem DGL-System 1. Ordnung

Eine Möglichkeit zur Darstellung der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen am differenziellen Stababschnitt ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

$$\frac{d\underline{z}(x)}{dx} = \underline{A}(x) \cdot \underline{z}(x) + \underline{b}(x)\,, \tag{4.31}$$

bzw. in inkrementeller schreibweise für die Zuwächse innerhalb eines Iterationsschrittes:

$$\left(\frac{d\Delta\underline{z}(x)}{dx}\right)_{(n)}^{[k]} = \underline{A}_{NL}(x) \cdot \Delta\underline{z}(x)_{(n)}^{[k]} + \Delta\underline{b}(x)_{(n)}^{[k-1]}\,. \tag{4.32}$$

Die Integration gelingt bei variablen Koeffizienten mit vertretbarem Aufwand oftmals nur numerisch.

$\Delta\underline{z}(x)_{(n)}^{[k]}$ … Vektor der unbekannten Schnittgrößen- und Verformungszuwächse [Δu, Δw, Δφ, ΔM, ΔQ, ΔN]

$\Delta\underline{b}(x)_{(n)}^{[k-1]}$ … Vektor der äußeren Belastungsänderungen

$\underline{A}_{NL}(x)$ … linearisierte Koeffizientenmatrix am Ende des vorherigen Inkrements bzw. Iterationsschritts

Im speziellen Anwendungsfall ebener Stabstrukturen mit starren Verbindungen wird das Stab-DGL-System aus jeweils drei Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen gebildet. Die ersten drei Gleichungen ergeben sich dabei durch das Einsetzen der Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen [Gln. (4.26) und (4.27)] in die Verzerrungs-Verschiebungs-Abhängigkeiten [Gln. (4.4) bis (4.6)]. Die Gleichungen 4 bis 6 des DGL-Systems entsprechen den Gleichgewichtsbedingungen [Gln. (4.28) bis (4.30)].

Die durch Gleichung (4.33) in Matrixform dargestellte Koeffizientenmatrix des DGL-Systems gilt für schubnachgiebiges Verhalten. Schubstarres Verhalten entsteht, wenn die Schubsteifigkeit den Grenzwert ∞ anstrebt. Im speziellen Fall ebener Stabwerke ist es sinnvoll, die Inverse der quadratischen Matrix zweiter Ordnung aus Gleichung (4.26) aufzulösen. Aus diesem Vorgehen resultieren die Elemente □/D.

$$\underline{A}_{NL}(x) = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -\frac{N_\varphi}{D} & 0 & -\frac{M_\varphi}{D} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{G \cdot A_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N_\varepsilon}{D} & 0 & \frac{M_\varepsilon}{D} \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 \\ & \underline{0} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \tag{4.33}$$

mit:

$$D = N_\varepsilon \cdot M_\varphi + N_\varphi \cdot M_\varepsilon \tag{4.34}$$

Dem Belastungsvektor $\Delta\underline{b}$ werden die Einwirkungsänderungen des Stababschnittes zugewiesen. Im 0-ten Iterationsschritt beinhaltet der Vektor dabei die Zuwächse der äußeren und inneren Einwirkungen ($\Delta\underline{b}_{(n)}^{[k=0]}$, Gl. (4.35)) und in allen weiteren Iterationsschritten die Korrekturen infolge der physikalischen Nichtlinearitäten ($\Delta\underline{b}_{(n)}^{[k>0]}$, Gl. (4.36)). Sollen die im vorherigen Inkrement nach dem Erfüllen des Abbruchkriteriums verbliebenen Korrekturgrößen mit berücksichtigt werden, so sind diese auf den Beanspruchungsvektor bei k = 0 zu addieren.

$$\Delta\underline{b}(x)_{(n)}^{[k=0]} = \left|\begin{array}{c} \Delta\varepsilon_{r,T} + \Delta\varepsilon_{r,\Delta t} + \Delta\varepsilon_{r,Syst} \\ 0 \\ \left(\frac{d\Delta\varphi_T}{dx}\right) + \left(\frac{d\Delta\varphi_{\Delta t}}{dx}\right) + \left(\frac{d\Delta\varphi_{Syst}}{dx}\right) \\ \Delta m_z \\ -\Delta p_y \\ \Delta p_x \end{array}\right|_{(n)}^{[k=0]} \tag{4.35}$$

$$\Delta\underline{b}(x)_{(n)}^{[k>0]} = \left| \begin{matrix} \Delta\varepsilon_{r,phy} \\ 0 \\ \left(\dfrac{d\Delta\varphi_{phy}}{dx}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right|_{(n)}^{[k-1]} \tag{4.36}$$

Die Elemente der Koeffizientenmatrix und des Belastungsvektors sind bezogen auf die Referenzachse formuliert. Die physikalischen Korrekturkräfte aus den Gln. (4.17) und (4.18) sind dazu ebenfalls mit Gleichung (4.26) in eine referenzachsenbezogene Darstellung zu überführen. Die Verzerrungsgrößen der zugehörigen Dehnebene lauten:

$$\Delta\varepsilon_{r,phy(n)}^{[k-1]} = \left(M_{\varphi} \cdot N_{phy(n)}^{[k-1]} - N_{\varphi} \cdot M_{phy(n)}^{[k-1]}\right) \cdot D^{-1} \tag{4.37}$$

$$\left(\frac{d\Delta\varphi_{phy}}{dx}\right)_{(n)}^{[k-1]} = \left(-M_{\varepsilon} \cdot N_{phy(n)}^{[k-1]} + N_{\varepsilon} \cdot M_{phy(n)}^{[k-1]}\right) \cdot D^{-1} \tag{4.38}$$

### 4.2.2 Stabsteifigkeitsmatrizen und Randschnittkräfte des kinematisch bestimmt gelagerten Stabes

#### 4.2.2.1 Lösung des DGL-Systems

Für die Lösung von gekoppelten Stab-DGL-Systemen erster Ordnung stehen verschiedene Integrationsverfahren zur Verfügung. Eine umfangreiche Klasse von Standardverfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen expliziter gewöhnlicher DGL-Systeme sind die RUNGE-KUTTA-Verfahren. Im programmierten Algorithmus findet eine numerische Integration vierter Ordnung nach RUNGE-KUTTA Anwendung, wobei eine Linearisierung der Anfangswertaufgabe erforderlich wird. Die Stäbe des Systems werden dazu in s Integrationsabschnitte unterteilt. Dabei ist zu beachten, dass innerhalb dieser Abschnitte die Wirkungsgrößen einen stetigen Verlauf aufweisen. Unstetigkeiten und Sprunggrößen im Geometrie- und Belastungsverlauf müssen daher an einer Abschnittsgrenze liegen. Die Feinheit der Stabteilung in zunächst stetigen Bereichen richtet sich nach den Auswirkungen der zu erwartenden Nichtlinearitäten und sollte z.B. im Auflagerbereich zumeist feiner als in Feldbereichen sein. Bei der gewählten RUNGE-KUTTA-Integration ist für jede Wirkungsgröße eine weitere Stützstelle zwischen den Integrationspunkten erforderlich. Diese kann entsprechend der Anzahl der bekannten benachbarten Stützstellen durch lineare, quadratische oder kubische Interpolation bestimmt werden (MÜLLER/JÄGER [101] S. 40/41).

Die numerische Integration des DGL-Systems liefert für jeden Stababschnitt s die Lösung am rechten Stabrand ($\underline{y}(s+1|s)$) in Abhängigkeit von den Wirkungsgrößen am linken Rand ($\underline{y}(s|s+1)$) (Feldmatrix $\underline{F}(s+1,s)$). Dabei beinhaltet die homogene Lösung Geometrie- und Nachgiebigkeitsinformationen $\underline{A}(x)$ und die inhomogene Lösung den Belastungsvektor $\Delta\underline{b}(x)$.

$$\Delta\underline{y}(s+1\,|\,s) = \begin{vmatrix} \underline{A}_{NL}(x) & \Delta\underline{b}(x) \\ \underline{0} & 1 \end{vmatrix} \cdot \Delta\underline{y}(s\,|\,s+1) = \underline{F}(s+1,s) \cdot \Delta\underline{y}(s\,|\,s+1) \tag{4.39}$$

Für die Fortleitung der Wirkungsgrößen über mehrere Stababschnitte eines Einzelstabes ist der Übergang vom rechten zum linken Rand eines Integrationspunktes zu beschreiben. Treten keine Unstetigkeiten auf, kann der Übergang durch die Feldmatrix beschrieben werden. Sind dagegen Unstetigkeiten, z.B. aus Einzellasten zu verzeichnen, so können diese Sprunggrößen durch Addition zur Belastungsspalte $\Delta\underline{b}(x)$ der Feldmatrix berücksichtigt werden. Die damit aus der Feldmatrix am linken Rand des Integrationspunktes folgende Leitmatrix $L(s+1,s)$ beschreibt somit die Anhängigkeit zwischen den Schnittstellen rechts der Integrationspunkte im Stab.

$$\Delta\underline{y}(s+1) = \underline{L}(s+1,s) \cdot \Delta\underline{y}(s) \tag{4.40}$$

Durch Multiplikation der Leitmatrizen aller Abschnitte eines Stabes kann schließlich die Übertragung der Wirkungsgrößen im gesamten Stab auf den Stabanfang reduziert werden. Unabhängig von der Anzahl der erforderlichen Integrationsstellen und dem Verlauf der Wirkungsgrößen im Stab werden damit die Zustandsgrößen am rechten Stabrand (k) aus denen am Stabanfang (i) über die Leitmatrix $\underline{L}(k,i)$ erhalten.

$$\Delta\underline{y}(k) = \begin{vmatrix} \underline{A}_{NL}(x) & \Delta\underline{b}(x) \\ \underline{0} & 1 \end{vmatrix} \cdot \Delta\underline{y}(i) = \underline{L}(k,i) \cdot \Delta\underline{y}(i) \tag{4.41}$$

Nach der Analyse der globalen Knotenverschiebungen können mit den Feld- und Leitmatrizen die Schnittgrößen und Deformationen an den Rändern der Stababschnitte bei bekannten Anfangswerten bestimmt werden.

#### 4.2.2.2 Übergang von der Reduktionsmethode zur Deformationsmethode

Mittels der Leitmatrix des Stabes (ik) erfolgt unter Beachtung der Vorzeichendefinitionen (Bild 4.7) bei Reduktionsmethode und Deformationsmethode der Übergang zu den inkrementellen Randschnittkraft-Randverschiebungs-Abhängigkeiten (MÜLLER/WOLF [102]):

$$\Delta\underline{\tilde{F}}(ik) = \underline{\tilde{K}}_{NL}(ik,ik) \cdot \Delta\underline{\tilde{v}}(ik) + \underline{\tilde{K}}_{NL}(ik,ki) \cdot \Delta\underline{\tilde{v}}(ki) + \Delta\underline{\tilde{F}}_0(ik) \tag{4.42}$$

$$\Delta\underline{\tilde{F}}(ki) = \underline{\tilde{K}}_{NL}(ki,ik) \cdot \Delta\underline{\tilde{v}}(ik) + \underline{\tilde{K}}_{NL}(ki,ki) \cdot \Delta\underline{\tilde{v}}(ki) + \Delta\underline{\tilde{F}}_0(ki) \tag{4.43}$$

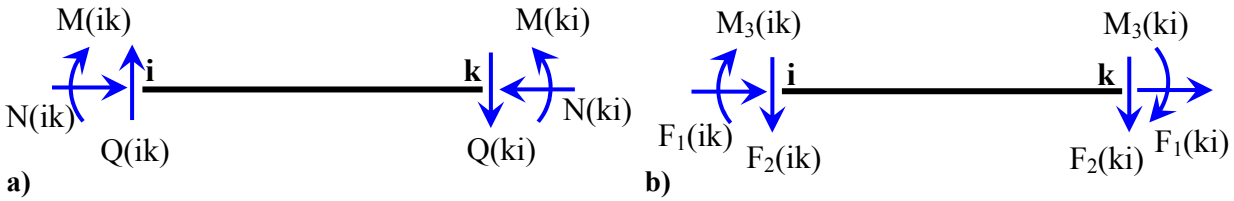



**Bild 4.7: Schnittgrößendefinition: a) Reduktionsmethode und b) Deformationsmethode**

Gleichung (4.41) wird dazu folgendermaßen umgeformt:

$$\Delta\underline{y}(k) = \left|\begin{array}{cc|c} \underline{F}_1 & \underline{F}_2 & \Delta\underline{f}_5 \\ \underline{F}_3 & \underline{F}_4 & \Delta\underline{f}_6 \\ \hline \underline{0} & \underline{0} & 1 \end{array}\right| \cdot \Delta\underline{y}(i)$$
$$\Delta\underline{y} = \left|\ \Delta u \quad \Delta w \quad \Delta\varphi \quad \Delta M \quad \Delta Q \quad \Delta N \quad 1\ \right|^T \tag{4.44}$$

Die Rechenvorschriften zur Ermittlung der Stabsteifigkeitsmatrizen und der Randschnittkräfte des kinematisch bestimmt gelagerten Stabes lauten damit bezogen auf das globale Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}
\underline{\tilde{K}}_{NL}(ik,ik) &= -\underline{T}\cdot\underline{R}\cdot\underline{F}_2^{-1}\cdot\underline{F}_1\cdot\underline{T}^T \\
\underline{\tilde{K}}_{NL}(ik,ki) &= -\underline{T}\cdot\underline{R}\cdot\underline{F}_3\cdot\underline{T}^T + \underline{T}\cdot\underline{R}\cdot\underline{F}_4\cdot\underline{F}_2^{-1}\cdot\underline{F}_1\cdot\underline{T}^T \\
\underline{\tilde{K}}_{NL}(ki,ik) &= \underline{T}\cdot\underline{R}\cdot\underline{F}_2^{-1}\cdot\underline{T}^T \\
\underline{\tilde{K}}_{NL}(ki,ki) &= -\underline{T}\cdot\underline{R}\cdot\underline{F}_4\cdot\underline{F}_2^{-1}\cdot\underline{T}^T
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\underline{\tilde{F}}_0(ik) &= -\underline{T}\cdot\underline{R}\cdot\underline{F}_2^{-1}\cdot\Delta\underline{f}_5 \\
\Delta\underline{\tilde{F}}_0(ki) &= -\underline{T}\cdot\underline{R}\cdot\Delta\underline{f}_6 + \underline{T}\cdot\underline{R}\cdot\underline{F}_4\cdot\underline{F}_2^{-1}\cdot\Delta\underline{f}_5
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Die Matrix $\underline{R}$ berücksichtigt die Vorzeichendefinition nach Bild 4.7, und $\underline{T}(ik)$ die Transformation vom lokalen in das globale Koordinatensystem.

$$\underline{R} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \underline{T}(ik) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{4.47a,b}$$

### 4.2.3 Deformationsmethode

#### 4.2.3.1 Randschnittkraft-Knotenverschiebungs-Abhängigkeiten

Bei der Deformationsmethode erfolgt die Kopplung der Stäbe des Systems zur Gesamtstruktur über Knoten. Für den Aufbau des Gleichungssystems werden dazu die inkrementellen Randschnittkraft-Knotenverschiebungs-Abhängigkeiten benötigt.

$$\Delta\underline{\tilde{F}}(ik) = \underline{\tilde{K}}_{NL}(ik,i)\cdot\Delta\underline{\tilde{v}}(i) + \underline{\tilde{K}}_{NL}(ik,k)\cdot\Delta\underline{\tilde{v}}(k) + \Delta\underline{\tilde{F}}_0(ik) \tag{4.48}$$
$$\Delta\underline{\tilde{F}}(ki) = \underline{\tilde{K}}_{NL}(ki,i)\cdot\Delta\underline{\tilde{v}}(i) + \underline{\tilde{K}}_{NL}(ki,k)\cdot\Delta\underline{\tilde{v}}(k) + \Delta\underline{\tilde{F}}_0(ki) \tag{4.49}$$

Demzufolge müssen entsprechend den Anschlussbedingungen des Stabes an den Knoten prinzipiell die Fälle mit und ohne Verschiebungsunstetigkeiten unterschieden werden. Weiterhin besteht die Notwendigkeit, exzentrische Stabanschlüsse bzw. endlich starre Knoten in die Formulierung der inkrementellen Randschnittkraft-Knotenverschiebungs-Abhängigkeiten einzubeziehen.

***Keine Verschiebungsunstetigkeiten zwischen Stabrand und Knoten***

Liegen keine Verschiebungsunstetigkeiten zwischen Stabrand und Knoten vor, stimmen die Verschiebungen der Stabränder mit denen der anschließenden Knoten überein.

$$\Delta\underline{\tilde{v}}(ik) = \Delta\underline{\tilde{v}}(i) \text{ bzw. } \Delta\underline{\tilde{v}}(ki) = \Delta\underline{\tilde{v}}(k) \tag{4.50}$$

Damit sind auch die Elemente der Gleichungen (4.42) und (4.43) denen der Gleichungen (4.48) und (4.49) äquivalent.

***Berücksichtigung von Verschiebungsunstetigkeiten zwischen Stabrand und Knoten***

Verschiebungsunstetigkeiten zwischen Stabrand und Knoten können durch unterschiedliche Vorgehensweisen erfasst werden. Sie können beispielsweise durch das Einfügen biegeweicher Stabelemente nachgebildet werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Stabsteifigkeitsmatrizen für konkrete Anschlussbedingungen an den Rändern vorzudefinieren. Beiden Varianten sind Grenzen bei der Abbildung realer Anschlussbedingungen gesetzt. Eine für Computerberechnungen verallgemeinerbare Herangehensweise stellt die im Folgenden näher beschriebene und im Weiteren verwendete statische Kondensation dar. Durch eine Korrektur der ohne Verschiebungsunstetigkeit gültigen Elemente der Randschnittkraft-Randverschiebungs-Abhängigkeiten werden die Unstetigkeiten in den Ansatz integriert. Ein wesentlicher Vorteil dieser Methode besteht darin, dass sich mehrere Unstetigkeiten an einem Anschluss nacheinander systematisch vom linken zum rechten Rand des Stabes (ik) berücksichtigen lassen. Allerdings erfolgt im umgesetzten Lösungsalgorithmus eine Beschränkung auf lineare Federgelenke, und die Verschiebungsunstetigkeiten müssen in Richtung der stablokalen Achsen angeordnet sein. Nachfolgend wird das Vorgehen in den wesentlichen Punkten dargestellt. Eine ausführliche Herleitung des Lösungsansatzes und Erweiterungsmöglichkeiten können beispielsweise der Arbeit MÜLLER/JÄGER [101] entnommen werden.

Verschiebungsunstetigkeiten zwischen Stabrand und Knoten können je nach der gewählten konstruktiven Ausbildung eines Anschlusses durch Schnittkraftnullfelder “allgemeine Gelenke“ oder Federabhängigkeiten “allgemeine Federgelenke“ zwischen den übertragenen Schnittkräften und den Verschiebungssprüngen verursacht werden. In Richtung der Verschiebungsunstetigkeit tritt dann eine Sprunggröße auf (Index [u]), mit welcher der Übergang von den Stabrand- zu den Knotenverschiebungen beschrieben werden kann.

$$\Delta\underline{\tilde{v}}(ik) = \Delta\underline{\tilde{v}}(i) + \Delta\underline{\tilde{v}}^{[u]}(ik) \text{ bzw. } \Delta\underline{\tilde{v}}(ki) = \Delta\underline{\tilde{v}}(k) + \Delta\underline{\tilde{v}}^{[u]}(ki) \tag{4.51}$$

Der unbekannte Verschiebungsvektor $\Delta\underline{v}^{[u]}(ik)$ beinhaltet im ebenen Fall drei Verschiebungskomponenten (Index n), die mit $\Delta v_n^{[u]}(ik)$ bzw. bezeichnet werden.

In Richtung einer Unstetigkeit ist die Schnittkraft $\Delta\underline{F}_n(ik)$ im Fall eines Gelenkes gleich Null und damit bekannt. Tritt ein Federgelenk mit der Federsteifigkeit $k_n(ik)$ auf, lässt sich dafür der folgende Zusammenhang finden:

$$\Delta F_n(ik) = k_n(ik) \cdot \Delta v_n^{[u]}(ik) = \underline{t}_n^T(ik) \cdot \Delta\underline{\tilde{F}}(ik) \tag{4.52}$$

$\underline{t}_n^T(ik)$ ist darin der Spaltenvektor der Transformationsmatrix $\underline{T}(ik)$ des Stabes. Ersetzt man $\Delta\underline{\widetilde{F}}(ik)$ durch die Randschnittkraft-Randverschiebungs-Abhängigkeiten (Gl. (4.48)) und darin die unbekannten Knotenverschiebungen durch Gleichung (4.51), erhält man mit:

$$\psi(ik) = \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,i) \cdot \underline{t}_n(ik) + k_n(ik), \tag{4.53}$$

den Verschiebungssprung $\Delta v_n^u(ik)$ in Richtung der betrachteten Unstetigkeit:

$$\Delta v_n^u(ik) = -\frac{1}{\psi(ik)} \cdot \left[\underline{t}_n^T(ik) \cdot \Delta\underline{\widetilde{F}}_0(ik) + \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,i) \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}}(i) + \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,k) \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}}(k)\right]. \tag{4.54}$$

Die Gln. (4.51) und (4.53) liefern dazu die Zuwächse der Stabrandverschiebungen $\Delta\underline{\widetilde{v}}(ik)$. Das Einsetzen dieser in die Randschnittkraft-Randverschiebungs-Abhängigkeiten (Gln. (4.42) und (4.43)) und der anschließende Vergleich mit den Randschnittkraft-Knotenverschiebungs-Abhängigkeiten (Gln. (4.48) und (4.49)) führt zu den Steifigkeitsmatrizen und Randschnittkräften des kinematisch bestimmt gelagerten Stabes unter Berücksichtigung der Verschiebungsunstetigkeit. Zur Kennzeichnung der neuen Elemente der Randschnittkraft-Knotenverschiebungs-Abhängigkeiten werden diese mit dem Index N versehen und die Gln. (4.48) und (4.49) neu formuliert:

$$\begin{aligned}
\Delta\underline{\widetilde{F}}(ik) &= \underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ik,i) \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}}(i) + \underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ik,k) \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}}(k) + \Delta\underline{\widetilde{F}}_{N,0}(ik) \\
\Delta\underline{\widetilde{F}}(ki) &= \underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ki,i) \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}}(i) + \underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ki,k) \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}}(k) + \Delta\underline{\widetilde{F}}_{N,0}(ki)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

mit:

$$\begin{aligned}
\underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ki,i) &= \underline{\widetilde{K}}(ik,i) - \frac{1}{\psi(ik)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,i) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,i) \\
\underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ki,k) &= \underline{\widetilde{K}}(ik,k) - \frac{1}{\psi(ik)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,i) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,k) \\
\underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ki,i) &= \underline{\widetilde{K}}(ki,i) - \frac{1}{\psi(ik)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,i) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,i) \\
\underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ki,k) &= \underline{\widetilde{K}}(ki,k) - \frac{1}{\psi(ik)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,i) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,k) \\
\Delta\underline{\widetilde{F}}_{N,0}(ik) &= \Delta\underline{\widetilde{F}}_0(ik) - \frac{1}{\psi(ik)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,i) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \Delta\underline{\widetilde{F}}_0(ik) \\
\Delta\underline{\widetilde{F}}_{N,0}(ki) &= \Delta\underline{\widetilde{F}}_0(ki) - \frac{1}{\psi(ik)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,i) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \Delta\underline{\widetilde{F}}_0(ik)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

In den Gleichungen (4.52) bis (4.56) entsprechen beim Abarbeiten der ersten Unstetigkeit die Steifigkeitsmatrizen und Randschnittkräfte des kinematisch bestimmt gelagerten Stabes $\underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,i)$, $\Delta\underline{\widetilde{F}}_0(ik)$, … noch denen der Randschnittkraft-Randverschiebungs-Abhängigkeiten $\underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,ik)$, $\Delta\underline{\widetilde{F}}_0(ik)$, … , der Index N ist bedeutungslos. Treten mehr als eine Stabanschlussunstetigkeit auf, werden analog die $\underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,i)$, $\Delta\underline{\widetilde{F}}_0(ik)$, … durch die bei der zuvor abgearbeiteten Verschiebungsunstetigkeit $\underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ik,i)$, $\Delta\underline{\widetilde{F}}_{N,0}(ik)$, … ersetzt. Aus diesem

Vorgehen resultiert die verwendete Formulierung des "nacheinander Abarbeiten" der Unstetigkeiten an einem Stab.

Die dargestellte Vorgehensweise ist anschließend ebenfalls auf den rechten Stabrand (k) anzuwenden, wobei die bereits modifizierten Stabsteifigkeitsmatrizen und Randschnittkraftvektoren die Basis bilden. Die Gleichungen (4.53), (4.54) und (4.56) werden dazu für den rechten Rand angepasst und lauten:

$$\Delta v_n^u(ki) = -\frac{1}{\psi(ki)} \cdot \left[ \underline{t}_n^T(ik) \cdot \Delta \underline{\widetilde{F}}_0(ki) + \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,i) \cdot \Delta \underline{\widetilde{v}}(i) + \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,k) \cdot \Delta \underline{\widetilde{v}}(k) \right]. \tag{4.57}$$

mit:

$$\psi(ki) = \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,k) \cdot \underline{t}_n(ik) + k_n(ki), \tag{4.58}$$

und:

$$\begin{aligned}
\underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ik,i) &= \underline{\widetilde{K}}(ki,i) - \frac{1}{\psi(ki)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,k) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,i) \\
\underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ik,k) &= \underline{\widetilde{K}}(ki,k) - \frac{1}{\psi(ki)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,k) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,k) \\
\underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ki,i) &= \underline{\widetilde{K}}(ki,i) - \frac{1}{\psi(ki)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,k) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,i) \\
\underline{\widetilde{K}}_{NL,N}(ki,k) &= \underline{\widetilde{K}}(ki,k) - \frac{1}{\psi(ki)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,k) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,k) \\
\Delta \underline{\widetilde{F}}_{N,0}(ik) &= \Delta \underline{\widetilde{F}}_0(ik) - \frac{1}{\psi(ki)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ik,k) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \Delta \underline{\widetilde{F}}_0(ki) \\
\Delta \underline{\widetilde{F}}_{N,0}(ki) &= \Delta \underline{\widetilde{F}}_0(ki) - \frac{1}{\psi(ki)} \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(ki,k) \cdot \underline{t}_n(ik) \cdot \underline{t}_n^T(ik) \cdot \Delta \underline{\widetilde{F}}_0(ki)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Anmerkung: Die ursprünglichen Stabsteifigkeitsmatrizen und Randschnittkräfte der Randschnittkraft-Randverschiebungs-Abhängigkeiten werden für die spätere Berechnung von Schnittgrößen und Verformungen im Stab wieder benötigt, daher sollten sie gespeichert werden.

### *Berücksichtigung von Stabanschlussexzentrizitäten und Starrkörperverschiebungen*

Die Knoten eines Stabtragwerkes beschreiben in der Regel die Schnittpunkte der Systemachsen aneinandergrenzender Bauteile. Bei der Idealisierung als Punktknoten im statischen System werden die realen Bauteilabmessungen dabei oftmals vernachlässigt. Auflager- und Gelenkbedingungen werden ebenso vereinfacht abgebildet. Bei Tragwerksquerschnitten wie den Überbauten von Hohlkastenbrücken ist der Einfluss der Querschnittshöhe und damit des Hebelarms zwischen Lager- und Bezugsachse nicht mehr vernachlässigbar. Um nun die zuvor als beliebig definierte Lage der Referenzachse nicht bereits wieder an die Lagerachse zu verlieren, ist es sinnvoll und notwendig, derartige endliche Knotenbereiche bei der Modellierung mit zu erfassen und numerisch zu berücksichtigen. In den Algorithmus wurde daher die exzentrische Anordnung eines Auflagerpunktes bezogen auf einen Knoten der Referenzachse

implementiert. Der Knoten in der Referenzachse beschreibt dann den tatsächlichen Anschlusspunkt der angrenzenden Stäbe, die sich einstellenden Verschiebungen sind jedoch von denen des gewählten Auflagerpunktes abhängig. Exzentrische Knotenanschlüsse von Stäben lassen sich in gleicher Weise realisieren.

Eine Möglichkeit zur numerischen Berücksichtigung eines exzentrischen Anschlusses besteht darin, diesen durch zusätzliche biege- und dehnsteife Stäbe zu erfassen. Eine vernünftige Annahme der Steifigkeiten kann nur systembezogen erfolgen, zu große Steifigkeitsunterschiede im System verschlechtern dabei jedoch die Konditionierung des linearen Gleichungssystems. Im hier gewählten Lösungsansatz wird der Bereich zwischen ideellem und tatsächlichem Anschlussknoten als starrer Abschnitt abgebildet, d.h. die Deformationen des Anschlusspunktes $i_S$ werden durch rein geometrische Beziehungen zum ideellen Knotenpunkt $i_P$ beschrieben (vgl. Bild 4.8). Die kinematisch bestimmten Randschnittkräfte und Steifigkeitsmatrizen sind entsprechend umzurechnen und auf den ideellen Knotenpunkt zu beziehen.

$$\begin{aligned}\Delta\underline{\tilde{F}}(i_P k_P) &= \underline{\tilde{K}}_{NL}(i_P k_P, i_P)\cdot\Delta\underline{\tilde{v}}(i_P) + \underline{\tilde{K}}_{NL}(i_P k_P, k_P)\cdot\Delta\underline{\tilde{v}}(k_P) + \Delta\underline{\tilde{F}}_0(i_P k_P)\\ \Delta\underline{\tilde{F}}(k_P i_P) &= \underline{\tilde{K}}_{NL}(k_P i_P, i_P)\cdot\Delta\underline{\tilde{v}}(i_P) + \underline{\tilde{K}}_{NL}(k_P i_P, k_P)\cdot\Delta\underline{\tilde{v}}(k_P) + \Delta\underline{\tilde{F}}_0(k_P i_P)\end{aligned} \tag{4.60}$$

Das Vorgehen wird im Folgenden für den linken Stabrand (i) beschrieben und gilt in gleicher Weise für den rechten Rand (k) (vgl. MÜLLER/JÄGER [101]).

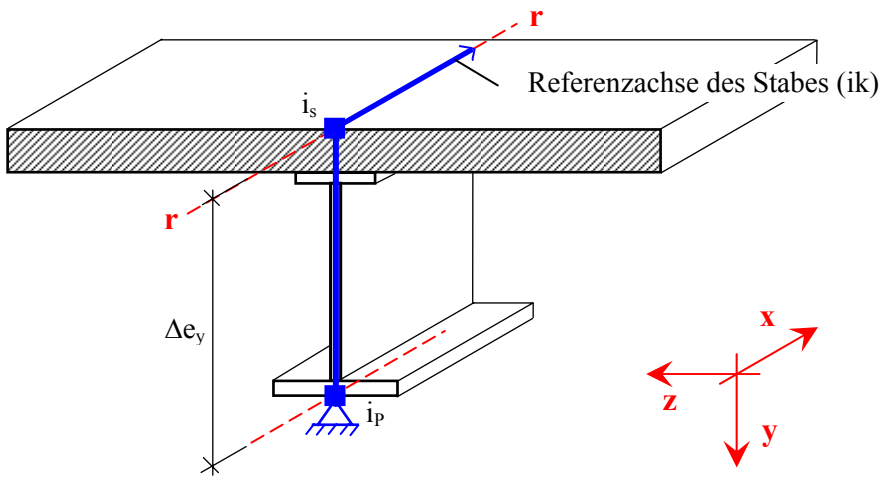



**Bild 4.8: Exzentrischer Anschluss der Referenzachse an einen Auflagerpunkt durch einen endlichen Knoten**

Die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am starren Stababschnitt nach Bild 4.9 liefert für die Schnittgrößen und Verschiebungen an den Rändern der Punkte $i_P$ und $i_S$ folgenden Zusammenhang:

$$\Delta\underline{\tilde{F}}(i_P k_P) = \underline{\tilde{H}}(i_P i_S)\cdot\Delta\underline{\tilde{F}}(i_S k_S) \tag{4.61}$$

$$\Delta\underline{\tilde{v}}(i_S) = \underline{\tilde{H}}^T(i_P i_S)\cdot\Delta\underline{\tilde{v}}(i_P) \tag{4.62}$$

mit der Gleichgewichtsmatrix:

$$\underline{\widetilde{H}}(i_P i_S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta\widetilde{e}_y & \Delta\widetilde{e}_x & 1 \end{vmatrix} \tag{4.63}$$

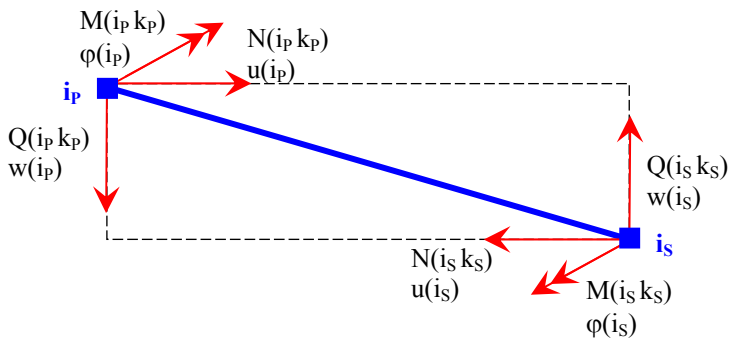



**Bild 4.9: Kräfte und Verschiebungen am ebenen Starrkörper**

Damit können die Elemente der Randschnittkraft-Knotenverschiebungs-Abhängigkeiten bezüglich der ideellen Knotenpunkte $i_P$ und $k_P$ angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\underline{\widetilde{K}}_{NL}(i_P k_P, i_P) &= \underline{\widetilde{H}}(i_P i_S) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(i_S k_S, i_S) \cdot \underline{\widetilde{H}}^T(i_P i_S) \\
\underline{\widetilde{K}}_{NL}(i_P k_P, k_P) &= \underline{\widetilde{H}}(i_P i_S) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(i_S k_S, k_S) \cdot \underline{\widetilde{H}}^T(k_P k_S) \\
\underline{\widetilde{K}}_{NL}(k_P i_P, i_P) &= \underline{\widetilde{H}}(k_P k_S) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(k_S i_S, i_S) \cdot \underline{\widetilde{H}}^T(i_P i_S) \\
\underline{\widetilde{K}}_{NL}(k_P i_P, k_P) &= \underline{\widetilde{H}}(k_P k_S) \cdot \underline{\widetilde{K}}_{NL}(k_S i_S, k_S) \cdot \underline{\widetilde{H}}^T(k_P k_S) \\
\Delta\underline{\widetilde{F}}_0(i_P, k_P) &= \underline{\widetilde{H}}(i_P i_S) \cdot \Delta\underline{\widetilde{F}}_0(i_S, k_S) \\
\Delta\underline{\widetilde{F}}_0(k_P, i_P) &= \underline{\widetilde{H}}(k_P k_S) \cdot \Delta\underline{\widetilde{F}}_0(k_S, i_S)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Sind an einem Stabanschluss Unstetigkeiten und Exzentrizitäten vorhanden, werden zuerst die Stabanschlussunstetigkeiten abgearbeitet und anschließend die exzentrischen Stababschlüsse berücksichtigt.

#### 4.2.3.2 Kopplung der Stäbe zur Gesamtstruktur - Aufbau und Lösung des Gleichungssystems für die unbekannten Knotenverschiebungen

Das Zusammenwirken der Einzelstäbe im Tragsystem erfolgt über die Formulierung von Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten. Sie setzen sich zunächst aus den im vorherigen Abschnitt genannten Elementen der Randschnittkraft-Knotenverschiebungs-Abhängigkeiten aller an einem Knoten angrenzenden Stabenden zusammen (Gl. (4.65)). Eventuell vorhandene Einzellasten finden über den Knotenlastvektor $\Delta\underline{\widetilde{P}}(i)$ Berücksichtigung.

$$\Delta\underline{\widetilde{P}}(i) - \sum_i \Delta\underline{\widetilde{F}}(ik) = 0 \tag{4.65}$$

Die Knoten- und Randschnittkräfte sowie die Stabsteifigkeitsmatrizen der Stäbe werden in Abhängigkeit von der Struktur des Tragwerkes in einem Gleichungssystem angeordnet.

Man erhält ein lineares Gleichungssystem (Gl. (4.66)) der Form

$$\underline{\widetilde{K}}_{NL} \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}} = \Delta\underline{\widetilde{P}} - \Delta\underline{\widetilde{F}}_0 \tag{4.66}$$

$\underline{\widetilde{K}}_{NL}$ ist die von den Stabsteifigkeitsmatrizen abhängige Systemsteifigkeitsmatrix, welche bei Stabzügen mit steigender Knotennummerierung eine ausgeprägte Bandstruktur aufweist.

***Berücksichtigung elastische Stützungen an Knotenpunkten***

Um eine realitätsnahe Abbildung der Lagerungsbedingungen von Tragwerken zu ermöglichen, ist die Verwendung elastische Stützungen unumgänglich.

In der Federmatrix $\underline{\widetilde{K}}_F(i)$ werden die elastische Stützungen eines Knotens nach vorheriger Transformation in das Hauptachsensystem zusammengestellt und ebenfalls in Abhängigkeit von der Struktur des Tragwerks in der Federsteifigkeitsmatrix $\underline{\widetilde{K}}_F$ angeordnet. Durch Addition mit der Systemsteifigkeitsmatrix wird die Federsteifigkeitsmatrix in die Knotengleichgewichtsbedingungen eingeführt.

$$\underline{\widetilde{K}}_F(i) = \underline{T}_F(i) \cdot \underline{K}_F(i) \cdot \underline{T}_F^T(i) = \begin{vmatrix} \widetilde{k}_x & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{k}_y & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{k}_z \end{vmatrix} \tag{4.67}$$

***Berücksichtigung vorgeschriebener Auflagerverschiebungen***

Wird in einem statischen System die starre Lagerung eines Knotenpunktes definiert, ist dessen Deformationsgröße bereits bekannt. Im Fall einer starren unverschieblichen Lagerung kann dieser Knotenfreiheitsgrad aus dem Gleichungssystem gestrichen werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Behinderung durch eine entsprechend große Federsteifigkeit zu beschreiben. Dieses Vorgehen wirkt sich nachteilig auf die Konditionierung des linearen Gleichungssystems aus. Vorgeschriebene Knotenverschiebungen können mit beiden Vorgehensweisen allerdings nicht erfasst werden. In dieser Arbeit wird eine Möglichkeit vorgestellt, mit der sich eingeprägte (Zwangs-)Verformungen an Auflagerpunkten berücksichtigen lassen. Der Ansatz ist für eine numerische Umsetzung geeignet.

Die eingeprägten Auflagerpunktverschiebungen eines Systems werden zuerst in das globale Koordinatensystem transformiert und in einem Vektor $\Delta\underline{\widetilde{v}}_2$ zusammengefasst. Durch Multiplikation des Vektors mit der Systemsteifigkeitsmatrix wird ein Belastungsvektor erhalten, welcher von der rechten Seite des Gleichungssystems zu subtrahieren ist. Gleichung (4.66) wird erweitert und lautet dann:

$$\underline{\widetilde{K}}_{NL} \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}} = \Delta\underline{\widetilde{P}} - \Delta\underline{\widetilde{F}}_0 - \underline{\widetilde{K}}_{NL} \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}}_2 \tag{4.68}$$

Anschließend können die zugehörigen Zeilen- und Spaltenelemente des linearen Gleichungssystems zu Null und das Hauptdiagonalenelement gleich Eins gesetzt werden. Nach Summation aller Vektoren der rechten Seite werden auf dieser die vorgeschriebenen Verschiebungen eingetragen.

Treten nur starre Auflagerungen ohne eingeprägte Verformungen auf, sind nur die Schritte des vorherigen Abschnitts durchzuführen.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (Gl. (4.68)) liefert die unbekannten Knotenverschiebungen $\Delta\underline{v}$ im Iterationsschritt. Unter Verwendung der zuvor aufgezeigten Beziehungen bestimmt man danach zunächst die Schnittgrößen- und Deformationszuwächse an den Integrationspunkten der Stäbe. Über die Schnittkraft-Verzerrungs-Abhängigkeiten der Gleichung (4.26) kann dann die zugehörige Änderung der Dehnebene bestimmt werden und die Spannungsanalyse am Materialpunkt erfolgen. Deren Abweichungen vom linearen Zusammenhang liefern die Korrekturgrößen für den nächsten Iterationsschritt (Gl. (4.36)).

## 4.3 Zur Gleichgewichtsiteration

Die Herstellungstechnologien im Verbundbau bewirken oft Beanspruchungswechsel in einem entstehenden Tragwerk. Zum Beispiel können sich Risse im Beton nach dem Entfernen einer Hilfsstützung wieder schließen und überdrückt werden. Für die Simulation kurzzeitig hoher Einwirkungen ist an den Materialpunkten ggf. die Berücksichtigung nichtlinearer Stoffgesetzmäßigkeiten erforderlich. Die numerische Abbildung dieser Zusammenhänge erfolgt durch Spannungs-Dehnungs- und Kraft-Verformungs-Abhängigkeiten mit Ent- und Wiederbelastungspfaden die aus Versuchen an quasi-statisch beanspruchten Bauteilproben gewonnen wurden (vgl. Kapitel 3). Die Vorgehensweise bei der inkrementell-iterativen Abarbeitung dieser teilweise sehr komplexen Stoffgesetze ist von maßgebender Bedeutung für die Qualität einer numerischen Näherungslösung. Die Auswahl eines geeigneten Iterationsverfahrens ist von der Komplexität des Stoffgesetzes und dem Anwendungsbereich abhängig. Dabei kann durch eine gezielte Kombination unterschiedlicher Verfahren die Effizienz eines verallgemeinerten Lösungsansatzes gegenüber der Anwendung einzelner Verfahren verbessert werden. Im Folgenden wird auf das in dieser Arbeit angewendete Vorgehen sowie die Besonderheiten und Eignung der verwendeten Ansätze eingegangen.

### 4.3.1 Lastgesteuerte Iterationsverfahren

***NEWTON-RAPHSON-Verfahren*** Beim Newton-Raphson-Verfahren (Bild 4.10a) in seiner ursprünglichen Form erfolgt das Parameter-Update der Systemsteifigkeitsmatrix $\underline{K}_{NL}$ zu Beginn eines jeden Iterationsschrittes mittels der Tangentensteifigkeit an den Materialpunkt. Dem Vorteil eines guten Konvergenzverhaltens bei wenigen Iterationsschritten steht die aufwändige Aktualisierung der Systemsteifigkeitsmatrix in jeden Rechenschritt gegenüber. Die Größe des untersuchten Systems, bzw. die Anzahl der betrachteten Materialpunkte kann als Auswahlkriterium dienen.

***Modifiziertes NEWTON-RAPHSON-Verfahren*** Das modifizierte NEWTON-RAPHSON-Verfahren eignet sich demzufolge bei komplexeren Systemen. Die Systemsteifigkeitsmatrix $\underline{K}_{NL}$ wird durch die tangentialen Steifigkeiten am Ende des vorherigen Inkrements $\underline{K}_{T,(n-1)}$ beschrieben und während aller Iterationsschritte im Inkrement konstant gehalten (Bild 4.10b).

***Direktes Iterationsverfahren mit Sekantensteifigkeit*** Analog dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren wird die Systemsteifigkeitsmatrix $\underline{K}_{NL}$ zu Beginn eines Iterationsschrittes aktualisiert. Die Steifigkeit kann durch eine Sekante zum einen zwischen Koordinatenursprung und dem aktuellen Materialpunkt (Fall I) oder zum anderen zwischen der Steifigkeit zu Beginn des Lastinkrements und dem aktuellen Materialpunkt (Fall II) als "Sekantensteifigkeit" definiert werden (Bild 4.10c). Fall II in Bild 4.10c beschreibt das übliche Vorgehen zur Berücksichtigung von Kraft-Verformungs-Abhängigkeiten nichtlinearer Feder- und Dübelkennlinien.

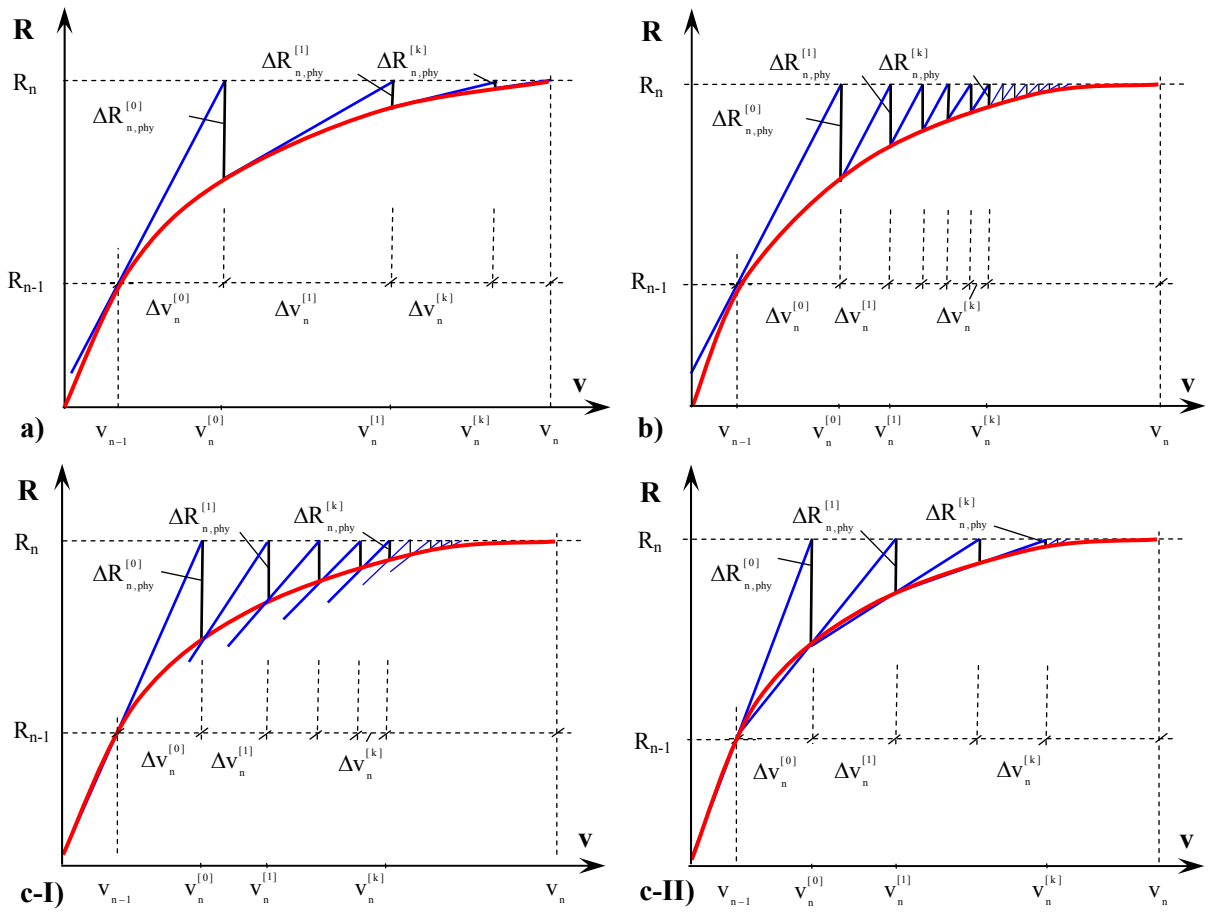



**Bild 4.10: Prinzip der lastgesteuerten Gleichgewichtsiteration**
**a) NEWTON-RAPHSON-Verfahren**
**b) modifiziertes NEWTON-RAPHSON-Verfahren**
**c) Sekanteniterationsverfahren**

Die numerische Behandlung einer Steifigkeitsverringerung bereitet bei Verbundträgern i.d.R. keine Schwierigkeiten und lässt sich mit den genannten Verfahren stabil erfassen. Das schließt ebenfalls die Berücksichtigung von Tension-Stiffening-Effekten auf der Betonseite durch einen abfallenden Ast nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit ein.

Entlastungen haben jedoch erhebliche Steifigkeitserhöhungen im Inkrement und damit entsprechend große Korrekturen $\Delta\underline{R}^{[k]}$ zur Folge. Die Anwendung des modifizierten NEWTON-RAPHSON-Verfahrens weist dann ohne zusätzliche Maßnahmen signifikante Schwächen und damit schlechte Konvergenzeigenschaften auf. Am Beispiel der Entlastung des Betons beim Übergang vom Zug- in den Druckbereich soll dies verdeutlicht werden (Bild 4.11). Eine kleine Dehnungsänderung bewirkt aufgrund der großen Steifigkeit im Druckbereich entsprechend große Korrekturgrößen. Gegenüber der äußeren Belastung im 0-ten Iterationsschritt weisen diese jedoch ein entgegengesetztes Vorzeichen auf, was zur Folge hat, dass sich der Riss im nächsten Iterationsschritt wieder öffnet. Die Korrekturgrößen wechseln ebenfalls wieder das Vorzeichen und der Riss schließt sich. In der Folge entsteht ein alternierendes Risswachstum ohne Konvergenz.

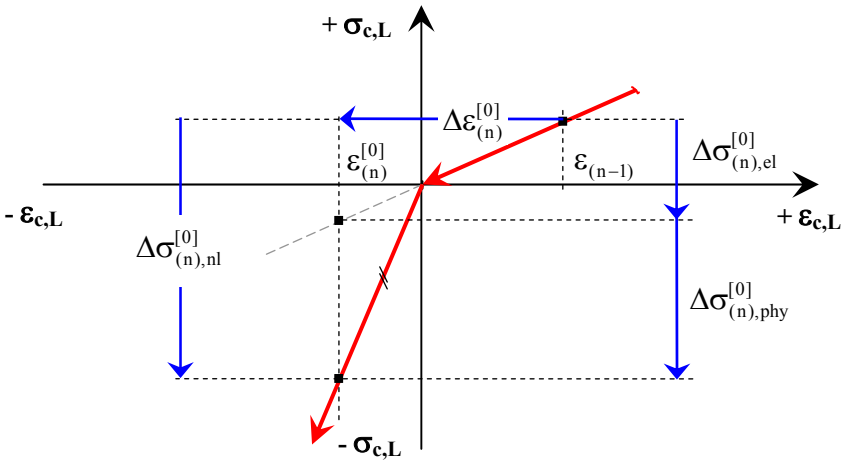



**Bild 4.11: Entlastung einer Beton-Schicht vom Zug- in den Druckbereich**

Von SCHNEIDER [128] wird verallgemeinert die Verdopplung der Steifigkeit als ein kritischer Grenzwert angegeben. KLUGER [73] schlägt in seiner Arbeit zur weiteren Anwendung des modifizierten NEWTON-RAPHSON-Verfahrens vor, beim Schließen von Rissen im Beton die entstehenden Korrekturgrößen "gedämpft" in Subinkrementen aufzubringen. Mit der Forderung, dass sich je Subinkrement ein Riss schließt, kann die numerische Stabilität und damit Konvergenz erzielt werden. Der damit verbundene Rechen- und Organisationsaufwand ist jedoch so erheblich, dass dieses Vorgehen für im Verbundbrückenbau typische Bauverfahren nicht praktikabel ist.

Um bei Verwendung des modifizierten NEWTON-RAPHSON-Verfahrens mit moderatem Rechenaufwand ein zuverlässiges Konvergenzverhalten zu ermöglichen, wird auf der Grundlage eigener Parameteruntersuchungen vorgeschlagen, das Verfahren an den betroffenen Systempunkten mit direkten Iterationsansätzen unter Verwendung geeigneter Sekanten- oder Tangentensteifigkeiten zu kombinieren. Die Systemsteifigkeitsmatrix wird dazu am Ende des betroffenen Iterationsschrittes analog dem direkten NEWTON-RAPHSON-Verfahren aktualisiert und enthält dann Tangential- und Sekantensteifigkeiten.

Weitet man dieses Vorgehen auf den gesamten Zugbereich des Betons aus, kann im Gegensatz zum NEWTON-RAPHSON-Verfahren auch die Unstetigkeit zum Zeitpunkt der Entlastung problemlos erfasst werden, da mit der vorhandenen Steifigkeit zu jedem Zeitpunkt bereits die Entlastung (Tangente) beschrieben wird.

Das modifizierte NEWTON-RAPHSON-Verfahren wird mit den genannten Anpassungen bei Entlastung für den starren Verbund verwendet, die Sekanteniteration wird im Zusammenhang mit nachgiebigen Verbundmitteln erforderlich. Da sich die Systemsteifigkeitsmatrix summarisch aus der System- und Federsteifigkeitsmatrix zusammensetzt, werden nichtlineare Federkennlinien gemäß Abschnitt 4.6 aktualisiert und wegen des vergleichsweise geringen numerischen Aufwands immer mit dem direkten Iterationsverfahren in jedem Iterationsschritt erfasst.

### 4.3.2 Abbruchkriterien für den Iterationsprozess

Die Genauigkeit einer iterativen Lösung wird durch das gewählte Abbruchkriterium beeinflusst. Beispielsweise kann durch das Beobachten der Änderungen geeigneter Systemkenngrößen überprüft werden, ob die Gleichgewichtsbedingungen am Ende eines Iterationsschrittes mit hinreichender Genauigkeit erfüllt sind. Als Konvergenzkriterium $\eta_{vorh}$ wird im Folgenden die Änderung der Korrektur- und/oder Verschiebungsgrößen des Iterationsschrittes bezogen auf die maximalen Zuwächse im aktuellen Inkrement definiert.

- Euklidische Norm der inkrementellen Korrekturgrößen $\Delta\underline{R}_{phy}$

$$\eta_{vorh} = \frac{\left\|\Delta\underline{R}_{(n)}^{[k]}\right\|}{\left\|\Delta\underline{R}_{(n)}^{[x]}\right\|_{max}} = \frac{\left(\Delta\underline{R}_{(n)}^{[k]\,T} \cdot \Delta\underline{R}_{(n)}^{[k]}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\Delta\underline{R}_{(n)}^{[x]\,T} \cdot \Delta\underline{R}_{(n)}^{[x]}\right)_{max}^{\frac{1}{2}}} \leq \eta_{zul} \tag{4.69}$$

- Euklidische Norm der inkrementellen Knotenverschiebungen $\Delta\underline{v}$ aller Knoten

$$\eta_{vorh} = \frac{\left\|\Delta\underline{v}_{(n)}^{[k]}\right\|}{\left\|\Delta\underline{v}_{(n)}^{[x]}\right\|_{max}} = \frac{\left(\Delta\underline{v}_{(n)}^{[k]\,T} \cdot \Delta\underline{v}_{(n)}^{[k]}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\Delta\underline{v}_{(n)}^{[x]\,T} \cdot \Delta\underline{v}_{(n)}^{[x]}\right)_{max}^{\frac{1}{2}}} \leq \eta_{zul} \tag{4.70}$$

Im Algorithmus besteht die Möglichkeit, die Kriterien einzeln oder gemeinsam zu verwenden. Weiterhin kann der Abbruch nach einer zuvor definierten Anzahl von Iterationsschritten erfolgen. Die Definition der Abbruchschranke $\eta_{zul}$ ist systemabhängig und schwierig vorherzubestimmen. Bei den untersuchten Systemen wurden gute Ergebnisse im Bereich $\eta_{zul} = 10^{-3} - 10^{-5}$ erzielt.

Übernimmt man die am Ende eines Iterationsschrittes verbleibenden Korrekturgrößen $\Delta R_{phy}$ als Beanspruchung in das folgende Inkrement, kann die Abbruchschranke bei gleich bleibender Ergebnisgenauigkeit erheblich abgemindert werden. Der Korrekturvektor nach Gleichung (4.36) ist bei diesem Vorgehen bereits im 0-ten Iterationsschritt zu beachten. Vergleichbare Ergebnisse gegenüber dem zuvor genannten Bereich wurden mit $\eta_{zul} = 5 \cdot 10^{-1} - 10^{-2}$ erhalten.

## 4.4 Zwangsbeanspruchungen und Eigenspannungszustände

Zwangs- und Eigenspannungen können in Verbundtragwerken durch zeitabhängige Verformungen des Betons infolge Kriechens, Schwindens und abfließender Hydratationswärme verursacht werden. Über die Querschnittshöhe inhomogene Temperaturverteilungen rufen diese ebenfalls hervor. Charakteristisch für Verbundquerschnitte ist die Behinderung der resultierenden Dehnungen durch benachbarte Querschnittsteile, die diesen Formänderungen nicht oder nur teilweise unterlegen sind. Entsprechend der gewählten kinematischen Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte muss zur Einhaltung der Verträglichkeitsbedingungen ein neuer Gleichgewichtszustand gefunden werden. Dessen Folge sind Dehnungs- bzw. Spannungsumlagerungen im Querschnitt (primäre Beanspruchungen), welche in statisch unbestimmten Systemen neben Verformungsänderungen auch eine Veränderung des Schnittgrößenzustands bewirken (sekundäre Beanspruchungen).

Betrachtet man den Steifigkeitsanteil der behindernden Querschnittsfasern als ein Maß für die statische Unbestimmtheit des Gesamtquerschnittes, so verursacht ein kleiner Bewehrungsgrad in einer Stahlbetonstruktur nur geringe Eigenspannungen. Dementsprechend groß sind die Behinderungen in Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen.

Bei der Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearitäten wurde bereits aufgezeigt, wie sich die Korrekturgrößen einzelner Schichten in eine resultierende Dehnebene überführen und in den Belastungsvektor des Stab-DGL-Systems integrieren lassen (Gln. (4.37) und (4.38)). Dieses Vorgehen kann ebenfalls auf die hier betrachteten Eigenspannungszustände übertragen werden. Ausgehend von einem vorhandenen Beanspruchungszustand wird dazu im Folgenden das prinzipielle Vorgehen bei der Bestimmung der resultierenden Dehnebene aus Zwangs- und Eigenspannungen veranschaulicht und im Anschluss daran auf die Ermittlung der verursachenden beanspruchungsabhängigen und -unabhängigen Formänderungen eingegangen.

### 4.4.1 Numerische Umsetzung

Unter dem Begriff "resultierende Dehnebene" wird nachfolgend die in statisch unbestimmten Querschnitten durch Umlagerungen hervorgerufene Änderung der Dehnebene des Gesamtquerschnittes verstanden. Der hier verwendete Index $\square_{ZE}$ steht stellvertretend für die in Gl. (4.35) verwendeten Indizes einer Temperaturbeanspruchung $\square_T$ und der zeitabhängigen Formänderungen $\square_{\Delta t}$. Die resultierende Dehnebene wird innerhalb eines Zeitschritts folgendermaßen ermittelt (vgl. Bild 4.12):

(1) Bestimmen der maßgebenden unbehinderten Dehnungsänderung $\Delta\varepsilon_L$ der/des betrachteten Querschnittsfaser/Querschnitts (Kriechdehnung, Schwindmaß etc.) und Formulierung der unbehinderten Dehnebene ($\Delta\varepsilon_{r,z}$; $d\Delta\varphi_z/dx$) bezogen auf die Referenzachse (Gl. (4.7)).

(2) Ermitteln der Korrekturgrößen in den behindernden Querschnittsfasern (Index $\square_{LK,Korr}$) und deren Summation.

$$\Delta N_{LK,Korr} = N_{\varepsilon,LK} \cdot \Delta\varepsilon_{r,z} + N_{\varphi,LK} \cdot \frac{d\Delta\varphi_t}{dx} \tag{4.71}$$

$$\Delta M_{LK,Korr} = M_{\varepsilon,LK} \cdot \Delta\varepsilon_{r,z} + M_{\varphi,LK} \cdot \frac{d\Delta\varphi_z}{dx} \tag{4.72}$$

$$\Delta N_{Korr(n)} = \sum_{LK} \Delta N_{LK,Korr} \tag{4.73}$$

$$\Delta M_{Korr(n)} = \sum_{LK} \Delta M_{LK,Korr} \tag{4.74}$$

(3) Bestimmen der Korrekturdehnebene $(\Delta\varepsilon_r, d\Delta\varphi/dx)_{Korr}$

$$\Delta\varepsilon^{[0]}_{r,Korr(n)} = \left(M_\varphi \cdot \Delta N_{Korr(n)} - N_\varphi \cdot \Delta M_{Korr(n)}\right) \cdot D^{-1} \tag{4.75}$$

$$\left(\frac{d\Delta\varphi_{Korr}}{dx}\right)^{[0]}_{(n)} = \left(-M_\varepsilon \cdot \Delta N_{Korr(n)} + N_\varepsilon \cdot \Delta M_{Korr(n)}\right) \cdot D^{-1} \tag{4.76}$$

(4) Bestimmen der resultierenden Dehnebene

$$\Delta\varepsilon^{[0]}_{r,ZE(n)} = \Delta\varepsilon_{r,z} - \Delta\varepsilon^{[0]}_{r,Korr(n)} \tag{4.77}$$

$$\left(\frac{d\Delta\varphi_{ZE}}{dx}\right)^{[0]}_{(n)} = \frac{d\Delta\varphi_z}{dx} - \left(\frac{d\Delta\varphi_{Korr}}{dx}\right)^{[0]}_{(n)} \tag{4.78}$$

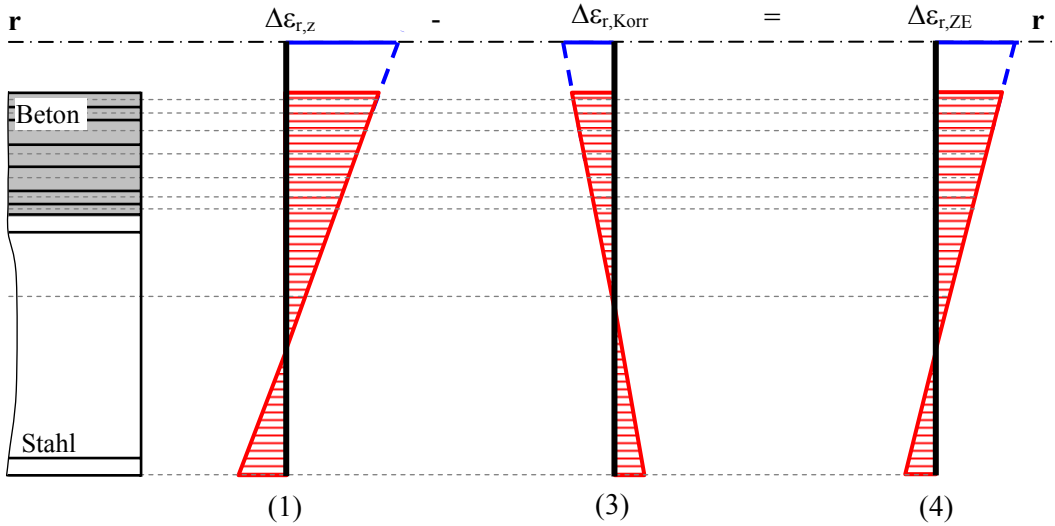



**Bild 4.12: Resultierende Dehnebene am Verbundquerschnitt am Beispiel des Kriechens**

Verbundträger mit aufbetoniertem Fertigteil und nachträglicher Ortbetonergänzung weisen Teilquerschnitte mit unterschiedlichen zeitabhängigen Formänderungen auf. Die daraus resultierende (Gesamt)Dehnebene des Querschnitts setzt sich auf die zuvor beschriebene Weise aus der Summe der resultierenden Dehnebenen der einzelnen Betonteilquerschnitte (Index PCS) zusammen.

$$\Delta\varepsilon^{[0]}_{r,ZE(n)} = \sum_{PCS} \Delta\varepsilon^{[0]}_{r,ZE(n)} \tag{4.79}$$

$$\left(\frac{d\Delta\varphi_{ZE}}{dx}\right)^{[0]}_{(n)} = \sum_{PCS} \left(\frac{d\Delta\varphi_{ZE}}{dx}\right)^{[0]}_{(n)} \tag{4.80}$$

Am Beispiel eines Fertigteilträgers mit Ortbetonergänzung bewirkt dabei der Ortbeton eine Behinderung und damit Korrektur der Verformungen des Fertigteils und umgekehrt.

### 4.4.2 Beanspruchungsunabhängige Formänderungen

Unter diesem Begriff werden im Folgenden zeitabhängige oder zeitunabhängige Beanspruchungen zusammengefasst, die durch ihre über die Querschnittshöhe eines Bauteils ungleichmäßige Verteilung Zwangs- und Eigenspannungszustände bewirken und sich unabhängig vom aktuellen Systemzustand eines Bauteils einer physikalischen Gesetzmäßigkeit folgend einstellen. Dies betrifft am Verbundträger den Zwang infolge Schwindens und der Hydratationswärmeentwicklung des Betons sowie nichtlineare Temperaturgradienten. Die daraus resultierenden Dehnebenen können mit dem zuvor beschrieben Ansatz bestimmt und additiv miteinander verknüpft werden. Der Verlauf der unbehinderten Dehnebene ist dabei durch die verursachende Größe unter Beachtung der Ebene-Hypothese eindeutig bestimmt.

### 4.4.3 Beanspruchungsabhängige Formänderungen

Wie bereits in Abschnitt 3.1.5 dargelegt wurde, werden die Kriechverformungen des Betons unter Dauerlast zum einen durch den aktuellen Spannungszustand in einem Bauteil und zum anderen durch die bisherige Spannungsgeschichte im Bauteil beeinflusst. Dabei kann für das Betonkriechen im Druckbereich bis etwa 40 % der Betondruckfestigkeit und im Zugbereich bis zum Erreichen der Zugfestigkeit näherungsweise ein linearer Zusammenhang angenommen werden. Unter diesen Voraussetzungen kann das BOLTZMANNsche Superpositionsprinzip angewendet werden. Das Betonkriechen im nichtlinearen Druckspannungsbereich ist derzeit noch Gegenstand der Baustoffforschung. Ein Überschreiten der oben genannten Linearitätsgrenze bei Dauerbeanspruchung im Druckbereich stellt deshalb in dem vorgestellten Lösungsverfahren ein lokales Versagenskriterium dar und führt zum Abbruch der Berechnung.

Bei der im Lösungsverfahren genutzten zeitschrittweisen Analyse der zeitabhängigen Verformungen wird die resultierende Kriechdehnebene des aktuellen Kriechintervalls demzufolge additiv aus den Kriechdehnebenen der bisherigen Teilprozesse (Index TP) zusammengesetzt. Maßgebend für die Druckspannungsbegrenzung in biegebeanspruchten Bauteilen ist dabei die maximale Druckspannung im Betonteilquerschnitt. Damit kann die resultierende Kriechdehnebene der Teilkriechprozesse folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\Delta\varphi_K}{dx}\right)^{[0]}_{(n)} &= \sum_{TP} \Delta\varphi(\Delta t_{TP}) \cdot \left(\frac{d\Delta\varphi_\sigma}{dx}\right)_{(TP)} \\
\Delta\varepsilon^{[0]}_{r,K(n)} &= \sum_{TP} \Delta\varphi(\Delta t_{TP}) \cdot \left(\Delta\varepsilon_{L,d,K(TP)} + \left(\frac{d\Delta\varphi_\sigma}{dx}\right)_{(TP)} \cdot y_{L,d}\right)
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Der Index $\square_{L,d}$ kennzeichnet dabei diejenige Faser mit der maximalen Druckbeanspruchung im Querschnitt.

Durch System- oder Belastungsmodifikationen ist es möglich, dass teilweise gerissene Betonquerschnitte wieder überdrückt und dauerhaft einer Druckbeanspruchung ausgesetzt werden (beispielsweise nach dem Entfernen einer Hilfsstützung). Die der Rissbildung ausgesetzten Schichten in einem Betonquerschnitt können dann eine unterschiedliche Spannungsgeschichte aufweisen. In das Lösungsverfahren wurde deshalb eine Möglichkeit zur schichtenweisen Analyse der Kriechdehnebene implementiert. Dabei wird unter der Voraussetzung einer hinreichend feinen Unterteilung des Betonteilquerschnittes die Referenzachsendehnung der unbehinderten Kriechdehnebene gleich der Kriechdehnung einer Schicht angenommen ($d\Delta\varphi_{K,L}/dx = 0$). Diese Maßnahme erweist sich im Bereich teilweise gerissener Betongurte bei vertretbarem Rechenaufwand als vorteilhaft. Außerdem könnten mit dieser Vorgehensweise auch nichtlineare Zusammenhänge numerisch approximiert werden.

Soll die zeitliche Veränderung der Festigkeitseigenschaften des Betons Berücksichtigung finden, kann das zuvor beschriebene schichtenweise Vorgehen ebenfalls angewendet werden, um den Bezug der kriecherzeugenden Spannung einer n Tage alten Betonschicht auf den 28-Tage Elastizitätsmodul zu ermöglichen.

$$\Delta\varepsilon_{r,\sigma}^{L}(t = 28) = \Delta\varepsilon_{r,\sigma}^{L}(t = t_i) \cdot \frac{E_c(t = t_i)}{E_c(t = 28)} \tag{4.82}$$

### 4.4.4 Kriterium für die Zeit-Intervallteilung

Eine Grundvoraussetzung für die Anwendung des gewählten Differenzenverfahrens waren differenziell kleine Änderungen der Beanspruchungen innerhalb eines Zeitintervalls $\Delta t_i$. Die dazu notwendige Definition eines Abbruchkriteriums kann ausschließlich systembezogen erfolgen und bestimmt maßgebend die Güte und die Effizienz der numerischen Berechnung. Analog zu den Konvergenzkriterien bei der Gleichgewichtsiteration stellen diese Kriterien Erfahrungswerte dar. Im Gegensatz dazu besteht allerdings nicht die Möglichkeit, durch nachfolgende Iterationsschritte die Genauigkeit zu verbessern. Beim Überschreiten eines Grenzwertes muss hier die gesamte Lösung verworfen und das aktuelle Intervall neu geteilt werden. Ein numerisch effizientes Vorgehen kann demnach nur durch eine vorab zu definierende Intervallteilungsstrategie, verbunden mit einer aktiven Überwachung und Anpassung dieses Kriteriums während der numerischen Analyse, erzielt werden.

Von FLEDERER [49] wird vorgeschlagen die Schnittgrößenumlagerung an einem Systempunkt als Kriterium zu verwenden. Die zulässigen Umlagerungen werden mit 5 % definiert. Bei großen lokalen Intervallen und Intervallteilung kann die Anzahl der zu verwerfenden Berechnungen sehr groß werden, das Vorgehen wird uneffizient.

OBHOLZER [107] betrachtet die Änderung des Kriechbeiwertes als Maß für die Intervallteilung. Mit Beschränkung auf ungerissene Betonquerschnitte wird ein Wert von $\Delta\varphi_i = 0{,}05$ empfohlen. Die Berechnung des Kriechbeiwertes erfolgt unabhängig vom Gesamtquerschnitt und vom statischen System. Bei kriech- und schwindarmen Konstruktionen wird dadurch ein unnötig großer numerischer Aufwand betrieben.

Der hier vorgestellte Lösungsansatz verbindet beide Verfahren und versucht deren jeweilige Nachteile zu kompensieren. Es wird folgendermaßen vorgegangen:

- Systemspezifisch werden zunächst die Startwerte der zulässigen Änderungen von Kriechbeiwert und Schwinddehnung in einem Zeitschritt definiert (lokales Intervall). Außerdem wird ein Umlagerungskriterium für die Zuwächse der inkrementellen Knotenverschiebungen innerhalb eines Zeitinkrementes analog der Gleichgewichtsiteration festgelegt.
- Bezogen auf den Zeitpunkt der Erstbelastung $t_0$ und den Schwindbeginn $t_s$ wird für alle Betonteilquerschnitte der definierten Stäbe überprüft, ob eine weitere Teilung des aktuellen Zeitschrittes erforderlich ist. Trifft das zu, so wird der Querschnitt mit den größten Änderungen vermerkt und an diesem das nächste Kriechintervall bestimmt.
- Nach der Analyse der Zuwächse am Ende eines Kriechintervalls wird die euklidische Norm der inkrementellen Knotenverschiebungen aller Knoten, bezogen auf den Systemzustand zu Beginn des untersuchten Zeitabschnittes, ermittelt. Gleichung (4.70) lautet dann:

$$\eta_{vorh} = \frac{\left\|\Delta\underline{v}(t_i)\right\|}{\left\|\underline{v}(t_i)\right\|} = \frac{\left(\Delta\underline{v}(t_i)^T \cdot \Delta\underline{v}(t_i)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\underline{v}(t_{i-1})^T \cdot \underline{v}(t_{i-1})\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \eta_{zul} \tag{4.83}$$

- Beim Überschreiten des zulässigen Umlagerungsgrenzwertes müssen auch hier die Ergebnisse verworfen werden. Durch eine programminterne Korrektur der zulässigen Änderung des Kriechbeiwertes und/oder der Schwinddehnung wird beim Vorliegen einer Über- oder Unterschreitung des Umlagerungsgrenzwertes die Berechnung im nächsten Zeitschritt effizienter gestaltet.

Zuverlässige Ergebnisse wurden im Bereich von $\eta_{zul} = 10^{-4} - 10^{-5}$ erhalten. Im Rahmen einer Parameterstudie wird in Abschnitt 6.1.1.2 darauf näher eingegangen.

## 4.5 Herstellungs- und nutzungsbedingte Systemmodifikationen

Herstellung- oder nutzungsbedingte Veränderungen eines Stahl-Beton-Verbundtragwerkes können in einem statischen Modell prinzipiell durch das Hinzufügen, Ergänzen oder Entfernen von:

- Stäben,
- Querschnittsteilen sowie
- Auflager- und Gelenkbedingungen

beschrieben werden. Für die numerische Simulation ist es dabei wichtig, den zeitlichen Ablauf des resultierenden Lastprozesses exakt zu erfassen. Dabei ist zu unterscheiden, ob durch die Veränderung im Bauwerk eine Umlagerung von Wirkungsgrößen hervorgerufen wird oder nicht. In diesem Abschnitt werden die Vorgehensweise und die numerische Umsetzung bei der Erfassung von Systemmodifikationen eines Tragwerkes in Anlehnung an BARTZSCH ET AL. [9] beschrieben.

### 4.5.1 Bauteilveränderungen

Von praktischem Interesse ist das Hinzufügen von Stäben zu einer vorhandenen Struktur, wodurch die Erweiterung eines bestehenden oder im Bau befindlichen Tragwerkes beschrieben wird. Der neue Stab stellt dabei die Verbindung eines bereits existierenden Knotens mit einem zum Zeitpunkt $t_i$ hinzukommenden Knoten dar.

Das Hinzufügen verursacht im bestehenden Tragwerk keine Veränderung der Wirkungsgrößen, es erfolgt spannungslos. Der neue Stab unterliegt nur den Beanspruchungen welche nach dem Zeitpunkt des Einfügens auftreten. Weist der bestehende Anschlussknoten zum Einbauzeitpunkt bereits eine Verschiebung senkrecht zur Stabachse (y-Richtung) auf, so werden diese dem neuen Stab ebenfalls zugewiesen. Kragarmen wird eine über den Stab konstante Anfangsverschiebung entsprechend dem Verformungsbild des Anschlussknotens zugeordnet.

**Bild 4.13: Hinzufügen eines Stabes**

Die Stabrandverschiebungen in y-Richtung ergeben sich aus den globalen Verschiebungen der Randknoten i und k gemäß Bild 4.13 zu:

$$\Delta w_i = \underline{t}_y^T(ik) \cdot \Delta\underline{\tilde{v}}(i) \quad \text{bzw.} \quad \Delta w_k = \underline{t}_y^T(ik) \cdot \Delta\underline{\tilde{v}}(k) \tag{4.84}$$

$\underline{t}_y^T(ik)$ ist dabei der Spaltenvektor der Transformationsmatrix $\underline{T}(ik)$ des neuen Stabes in y-Richtung (zweite Spalte). Die Verschiebungen an den Integrationspunkten im Stab werden anschließend durch lineare Interpolation zwischen den Randverschiebungen erhalten.

Das sanierungsbedingte, vollständige Entfernen eines Stabes aus einem bestehenden Bauwerk lässt sich prinzipiell durch die Anordnung von Schnittkraftnullfeldern an den betreffenden Stabrändern realisieren. Diese für praktische Problemstellungen eher seltene Systemmodifikation wurde nicht in das Lösungsverfahren implementiert.

### 4.5.2 Querschnittsmodifikationen

Die Herstellungs- und Sanierungsprozesse von Verbundtragwerken werden maßgebend durch die zeitliche Modifikation von Bauteilquerschnitten geprägt.

#### *Hinzufügen neuer Querschnittsteile*

Das Hinzufügen verursacht zunächst keine Veränderung der Wirkungsgrößen im Bauwerk. Querschnittsteile, welche bereits zum Zeitpunkt des Einbaus eine signifikante Eigensteifigkeit aufweisen (z.B. Stahlträger), werden mit einem dem aktuellen Verformungsbild des Tragwerkes äquivalenten Spannungs- und Verzerrungszustand versehen. Stahlbetonteilquerschnitte sowie Verstärkungen durch lamellenartige Querschnittsteile können entsprechend spannungslos hinzugefügt werden. Die Dehnungsebene am Gesamtquerschnitt ist ab diesem Zeitpunkt gebrochen.

Wird bereits zum Zeitpunkt der Veränderung eine kraftschlüssige Verbundwirkung erzielt (Baustahlteilquerschnitt), wirken alle weiteren Beanspruchungen, einschließlich des Eigengewichts der Verstärkung am neuen Gesamtquerschnitt (Eigengewichtsverbund, Bild 4.14a). Im Gegensatz dazu hat ein Frischbetonquerschnitt direkt nach dem Einbringen keine nennenswerte Eigensteifigkeit. Demzufolge muss die Eigenlast des Stahlbetonquerschnitts vom verbleibenden Querschnitt aufgenommen werden (E-Modul Stahlbeton gleich Null; Bild 4.14b). Gehen die Festbetoneigenschaften als zeitlich konstante Größen in die Berechnung ein, wird davon ausgegangen, dass die folgenden Beanspruchungen bereits am Gesamtquerschnitt wirken.

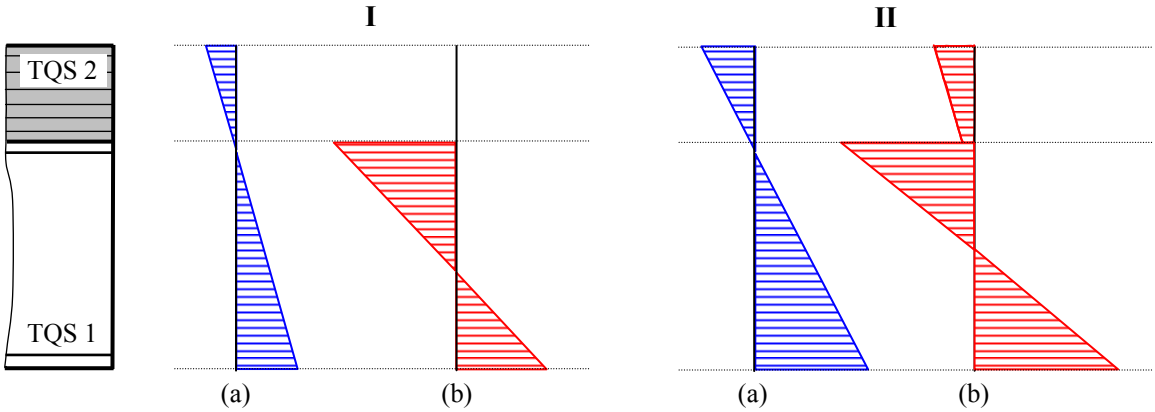



**Bild 4.14: Dehnebene nach dem Hinzufügen (I) von Teilquerschnitt 2 und dem Aufbringen einer Folgebeanspruchung (II) – für die Fälle: (a) mit und (b) ohne Eigenlastverbund**

Durch eine kontinuierliche Stützung während des Betonierens ist die Herstellung von Verbundträgern mit Eigenlastverbund möglich. Um die Vielzahl der dafür notwendigen temporären Stützungen zu vermeiden, kann im Lösungsverfahren die Herstellung eines Betonierabschnittes im Eigenlastverbund definiert werden (siehe Kapitel 5). Diese Möglichkeit ist allerdings an die

Definition zeitlich konstanter Festigkeitseigenschaften des Betons gebunden. Bei der statischen Analyse gilt für den neu entstandenen Gesamtquerschnitt weiterhin die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte.

***Entfernen vorhandener Querschnittsteile***

Im Rahmen von Instandhaltungs- oder Ertüchtigungsmaßnahmen kann die Notwendigkeit bestehen, Teile eines Querschnittes aus einem Tragwerk zu entfernen. Dabei werden die in den betroffenen Schichten vorhandenen Spannungen frei und müssen auf den verbleibenden Querschnitt umgelagert werden. In Übereinstimmung mit dem statischen Lösungsalgorithmus für starren Verbund, können an jedem Integrationspunkt die Spannungen der zu entfernenden Schichten in eine äquivalente Beanspruchung des verbleibenden Querschnittes überführt werden.

Numerisch wird dabei folgendermaßen vorgegangen: Zuerst werden aus den bekannten Spannungen der zu entfernenden Schichten ($L_{entf}$) der Normalkraft- und Momentenanteil (= Korrekturgrößen $N_{Korr}$, $M_{Korr}$) bestimmt.

$$\Delta N_{Korr} = \sum_{L_{entf}} (\sigma \cdot A)_{L_{entf}} \tag{4.85}$$

$$\Delta M_{Korr} = \sum_{L_{entf}} (\sigma \cdot A \cdot y)_{L_{entf}} \tag{4.86}$$

Diese Korrekturgrößen müssen durch die im Restquerschnitt vorhandenen Schichten aufgenommen werden. Aus Gleichung (4.26) erhält man unter Beachtung der Steifigkeiten des Restquerschnittes ($\square_{vorh}$):

$$\Delta\varepsilon_{r,Syst} = \left(M_{\varphi,vorh} \cdot \Delta N_{Korr} - N_{\varphi,vorh} \cdot \Delta M_{Korr}\right) \cdot D_{vorh}^{-1} \tag{4.87}$$

$$\left(\frac{d\Delta\varphi_{Syst}}{dx}\right) = \left(-M_{\varepsilon,vorh} \cdot \Delta N_{Korr} + N_{\varepsilon,vorh} \cdot \Delta M_{Korr}\right) \cdot D_{vorh}^{-1} \tag{4.88}$$

Damit sind die Elemente der rechten Seite des DGL-Systems (Gl. (4.35)) bekannt. Dem nichtlinearen Materialverhalten Rechnung tragend müssen die Spannungsumlagerungen gegebenenfalls auf mehrere Lastinkremente verteilt werden.

### 4.5.3 Veränderung von Auflager- und Stabanschlussbedingungen

***Auflagerungen***

Hilfsstützen, temporäre Behinderungen der Längsverschiebung oder das Betonieren von Rahmenecken bewirken eine Veränderung der Lagerungsbedingungen von Bauwerken. Auch hier muss das Hinzufügen von Auflagerbedingungen und das Entfernen vorhandener Stützungen unterschieden werden. Bei einer Veränderung der elastischen Stützung werden eine Steifigkeitsverringerung (Entfernen) und eine Steifigkeitserhöhung (Hinzufügen) entsprechend zugeordnet.

Das Hinzufügen einer Auflagerbedingung erfolgt spannungslos an die verformte Struktur. Beim Entfernen von Lagerungsbedingungen werden Auflagergrößen freigesetzt. Indem man diese mit jeweils umgekehrten Vorzeichen an den betroffenen Knoten als äußere Belastung ansetzt, können die resultierenden Veränderungen der Wirkungsgrößen im Tragwerk erfasst werden.

Bei der Veränderung von elastischen Stützungen werden die entsprechenden Elemente der Systemsteifigkeitsmatrix ausgetauscht bzw. aktualisiert. Im Fall der Steifigkeitsverringerung wird mit den nicht mehr aufnehmbaren Stützkräften wie beim Entfernen vorgegangen.

***Gelenke***

Die Auswirkungen bei der Veränderung von Gelenkbedingungen sind analog den Auflagerveränderungen. Das Hinzufügen stört das Gleichgewicht und setzt Wirkungsgrößen frei, das Entfernen von Gelenken geschieht spannungslos. Zur Korrektur der freigesetzten Schnittgrößen werden diese mit jeweils umgekehrten Vorzeichen an den Stabrändern als Belastung angetragen.

## 4.6 Nichtlineare Stützungen

Seilabspannungen, Auflagerhinterfüllungen oder Montagehilfskonstruktionen weisen i.d.R. nichtlineare Kraft-Verformungs-Abhängigkeiten auf. Eine effektive Möglichkeit zur modellhaften Abbildung dieser Beziehungen stellen knotendiskretisierte Stützungen mit nichtlinearen Federkennlinien dar.

Die numerische Erfassung der Nichtlinearitäten innerhalb des vorgestellten Konzepts verändert die Federsteifigkeitsmatrix $\underline{\widetilde{K}}_F$ der elastischen Stützungen an Systemknoten und verursacht Korrekturgrößen. Gegenüber der Kraft-Verformungs-Abhängigkeit werden keine Einschränkungen gemacht. Die Definition erfolgt im Algorithmus durch Polygonzüge.

Das Parameter-Update der Federsteifigkeiten ist, verglichen mit dem Aufwand bei den Systemsteifigkeiten, gering. Deshalb wird im Lösungsverfahren die Federsteifigkeitsmatrix in jedem Iterationsschritt aktualisiert. Die entstehenden Korrekturgrößen ($\Delta N_{phy}$, $\Delta Q_{phy}$ oder $\Delta M_{phy}$) werden in einem Korrekturlastvektor $\Delta\underline{P}_R$ für äußere Knotenbelastungen zusammengefasst und unter Beachtung eventuell vorhandener Starrkörperverschiebungen als Knotenbeanspruchungen in das Gleichungssystem (Gl. (4.2)) aufgenommen.

$$\underline{\widetilde{K}}_{NL} \cdot \Delta\underline{\widetilde{v}} = \Delta\underline{\widetilde{P}} + \Delta\underline{\widetilde{P}}_R - \Delta\underline{\widetilde{R}} \tag{4.89}$$

Für das Abbruchkriterium in Form der euklidischen Norm der inkrementellen Korrekturkräfte (Gl. (4.69)) wird eine Ergänzung um diese Anteile notwendig.

## 4.7 Analyse der Eigenschwingungen

Ein wesentliches Kriterium für die Gebrauchstauglichkeit von Tragwerksstrukturen ist ihr Eigenschwingungsverhalten. Neben Aussagen zur Schwingungsempfindlichkeit einer Konstruktion wird damit auch eine Abschätzung der realen Bauwerkssteifigkeiten möglich. Das Befahren einer Brücke stellt einen instationären dynamischen Vorgang dar, für den die Angabe realistischer Frequenzgänge nur schwer möglich ist. Baupraktische Nachweise werden deshalb statisch unter Beachtung einer dynamischen Überhöhung geführt, welche sich an dem Eigenschwingungsverhalten einer Struktur orientiert. Die im Folgenden beschriebene Eigenwertanalyse beschränkt sich deshalb auf die Analyse von Eigenfrequenzen und Eigenformen harmonisch schwingender, ungedämpfter Systeme.

### 4.7.1 Algebraisches und transzendentes Eigenwertproblem

Für die Eigenwertanalyse stehen grundsätzlich zwei Lösungsansätze zur Verfügung. Konzentriert man die Massebelegung der Stäbe an den Rändern und lässt die Stäbe selbst masselos, erhält man einen Näherungsansatz für die Massematrix $\underline{M}$ (z.B. FEM-Massenmatrix). Die zugehörige Bewegungsgleichung lautet:

$$\underline{K} \cdot \underline{v}(t) + \underline{M} \cdot \ddot{\underline{v}}(t) = \underline{0}\,, \tag{4.90}$$

Die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ ist unabhängig von der Eigenkreisfrequenz, die Masseträgheiten sind in der Matrix $\underline{M}$ enthalten. Mit den Lösungsansatz:

$$\underline{v}(t) = \underline{v}_0 \cdot \sin \varpi_E t \;\; / \;\; \ddot{\underline{v}}(t) = -\varpi_E^2 \cdot \underline{v}_0 \cdot \sin \varpi_E t\,, \tag{4.91}$$

hat das algebraische Eigenwertproblem die Form:

$$\left(\underline{K} - \varpi_E^2 \underline{M}\right) \cdot \underline{v} = \underline{0}\,, \tag{4.92}$$

Dieses lässt sich effizient mittels bekannter Vektoriterationsverfahren oder Transformationsverfahren numerisch auswerten.

Die zweite Lösungsmöglichkeit besteht darin, die kontinuierliche Massebelegung der Stäbe zu berücksichtigen. Durch die Erweiterung der statischen Gleichgewichtsbedingungen am differenziellen Stabelement um die Schwingungsanteile der Translations- und Rotationsträgheiten kann das der statischen Lösung zugrunde liegende Stab-DGL-Systems erweitert und verwendet werden. Die Bewegungsgleichung wird dann folgendermaßen formuliert:

$$\underline{K}(t) \cdot \underline{v}(t) + \underline{M} \cdot \ddot{\underline{v}}(t) = \underline{0}\,. \tag{4.93}$$

Die Steifigkeitsmatrix K(t) ist nun transzendent von der Eigenkreisfrequenz abhängig und beinhaltet die Massebelegung der Stababschnitte, in die Massematrix $\underline{M}$ können zusätzlich knotenkonzentriert mitschwingende Massen aufgenommen werden.

$$\left(\underline{K}(\varpi) - \varpi_E^2 \underline{M}\right) \cdot \underline{v} = \underline{0}\,, \tag{4.94}$$

Der Lösungsaufwand für dieses spezielle Eigenwertproblem liegt erheblich über dem des algebraischen. Da jedoch im vorliegenden Fall die Erweiterung der statischen Grundlösung um die Masseanteile mit einem sehr geringen Aufwand verbunden ist, wird die „exakte“ Lösung mittels massebelegter Stäbe in dieser Arbeit verwendet und numerisch umgesetzt.

### 4.7.2 Erweiterung des Stab-Differentialgleichungssystems

Die Summe aller am differenziellen Stabelement angreifenden Kräfte lässt sich in der Form: $0 = \underline{p} - m \cdot \underline{\ddot{v}}$ darstellen. Das Produkt aus Masse und Beschleunigung wird nach dem Prinzip von D'ALEMBERT formal als Kraft aufgefasst. Die Gleichgewichtsbedingungen eines sich in Bewegung befindlichen differenziellen Stabelements [Gln. (4.28) - (4.30); Bild 4.6] werden damit um die Translationsträgheiten $\mu$ in Quer- und Längsrichtung und die zugehörige Rotationsträgheit $\Theta$ erweitert (MÜLLER/GRAF [100]). Sie sind der positiven Koordinatenrichtung entgegengerichtet, da es sich um Rückstellgrößen handelt. Da bei der Eigenwertanalyse eines Systems das Schwingungsverhalten einer Konstruktion zu einem definierten Zeitpunkt mit den aktuellen Steifigkeits-, Masse-, und Kräftebelegung beschrieben wird, entfällt hier die Formulierung mit den $\Delta$-Zuwächsen.

$$\sum H = 0: \qquad \frac{dN}{dx} = -\mu \cdot \ddot{v}_x \tag{4.95}$$

$$\sum V = 0: \qquad \frac{dQ}{dx} = \mu \cdot \ddot{v}_y \tag{4.96}$$

$$\sum M = 0: \qquad \frac{dM}{dx} = -\Theta \cdot \ddot{\varphi}_z \tag{4.97}$$

Mit dem homogenen Lösungsansatz aus Gleichung (4.91) nimmt die Differentialgleichung (4.31) für eine Eigenschwingung eines ungedämpften Systems folgende Form an:

$$\frac{d\underline{z}(x)}{dx} = \left(\underline{A}_{NL}(x) - \varpi_E^2 \cdot \underline{B}(x)\right) \cdot \underline{z}(x) \tag{4.98}$$

mit:

$$\underline{B}(\underline{x}) = \left|\begin{array}{ccc|c} & \underline{0} & & \underline{0} \\ \hline 0 & 0 & -\Theta & \\ 0 & \mu & 0 & \underline{0} \\ -\mu & 0 & 0 & \end{array}\right| \tag{4.99}$$

Die Eigenwertanalyse erfolgt bezogen auf die Referenzachse der statischen Berechnungen, da die Systemkenngrößen der $\underline{A}_{NL}$-Matrix bereits in der entsprechenden Form vorhanden sind. Demzufolge ist es erforderlich, den Hebelarm zwischen Referenzachse und Masseschwerpunkt zu beachten.

Die Translations- und Rotationsträgheiten in Richtung der Koordinatenachsen ergeben sich je Längeneinheit zu:

$$\mu = \sum_L \rho_L \cdot A_L + \overline{\mu} \tag{4.100}$$

$$\Theta = \Theta_r + \overline{\Theta} \tag{4.101}$$

mit:

$$\Theta_r = \sum_L \rho_L \left( I_z + A \cdot y^2 \right)_L \tag{4.102}$$

$\rho$ … Dichte des Materials

Über $\overline{\mu}$ und $\overline{\Theta}$ können zusätzlich mitschwingende Massen berücksichtigt werden.

Unter Verwendung des Lösungsansatzes aus Abschnitt 4.2.1 kann die „dynamische“ Systemsteifigkeitsmatrix des untersuchten Gesamtsystems unter Berücksichtigung beliebiger Stabanschlussunstetigkeiten bestimmt werden.

Die Eigenwerte des Systems entsprechen den nichttrivialen Lösungen der aus Gleichung (4.94) hervorgehenden Determinantengleichung:

$$\det\left( \underline{K}_{NL}(\varpi_E) - \varpi_E^2 \underline{M} \right) = \underline{0} . \tag{4.103}$$

Aufgrund des erhöhten Rechenaufwandes empfiehlt es sich, bei einer zeitabhängigen Eigenwertanalyse die Anzahl der Eigenfrequenzen und den interessierenden Frequenzbereich sinnvoll zu begrenzen.

## 4.8 Nachgiebiger Verbund

Bisher ging die verwendete Theorie des starren Verbunds davon aus, dass in der Berührungsfuge zweier Querschnittsteile die auftretenden Schubkräfte ohne Relativverschiebungen übertragen werden. Diese Annahme kann jedoch gelegentlich bereits auf Gebrauchlastniveau der Charakteristik der Verbindungsmittel widersprechen. Auch stellt die Unterverdübelung im Verbundbau bzw. verallgemeinert die planmäßig nachgiebige Ausbildung von Verbundfugen prinzipiell eine Möglichkeit dar, Querschnittsteile gleichmäßiger zu beanspruchen und auszulasten.

Die im Folgenden dargestellte Erweiterung des Stab-DGL-Systems aus Abschnitt 4.2.1 ermöglicht die Berücksichtigung mehrerer nachgiebiger Verbundfugen. Beachtung finden dabei Relativverschiebungen in Richtung der lokalen Stabachse, die Verdrehung der Verbundteilquerschnitt bleibt dabei über die Querschnitthöhe konstant. Dazu wird die Kinematik des ebenen Stabes um die Kontinuitätsbedingungen in den Verbundfugen ergänzt.

Mit der Bezeichnung "Verbundteilquerschnitt" (VTQS) werden im Folgenden die von den Verbundfugen getrennten Teilquerschnitte bezeichnet. Innerhalb eines VTQS können darüber hinaus ebenfalls mehrere starr miteinander verbundene Querschnittsteile vorhanden sein. Mit Referenz-VTQS = VTQS 0 wird der im aktuellen Gesamtquerschnitt unterste VTQS bezeichnet, auf den sich die Relativverschiebungen der einseitig darüber angeordneten VTQS beziehen (Bild 4.15). Durch Systemveränderungen kann im Lösungsverfahren auch eine Änderung des Referenz-VTQS vorgenommen werden.

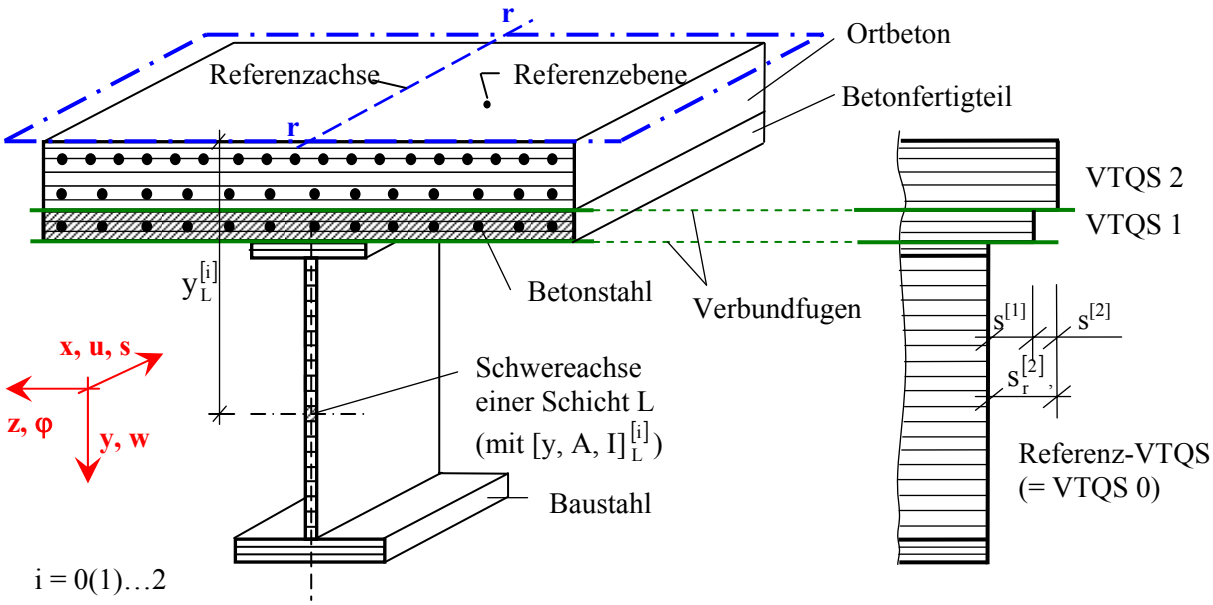



**Bild 4.15: geschichteter Verbundquerschnitt mit [p] =2 zwei nachgiebigen Verbindungen**

p … Anzahl der nachgiebigen Verbundfugen = Anzahl der am Referenz-VTQS angeordneten VTQS

Im Fall einer linearen Kraft-Verschiebungs-Beziehung gilt für den Zusammenhang in der Fuge:

$$T = c \cdot s \tag{4.104}$$

mit: T … Längsschubkraft
c … Bettungszahl
s … Relativverschiebung (Schlupf)

Das inkrementell-iterative Vorgehen erlaubt auch hier die Beachtung nichtlinear verlaufender Kennlinien.

Die Schubkraft-Schlupf-Beziehungen der Verbundfugen stellen zusätzliche Übergangsbedingungen zwischen den VTQS dar, welche die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen am Gesamtquerschnitt beeinflussen. In Übereinstimmung mit dem Vorgehen beim starren Verbund (Abschnitt 4.2.1) erweist es sich numerisch als vorteilhaft, die Relativverschiebungen $s^{[i]}$ bezogen auf den Referenz-VTQS ($s_r^{[i]}$) als zusätzlichen kinematischen Freiheitsgrad einzuführen, und die im VTQS übertragene Normalkraft ($N^{[i]}$) als selbstständige mechanische Größe zu berücksichtigen. Für jede nachgiebige Verbundfuge [i] werden dann zwei Bestimmungsgleichungen erhalten, so dass ein System von $(6 + 2 \cdot p)$ Differentialgleichungen erster Ordnung entsteht, dessen numerische Lösung analog dem starren Verbund erfolgen kann. Die Formulierung in Δ-Größen als Symbol für die Zuwächse eines Iterationsschritts [k] im Inkrement (n) wird ebenfalls übernommen.

Das Lösungsverfahren gestattet auch eine Kombination von Stababschnitten mit starrem und nachgiebigem Verbund in einem Tragwerk.

### 4.8.1 Erweiterung des Differentialgleichungssystems für den nachgiebigen Verbund

#### 4.8.1.1 Kinematik

Die kinematischen Beziehungen der Gleichungen (4.4) bis (4.6) werden übernommen und um die Schlupf-Freiheitsgrade der in den Verbundfugen zulässigen Längsrelativverschiebungen erweitert:

$$\frac{d\Delta s_r^{[i]}}{dx} = \Delta\varepsilon_{r,Schl}^{[i]} \qquad i = 1(1)\ldots p \tag{4.105}$$

Für die Krümmung der Verbundteilquerschnitte gilt dabei:

$$\frac{d\Delta\varphi^{[i]}}{dx} = \frac{d\Delta\varphi}{dx} = \text{konstant} \qquad i=0(1)\ldots p \tag{4.106}$$

#### 4.8.1.2 Schnittkraft-Verzerrungs-Abhängigkeiten

Die Relativverschiebung in den Verbundfugen bewirkt einen Sprung in der Dehnebene des Querschnitts. Demzufolge sind die Dehnungen in der Schichtenschwereachse der VTQS unter Beachtung der zugehörigen Schlupfdehnungen gemäß Bild 4.16 zu bestimmt.

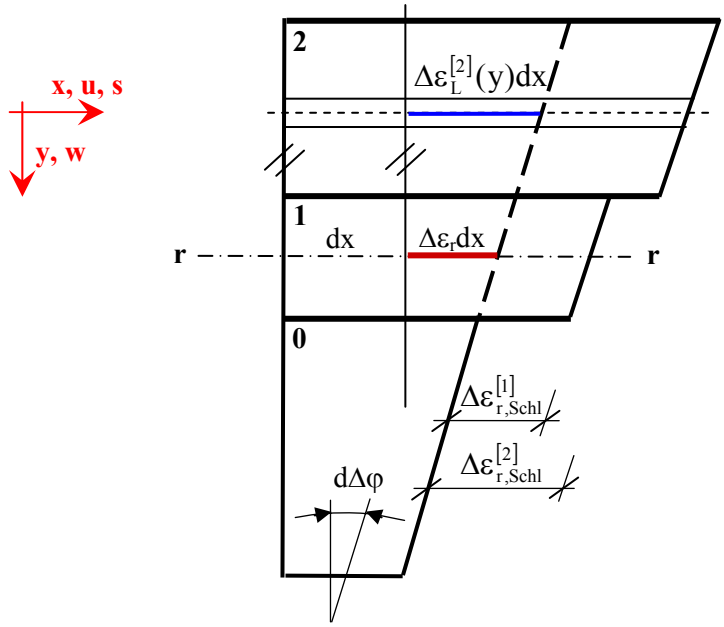



**Bild 4.16: Dehnungsverteilung in einem dreiteiligen Querschnitt bei nachgiebigem Verbund**

$$\Delta\varepsilon_L^{[0]}(y) = \Delta\varepsilon_r - \frac{d\Delta\varphi}{dx} \cdot y_L^{[0]} \tag{4.107}$$

$$\Delta\varepsilon_L^{[i]}(y) = \Delta\varepsilon_r - \frac{d\Delta\varphi}{dx} \cdot y_L^{[i]} + \Delta\varepsilon_{r,Schl}^{[i]} \qquad i = 1(1)\ldots p \tag{4.108}$$

Die Schnittkraft-Verzerrungs-Abhängigkeiten für die Normalkraft- und Momentenzuwächse am Gesamtquerschnitt werden in Analogie zu Abschnitt 4.2.1 durch Einsetzen der Gleichungen (4.107) bzw. (4.108) in die Stoffgesetze der Gleichungen (4.9) und (4.10) erhalten; hier jedoch mit der Erweiterung um die Schlupfdehnung. Die dafür zusätzlich erforderliche Kontinuitätsbedingung beschreibt den Zuwachs der Normalkraft eines nachgiebig an den Gesamtquerschnitt angeschlossenen VTQS. Man erhält demzufolge ein Interaktionsmodell, welches die Normalkraft und das Biegemoment am Gesamtquerschnitt mit den Normalkraftanteilen der "Schlupfschichten" koppelt. Für den im Verbundbau überwiegend praxisrelevanten Fall einer nachgiebigen Verbundfuge entspricht dieser Normalkraftanteil der in der zugehörigen Verbundfuge übertragbaren Schubkraft und die Relativverschiebung dem auftretenden Schlupf.

Unter Berücksichtigung der Summation über die Querschnittsschichten können die Dehnungs- bzw. Schnittgrößenzuwächse des k-ten Iterationsschritts im n-ten Inkrement eines aus (p+1) Verbundteilquerschnitten bestehenden Gesamtquerschnittes, unter Beachtung der Korrekturen infolge nichtlinearen Materialverhaltens, folgendermaßen formuliert werden (vgl. Gln. (4.11) bis (4.24)):

$$\left|\begin{matrix}\Delta N\\ \Delta M\\ \Delta N^{[1]}\\ \vdots\\ \Delta N^{[p]}\end{matrix}\right|^{[k]}_{(n)} = \left|\begin{matrix} N_\varepsilon & N_\varphi & N_\varepsilon^{[1]} & \cdots & N_\varepsilon^{[p]}\\ M_\varepsilon & M_\varphi & M_\varepsilon^{[1]} & \cdots & M_\varepsilon^{[p]}\\ N_\varepsilon^{[1]} & N_\varphi^{[1]} & N_\varepsilon^{[1]} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ N_\varepsilon^{[p]} & N_\varphi^{[p]} & 0 & \cdots & N_\varepsilon^{[p]}\end{matrix}\right|_{NL} \cdot \left|\begin{matrix}\Delta\varepsilon_r\\ \dfrac{d\Delta\varphi}{dx}\\ \Delta\varepsilon_{r,Schl}^{[1]}\\ \vdots\\ \Delta\varepsilon_{r,Schl}^{[p]}\end{matrix}\right|^{[k]}_{(n)} + \left|\begin{matrix}\Delta N_{phy}\\ \Delta M_{phy}\\ \Delta N_{phy}^{[1]}\\ \vdots\\ \Delta N_{phy}^{[p]}\end{matrix}\right|^{[k-1]}_{(n)} \tag{4.109}$$

$$\left|\begin{matrix}\Delta\varepsilon_r\\ \dfrac{d\Delta\varphi}{dx}\\ \Delta\varepsilon_{r,Schl}^{[1]}\\ \vdots\\ \Delta\varepsilon_{r,Schl}^{[p]}\end{matrix}\right|^{[k]}_{(n)} = \left|\begin{matrix} N_\varepsilon & N_\varphi & N_\varepsilon^{[1]} & \cdots & N_\varepsilon^{[p]}\\ M_\varepsilon & M_\varphi & M_\varepsilon^{[1]} & \cdots & M_\varepsilon^{[p]}\\ N_\varepsilon^{[1]} & N_\varphi^{[1]} & N_\varepsilon^{[1]} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ N_\varepsilon^{[p]} & N_\varphi^{[p]} & 0 & \cdots & N_\varepsilon^{[p]}\end{matrix}\right|_{NL} \cdot \left( \left|\begin{matrix}\Delta N\\ \Delta M\\ \Delta N^{[1]}\\ \vdots\\ \Delta N^{[p]}\end{matrix}\right|^{[k]}_{(n)} + \left|\begin{matrix}\Delta N_{phy}\\ \Delta M_{phy}\\ \Delta N_{phy}^{[1]}\\ \vdots\\ \Delta N_{phy}^{[p]}\end{matrix}\right|^{[k-1]}_{(n)} \right) \tag{4.110}$$

Die Schubnachgiebigkeit des Querschnitts infolge Gleitung wird dabei vernachlässigt.

Anmerkung: Der hochgestellte Zahlenindex p gibt den entsprechenden VTQS an und symbolisiert die Summation von Kenngrößen (Steifigkeiten, Korrekturgrößen etc.) der Schichten in diesem. Bei fehlendem Index wird über alle Schichten des Gesamtquerschnitts summiert. Die mit einem Index versehenen Größen stellen damit eine Teilmenge dessen dar.

#### 4.8.1.3 Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen werden am unverformten, differenziellen Stabelement formuliert. Für die Zuwächse der Gesamtschrittgrößen Normalkraft, Querkraft und Moment erfolgt die Formulierung am Gesamtquerschnitt analog zu Abschnitt 4.2.1, Bild 4.6; die Gln. (4.28) - (4.30) behalten ihre Gültigkeit. Die Schubkraft-Schlupf-Beziehung der Verbundfugen findet durch das Kräftegleichgewicht in Normalenrichtung am abgetrennten VTQS Eingang in den Lösungsansatz.

Gemäß Bild 4.17 ergeben sich die Zuwächse Δ innerhalb eines Iterationsschrittes für den am oberen Gesamtquerschnittsrand nachgiebig angeordneten VTQS zu:

$$\sum H^{[p]} = 0: \quad \frac{d\Delta N^{[p]}}{dx} = \Delta p_x^{[p]} + \Delta T^{[p]} = \Delta p_x^{[p]} + c^{[p]} \cdot \Delta s_{r,Schl}^{[p]} \tag{4.111}$$

Und für alle weiteren:

$$\sum H^{[i]} = 0: \quad \frac{d\Delta N^{[i]}}{dx} = \Delta p_x^{[i]} + \Delta T^{[i]} - \Delta T^{[i+1]} = \Delta p_x^{[i]} + c^{[i]} \cdot \Delta s_{r,Schl}^{[i]} - c^{[i+1]} \cdot \Delta s_{r,Schl}^{[i+1]} \tag{4.112}$$

$\Delta p_x^{[i]}$ bzw. $\Delta p_x^{[p]}$ beschreibt darin den am betrachteten VTQS angreifenden Anteil der äußeren Beanspruchung in Stablängsrichtung.

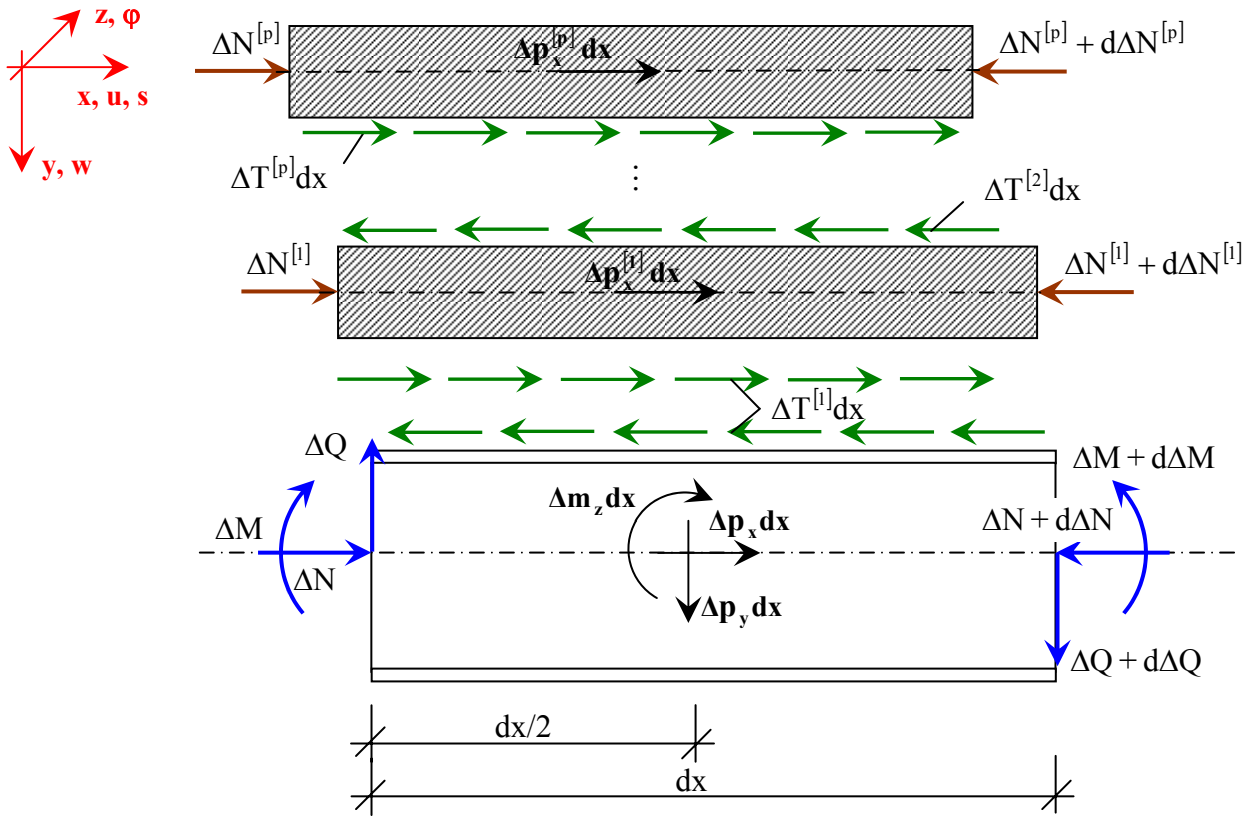



**Bild 4.17: Kräftegleichgewicht in Stablängsrichtung am abgetrennten VTQS**

#### 4.8.1.4 Erweitertes Differentialgleichungssystem

In Analogie zu Abschnitt 4.2.1 werden die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen in einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zusammengestellt und dieses numerisch gelöst (Gl. (4.32)). Infolge der für den nachgiebigen Verbund zusätzlich eingeführten Übergangsbedingungen (Schubkraft-Schlupf-Beziehung) in der Verbundfuge erhöht sich die Anzahl der Differentialgleichungen je Freiheitsgrad um zwei.

Die Elemente der Koeffizientenmatrix $\underline{A}_{NL}(x)$ werden folgendermaßen erhalten: Durch das Einsetzen der Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen (Gln. (4.27) und (4.110)) in die Verzerrungs-Verschiebungs-Abhängigkeiten (Gln. (4.4) bis (4.6) und (4.105)) werden die ersten p+2 Gleichungen erhalten. Die Gleichgewichtsbedingungen (Gln. (4.28) bis (4.30) und (4.111) bzw. (4.112)) liefern die restlichen Bestimmungsgleichungen.

$$\left(\frac{d\Delta\underline{z}(x)}{dx}\right)_{(n)}^{[k]} = \underline{A}_{NL}(x)\cdot\Delta\underline{z}(x)_{(n)}^{[k]} + \Delta\underline{b}(x)_{(n)}^{[k-1]}$$

$$\left|\begin{matrix} \frac{d\Delta u}{dx} \\ \frac{d\Delta w}{dx} \\ \frac{d\Delta\varphi}{dx} \\ \frac{d\Delta s_{r,Schl}^{[1]}}{dx} \\ \vdots \\ \frac{d\Delta s_{r,Schl}^{[p]}}{dx} \\ \hline \frac{d\Delta N^{[p]}}{dx} \\ \vdots \\ \frac{d\Delta N^{[1]}}{dx} \\ \frac{d\Delta M}{dx} \\ \frac{d\Delta Q}{dx} \\ \frac{d\Delta N}{dx} \end{matrix}\right|_{(n)}^{[k]} = \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -c^{[p]} & c^{[p]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & -c^{[p]} \\ 0 & 0 & 0 & c^{[1]}+c^{[2]} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right. \left.\begin{matrix} a_{1j} & \cdots & a_{13} & a_{12} & 0 & a_{11} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{GA_s} & 0 \\ a_{2j} & \cdots & a_{23} & a_{22} & 0 & a_{21} \\ a_{3j} & \cdots & a_{33} & a_{32} & 0 & a_{31} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ij} & \cdots & a_{i3} & a_{i2} & 0 & a_{i1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|_{NL} \cdot \left|\begin{matrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta\varphi \\ \Delta s_{r,Schl}^{[1]} \\ \vdots \\ \Delta s_{r,Schl}^{[p]} \\ \hline \Delta N^{[p]} \\ \vdots \\ \Delta N^{[1]} \\ \Delta M \\ \Delta Q \\ \Delta N \end{matrix}\right|_{(n)}^{[k]}$$

$$+\Delta\underline{b}(x)_{(n)}^{[k-1]} \tag{4.113}$$

Die in der Koeffizientenmatrix enthaltenen $a_{ij}$ symbolisieren die Elemente der Inverse aus Gleichung (4.110), mit $i = j = 3 + p$.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} N_\varepsilon & N_\varphi & N_\varepsilon^{[1]} & \cdots & N_\varepsilon^{[p]} \\ M_\varepsilon & M_\varphi & M_\varepsilon^{[1]} & \cdots & M_\varepsilon^{[p]} \\ N_\varepsilon^{[1]} & N_\varphi^{[1]} & N_\varepsilon^{[1]} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_\varepsilon^{[p]} & N_\varphi^{[p]} & 0 & \cdots & N_\varepsilon^{[p]} \end{matrix}\right|_{NL}^{-1} \tag{4.114}$$

Der $\Delta\underline{b}$-Vektor setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$\Delta\underline{b}(x)^{[k]}_{(n)} = \left| \begin{array}{c} \Delta\varepsilon_{r,T} + \Delta\varepsilon_{r,\Delta t} + \Delta\varepsilon_{r,Syst} + \Delta\varepsilon^{[k-1]}_{r,phy} \\ 0 \\ \left(\frac{d\Delta\varphi_T}{dx}\right) + \left(\frac{d\Delta\varphi_{\Delta t}}{dx}\right) + \left(\frac{d\Delta\varphi_{Syst}}{dx}\right) + \left(\frac{d\Delta\varphi_{phy}}{dx}\right)^{[k-1]} \\ \Delta\varepsilon^{[1]}_{r,Schl,T} + \Delta\varepsilon^{[1]}_{r,Schl,\Delta t} + \Delta\varepsilon^{[1]}_{r,Schl,Syst} + \Delta\varepsilon^{[1],[k-1]}_{r,Schl,phy} \\ \vdots \\ \Delta\varepsilon^{[p]}_{r,Schl,T} + \Delta\varepsilon^{[p]}_{r,Schl,\Delta t} + \Delta\varepsilon^{[p]}_{r,Schl,Syst} + \Delta\varepsilon^{[p],[k-1]}_{r,Schl,phy} \\ \hline \Delta p^{[p]}_x \\ \vdots \\ \Delta p^{[1]}_x \\ \Delta m_z \\ -\Delta p_y \\ \Delta p_x \end{array} \right|^{[k]}_{(n)} \tag{4.115}$$

Ohne Iterationsschritt angegebene Terme treten nur bei k = 0 auf.

Die referenzachsenbezogene Korrektur-Dehnebene infolge physikalisch nichtlinearen Materialverhaltens ist aufgrund der nachgiebigen Verbindung ebenfalls gebrochen. Sie wird mit Kenntnis der Korrekturgrößen aus dem [k-1]-ten Iterationsschritt aus Gleichung (4.110) erhalten. $\Delta N^{[i]}_{phy}$ ist dabei zunächst die auf den betreffenden VTQS entfallende Teilmenge von $\Delta N_{phy}$. Treten außerdem physikalische Nichtlinearitäten der Schubkraft-Schlupf-Beziehung auf, sind Schubkraftkorrekturen $\Delta T^{[i]}_{phy}$ zu berücksichtigen.

$\Delta N_{phy}$ und $\Delta M_{phy}$ ergeben sich aus den Gleichungen (4.23) und (4.24); $\Delta N^{[i]}_{phy}$ wird folgendermaßen bestimmt:

$$\Delta N^{[i],[k-1]}_{phy,(n)} = \sum_{L^{[i]}} \left(\Delta\sigma^{[k-1]}_{L^{[i]},phy} \cdot A_{L^{[i]}}\right) - \Delta T^{[i],[k-1]}_{phy} \qquad i = p \tag{4.116}$$

$$\Delta N^{[i],[k-1]}_{phy,(n)} = \sum_{L^{[i]}} \left(\Delta\sigma^{[k-1]}_{L^{[i]},phy} \cdot A_{L^{[i]}}\right) - \Delta T^{[i],[k-1]}_{phy} + \Delta T^{[i+1],[k-1]}_{phy} \qquad i = 1(1)\ldots(p-1) \tag{4.117}$$

### 4.8.2 Stabsteifigkeitsmatrizen und Randschnittkräfte des kinematisch bestimmt gelagerten Stabes

#### 4.8.2.1 Lösung des DGL-Systems

Die Koeffizientenmatrix bei nachgiebigem Verbund beinhaltet gegenüber dem starren Verbund die Steifigkeitsanteile der Verbundfugen. Das zu lösende DGL-System besteht dann aus 6 + 2·p Gleichungen, wobei p der Anzahl der nachgiebigen Verbundfugen entspricht. Damit sind in dem DGL-System neben den bisher bekannten Nachgiebigkeitsanteilen und der Länge des Integrationsabschnittes auch Steifigkeiten enthalten. Um die numerische Stabilität des Integrationsverfahrens sicherzustellen, sind die Grenzwertbetrachtungen zum fehlenden und zum starren Verbund notwendig.

Bei kleinen, gegen Null gehenden, Verbundsteifigkeiten ist das beim starren Verbund genutzte RUNGE-KUTTA-Verfahren vierter Ordnung ohne numerische Probleme anwendbar. Mit Blick auf den nichtlinearen Charakter der Schubkraft-Schlupf-Beziehungen ist dieses Verhalten für Traglastuntersuchungen von Vorteil. Der Übergang zum starren Verbund ist jedoch mit numerischen Schwierigkeiten verbunden, da die numerische Stabilität des Verfahrens mit zunehmender Fugensteifigkeit nicht mehr gegeben ist. Die numerischen Probleme sind dabei nicht an einem diskreten Punkt zu verzeichnen, sondern weisen einen stetig verlaufenden Übergangsbereich auf, der nach dem Überschreiten eines Maximums durch ein zunächst gemäßigtes Anwachsen der Verformungen gekennzeichnet ist. Parameterstudien zeigten, dass sich durch eine Verringerung der Integrationslängen das Maximum zu größeren Verbundsteifigkeiten hin verschieben lässt.

Eine Möglichkeit der automatischen Schrittweitenanpassung stellt das RUNGE-KUTTA-FEHLBERG Verfahren 4/5er Ordnung dar. Es ist ein adaptives Verfahren, d.h. unter Vorgabe einer minimalen und einer maximalen Integrationslänge sowie einer tolerierbaren Fehlergrenze sucht sich das System die passende Schrittweite. Dabei wird als Fehler die Differenz zwischen einem Verfahren 4. und einem Verfahren 5. Ordnung genutzt. Im Bereich großer Verbundsteifigkeiten arbeitet das Verfahren daher mit einer geringeren Schrittweite. Durch eine Dübelabstufung verursachte Veränderungen der Verbundsteifigkeit können damit beispielsweise effizient durch eine entsprechende Anpassung der Schrittweite erfasst werden.

Innerhalb des entwickelten Lösungsverfahrens wird das Verfahren nach RUNGE-KUTTA-FEHLBERG beim Hinzufügen eines neuen Stabes oder eines neuen Teilquerschnitts zur Schrittweitensteuerung angewendet. Anhand der modellbedingten Integrationslängen, eines unteren Grenzwertes sowie eines Abbruchkriteriums wird überprüft, ob mit den neuen Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsverhältnissen eine numerische Lösung möglich ist.

#### 4.8.2.2 Übergang von der Reduktionsmethode zur Deformationsmethode

Prinzipiell entspricht die Vorgehensweise der aus Abschnitt 4.2.2.2, wobei durch die hinzukommenden Schlupf-Freiheitsgrade nachfolgend genannte Anpassungen bzw. Erweiterungen notwendig sind.

Wie bereits erwähnt, erhöht sich mit jeder nachgiebigen Verbundfuge die Anzahl der unbekannten Größen um zwei – je eine Teilschnitt- und Verformungsgröße. Der Zusammenhang zwischen den Wirkungsgrößen der Stabränder [Gl. (4.44)] lautet damit:

$$\Delta\underline{y}(k) = \left|\begin{array}{cc|c} \underline{F}_1 & \underline{F}_2 & \Delta\underline{f}_5 \\ \underline{F}_3 & \underline{F}_4 & \Delta\underline{f}_6 \\ \hline \underline{0} & \underline{0} & 1 \end{array}\right| \cdot \Delta\underline{y}(i) \tag{4.118}$$

$$\Delta\underline{y} = \left| \Delta u \quad \Delta w \quad \Delta\varphi \quad \cdots \quad \Delta s_{r,Schl}^{[p]} \;\vdots\; \Delta N^{[p]} \quad \cdots \quad \Delta M \quad \Delta Q \quad \Delta N \;\vdots\; 1 \right|^T$$

Die Anzahl der Zeilen und Spalten der in Gleichung (4.118) enthaltenen Untermatrizen $F_1 \ldots F_4$ und Vektoren $f_5$, $f_6$ erhöht sich je Schlupf-Freiheitsgrad um eins. Für den Übergang von der Reduktionsmethode auf die Deformationsmethode sind deshalb auch die $\underline{R}$-Matrix und die Transformationsmatrix $\underline{T}(ik)$ [Gln. (4.47a, b)] entsprechend zu erweitern.

Zur Erweiterung der $\underline{R}$-Matrix wird die Vorzeichendefinition der Normalkraft bei der Reduktions- und Deformationsmethode (Bild 4.7) auch auf die Normalkraftkomponenten der VTQS übertragen. Daraus ergibt sich folgende neue Formulierung.

$$\underline{R} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{4.119}$$

Die Transformationsmatrix $\underline{T}$(ik) für den Übergang vom lokalen in das globale Koordinatensystem lautet dann:

$$\underline{T}(\mathrm{ik}) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{4.120}$$

### 4.8.3 Deformationsmethode

In dem entwickelten Lösungsverfahren können zwischen den Rändern und Knoten der Stäbe mit nachgiebigem Verbund keine Verschiebungsunstetigkeiten oder Exzentrizitäten erfasst werden. Die elastische Stützung eines nachgiebig angeschlossenen VTQS ist ebenfalls nicht möglich.

Eine der Kopplung der Stäbe zur Gesamtstruktur ist für durchlaufende Systeme mit nachgiebigem Verbund in allen Stababschnitten ohne die Angabe den Schlupf betreffender Übergangsbedingungen möglich. Werden dagegen Stäbe mit starrem und nachgiebigem Verbund gekoppelt, oder ändert sich die Richtung der Stabachse, so werden bei der programmtechnischen Umsetzung intern an den zugehörigen Knoten die Schlupfverschiebungen zu Null definiert.

### 4.8.4 Zwangsbeanspruchungen und Eigenspannungszustände

Das Vorgehen nach Abschnitt 4.4 kann auch auf den nachgiebigen Verbund übertragen werden. Bei der numerischen Umsetzung sind jedoch infolge der nachgiebigen Verbundfuge einige Anpassungen erforderlich:

(1) Zuerst wird die referenzachsenbezogene unbehinderte Dehnebene infolge der betrachteten Einwirkung auf einen Querschnittsteil (Kriechen, Schwinden, Temperatur etc.) bestimmt.

(2) Die Steifigkeit benachbarter Schichten behindert auch bei einer nachgiebigen Verbundfuge deren spannungslose Ausbreitung im Querschnitt. Damit die Verträglichkeitsbedingungen eingehalten werden, ist ein neuer Gleichgewichtszustand zu finden, welcher durch Dehnungs- und Spannungsumlagerungen im Querschnitt charakterisiert ist (primäre

Beanspruchungen). Die Korrekturgrößen in den behindernden Querschnittsschichten können nach Gleichung (4.109) mit $\Delta\varepsilon^{[i]}_{r,Schl} = 0$ ermittelt werden. Aus der Summation werden wie beim starren Verbund die $\Delta N_{Korr(n)}$ und $\Delta M_{Korr(n)}$ (Gl. (4.73) und (4.74)) sowie weiterführend die $\Delta N^{[i]}_{Korr(n)}$ erhalten.

(3) Das Einsetzen der $\Delta N^{[i]}_{Korr(n)}$ in Gleichung (4.110) liefert die gebrochene Korrekturdehnebene, welche durch $\Delta\varepsilon_{r,Korr}$; $d\Delta\varphi_{Korr}/dx$; $\Delta\varepsilon^{[i]}_{r,Schl,Korr}$ beschrieben wird.

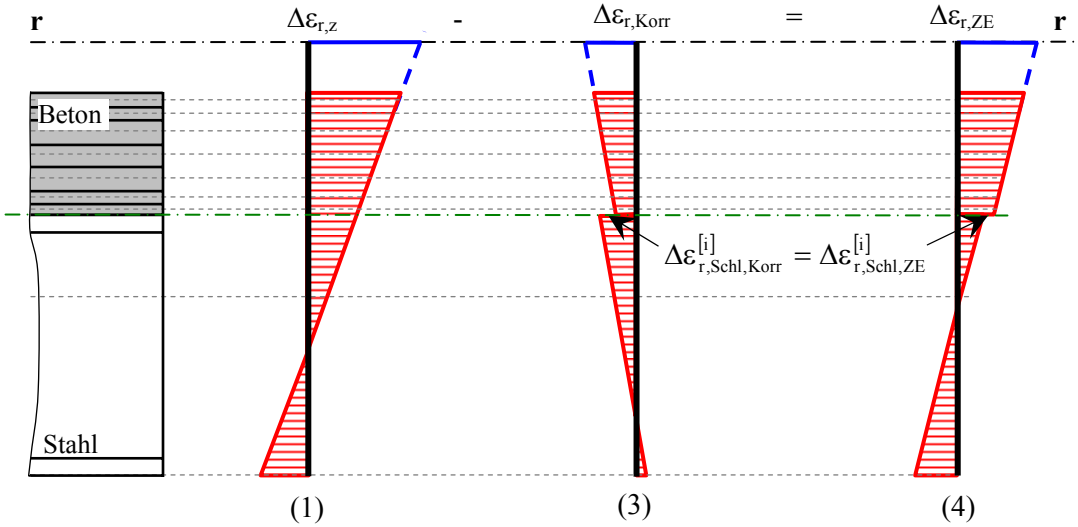



**Bild 4.18: Resultierende Dehnebene am nachgiebigen Verbundquerschnitt am Beispiel des Kriechens**

(4) Die Differenz aus unbehinderter Dehnebene und Korrekturdehnebene liefert abschließend die resultierende Dehnebene.

$$\begin{aligned}
&\Delta\varepsilon^{[0]}_{r,ZE(n)} = \Delta\varepsilon_{r,z} - \Delta\varepsilon^{[0]}_{r,Korr(n)} \\
&\left(\frac{d\Delta\varphi_{ZE}}{dx}\right)^{[0]}_{(n)} = \frac{d\Delta\varphi_{z}}{dx} - \left(\frac{d\Delta\varphi_{Korr}}{dx}\right)^{[0]}_{(n)} \\
&\Delta\varepsilon^{[i],[0]}_{r,Schl,ZE(n)} = -\Delta\varepsilon^{[i],[0]}_{r,Schl,Korr(n)} \qquad \text{für } i = 1(1)...p
\end{aligned} \tag{4.121}$$

### 4.8.5 Systemmodifikationen

Die Berücksichtigung von Systemveränderungen ist analog zu Abschnitt 4.5 möglich. Im Rahmen der Querschnittsveränderungen ist außerdem die Möglichkeit gegeben, von einem System mit starrem Verbund in den nachgiebigen Verbund zu wechseln und umgekehrt.

Besteht nach dem Entfernen eines Teilquerschnittes der Restquerschnitt weiterhin aus mehreren VTQS, werden neben den Korrekturgrößen $\Delta N_{Korr}$ und $\Delta M_{Korr}$ die auf die nachgiebig angeschlossenen VTQS entfallenden Teilmengen $\Delta N^{[i]}_{Korr}$ von $\Delta N_{Korr}$ bestimmt. Das Einsetzen dieser Beanspruchungsgrößen in Gleichung (4.110) liefert die gebrochene Korrekturdehnebene des Belastungsvektors.

### 4.8.6 Analyse der Eigenschwingungen

Die in Abschnitt 4.7 erläuterte Eigenwertanalyse als transzendentes Eigenwertproblem lässt sich durch das Anpassen der $\underline{B}$-Matrix des DGL-Systems Gl. (4.98) für den nachgiebigen Verbund erweitern.

Das Kräftegleichgewicht in Normalenrichtung am abgetrennten oberen VTQS (Bild 4.17) liefert die erforderliche zusätzliche Gleichgewichtsbedingung unter Beachtung der Masseträgheit dieses Querschnittsteils.

$$\sum H^{[p]} = 0: \qquad \frac{dN^{[p]}}{dx} = -\mu^{[p]} \cdot \ddot{v}_x \qquad i = p \tag{4.122}$$

$$\sum H^{[i]} = 0: \qquad \frac{dN^{[i]}}{dx} = -\mu^{[i]} \cdot \ddot{v}_x \qquad i = 1(1)\ldots p\text{-}1 \tag{4.123}$$

Die erweiterte $\underline{B}$-Matrix des Differentialgleichungssystems lautet:

$$\underline{B}(\underline{x}) = \left|\begin{array}{cccccc|c} & & & \underline{0} & & & \underline{0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu^{[p]} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & -\mu^{[1]} & \cdots & 0 & \underline{0} \\ 0 & 0 & -\Theta & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right| \tag{4.124}$$

„Man sollte keine Dummheit zweimal begehen.
Die Auswahl ist schließlich groß genug.“

*Jean-Paul Sartre*

# Kapitel 5

# Rechnerbasierte Tragwerksanalyse und Applikationsentwurf

Das moderne Ingenieurwesen wird stark durch die elektronische Datenverarbeitung geprägt, so dass nach einer bereits etwa 20 Jahre andauernden Phase der verstärkten Konzentration der Arbeit auf die Entwicklung von Softwarelösungen das heutige Arbeitsgeschehen in nahezu allen Ingenieurdisziplinen von ihr dominiert wird. Ihr Potential ist jedoch bei weitem noch nicht ausgeschöpft.

Im Bereich der Statik der Baukonstruktionen besteht das Ziel von Softwareentwicklungen darin, die komplexen Systeme der Realität als Modell im Rechner abzubilden, zu simulieren und gegebenenfalls das Verhalten auch über eine gewisse Lebensdauer zu beschreiben. Der ökonomische Erfolg dieser Produkte beruht dabei zunächst auf der Möglichkeit, auch Tragwerke analysieren zu können, die bisher einer Berechnung kaum zugänglich waren. Komplexe Systeme lassen sich dadurch mit gleich bleibender Qualität bearbeiten, was die kreative Intelligenz der Ingenieure von numerischer Routinearbeit befreien sollte und eine Konzentration auf das Wesentliche ermöglicht. Durch eine Vereinfachung und Automatisierung der Arbeitsprozesse wird eine Zeit- und Kostenersparnis möglich. Des Weiteren können durch Simulationen die Kosten und Risiken eines Experiments in allen Anwendungsgebieten begrenzt oder sogar vermieden werden.

Mit zunehmender Komplexität der rechnerisch erfassbaren Systeme steigt auch der für die Modellbildung und Ergebnispräsentation erforderliche Aufwand. Insbesondere bei zeitabhängigen Systembeschreibungen werden damit die Grenzen der bisher angewendeten Abstraktionstechniken erreicht. Überlegungen zur anschaulichen Darstellung der Ein- und Ausgabe rücken damit verstärkt in den Mittelpunkt und bestimmen zunehmend den Arbeitsaufwand bei der Entwicklung von Software. Zu dieser Problematik soll dieses Kapitel einen Beitrag liefern.

Im Folgenden werden zunächst einige wesentliche Stationen in der Entwicklung der Rechentechnik (Hard- und Software) und deren Einfluss auf rechnergestützte Lösungen für baustatische Problemstellungen kurz umrissen. Am aktuellen Stand der Technik orientiert, wird daraus eine angemessene Methodik für die programmtechnische Umsetzung des in dieser

Arbeit ausgewählten Lösungsverfahrens aufgezeigt und anschließend eine übersichtliche und zugleich kontrollierbare Möglichkeit zur modellhaften Systembeschreibung vorgestellt.

## 5.1 Rechnergestützte Tragwerksanalyse und Rechentechnik

Die geschichtliche Entwicklung programmierbarer Rechenanlagen ist in Deutschland eng mit der Baustatik verbunden. Aus der Idee heraus, die manuell aufwendige Lösung mehrfach statisch unbestimmter Systeme zu formalisieren und einer Rechenmaschine zu übertragen, entwickelte Konrad Zuse den ersten programmierbaren Rechner. Das Resultat war der 1938 fertig gestellte, elektrisch angetriebene mechanische Rechner Z1 mit begrenzten Programmiermöglichkeiten (KURRER [80]).

Einen wesentlichen Schritt auf dem Weg zu rechnergestützten Verfahren stellen die mathematischen Formulierungen der Matrizenalgebra dar. Sie ermöglichten es, die auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen basierenden Lösungsalgorithmen der Statik klar und übersichtlich zu gestalten und Rechenabläufe zu schematisieren. Aus diesen Überlegungen heraus formulierten ARGYRIS [4] und TURNER ET AL. [141] in den neunzehnhundertfünfziger Jahren unabhängig voneinander die Grundlagen der Finiten Element Methode. Die Dokumentation einer Anwendung dieses Näherungsverfahrens für die Berechnung von Flugzeugtragflächen wird allgemein als der Ursprung der Methode der Finiten Elemente angesehen (TURNER ET AL. [141]). Im weiteren Verlauf der Forschung wurde die FEM immer weiter verallgemeinert und kann nunmehr auf viele physikalische Problemstellungen angewendet werden. Diese bis heute andauernde Periode ist durch Verfeinerung und Erweiterung wie beispielsweise die Zuwendung zu Flächentragwerken und die Beachtung nichtlinearen Materialverhaltens geprägt. Die dafür erforderlichen Lösungsverfahren sind durch leistungsfähige numerische Methoden gekennzeichnet.

Gegenüber der etwa fünfzigjährigen Geschichte der Nutzung elektronischer Datenverarbeitung ist die Geschichte der hardwareunabhängigen Softwareentwicklung wesentlich kürzer. Erst mit der Trennung von Hard- und Software sowie der Verfügbarkeit zunehmend standardisierter Programmiersprachen und geeigneter Betriebssysteme war es für Dritte überhaupt möglich, Software zu entwickeln. Diese war anfangs auf Speziallösungen beschränkt, welche in ihrer Funktionalität eindeutig festgelegt waren. In der Baustatik sind hierfür zum Beispiel Lösungen für ebene Durchlaufträgersysteme zu nennen.

Die rasante Entwicklung in der Halbleiterindustrie hat in der Vergangenheit einige grundlegende Umgestaltungen in der Art des Umgangs mit der jeweiligen Rechentechnik ermöglicht. Der Stapelbetrieb an Mainframes wurde Anfang der neunzehnhundertachtziger Jahre durch interaktive Heimcomputer (PC) abgelöst und deren Bedienung später durch grafische Benutzeroberflächen erheblich vereinfacht. Die Steigerung der Rechenleistung wird in absehbarer Zeit kaum stagnieren und sucht neue Anwendungsfelder. Dadurch angeregt ist eine starke Ausweitung von Funktionalität und Einsatzmöglichkeiten zu beobachten. Insbesondere der Einfluss grafischer Modellierungs- und Ausgabemethoden ist für den schnellen Fortschritt maßgebend und setzt neue Impulse.

In der Baustatik rücken heute neben dem eigentlichen Berechnungsprozess immer mehr Aspekte der Modellbildung, der Realitätsnähe und der Qualitätssicherung in den Mittelpunkt der Betrachtungen. Gegenüber den Anfängen der rechnergestützten Baustatik hat sich damit ein großer Wandel vollzogen. Vor allem die numerische Erfassung von zeitveränderlichen Systemen setzt zurzeit neue Impulse und beschleunigt diesen Prozess. Die Komplexität der Ein- und Ausgabedaten nimmt dabei sprunghaft zu, so dass neue Präsentationsformen wie etwa die Visualisierung oder die Animation unverzichtbare Hilfsmittel werden. Diesen Anforderungen entsprechende Softwareprodukte erfordern zunehmend eine interdisziplinäre Zusammenarbeit des Bauwesens und der Informatik.

Mit der Verfügbarkeit wachsender Rechenleistung wachsen zunehmend auch die lösbaren Probleme und damit auch der betriebene Aufwand. Dieser stellt wiederum immer höhere Anforderungen an die Organisation von Rechensystemen. In der Entwicklung der Softwaretechnologie schlägt sich dies in der Etablierung der strukturierten, prozeduralen und schließlich objektorientierten Programmierung nieder. In der Rechensystemarchitektur haben sich über der eigentlichen Rechenhardware Abstraktionsebenen wie BIOS, Betriebssystem und Virtuelle Maschine etabliert.

Die objektorientierte Modellierungstechnik, d.h. die Zusammenfassung und Kapselung von Instanzdaten mit dem zur Datenmanipulation nötigen Programmcode und der Kommunikation zwischen den Instanzen verschiedener Objekte, ist eine elementare Abstraktionstechnik der heutigen Informatik. Sie schließt die semantische Lücke zwischen dem Bauwesen und der Informatik, indem die Tragkonstruktion eines realen Bauwerks mit einer formalen Methode auf ein rechnergestütztes Modell abgebildet wird. Die Vorteile gegenüber der prozeduralen Programmierung liegen in der besseren Modularisierung des Codes, dadurch bedingt auch in einer höheren Wartbarkeit und Widerverwendbarkeit der Einzelmodule, sowie in einer höheren Flexibilität des Programms insgesamt, insbesondere in Bezug auf die Benutzerführung, da Programme dieser Art weniger stark gezwungen sind, dem Benutzer bestimmte Bedienabläufe aufzuzwingen.

Ein objektorientierter Softwareentwurf liegt auch dem in dieser Arbeit programmiertechnisch umgesetzten Lösungsverfahren zugrunde. Die dauerhafte Datenspeicherung basiert dabei auf einer Objektserialisierung. Diese Methode soll dabei vor allem helfen, eine Vielzahl von Modellinformationen in einer einzigen Software zu integrieren und dabei die Probleme der Schnittstellen, Eingabekontrolle, Erweiterbarkeit, Wartbarkeit, Wiederverwendung und Applikation effizient zu lösen.

Für die praktische Anwendung sollte eine Software heute so konzipiert sein, dass ein fachspezifischer Anwender mit grundlegenden Computerkenntnissen selbstständig in kürzester Zeit den Umgang beherrschen kann. Insbesondere sind dazu anschauliche Ein- und Ausgabemöglichkeiten von Modell- und Systemkenngrößen in Verbindung mit einem breiten Anwendungsspektrum erforderlich. Da derzeit kaum umfassende Lösungen für die zeitveränderlichen Systeme bei Verbundkonstruktionen existieren, wird im Folgenden eine Möglichkeit zur übersichtlichen Erfassung der Modellkenngrößen vorgestellt.

## 5.2 Zeitabhängige Systemmodellierung

Im Gegensatz zum Stahl- und Massivbau ist die zeitliche Abfolge herstellungs- und nutzungsbedingter System- oder Belastungsmodifikationen bei Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen insbesondere im Brückenbau wesentlich aufwändiger und zugleich von stärkerer Bedeutung. Bei einer modellhaften Abbildung kann dieser Einfluss durch eine zeitabhängige Modellierung eines Systems Beachtung finden.

Zu diesem Zweck wurde das Programm CoBeamNL entwickelt. Dessen Eingabeoberfläche wurde so konzipiert, dass alle zeitabhängigen Tragwerksparameter als solche definierbar sind. Die problemorientierte, systematische Erfassung baupraktisch relevanter Verfahrensabläufe und materialspezifischer Eigenheiten der Werkstoffe zur Herstellung von Stahl-Beton-Verbundbrücken dient dabei als Leitgedanke. Hinsichtlich der modellierbaren Tragwerksklassen und deren numerischer Analyse gelten die in Abschnitt 2.3.2 genannten Abgrenzungskriterien.

Neben der zeitabhängigen Tragwerksmodellierung ist für die Überschaubarkeit und Kontrollierbarkeit der Modelldaten außerdem die hierarchische Zuordnungsebene der einzelnen Modellparameter im Projekt bedeutungsvoll. Hier ist eine Balance zwischen den numerischen Möglichkeiten und der praktischen Relevanz zu finden. Beispielhaft sei das Zusammenführen einzelner Stäbe eines Systems zu Betonierabschnitten genannt, da für diese hinsichtlich der Einflüsse aus Schwinden und Kriechen oftmals die gleichen Randbedingungen existieren. Diese Vorgehensweise mindert den Eingabeaufwand und die Effizienz gegenüber einer stabweisen Erfassung erheblich.

Anhand einiger Bilder soll im Folgenden veranschaulicht werden, wie die zu Beginn der Arbeit in Bild 1.1 benannten wesentlichen Einflussgrößen und deren Parameter übersichtlich zu erfassen und für die Berechnung in einen Kontext zu bringen sind. Für die Modellierung wurde dabei eine durch Echtzeitgrafiken visuell unterstützte tabellarische Eingabe gewählt.

### *Allgemeine Projektinformationen - Projektebene*

Im Projektmanager werden die für ein Bauvorhaben allgemeingültigen, grundlegenden Informationen festgelegt (Bild 5.1). Mit der Angabe eines Untersuchungszeitraumes wird zunächst die Basis für den zu analysierenden Zeitbereich geschaffen. Die regionale und zeitliche Zuordnung des Projekts ermöglicht es dann, den Einfluss jahreszeitlich bedingter örtlicher Schwankungen der Umgebungsbedingungen auf das Schwind- und Kriechverhalten des Betons zu erfassen. Mit dem Regionen-Manager steht zur Definition der Kenngrößen Temperatur und Luftfeuchtigkeit durch Monats-, Jahreszeiten oder Jahresmittelwerte ein selbstständiges Unterprogramm mit einer individuell erweiterbaren Klimadatenbank zur Verfügung.

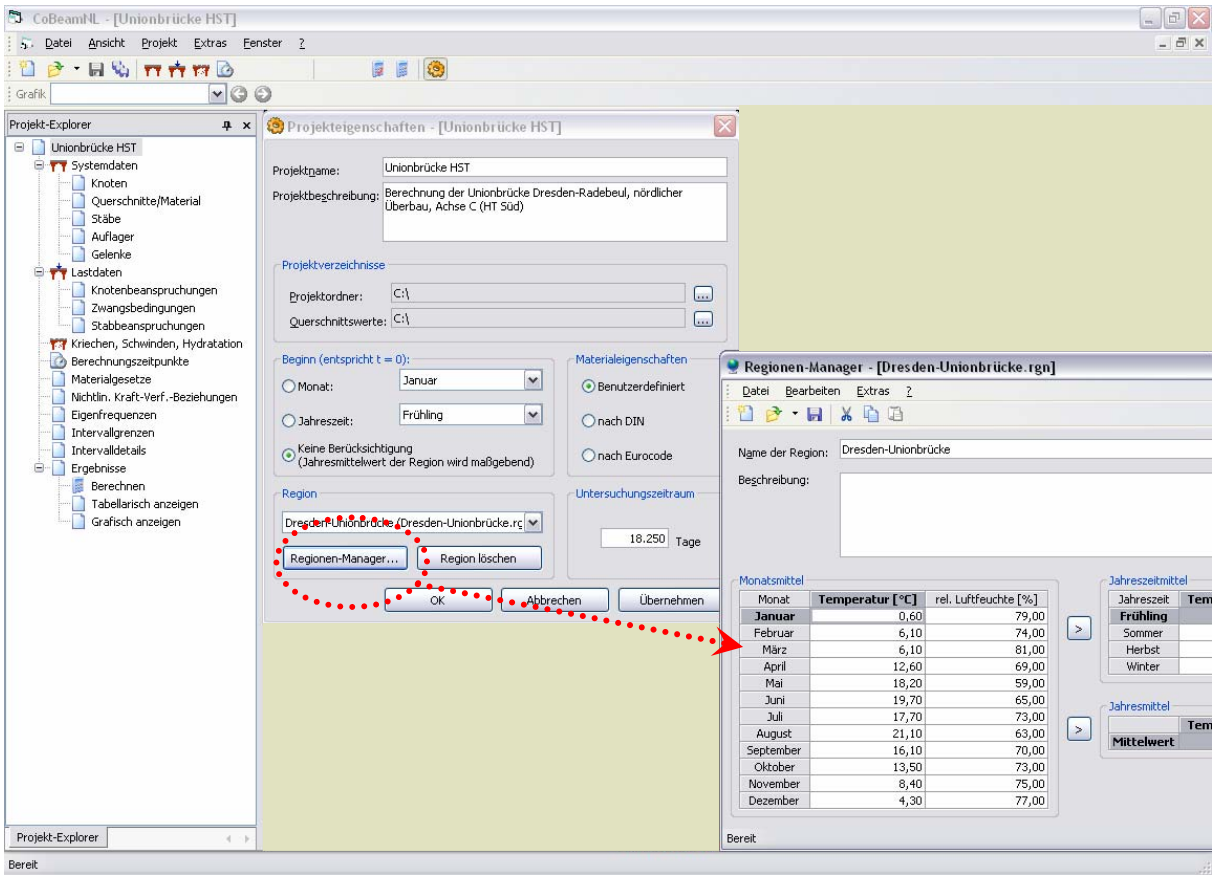



**Bild 5.1 Applikation CoBeamNL, Dialogfenster Projekteigenschaften und Regionen-Manager**

### *Materialmodelle - Projektebene*

Die Festlegung normenbezogener oder benutzerdefinierter Materialmodelle trägt im Fall eines normenbezogenen Ansatzes zu einer Verminderung des Eingabeaufwandes in den weiteren Dialogfenstern bei. Bei benutzerdefinierten Materialmodellen erfolgt die Auswahl der angewendeten Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten und Stoffgesetze für das Schwinden und Kriechen ebenfalls projektbezogen. Außerdem kann dabei auch die zeitliche Entwicklung der Werkstoffeigenschaften des Betons in die Berechnung einbezogen werden.

### *Abbildung des Herstellungsprozesses - Systemdaten*

Das Haupttragwerk wird wie bei zeitinvarianten ebenen Stabwerken üblich durch die Definition von Knoten, Stäben, Querschnitten/Materialkennwerten, Auflagerungen und Gelenken abgebildet. Zur Berücksichtigung zeitlicher Tragwerksveränderungen werden einige diese Größen hier mit einer Wirkungsdauer versehen.

Knoten und Stäbe können prinzipiell nur hinzugefügt werden und sind dann bis zum Ende des Betrachtungszeitraums wirksam. Dieses Vorgehen macht beispielsweise beim Taktschiebeverfahren oder beim Freivorbau die zeitabhängige Ergänzung des Stabzuges in einer Richtung möglich. Auflager- und Gelenkbedingungen können darüber hinaus mit einem Wirkungsende versehen werden, um Effekte wie das Betonieren auf einem Hilfsjoch (temporäres Auflager) oder auch das Betonieren eines Stützenquerschnittes mit Betonquerträger (Durchlaufwirkung

herstellen) zu erfassen. Die dafür notwendigen individuell modifizierbaren Eingabeparameter eines Modells sind in Bild 5.2 veranschaulicht.

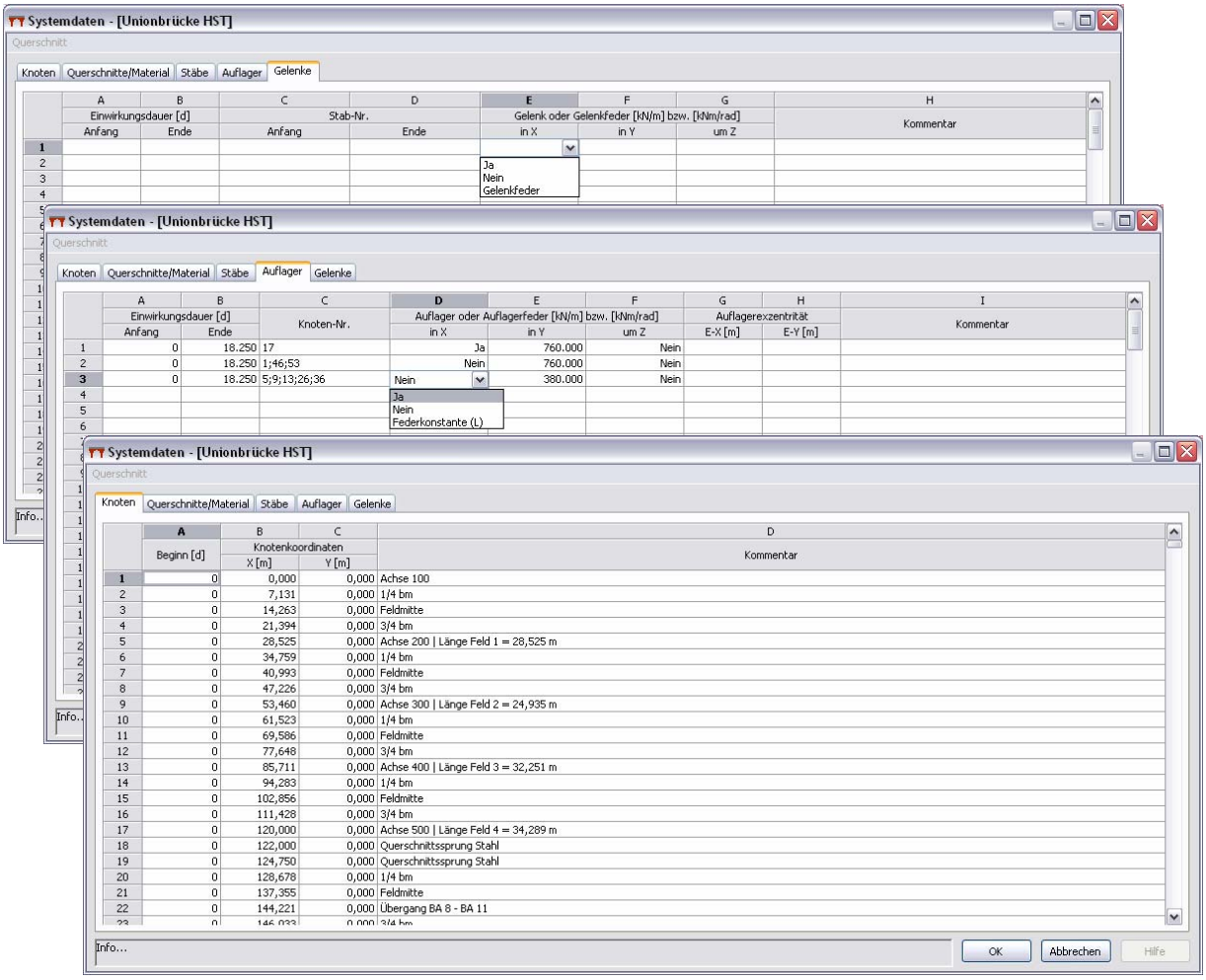



**Bild 5.2 Dialogfenster zur Definition von Knoten, Auflagern und Gelenken**

Die in der Praxis bei Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen sicherlich am häufigsten auftretende Systemmodifikation ist die Veränderung von Querschnittsteilen. Beispiele dafür sind im Rahmen der Herstellung das abschnittweise Betonieren einer Fahrbahnplatte oder die nachträgliche Ortbetonergänzung auf Fertigteilen. Gemäß aktuellen Prognosen zur Nutzungsdauer von Betonfahrbahnplatten in Verbundbrücken liegt diese mit 25 bis 30 Jahren weit unter der zu erwartenden Lebensdauer der Stahlkonstruktion. Überlegungen zum Kosten sparenden Austausch der gesamten Fahrbahn oder einzelner Teile sehen beispielsweise die Verwendung doppelter Obergurtbleche vor (STANDFUß [135]). Im Schadensfall lassen sich die Fahrbahnplatte und der die Verbindungsmittel enthaltende Stahlgurt austauschen. Einer effizienten Zuordnung zeitveränderlicher Querschnitte zu den Stäben kommt deshalb bei der Modellbildung eine Schlüsselrolle zu.

Um dieser Forderung gerecht zu werden und die Überschaubarkeit und Kontrollierbarkeit komplexer zeitabhängiger Tragwerksmodelle zu gewährleisten, wird folgende Konzeption vorgeschlagen: Für die gesamte Untersuchungsdauer wird jedem Stab zunächst ein Gesamtquerschnitt, modelliert aus einer frei definierbaren Anzahl von Teilquerschnitten, zugewiesen. Der Referenzachsenabstand wird dabei einmalig festgelegt (Bild 2.5).

Im Rahmen einer jedem Stab individuell zugeordneten Querschnittsmodifikation können dann die zuvor im Gesamtquerschnitt definierten Querschnittsteile entsprechend dem Bauablauf chronologisch hinzufügt oder entfernt werden. Die daraus folgende Zuordnungsstrategie veranschaulicht Bild 5.3. Es ist zu erkennen, dass sich die gesamte Problematik letztlich auf nur eine dem Einzelstab untergeordnete Abstraktionsebene reduzieren lässt. Aus diesem Vorgehen ergeben sich neben der Überschaubarkeit im Weiteren auch sehr weitreichende Möglichkeiten zur Eingabekontrolle sowie Vorteile bei der Zuordnung von Materialkennwerten.

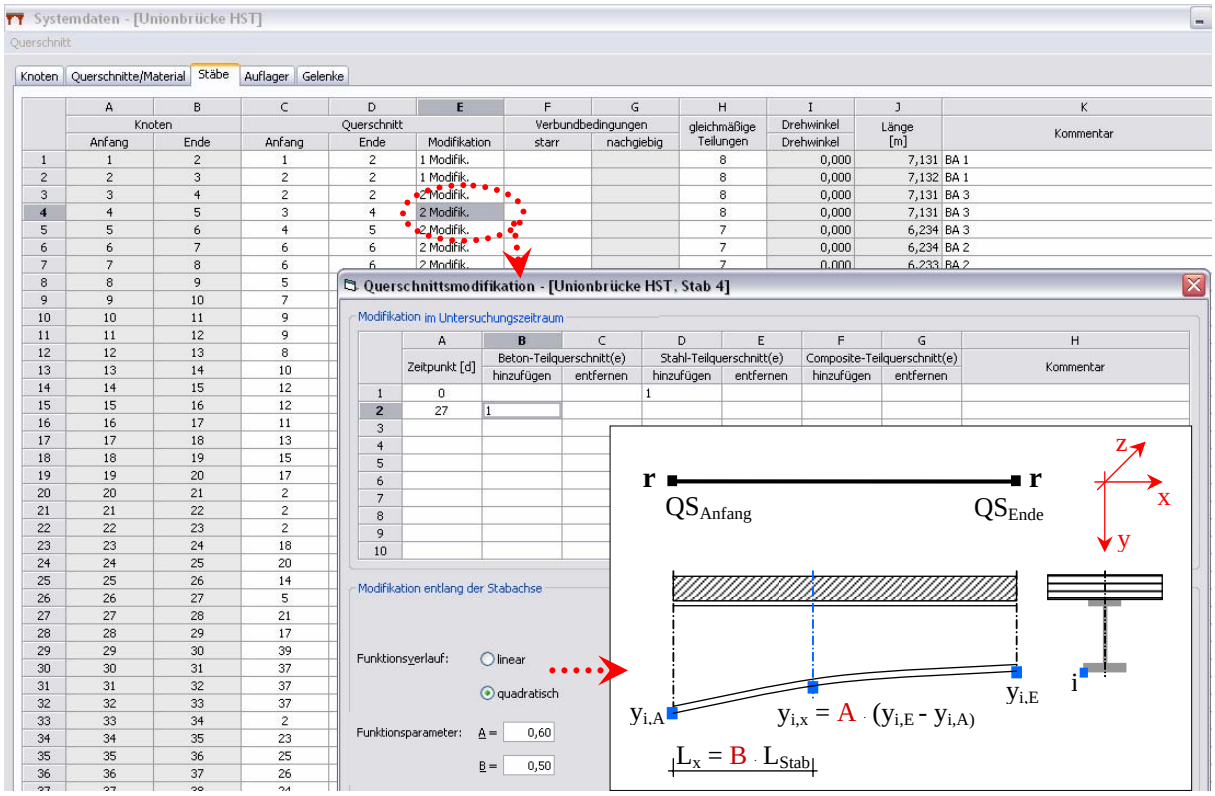



**Bild 5.3 Stabbezogene Definition zeit- und ortsveränderlicher Querschnitte**

Querschnitte, die über die Stablänge linear- oder quadratisch veränderlich sind, werden durch den Stabanfangs- und Stabendquerschnitt sowie einen Funktionsverlauf beschrieben. Dieser Zusammenhang kann ebenfalls im Rahmen der Querschnittsmodifikation erfasst werden (Bild 5.3).

### *Verbundquerschnitte und Materialkenngrößen*

Verbundquerschnitte können sich aus einer benutzerdefinierten Anzahl schlaff bewehrter Beton- und Stahlteilquerschnitte zusammensetzen. Darüber hinaus ist die Definition weiterer Verbundquerschnitte möglich; deren Material kann dabei durch eine zeitunabhängige Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit beschrieben werden.

Um Querschnittsveränderungen im Bauablauf zu berücksichtigen, werden alle während der Nutzungsdauer beteiligten Teilquerschnitte in einem Gesamtquerschnitt erfasst. Die Modellierung des Gesamtquerschnitts erfolgt mit dem speziell dafür erstellten Querschnittsprogramm CCS (Bild 5.4). Über eine entsprechende Schnittstelle können daraus die zur Tragwerksanalyse erforderlichen Kennwerte an CoBeamNL übergeben werden.

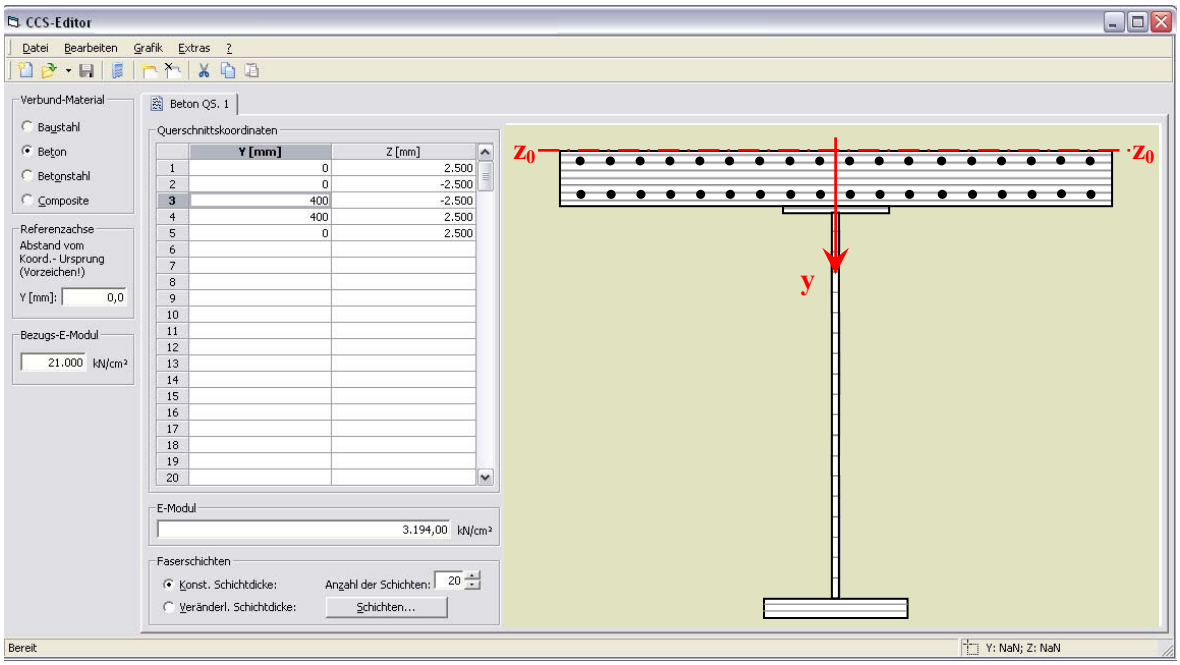



**Bild 5.4 Modellierung von Verbundquerschnitten mit CCS**

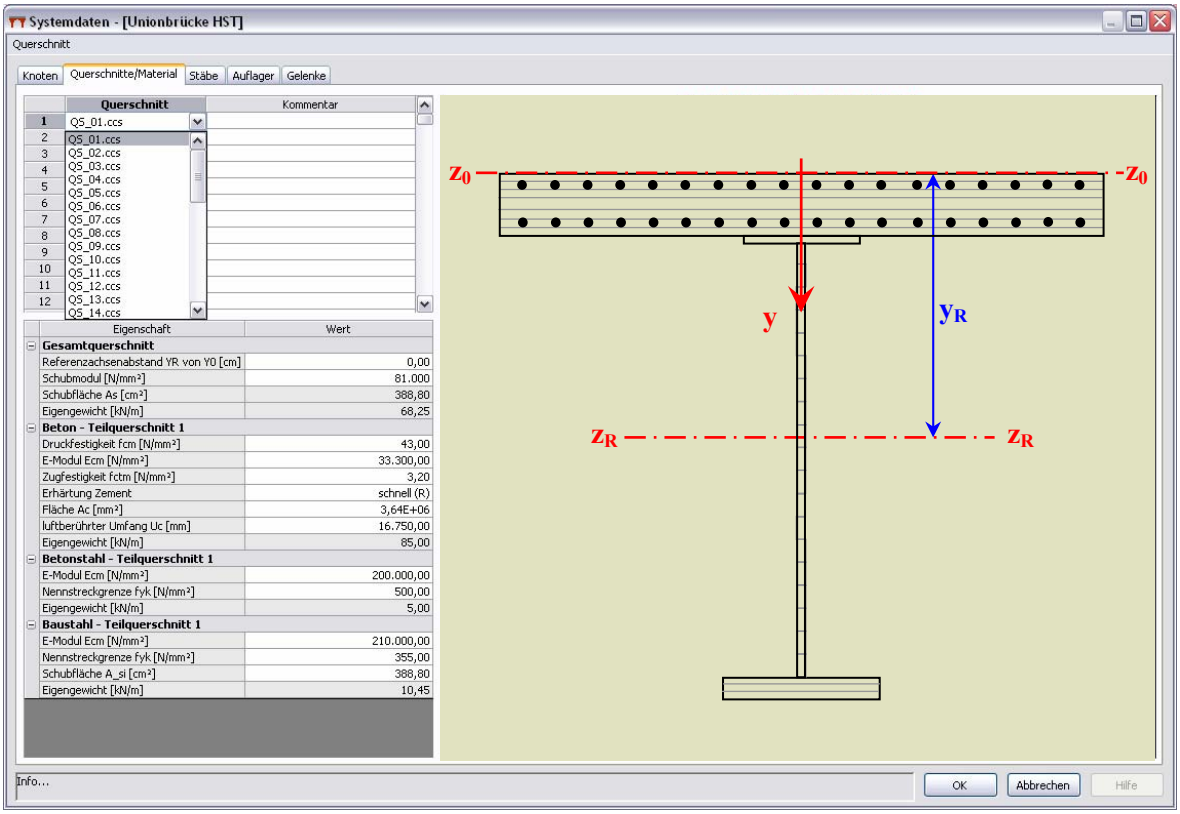



**Bild 5.5: Querschnittsbezogene Zuordnung von Materialkenngrößen**

In CoBeamNL werden diese vordefinierten Querschnitte aus einem Projektordner heraus eingefügt. Auf Querschnittsebene erfolgt dann für jeden Teilquerschnitt individuell die Zuordnung der weiteren (die Stoffgesetze parametrierende) Materialkenngrößen (Druck-, Zugfestigkeit, E-Modul, [Bruch-]Dehnung, etc.) / (Bild 5.5).

### *Betonierabschnitte*

Als Betonierabschnitt werden die gleichzeitig hergestellten Betonteilquerschnitte mehrerer Stäbe zusammengefasst, um ihnen gemeinsame Informationen zum zeitabhängigen Betonverhalten zuzuweisen. Dafür erforderliche material- und geometrieabhängige Kennwerte werden den Querschnitten (Bild 5.5) oder Betonierabschnitten zugeordnet (Bild 5.6). Dies betrifft im Einzelnen die Parameter Erstbelastungsalter $t_0$, Schwindbeginn $t_S$, wirksame Bauteildicke, die Herstellung mit oder ohne Eigenlastverbund sowie Angaben zur Hydratationswärmeentwicklung im Beton (Bild 5.6).

Durch eine Betonnachbehandlung oder aber ein späteres Aufbetonieren weiterer Querschnittsteile können sich der luftberührte Umfang und damit die wirksame Bauteildicke des Betonquerschnittes erheblich verändern. In diesem Zusammenhang kann auch die hydratationsbedingte Temperaturentwicklung des Betons in die Berechnung integriert werden. Dazu besteht prinzipiell die Möglichkeit, diesen Effekt entweder durch eine abschnittsweise diskretisierte, mittlere Temperaturentwicklung im Beton mit einem querschnittskonstanten Temperaturverlauf zu beschreiben oder durch ein wirksames Hydratationsmaß zu erfassen (Bild 5.6).

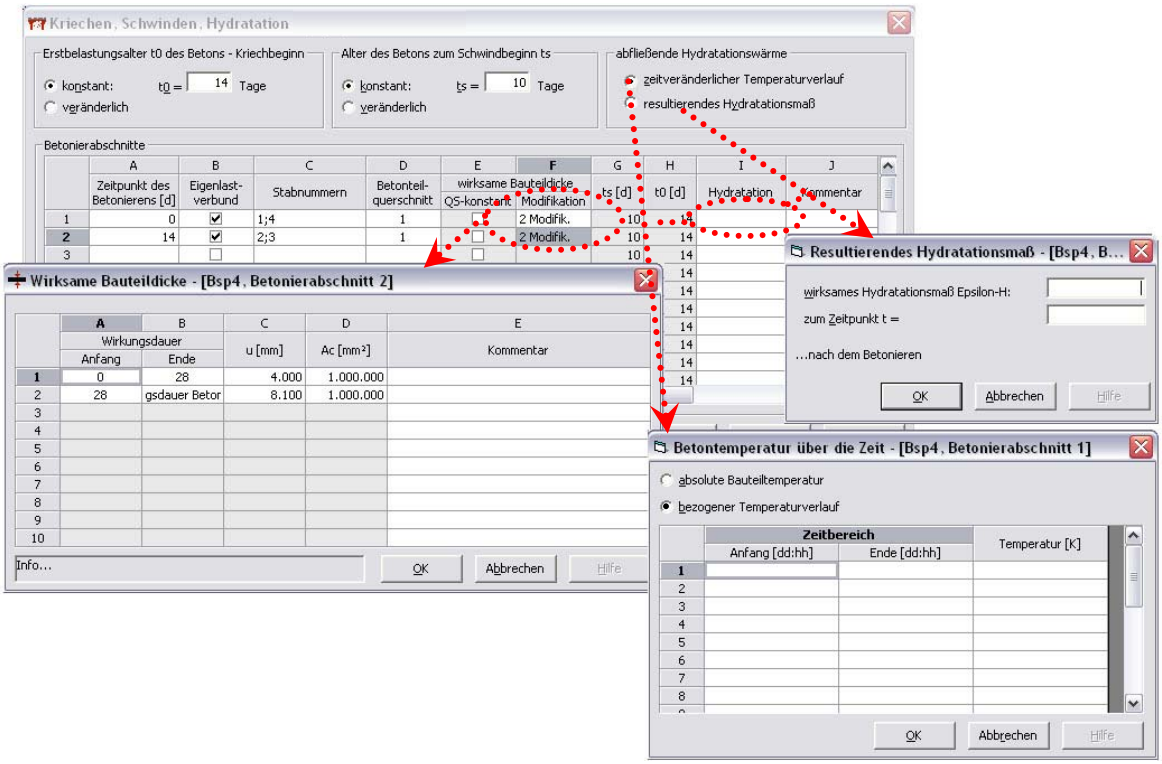



**Bild 5.6: Dialogfenster zur Definition von Betonierabschnitten und zugehöriger Kennwerte**

### *Verbundverhalten*

Ob das Verbundverhalten als Versagenskriterium rechnerisch beachtet wird, kann auf Projektebene festgelegt werden. Wenn dies der Fall ist, so werden die Verbundbedingungen zwischen den Teilquerschnitten auf Systemebene definiert und dort den beteiligten Stäben zugeordnet. Die bereits für veränderliche Querschnitte vorteilhaft genutzte abschnittsweise Zuordnung innerhalb eines Stabes wird auch hier angewendet (Bild 5.3).

Die Eingabedialoge für den starren und nachgiebigen Verbund unterscheiden sich vorrangig durch die Definition einer in der Verbundfuge übertragbaren Kraft bzw. Steifigkeit beim starren Verbund und die Angabe von Kraft-Verformungs-Abhängigkeiten im Anwendungsfall des nachgiebigen Verbunds. Da der Kopfbolzendübel das im klassischen Verbundbau überwiegend angewendete Verbindungsmittel darstellt, ist der Eingabedialog darauf ausgerichtet (Bild 5.7). Alternativ besteht darüber hinaus die Möglichkeit zur Angabe der mittleren Kraft-Verformungs-Abhängigkeit je Längeneinheit.

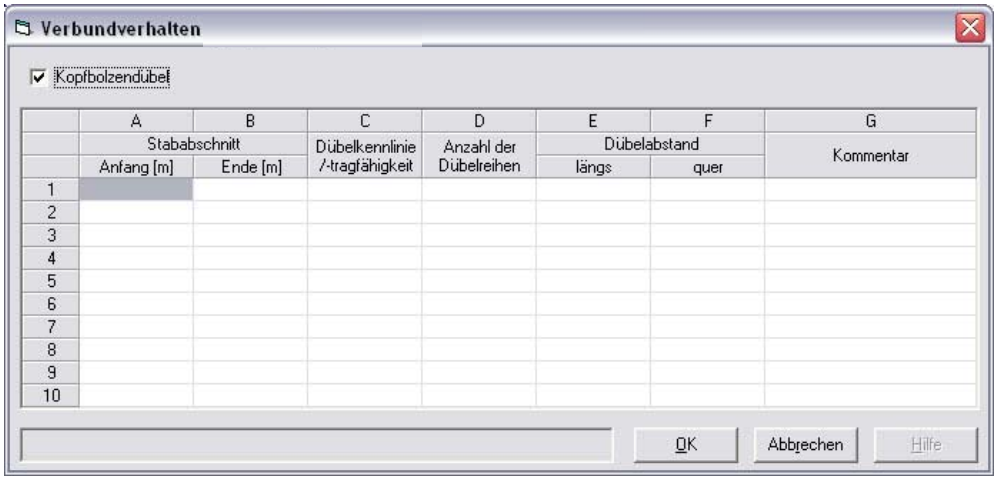



**Bild 5.7: Dialogfenster zur stabbezogenen Definition der Verbundbedingungen**

### *Äußere Belastungen*

Analog zu den Systemdaten werden die Belastungen mit einer Einwirkungsdauer versehen. Kurzzeitig einwirkende, praktisch nicht kriechwirksame Beanspruchungen werden durch einen identischen Anfangs- und Endzeitpunkt definiert (Bild 5.8).

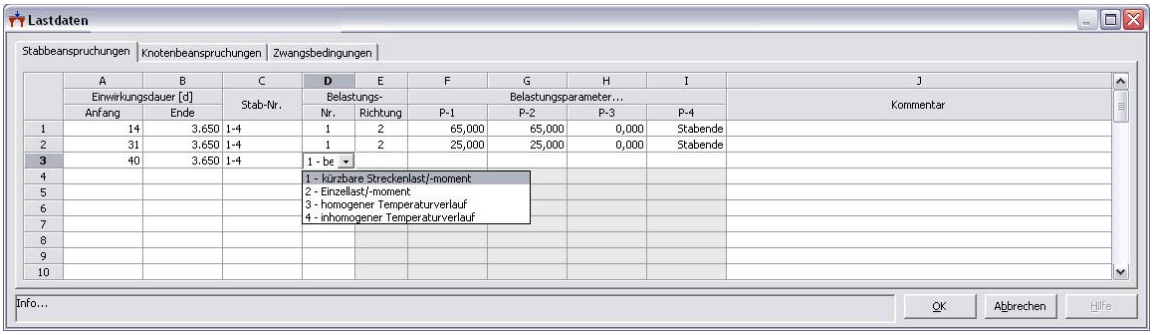



**Bild 5.8: Dialogfenster zur Definition von Stabbelastungen**

# Kapitel 6

# Testbeispiele, Parameterstudien und Anwendungen

Zur Kontrolle und Bewertung der Simulationsergebnisse des vorgestellten Lösungsverfahrens werden zunächst anhand einiger Testbeispiele einzelne Teilalgorithmen vergleichbaren geschlossenen und numerischen Ansätzen gegenübergestellt. Ausgewählte Parameteruntersuchungen dienen in diesem Zusammenhang einer Verbesserung der numerischen Effizienz des Lösungsverfahrens. Im Einzelnen wird auf folgende Schwerpunkte näher eingegangen:

- Schwinden und Kriechen unter der Annahme eines starren Verbundes
- Nachgiebiger Verbund
- Einfluss der Werkstoffmodellierung des Stahlbetons auf den zeit- und lastabhängigen Systemzustand eines Zweifeldträgers

Für zwei ausgewählte Brückenbauwerke werden anschließend die Simulationsergebnisse des Lösungsverfahrens gemessenen Kenngrößen gegenübergestellt und die Möglichkeiten der Modellbildung aufgezeigt:

- Unionbrücke Dresden-Radebeul
- Rahmenbrücke aus Verbundfertigteilen mit nachträglicher Ortbetonergänzung

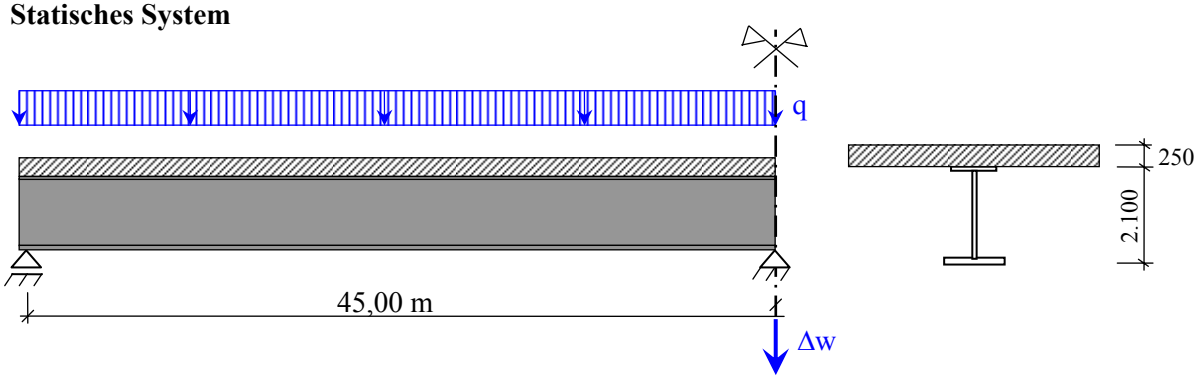
## 6.1 Testbeispiele und Parameterstudien

### 6.1.1 Schwinden und Kriechen unter der Annahme eines starren Verbundes

Im Mittelpunkt des ersten Beispiels steht die numerische Approximation der zeitabhängigen Verformungen von Beton infolge Schwindens und Kriechens. Zuerst wird der numerische Lösungsalgorithmus dieser Arbeit einem geschlossenen Lösungsansatz der zugrunde liegenden Differentialgleichungen gegenübergestellt, anschließend werden zwei Möglichkeiten zur Verbesserung der numerischen Effizienz des gewählten Verfahrens vorgestellt und diskutiert.

Die Untersuchungen erfolgen an einem im Eigenlastverbund hergestellten Zweifeldträger für einen Betrachtungszeitraum von 70 Jahren. Der Kriech- und Schwindbeginn werden unabhängig von Der Belastung zu t = 0 über die Parameter $t_0$ und $t_S$ gesteuert. Um unter dem Einfluss der zeitabhängigen Verformungen eine möglichst große Systemzustandsänderung zu erzielen, wird ein im Druck- und Zugbereich idealisiertes, lineares Materialverhalten unterstellt und damit eine Rissbildung im Betongurt ausgeschlossen. In Bezug auf das reale Verhalten einer Verbundkonstruktion können die daraus resultierenden Zusammenhänge als Grenzwertbetrachtung angesehen werden. Der Beispielträger wurde der Arbeit von FLEDERER [49] entnommen. Das statische System sowie die erforderlichen Eingangsgrößen sind in Bild 6.1 dargestellt.

**Statisches System**




**Eingangsgrößen**

| | Var. I | Var. II | Var. III |
|---|---|---|---|
| Beton | $f_{cm}$ = 31,5 N/mm² \| $E_{cm}$ = 30.000 N/mm² | | |
| Stahl | $f_y$ = 500 N/mm² \| $E_{St}$ = 210. 000 N/mm² | | |
| Belastung zu t = 0 | q = 70 kN/m \| w = 0,25 m | | |
| Untersuchungszeitraum | 70 Jahre (25.550 Tage) | | |
| Zementerhärtung | normal | | |
| Schwindbeginn $t_S$ | 7 d | 7 d | 14 d |
| Erstbelastungsalter $t_0$ | 28 d | 28 d | 14 d |
| relative Luftfeuchte | 50 % | 80 % | 50 % |
| Endschwindmaß (MC90) | $-4{,}62 \cdot 10^{-4}$ | $-2{,}58 \cdot 10^{-4}$ | $-4{,}71 \cdot 10^{-4}$ |
| Endkriechzahl (RSM) | 3,750 | 2,337 | 3,329 |
| Endkriechzahl (MC90) | 2,233 | 1,635 | 1,729 |

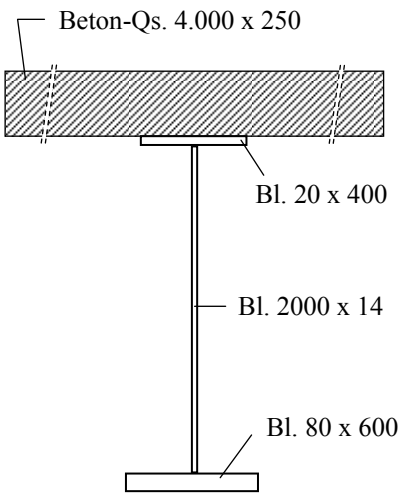



**Bild 6.1: Beispiel Zweifeldträger – System und Eingangsgrößen**

#### 6.1.1.1 Gegenüberstellung mit Lösungen von SATTLER [124] und FLEDERER [49]

Die folgenden Abbildungen veranschaulichen die zeitabhängige Veränderung der Gesamtschnittgröße Biegemoment in Feldmitte und über der Innenstütze des Zweifeldträgers. Dabei werden die Simulationsergebnisse des in dieser Arbeit vorgestellten Lösungsverfahrens einer numerischen Lösung von FLEDERER [49] sowie einer von SATTLER [124] angegebenen, geschlossenen Lösung der zugrunde liegenden Differentialgleichungen gegenübergestellt. Der Vergleich der Verfahren erfolgt für die gewählten Varianten unter Verwendung der Kriechzahlen nach dem RS-Modell. Die Schwinddehnungen werden nach dem Ansatz des MODELCODE90 bestimmt.

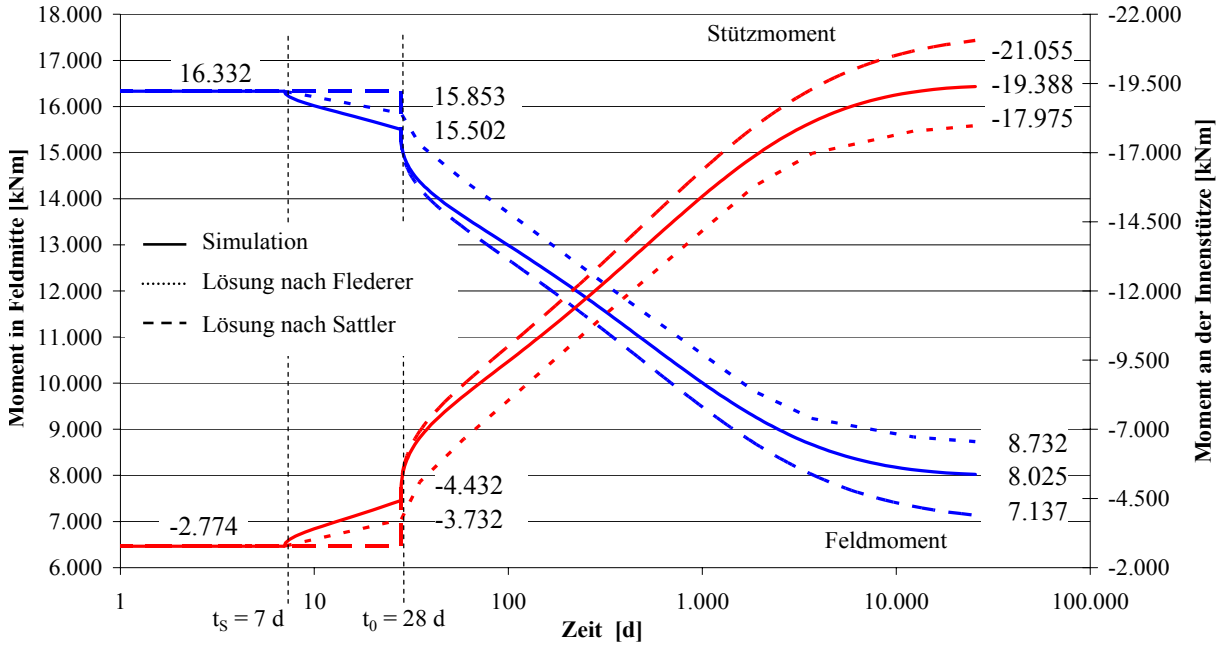



**Bild 6.2: Vergleich der Momentenentwicklung, Variante I**

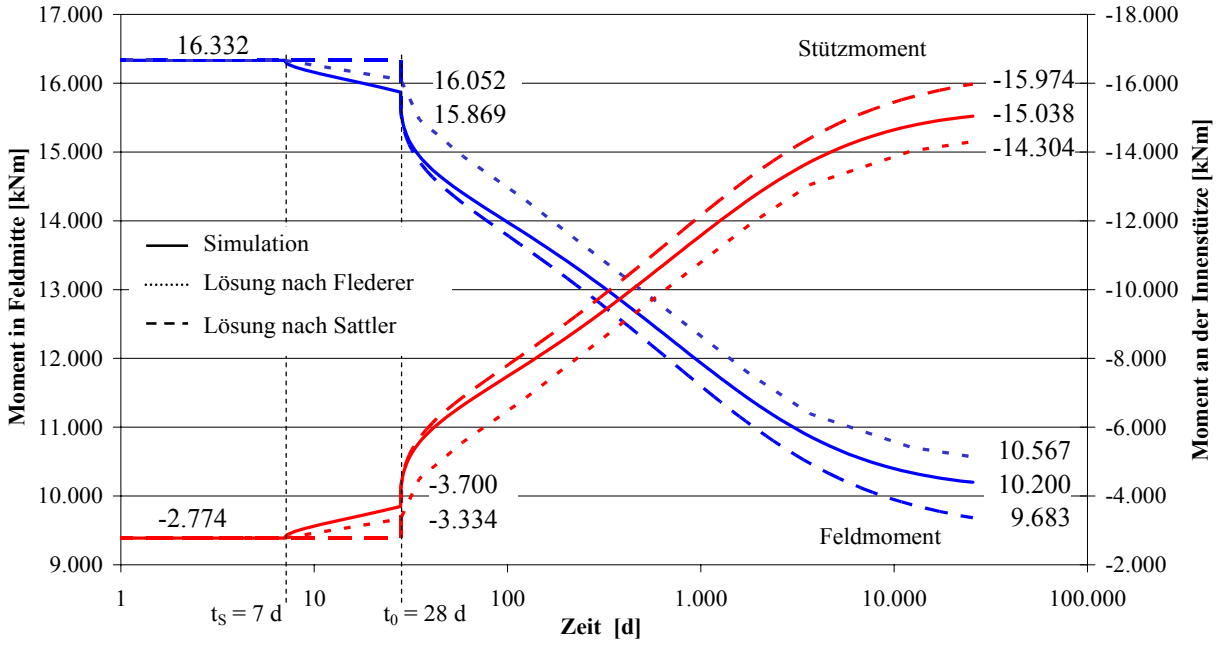



**Bild 6.3: Vergleich der Momentenentwicklung, Variante II**

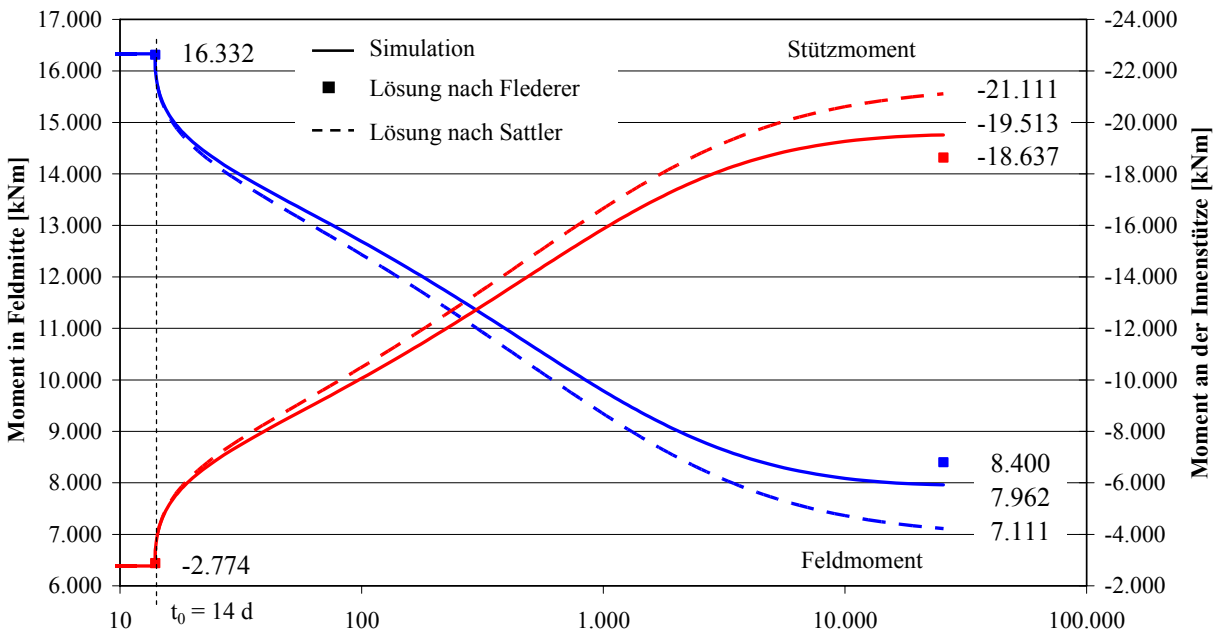



**Bild 6.4: Vergleich der Momentenentwicklung, Variante III**

Die Simulationsrechnung des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens weist gegenüber der Lösung nach Sattler erwartungsgemäß geringere Momentenumlagerungen auf. Im zeitlichen Verlauf der Schnittgrößen ist dabei eine bereits im jungen Belastungsalter beginnende und mit der Zeit zunehmende Abweichung erkennbar. Sie beträgt am Ende des Untersuchungszeitraumes der gewählten Beispiele etwa 5…10 %. Weiterhin ist aus einer Gegenüberstellung der untersuchten Varianten erkennbar, dass diese Abweichungen mit abnehmender Umgebungsfeuchte sowie einer zunehmenden Differenz zwischen Erstbelastung und Schwindbeginn anwachsen. Für größere Betrachtungszeiträume deutet sich mit den Ansatz von SATTLER eine weitere Zunahme der Umlagerungen an; die numerische Simulation nähert sich dagegen deutlich schneller einem Endwert an.

Beim Vergleich mit der Lösung von FLEDERER [49] ist auffällig, dass die numerische Lösung dieser Arbeit größere Umlagerungen aufweist. Besonders auffällig sind die Differenzen für den gesamten zeitlichen Verlauf der Momentenumlagerungen, welche bereits im jungen Belastungsalter (etwa: $t - t_0 < 100$d) sehr ausgeprägt und im weiteren Verlauf annähernd konstant sind.

Die auftretenden Abweichungen lassen sich durch einige den Lösungsverfahren zugrunde liegende Annahmen begründen: Bei einer zeitschrittweisen Integration wird der Systemzustand maßgebend durch die gewählte Kriech- und Schwindfunktion, deren zeitlichen Verlauf sowie die Diskretisierung des Untersuchungszeitraumes bestimmt und ist damit in jedem Zeitschritt von den Systemzustandsänderungen innerhalb der vorangegangen Zeitschritte abhängig. Bei dem Näherungsansatz von SATTLER werden dagegen die Umlagerungen infolge Schwindens und Kriechens und deren zeitliche Entwicklung allein durch den zugrunde liegenden Differentialgleichungsansatz von DISCHINGER [36] bestimmt. Die Kriechverformungen sind dabei nur vom Betonalter bei Belastungsbeginn und der Dauer einer Lasteinwirkung abhängig. Für das Schwinden wird außerdem eine Affinität zum Kriechprozess unterstellt. Ein Vergleich der Lösungen von DISCHINGER und TROST in [140] belegt, dass mit dem algebraischen

Kriechansatz von TROST einerseits eine bessere Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen erzielt wird, und andererseits der Differentialgleichungsansatz von DISCHINGER vergleichsweise größere Kriechumlagerungen prognostiziert. Unter Verwendung zeitgemäßer Kriech- und Schwindansätze folgen auch die Ergebnisse des Lösungsansatzes dieser Arbeit dieser Tendenz.

Die Diskrepanz zur Lösung von FLEDERER begründet sich im einem von FLEDERER aus den algebraischen Ansätzen übernommenen Korrekturfaktor ($\varphi_t/\varphi_\infty$). Dieser soll berücksichtigen, dass die Schnittkraftkorrektur in statisch unbestimmten Systemen selbst dem Kriecheinfluss unterliegt. Allerdings ist diese Annahme nur bei einer Analyse der schwind- und kriechbedingten, zeitabhängigen Umlagerungen innerhalb eines Zeitschrittes auf der Grundlage algebraischer Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten erforderlich.

In Bild 6.5 sind für das Lösungsverfahren dieser Arbeit die Momentenentwicklung im Feld- und Stützenbereich der Variante I unter Verwendung der Kriechansätze nach dem RS-Modell und dem ModelCode90 dargestellt. Mit dem RS-Modell werden größere Umlagerungen gegenüber dem ModelCode90 Ansatz erzielt (ca. 5 %). Diese Differenz resultiert vor allem aus der unterschiedlichen mathematischen Beschreibung des zeitveränderlichen Kriechprozesses in einer Kriechfunktion. Insbesondere die bereits in Abschnitt 3.1.5.1 angesprochene Größe der elastischen Nachwirkung des Kriechprozesses sowie deren Anwendbarkeit und Vorhersagegenauigkeit bei veränderlichen Spannungen nimmt hierbei eine zentrale Rolle ein.

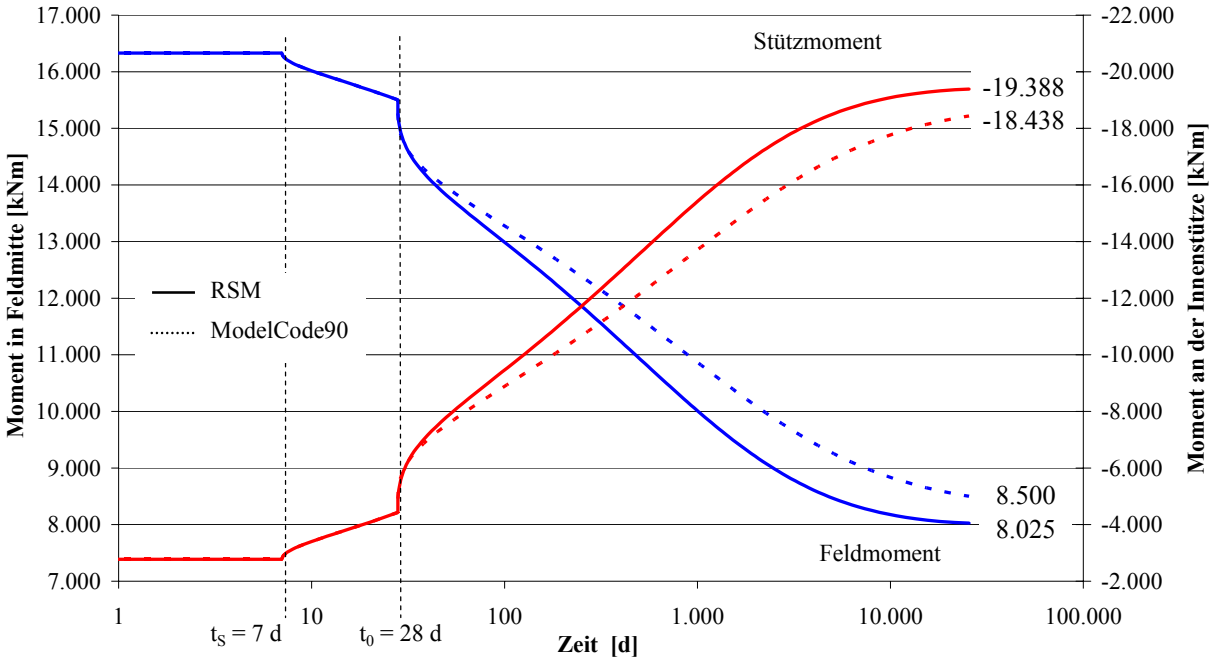



**Bild 6.5: Vergleich der Momentenentwicklung mit den Kriechansätzen nach RSM und MC90, Variante II**

### 6.1.1.2 Schrittweitensteuerung im Zeitbereich

Das Ergebnis einer zeitschrittweisen numerischen Lösung wird maßgebend durch die Wahl der Schrittweite bestimmt, da als Voraussetzung für die Anwendung des gewählten Differenzenverfahrens differentiell kleine Beanspruchungsänderungen innerhalb eines Zeitintervalls erforderlich sind. Im Folgenden wird dargestellt wie durch eine angemessene Schrittweitensteuerung die Vorhersagegenauigkeit und die Effizienz der numerischen Lösung beeinflusst werden. Für die weitere Anwendung werden daraus anschließend geeignete Kriterien abgeleitet.

In das Lösungsverfahren dieser Arbeit wurden dazu zwei Intervallteilungskriterien implementiert. Zu Beginn einer Analyse werden zuerst die Systemänderungen innerhalb eines Zeitschritts durch die Vorgabe einer maximal zulässigen Kriechzahl- und Schwinddehnungsänderung begrenzt (Hauptkriterium). Da diese Festlegung jedoch unabhängig vom statischen System und den Querschnitten erfolgt, wird nach der Systemzustandsanalyse eines jeden Zeitschrittes außerdem überprüft, ob die tatsächlichen Umlagerungen einen Grenzwert überschreiten (Abbruchkriterium). Mit Kenntnis dieser Größe kann dann die Schrittweite gegebenenfalls während einer Berechnung an die vorliegenden Gegebenheiten individuell angepasst werden.

In Bild 6.6 sind die Ergebnisse einer solchen Untersuchung für Variante III zusammengefasst. Dargestellt sind die auf ein konstantes Hauptkriterium $\Delta\varphi_K$ bezogene Entwicklung des Abbruchkriteriums sowie die zugehörige Momentenentwicklung über der Innenstütze am Ende des Betrachungszeitraumes.

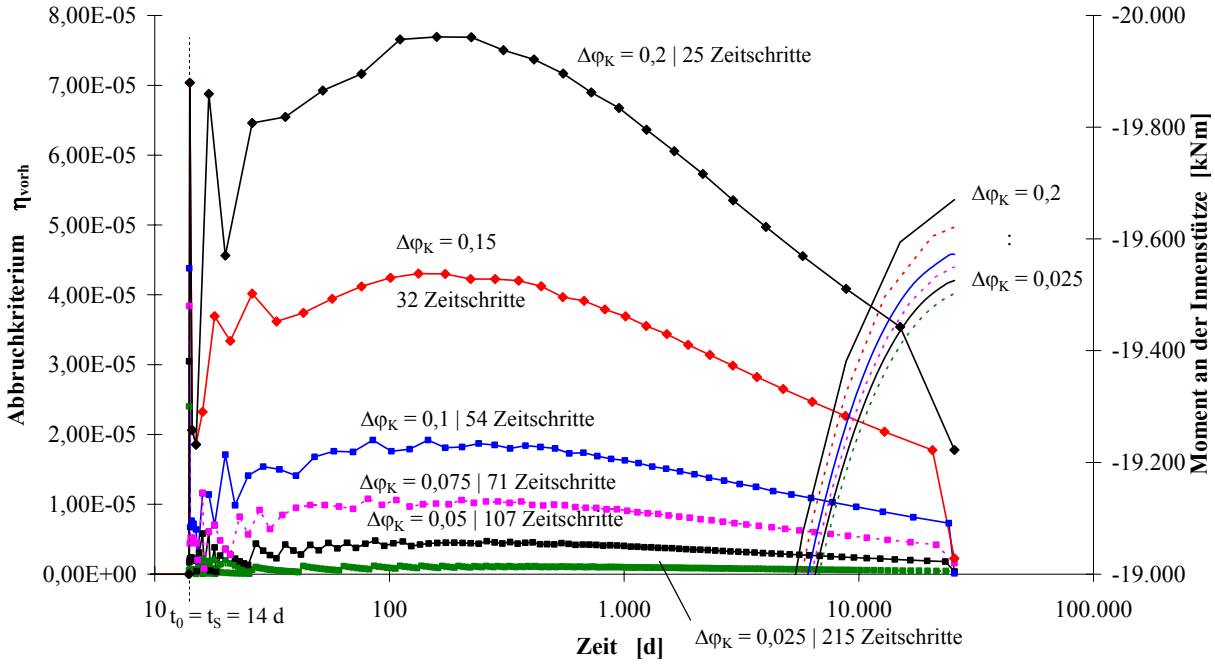



**Bild 6.6: Vergleich von Stützmoment und Abbruchkriterium in Abhängigkeit vom Intervallteilungskriterium $\Delta\varphi_K$**

Die Abweichung des maximalen Stützmomentes beträgt im Bereich von $\Delta\varphi_K = 0{,}025\ldots0{,}2$ nur 1 %. Verglichen mit den grundsätzlichen Differenzen der in Abschnitt 6.1.1.1 gegenübergestellten Lösungsansätze ist dieser Wert gering. Basierend auf weiteren Parameteruntersuchungen werden deshalb für die weitere Anwendung folgende Kriterien vorgeschlagen:

$\Delta\varphi_K = 0{,}1$
$\Delta\varepsilon_S = -1\cdot10^{-5}$
$\eta_{zul} = 1\cdot10^{-5}$.

### 6.1.1.3 Eine Näherungslösung für die numerische Erfassung der alterungsabhängigen Betonkriechverformungen

Zur numerischen Erfassung der zeitabhängigen Betonverformungen infolge Kriechens findet in der rechentechnischen Realisierung dieser Arbeit eine schrittweise Lösung auf der Basis des Superpositionsprinzips Anwendung (Abschnitt 3.1.5.1.4). Bei dieser Vorgehensweise setzt sich in einem n-ten Zeitschritt die resultierende Kriechdehnung aus der Superposition von n Teilkriechprozessen zusammen. Der dazu erforderliche Rechen-, Zeit- und Speicheraufwand ist erheblich und kann aufgrund der erst analysebegleitend durchgeführten Teilung des Untersuchungszeitraumes vor einer Berechnung oft nicht abgeschätzt werden.

Bei der mathematischen Formulierung der Kriechgesetzmäßigkeiten wird diese Zeitabhängigkeit durch einen alterungsabhängigen Term, die verzögerte Elastizität, erfasst. Besonders anschaulich lässt sich dieser Zusammenhang anhand der additiv verknüpften Terme des RS-Modells darstellen. Bild 6.7 zeigt die zeitliche Entwicklung der Anteile aus Grundfließen, Trocknungsfließen und verzögerter Elastizität. Während die Fließkomponenten bei Beanspruchungswechseln einen davon unabhängigen, stetigen Verlauf aufweisen, wird der funktionale Verlauf der verzögerten Elastizität maßgebend durch den Zeitpunkt eines Belastungswechsels beeinflusst. Mit zunehmendem Belastungsalter ist dabei eine deutliche Verringerung dieser Komponente der Kriechzahl zu verzeichnen. Die verzögerte Elastizität strebt asymptotisch einem Endwert zu, der mit zunehmendem Belastungsalter schneller erreicht wird. Bei einer schrittweisen Analyse ist die verzögerte Elastizität dann von untergeordneter Bedeutung.

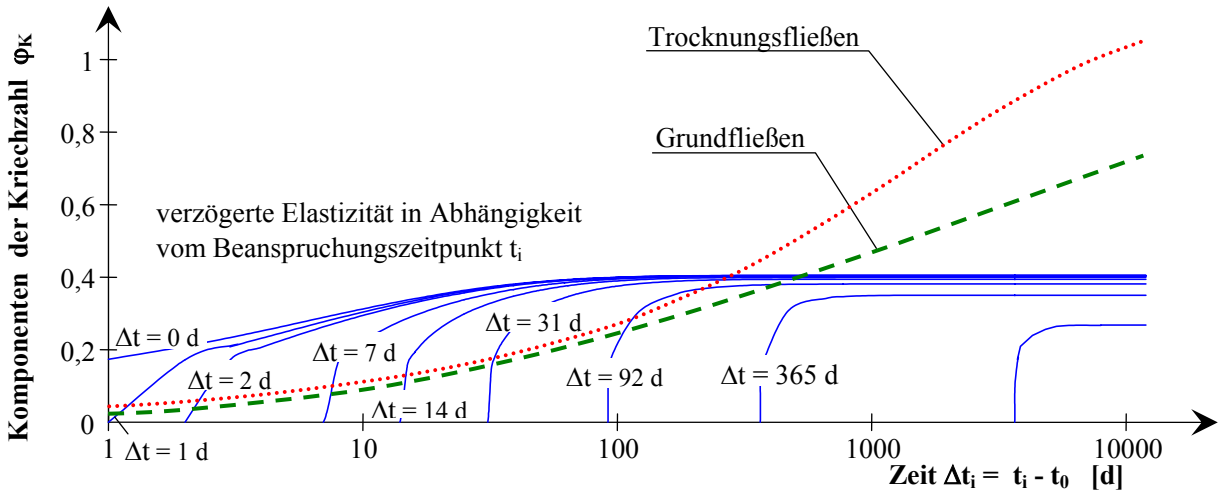



**Bild 6.7: Zeitliche Entwicklung der Kriechkomponenten des RS-Modells (Bsp.-Variante II)**

Diese Beobachtungen führten zu der Überlegung, die Alterungsabhängigkeit der Kriechverformungen nach einer gewissen Belastungsdauer vereinfacht durch einen konstanten, vom zurückliegenden Beanspruchungsverlauf unabhängigen Kriechanteil zu erfassen und damit die Anzahl der rechnerisch zu berücksichtigenden Teilkriechprozesse zu begrenzen.

In einer beispielhaften Untersuchung an dem Zweifeldträger aus Abschnitt 6.1.1 wurde dazu folgendermaßen vorgegangen: Bei der Analyse des n-ten Zeitschrittes findet nur eine zuvor definierte Anzahl von k zurückliegenden Teilkriechprozessen bei der Ermittlung der spannungsabhängigen Kriechverformungen Beachtung. Für den (n-k)-ten Teilkriechprozess werden dabei die Kriechdehnungen aus der dem Zeitschritt zugehörigen Kriechdehnzahl und der zu diesem Zeitpunkt kriechwirksamen Gesamtdehnung unabhängig vom bisherigen Dehnungsverlauf bestimmt. Die Auswirkungen dieser Vorgehensweise auf die zeitabhängige Entwicklung des Stützen- und Feldmoments sind in Bild 6.8 dargestellt.

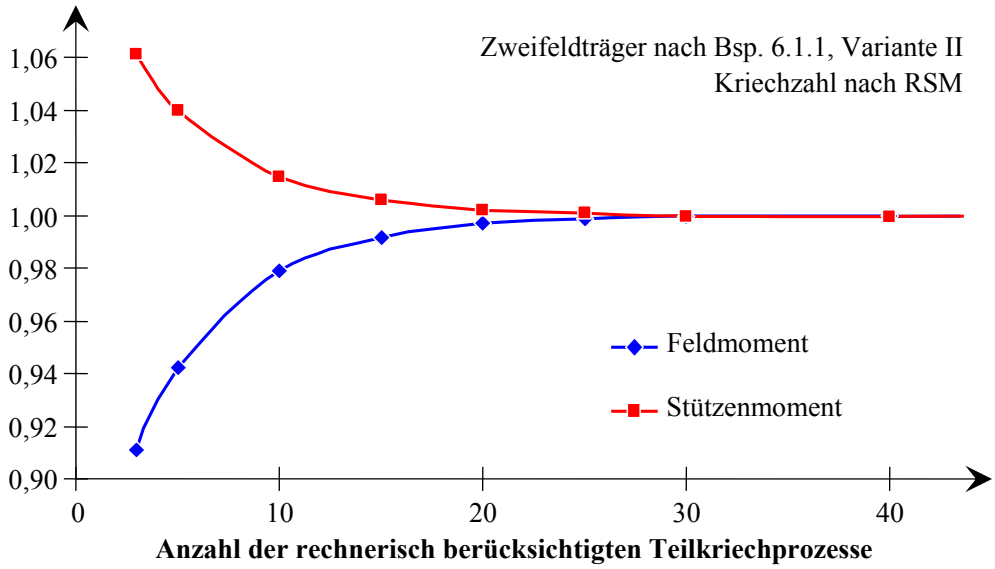



**Bild 6.8: Auswirkung einer Näherungslösung bei der numerischen Erfassung der alterungsabhängigen Betonkriechverformungen – normierte Darstellung bezogen auf die numerische Lösung bei vollständiger Beachtung aller Teilprozesse**

Es ist zu erkennen, dass mit etwa 30 berücksichtigten Teilkriechprozessen bei 125 untersuchten Zeitschritten über den gesamten Zeitbereich die vollständige numerische Lösung mit dem beschriebenen Näherungsansatz übereinstimmt. Dieser Zusammenhang ist unabhängig vom Untersuchungszeitpunkt gegeben.

Das Beispiel zeigt, dass mit der gewählten Näherungslösung eine deutliche Reduzierung des Rechenaufwandes bei gleich bleibender Vorhersagegenauigkeit möglich ist (in diesem Fall etwa eine Halbierung der Rechendauer). Eine wesentliche Voraussetzung dafür stellt die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Schrittweitensteuerung dar. Bei deren Berücksichtigung können die Erkenntnisse auch auf andere Systeme übertragen werden. Weiterhin ist zu beachten, dass die Parameterstudie an einem ungerissenen Betonbauteil durchgeführt wurde. Die damit verbunden großen Zwangsbeanspruchungen werden unter Verwendung praxisnaher Stoffgesetze kaum erreicht, da bei den überwiegend biegebeanspruchten Trägern im Verbundbau die kriechbedingten Eigenspannungen im Beton durch Rissbildung abgebaut werden und

deshalb weniger ausgeprägt vorhanden sind. Die gewählte Vorgehensweise stellt daher auch aus dieser Sicht eine Grenzwertbetrachtung dar. In dem vorgestellten Applikationsentwurf wurde daher eine Möglichkeit geschaffen die Anzahl der zurückliegenden Teilkriechprozesse in der beschriebenen Weise zu begrenzen.

### 6.1.2 Nachgiebiger Verbund

Im Folgenden wird die in Abschnitt 4.8 vorgestellte numerische Lösung für den nachgiebigen Verbund zuerst mit einer auf der Elastizitätstheorie basierenden, geschlossenen Lösung der zugrunde liegenden Differentialgleichungen für zeitunabhängige Beanspruchungen gegenübergestellt (z.B. HOISCHEN [68]). Anschließend werden dann die Simulationsergebnisse unter Berücksichtigung zeitabhängiger Betonverformungen mit einer von WAPENHANS [145] angegebenen Differentialgleichungslösung sowie einer numerischen Lösung mit dem Programmsystem SOFISTIK [133] verglichen.

Da eine mathematisch geschlossene Lösung für den nachgiebigen Verbund nur für statisch bestimmte Systeme und nur lastfallbezogen unter Beachtung der dabei maßgebenden Randbedingungen angegeben werden kann, beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf ein solches System. Zur Gegenüberstellung der Lösungsverfahren sind daher über die vereinfachten Hypothesen und Annahmen des vorangegangenen Beispiels hinaus folgende weitere Einschränkungen erforderlich:

- Die Verdübelung muss durch einen über die Trägerlänge konstanten, linearen Zusammenhang zwischen Schlupf und Dübelkraft gekennzeichnet sein.
- Der Querschnitt muss über die Trägerlänge konstant sein.
- Das System muss statisch bestimmt sein.
- Die Belastung muss einen stetigen Verlauf der Momentenlinie bewirken.
- Die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte gilt für die von der Verbundfuge getrennten Querschnittsteile, bei gleicher Querschnittskrümmung.

Für den in Bild 6.9 dargestellten Einfeldträger sind diese Voraussetzungen erfüllt. Der Verbundträger besteht aus einer Betonplatte (C35/45) und einem geschweißten I-Träger aus S 235. Dieses Beispiel wurde in leicht modifizierter Form der Arbeit von WAPENHANS [145] entnommen.

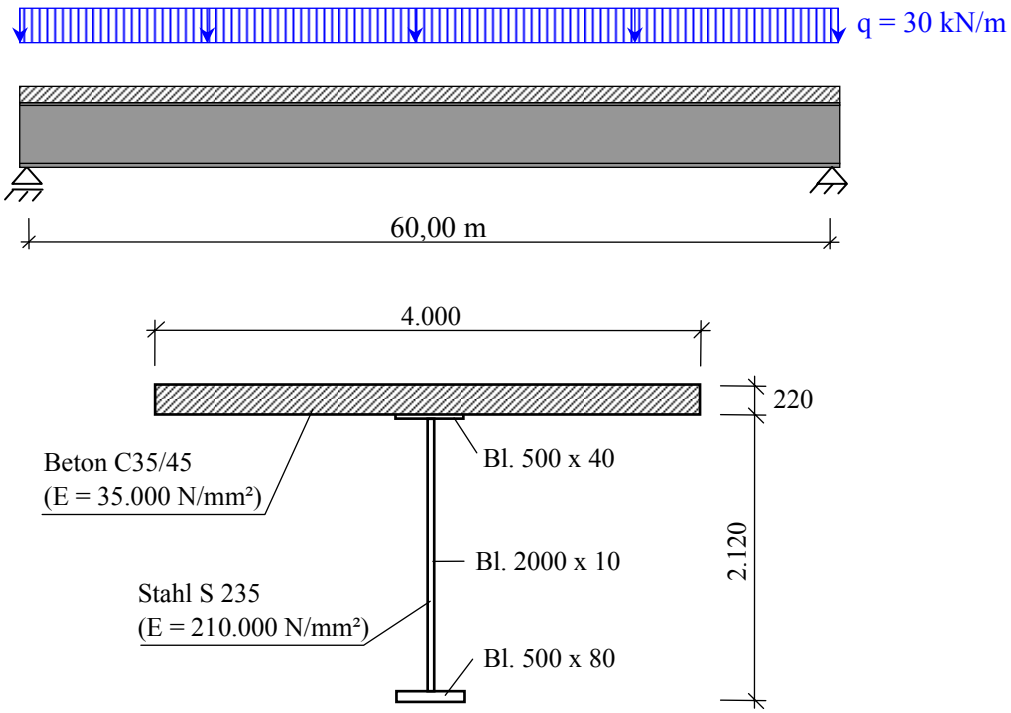



**Bild 6.9: Testbeispiel Einfeldträger – Eingangsgrößen**

### 6.1.2.1 Lösung für t = 0

Die Analyse des Einfeldträgers erfolgt für fünf unterschiedliche Dübelsteifigkeiten:

$c_1 = 0$ kN/cm, $c_2 = 300$ kN/cm, $c_3 = 1.000$ kN/cm
$c_4 = 3.000$ kN/cm $c_5 = \infty$,

um deren Einfluss auf den Schnittkraft- und Verformungsverlauf zwischen den Grenzen starrer Verbund und ohne Verbund zu veranschaulichen.

Zwischen den Werten des geschlossenen Lösungsansatzes und des numerischen Lösungsverfahrens dieser Arbeit treten erwartungsgemäß sehr geringe Abweichungen auf. Die folgenden Bilder geben deshalb die Ergebnisse der Simulationsrechnungen wieder.

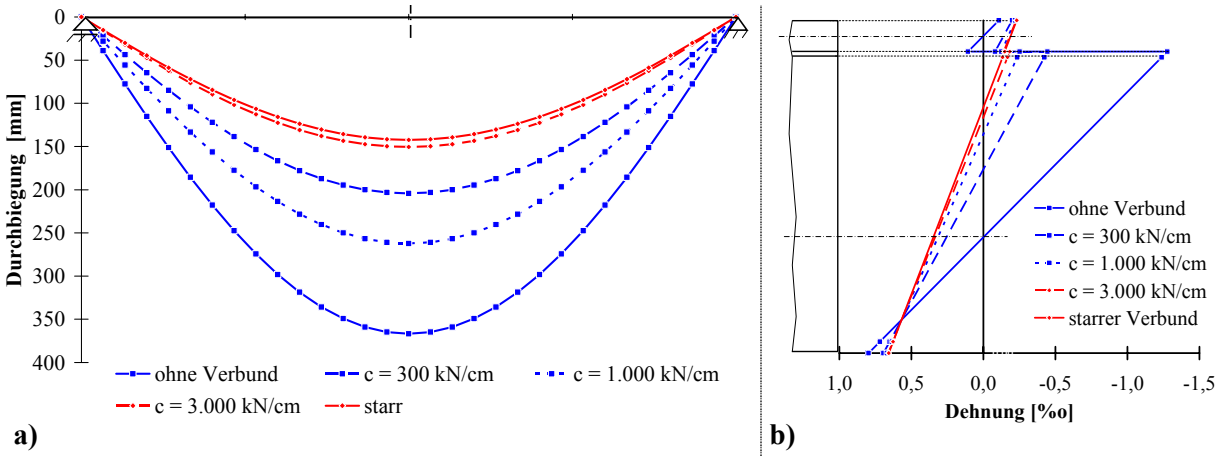



**Bild 6.10: a) Durchbiegung des Verbundträgers | b) Dehnungen in Trägermitte**

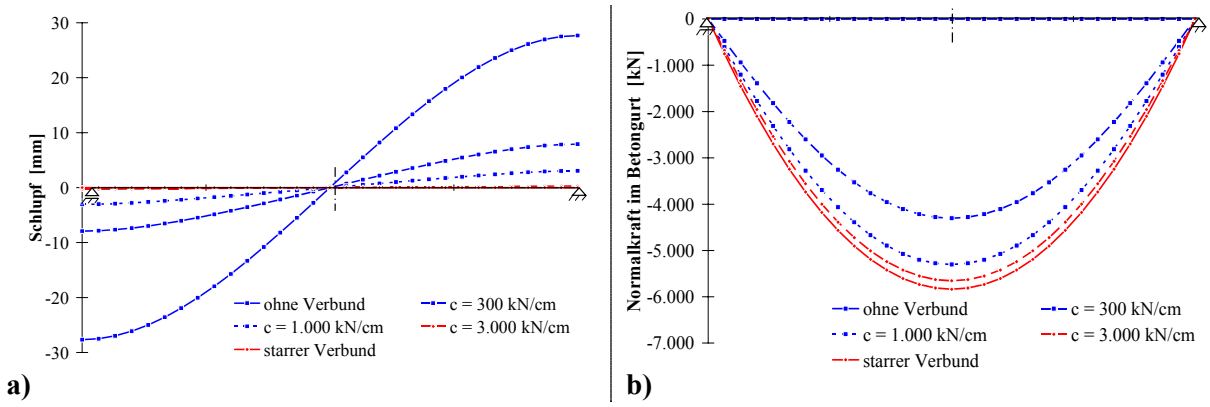



**Bild 6.11: a) Schlupf in der Verbundfuge | b) Normalkraftanteil im Betongurt**

Die Übereinstimmung zwischen Simulation und geschlossener Lösung stellt eine notwendige Voraussetzung für weiterführende Untersuchungen an statisch unbestimmten Systemen sowie zum Einfluss der zeitabhängigen Betonverformungen dar.

### 6.1.2.2 Vergleich mit weiteren Lösungen unter dem Einfluss von Schwinden und Kriechen

Die Simulationsergebnisse werden einer vergleichbaren geschlossenen Lösung von WAPENHANS [145] und einer numerischen Lösung mit den Programmsystem SOFISTIK [133] gegenübergestellt. In beiden Fällen basiert die Berechnung der zeitabhängigen Betonverformungen auf einem algebraischen Kriech- und Schwindansatz von TROST [140]. Diese Verfahren sind deshalb den Einschrittverfahren zuzuordnen. Die Schwinddehnungen werden mit dem Ansatz des MODELCODE90 und die Kriechzahlen mit dem RS-Modell bestimmt. In Tabelle 6.1 sind die dazu erforderlichen Kenngrößen definiert:

| | |
|---|---|
| Beton | $f_{cm}$ = 43 N/mm² |
| Baustahl | $f_{ay}$ = 500 N/mm² |
| Untersuchungszeitraum | 70 Jahre (25.550 Tage) |
| Zementerhärtung | normal |
| Schwindbeginn $t_S$ | 14 d |
| Erstbelastungsalter $t_0$ | 14 d |
| relative Luftfeuchte | 50 % |
| resultierendes Endschwindmaß (MC90) | $-2{,}89 \cdot 10^{-4}$ |
| resultierende Endkriechzahl (RSM) | 2,60 |
| Parameter der Schrittweitensteuerung | $\Delta\varphi_K = 0{,}05$ \| $\Delta\varepsilon_S = -5 \cdot 10^{-6}$ = 72 Zeitschritte |

**Tabelle 6.1: Eingangsgrößen zur Ermittlung der zeitabhängigen Betonverformungen**

In Anlehnung an Abschnitt 6.1.2.1 erfolgten die Berechnungen für die Grenzwerte starrer Verbund und ohne Verbund sowie die Dübelsteifigkeiten C = 300 kN/cm und C = 3.000 kN/cm.

In SOFISTIK wurde der Verbundträger durch Finite Elemente diskretisiert und mit dem Modul ASE (Allgemeine Statik Finiter Element Strukturen (V11.54)) berechnet. Die Verbindung zwischen Betonplatte und Stahlträger wurde dabei durch Federelemente realisiert. Analog den Simulationsberechnungen erfolgte die Analyse des zeitabhängigen Betonverhaltens unter

Vorgabe der Endkriechzahl und des Endschwindmaßes ebenfalls in 72 Kriechintervallen mit einem Relaxationsbeiwert von 0,8.

In den folgenden Bildern sind die zeitliche Entwicklung der Normalkraft im Betongurt und der Trägerdurchbiegungen in Feldmitte sowie die Schlupfentwicklung am Trägerrand für die genannten Berechnungsmethoden vergleichend gegenübergestellt.

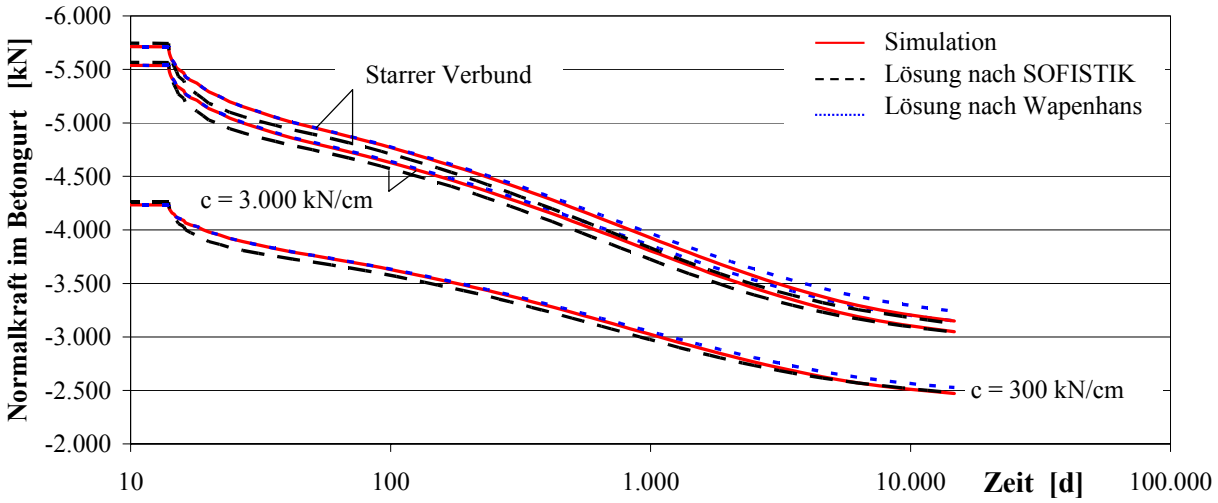



**Bild 6.12: Zeitlicher Verlauf der Normalkraft im Betongurt in Feldmitte**

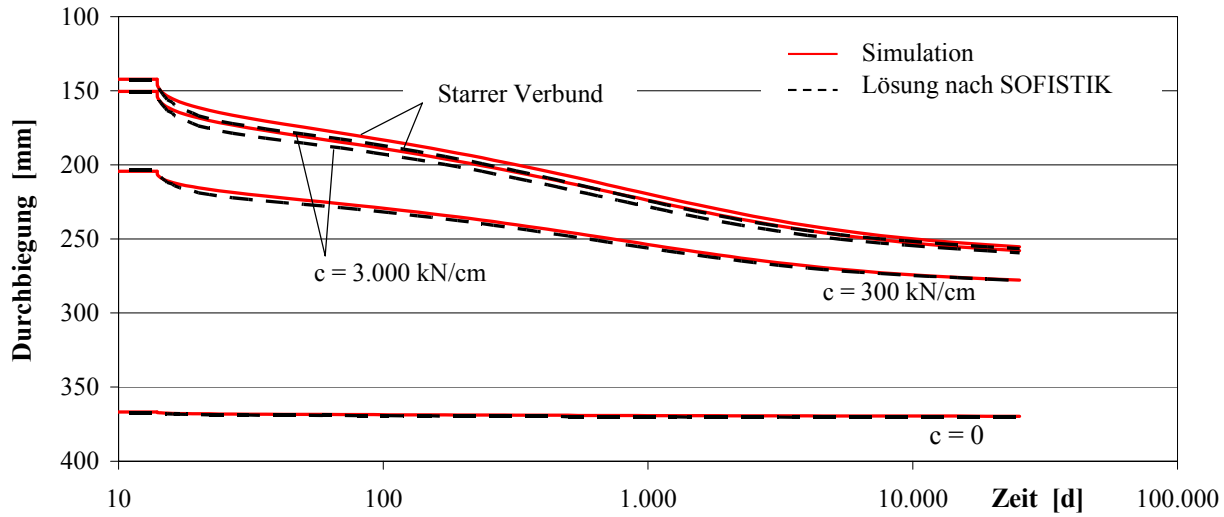



**Bild 6.13: Zeitlicher Verlauf der Trägerdurchbiegung in Feldmitte**

Eine nachgiebige Verbundfuge bewirkt gegenüber dem starren Verbund eine verminderte Behinderung der zeitabhängigen Betonverformungen im Querschnitt. Daraus resultiert eine Abnahme der Umlagerungsgrößen mit zunehmender Nachgiebigkeit sowie eine Zunahme der Verformungskenngrößen Durchbiegung und Schlupf mit abnehmender Verbundsteifigkeit. Der fehlende und der starre Verbund stellen dabei die Grenzwerte dar. Grundsätzlich sind diese Zusammenhänge aus den dargestellten Zeit-Verformungs- bzw. -Schnittkraft-Verläufen für unterschiedliche Verbundsteifigkeiten unabhängig vom Lösungsansatz deutlich erkennbar.

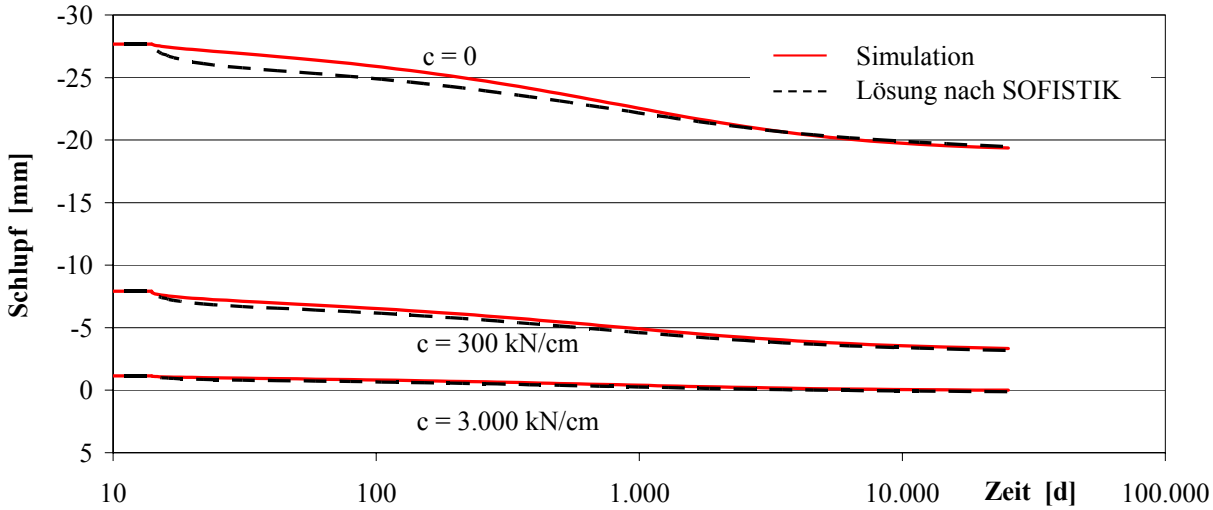



**Bild 6.14: Zeitlicher Verlauf des Schlupfes am Trägerrand**

Insgesamt ist auch zwischen den einzelnen Berechnungsmethoden eine sehr gute Übereinstimmung im zeitlichen Verlauf und insbesondere der Endwerte der dargestellten Systemkenngrößen erkennbar. Die Normalkraftumlagerungen der beiden numerischen Verfahren sind dabei am Ende des Untersuchungszeitraumes etwas größer als bei der geschlossenen Lösung. In Anbetracht der unterschiedlichen Vorgehensweisen bei der Systemdiskretisierung und den zugrunde liegenden numerischen Lösungsmethoden stellt dieses Ergebnis grundsätzlich eine Bestätigung des vorgestellten Lösungsalgorithmus dar.

Die größten Abweichungen zwischen dem Simulationsverfahren dieser Arbeit und SOFISTIK sind im Zeitraum bis etwa 100 Tage zu erkennen. Sie betragen bei der Normalkraft im Betongurt etwa 3 %. Dabei sind die Differenzen zur Lösung mit SOFISTIK auf die durch das Einschrittverfahren bedingte Definition eines Relaxationsbeiwertes zurückzuführen. Im physikalischen Sinne erfasst dabei dieser Beiwert die durch die Alterung verminderte Kriechfähigkeit des Betons im Belastungszeitraum. Er schwankt nach TROST [140] zwischen den Grenzen von 0,6 und 1 und wird für praktische Berechnungen vereinfacht mit 0,8 angegeben. Werden allerdings wie zu Beginn dieses Beispiels auch sehr kleine Zeitschritte analysiert, tendiert der Beiwert gegen 1 (nach BLESSENOHL [14] für $\Delta t_i \leq 5$ Tage). Die für alle Rechenschritte gleichermaßen geltende Annahme von 0,8 liefert deshalb im frühen Belastungsalter zu große Umlagerungen.

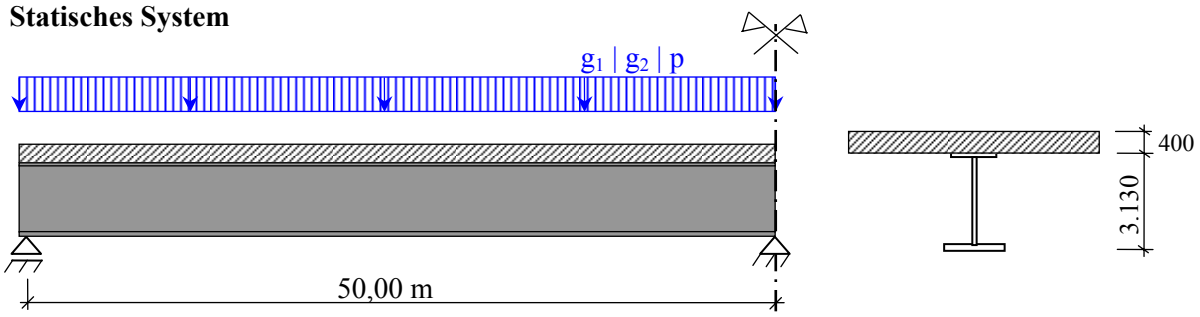
### 6.1.3 Einfluss der Werkstoffmodellierung des Stahlbetons auf den zeit- und lastabhängigen Systemzustand eines Zweifeldträgers

Am Beispiel eines zweifeldrigen Stahl-Beton-Verbundträgers mit starrem Verbund wird im Folgenden die Veränderung der Systemzustandsgrößen in Abhängigkeit vom Detailierungsgrad bei der modellhaften Abbildung einzelner Materialphänomene des Werkstoffes Beton bzw. Stahlbeton betrachtet. Dazu wurde auf die Auswirkungen der nachstehenden Detailmodelle näher eingegangen.

- Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (TS)
- Zugkriechen (ZK)
- Verbundkriechen (VBK)
- Zeitliche Entwicklung der mechanischen Werkstoffeigenschaften des Betons (B{t})

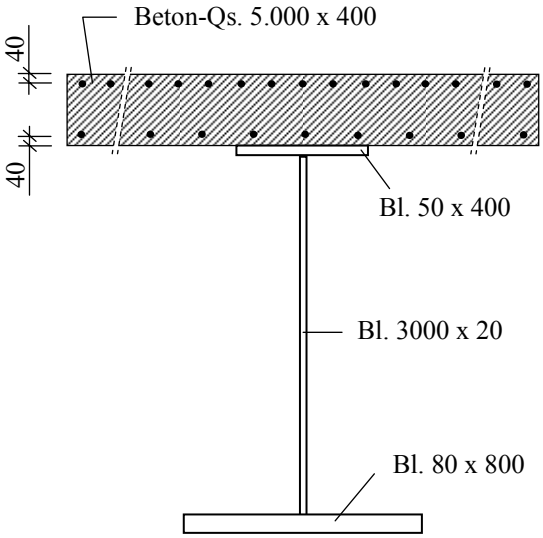
In Bild 6.15 sind das System und die Eingangsgrößen des verwendeten Zweifelträgers sowie die erforderlichen Eingangsgrößen dargestellt. Das Beispiel wurde in leicht modifizierter Form der Arbeit von FLEDERER [49] entnommen.

**Statisches System**




**Eingangsgrößen**

| | |
|---|---|
| Beton: | C30/37 (DIN 1045) |
| $f_{cm}$ | 38 N/mm² |
| $f_{ctm}$ | 2,90 N/mm² |
| $E_{cm}$ | 31.940 N/mm² |
| Zementtyp/-erhärtung | normal |
| Baustahl: | S 355 |
| $f_{aym}$ | 355 N/mm² |
| $E_{am}$ | 210.000 N/mm² |
| Betonstahl: | BSt 500 B |
| $f_{sym}$ | 595 N/mm² |
| $E_{sm}$ | 200.000 N/mm² |
| obere Lage | 41 Ø 18 (s = 120 cm) |
| untere Lage | 25 Ø 18 (s = 200 cm) |
| Untersuchungszeitraum: | 3.650 Tage (10 Jahre) |
| relative Luftfeuchte: | 81,1 % |




**Belastungen**

| Lastart | Wert [kN/m] |
|---|---|
| Eigenlast $g_1$ | 62,62 |
| Ausbaulast $g_2$ | 25,00 |
| Nutzlast p | 10,00 |

**Bild 6.15: System und Eingangsgrößen**

| Kenngröße | Wert |
|---|---|
| Schwindansatz/Kriechansatz nach: | MODELCODE90/RS-Modell |
| Querschnittsschichtung Beton: | 20 Schichten gleichverteilt |
| Referenzachse | Lagerachse |
| Parameter $\gamma$ des Tension-Stiffening Modells (Bild 3.42): | 0,7 |
| Parameter der Schrittweitensteuerung: | $\Delta\varphi_K = 0{,}1 \mid \Delta\varepsilon_S = -1\cdot10^{-5} = 30$ Zeitschritte |
| Laststufen Belastung: | 10 |
| Maximale Anzahl der Iterationen/Abbruchkriterium: | $i_{max} = 50/\ \eta_{zul} = 1\cdot10^{-2}$ |

**Tabelle 6.2: Parameter der Simulationsrechnung**

### 6.1.3.1 Verbundträger mit Eigenlastverbund

In einer ersten Beispielrechnung erfolgt die Herstellung des Verbundträgers im Eigenlastverbund. An diesem System werden die Auswirkungen der Materialphänomene Zugkriechen, Verbundkriechen und Tension-Stiffening auf den zeitabhängigen Systemzustand analysiert und einer Berechnung ohne diese Parameter gegenübergestellt.

Der Bauablauf ist folgender: Zum Zeitpunkt $t_1 = 14$ d wird der Träger mit seiner Eigenlast beansprucht; dieser Zeitpunkt entspricht auch dem Kriech- und Schwindbeginn ($t_0$, $t_S$). 14 Tage später kommt die Ausbaulast $g_2$ hinzu ($t_2 = 28$ d) und nach weiteren 14 Tagen eine Nutzlast p ($t_3 = 42$ d).

Für ausgewählte Systempunkte sind die berechneten Spannungen, Verformungen und Schnittgrößen sowie deren zeitliche Entwicklung in den nachfolgenden Abbildungen veranschaulicht.

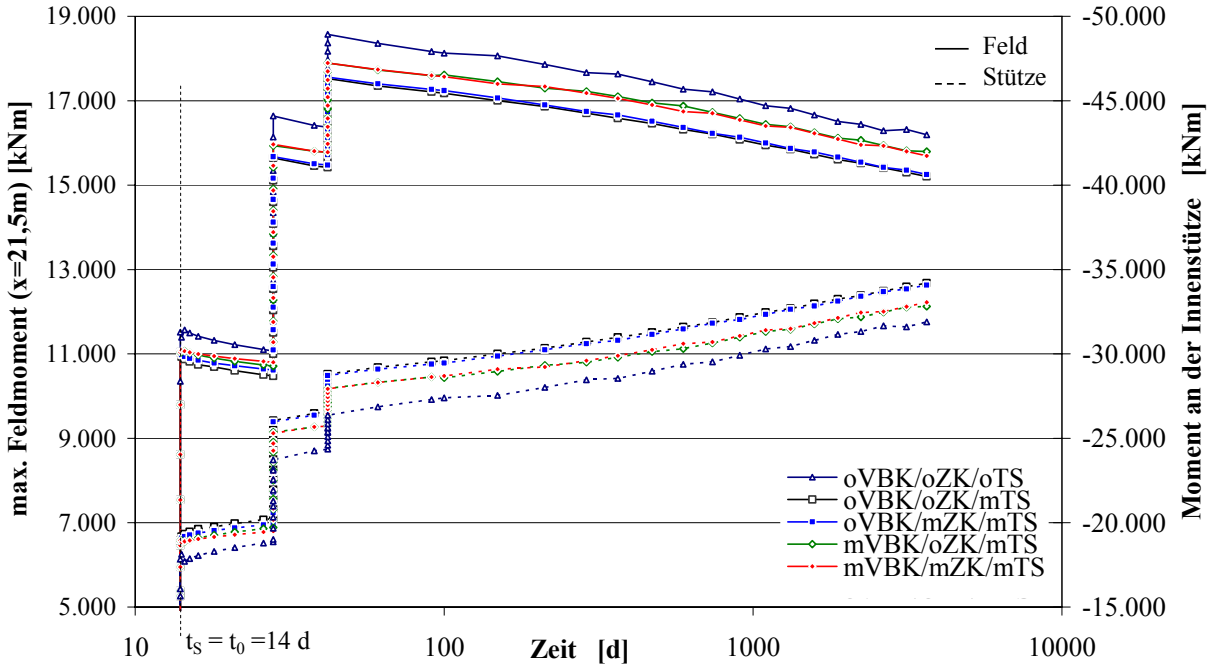



**Bild 6.16: Zeitliche Entwicklung des Biegemomentes an der Innenstütze und im Feld bei x = 21,5 m**

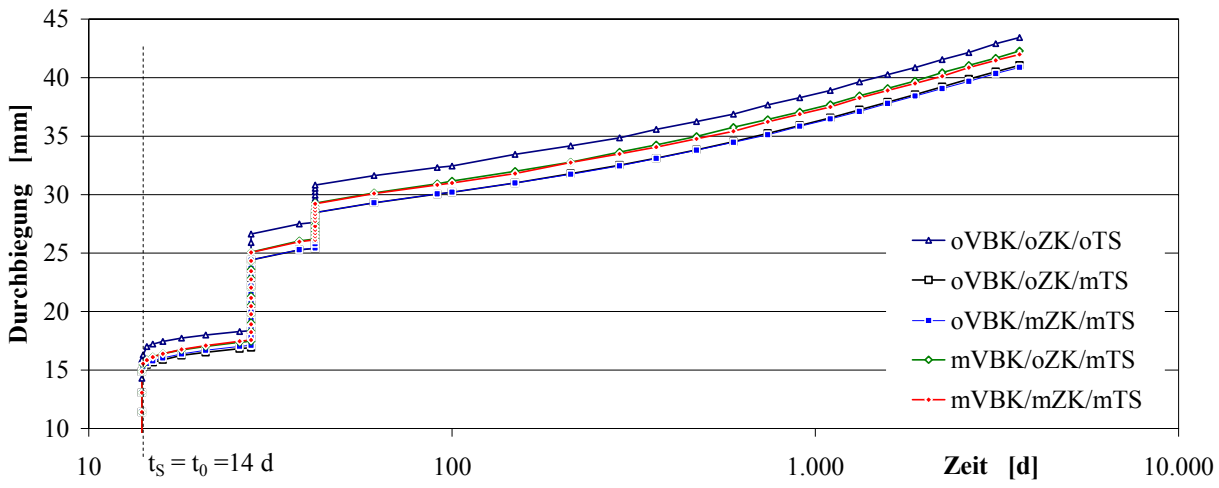



**Bild 6.17: Zeitliche Entwicklung der maximalen Trägerdurchbiegung im Feld (x = 21,5 m)**

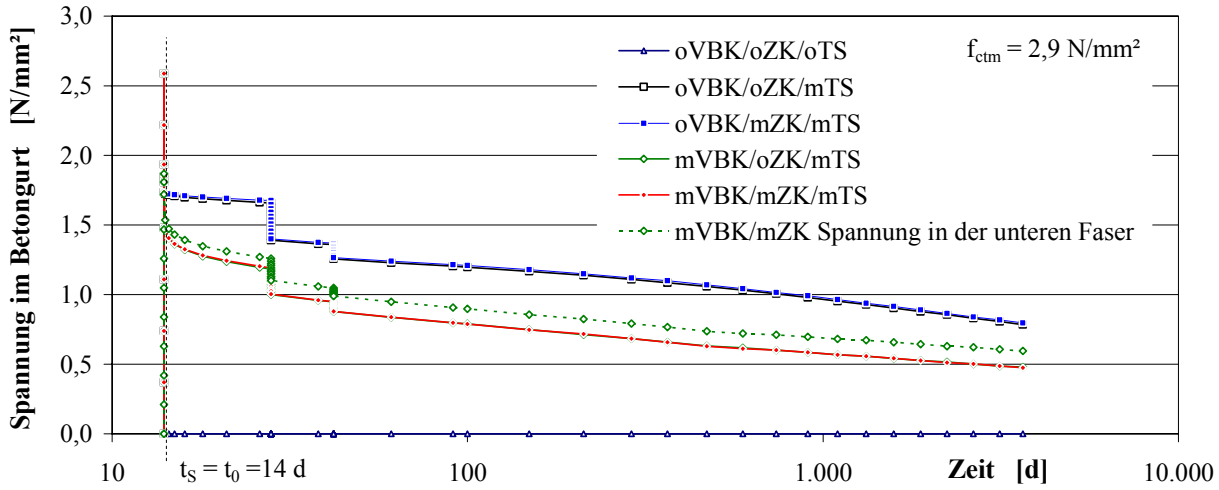



**Bild 6.18: Zeitliche Entwicklung der Spannung im Betongurt - obere Faser an der Innenstütze**

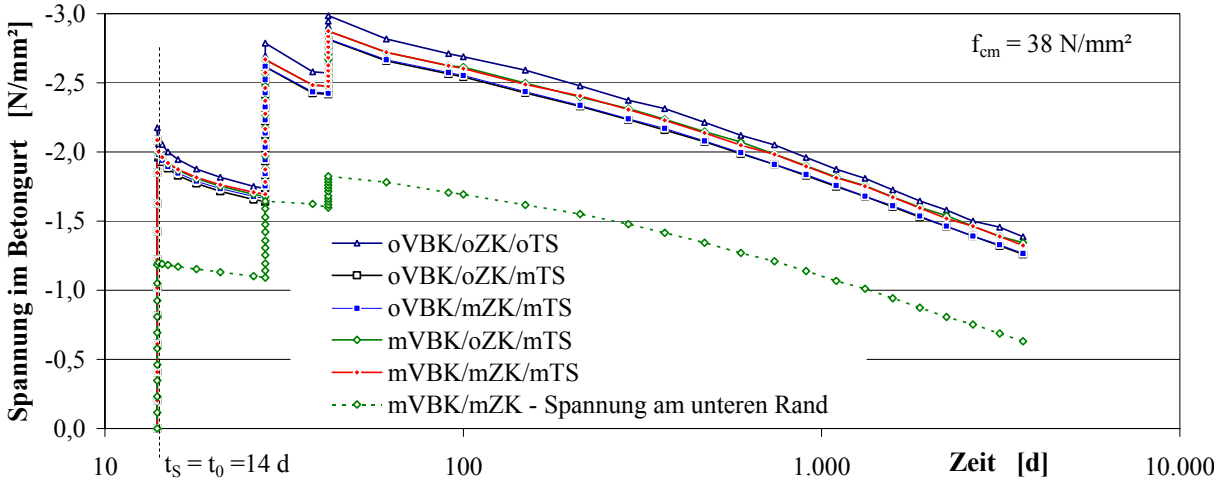



**Bild 6.19: Zeitliche Entwicklung der Betonspannung - obere Faser im Feld (x = 21,5 m)**

Die Entwicklung der dargestellten Systemkenngrößen ist im jungen Belastungsalter maßgebend durch das Aufbringen der äußeren Beanspruchungen geprägt. Bereits unter der Eigenlast kommt es dabei zu einer ersten Rissbildung im Bereich der Zwischenauflagerung des Trägers. Für die Berechnung ohne den Einfluss des Tension-Stiffening (oVKB/oZK/oTS) ergeben sich mit der Zeit erwartungsgemäß die geringsten, im Fall des Tension-Stiffening ohne Zug- und Verbundkriechen (oVKB/oZK/mTS) die größten Systemumlagerungen.

Die Auswirkungen des Zugkriechens sind in diesem Beispiel für den gesamten Untersuchungszeitraum vernachlässigbar gering. Dieses Verhalten ist auf die bereits im jungen Belastungsalter sehr ausgeprägte Rissbildung im zugbeanspruchten Bereich der Zwischenauflagerung und die große Druckbeanspruchung im Betongurt zurückzuführen.

Das Verbundkriechen führt gegenüber einer Lösung ohne diese Komponente zu einer Abnahme des Tension-Stiffening-Effekts. Daraus resultieren im System eine deutlichen Zunahme der Verformungen sowie eine Verringerung der Schnittgrößenumlagerungen und der Spannungsanteile im Betongurt nach der Rissbildung. Diese Abweichungen betragen für die Schnittgrößen und Verformungen am Ende des Betrachtungszeitraumes nur etwa 4 %. Demgegenüber ist bei den Betonspannungen im gerissenen Bereich (Bild 6.18) durch das Verbundkriechen eine deutliche Reduktion der Spannungsanteile im Beton erkennbar. Die Differenz beträgt im Beispiel etwa 65 %. Für die Vorhersage von Rissbreiten ist eine Berücksichtigung des Verbundkriechens damit unerlässlich. Da das Verbundkriechen unter Dauerlast bereits nach zirka einem Jahr einen Endwert zustrebt (in der verwendeten funktionalen Beziehung 450 Tage), ist für größere Belastungszeiträume nur noch eine geringe Veränderung der genannten Differenzen zwischen den Systemkenngrößen zu verzeichnen.

#### 6.1.3.2 Herstellung mit und ohne Eigenlastverbund

In einem zweiten Beispiel wird die Herstellung des Verbundträgers mit und ohne Eigenlastverbund gegenübergestellt. Bei fehlendem Eigenlastverbund werden dabei außerdem die Auswirkungen einer zeitlichen Entwicklung der mechanischen Werkstoffkenngrößen des Betons sowie der Einfluss der Hydratationswärmeentwicklung (HyW) auf den sich einstellenden Spannungszustand näher untersucht. Um insbesondere den Einfluss der Festigkeits- und Steifigkeitsentwicklung in den ersten Tagen der Betonerhärtung herauszustellen, wird der Bauablauf gegenüber Abschnitt 6.1.3.1 folgendermaßen modifiziert: Die Eigenlast des Trägers wird zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ d aufgebracht, nach einem Tag beginnt das Schwinden ($t_S = 1$ d). Der Ausbaulastfall $g_2$ und damit der kriechauslösende Erstbelastungszeitpunkt $t_0$ werden nach drei Tagen wirksam ($t_2 = 3$ d). Weitere 14 Tage später kommt die Nutzlast p hinzu ($t_3 = 17$ d). Die Hydratation wird vereinfacht durch ein resultierendes Hydratationsmaß $\varepsilon_H = -14 \cdot 10^{-5}$ abgebildet und 5 Tage nach dem Betonieren wirksam (Betonieren im Winter, siehe Abschnitt 3.1.5.3).

Die Systemzustandsanalyse erfolgt unter Berücksichtigung des Verbund- und Zugkriechens sowie mit einer faserweisen Berechnung der Kriechverformungen. Analog den vorangegangenen Abschnitten fokussieren sich die nachfolgenden Darstellungen der berechneten Systemkenngrößen auf das Biegemoment und die Spannungsentwicklung im Betongurt und im Stahlquerschnitt über dem Zwischenauflager und im Feldbereich sowie die maximalen Trägerdurchbiegungen im Feld.

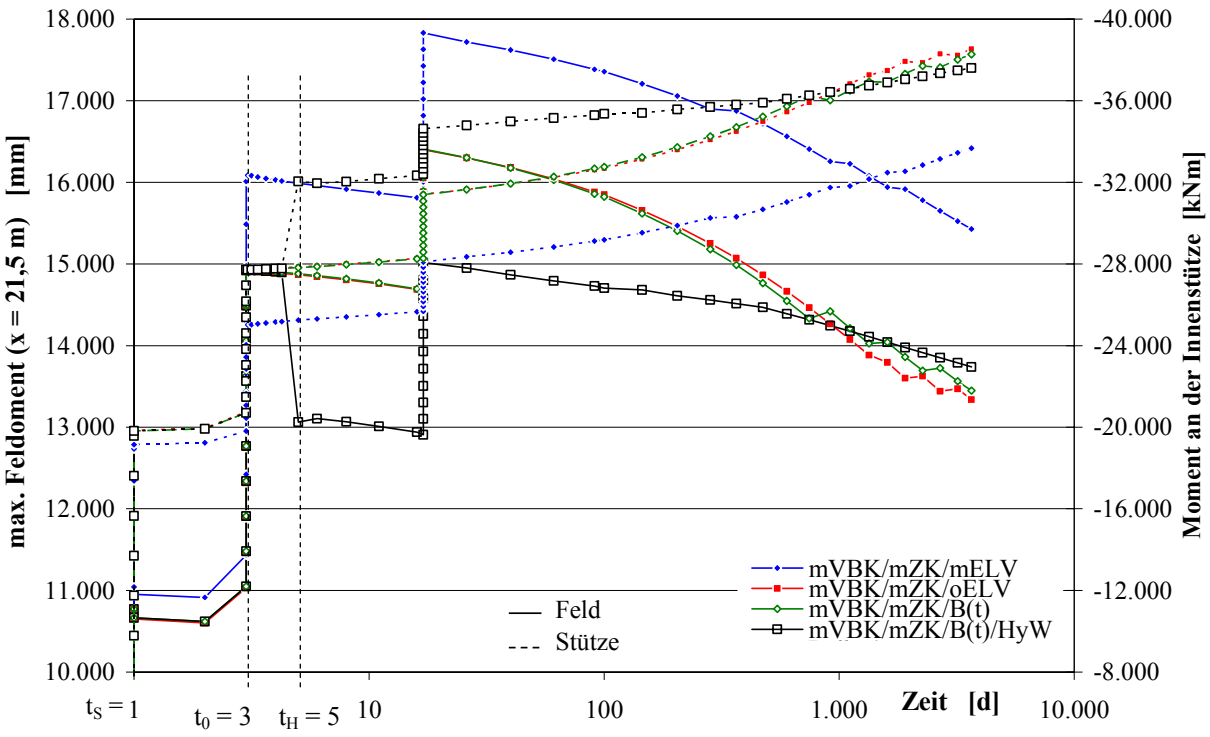



**Bild 6.20: Biegemoment an der Innenstütze und im Feld bei x = 21,5 m**

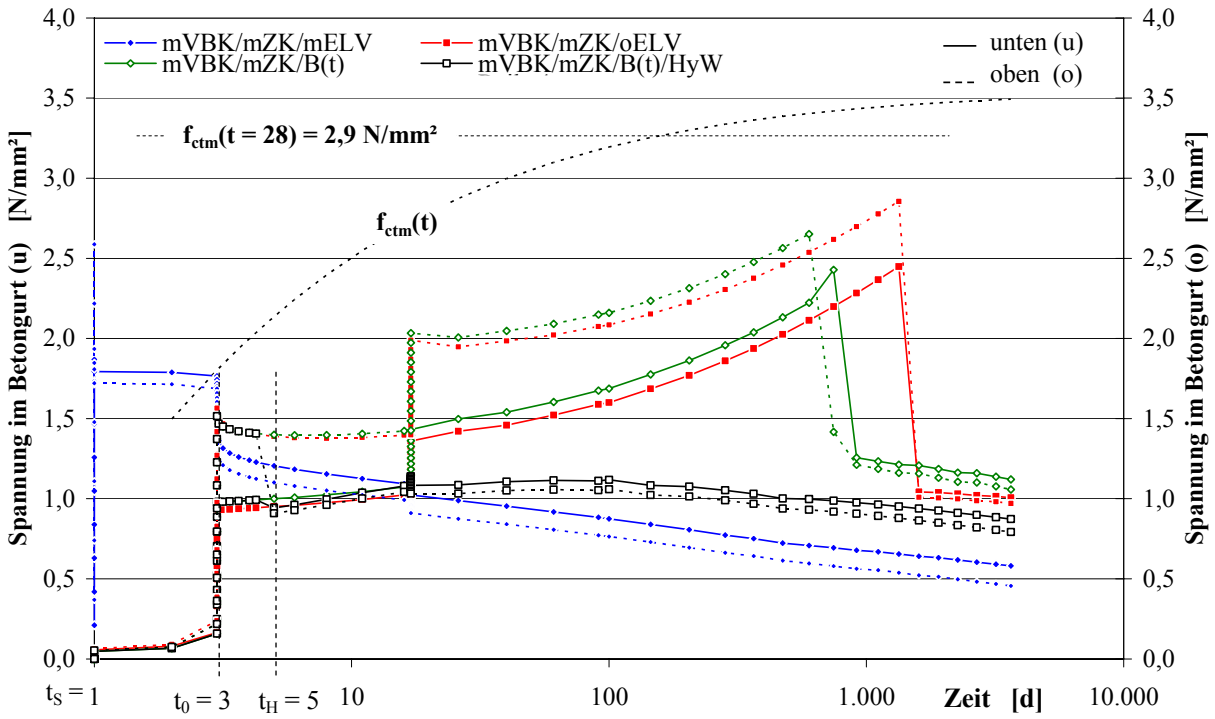



**Bild 6.21: Zugspannung im Betongurt – obere und untere Faser an der Innenstütze**

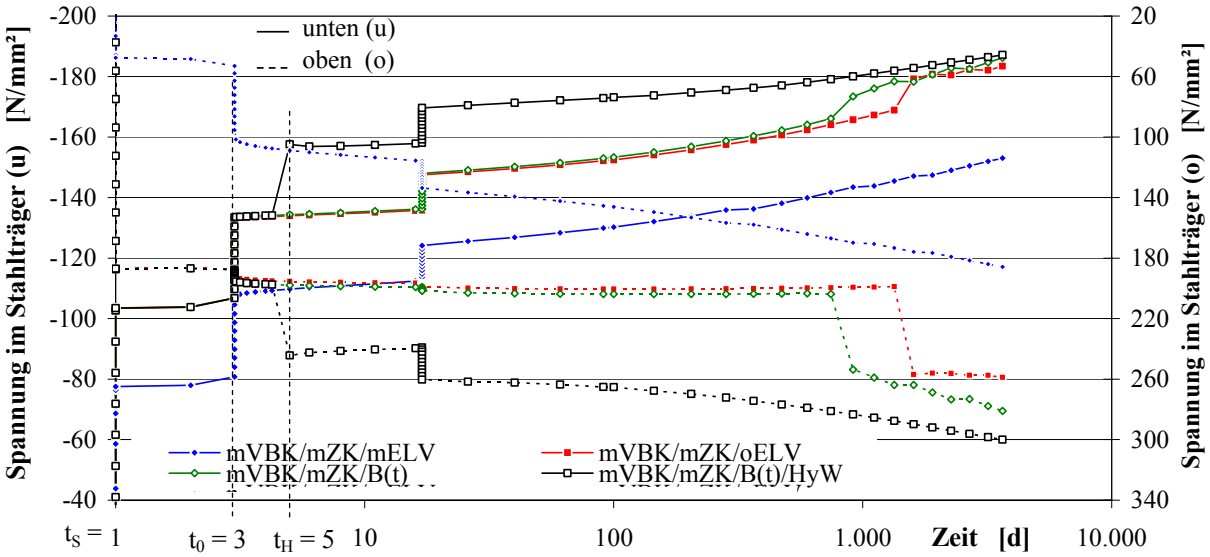



**Bild 6.22: Spannung im Stahlträger – obere und untere Faser an der Innenstütze**

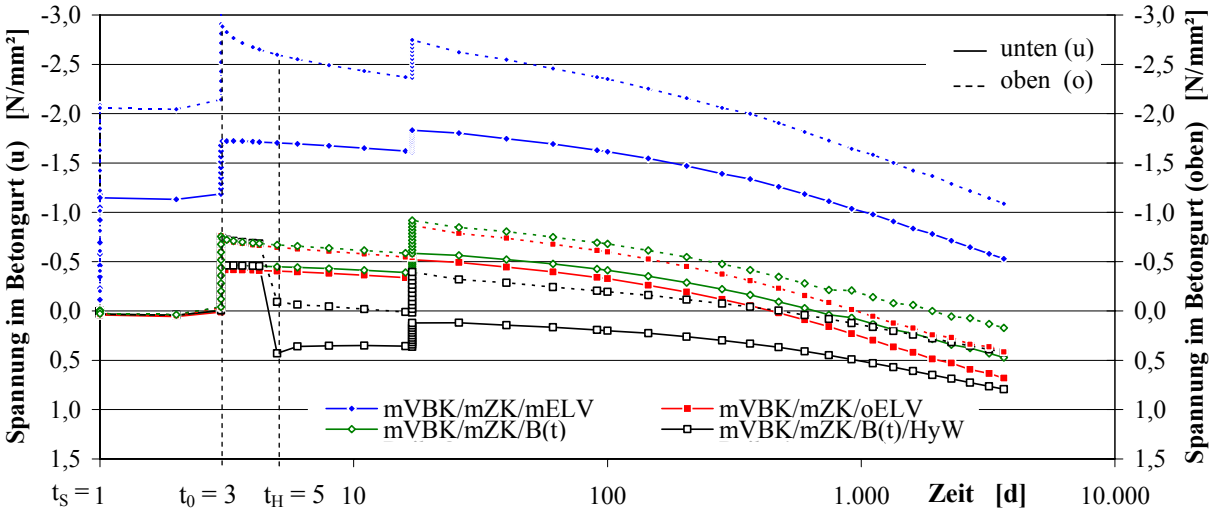



**Bild 6.23: Druckspannung im Betongurt – obere und untere Faser im Feld (x = 21,5 m)**

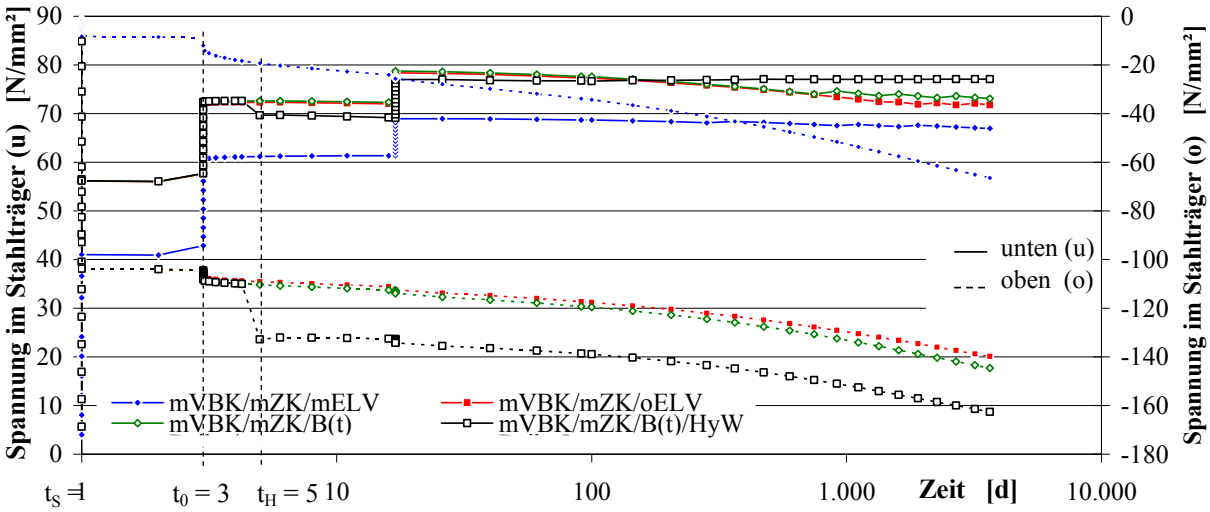



**Bild 6.24: Spannung im Stahlträger – obere und untere Faser im Feld (x = 21,5 m)**

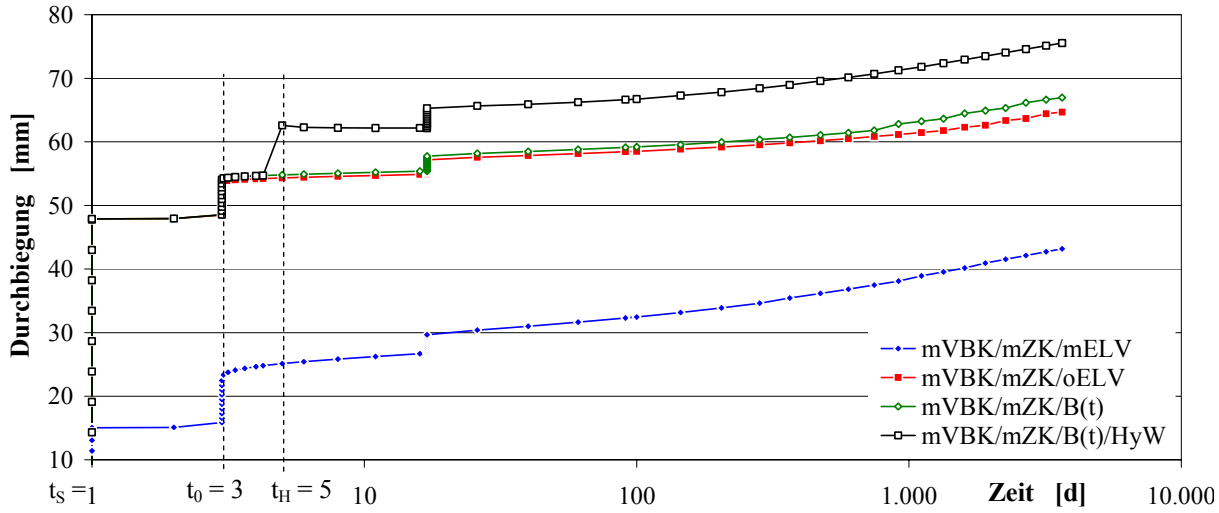



**Bild 6.25: Maximale Trägerdurchbiegung im Feld (x = 21,5 m)**

Analog zu Abschnitt 6.1.3.1 ist das Trag- und Verformungsverhalten des mit Eigenlastverbund hergestellten Verbundträgers durch die frühe Rissbildung bereits beim Aufbringen der Eigenlasten geprägt. Infolge der von Beginn an vorhandenen Verbundträgersteifigkeit sind die Verformungen des Stahlträgers gegenüber dem fehlenden Eigenlastverbund deutlich kleiner, die Schnittgrößen- und Spannungsumlagerungen dagegen größer.

Der Eigenlastverbund bewirkt gegenüber den anderen Lösungen eine höhere Druckbeanspruchung des Betongurtes. Kriechbedingt resultieren daraus im Weiteren größere Spannungsumlagerungen im Querschnitt vom Beton zum Stahl (primäre Beanspruchungen). Aus den Bilder 6.23 und 6.24 ist dies deutlich sichtbar. Die aus der frühen Rissbildung im Bereich der Zwischenauflagerung resultierende Steifigkeitsreduktion wirkt der kriech- und schwindbedingten Umlagerung im System entgegen. Beim Biegemoment sind deshalb die Umlagerungen im System den Lösungen ohne Eigenlastverbund gegenüber etwas geringer. Die größeren Systemumlagerungen beim fehlenden Eigenlastverbund begründen sich dabei vor allem durch die relativ spät einsetzende Rissbildung (ca. 1.000 d).

Die Lösungen ohne Eigenlastverbund mit konstanten und zeitveränderlichen mechanischen Werkstoffkenngrößen des Betons weisen nur geringe Differenzen auf. Mit einsetzender Rissbildung im Betongurt nehmen diese zum Ende des Betrachtungszeitraumes zu. Die Rissbildung setzt dabei zuerst bei der Lösung mit zeitveränderlichen Werkstoffkenngrößen ein.

Die abfließende Hydratationswärme bewirkt mit dem Aufbringen eine Rissbildung im Betongurt, welche den weiteren Systemzustand erheblich prägt. Die Folgen sind zunächst eine deutliche Zunahme der Trägerdurchbiegungen sowie Schnittgrößenumlagerungen vom Feld- in den Stützenbereich, die Beanspruchungen des Stahlträgers nehmen zu. Infolge der Rissbildung reduzieren sich jedoch im Weiteren die kriech- und schwindbedingten Systemumlagerungen, so dass die anfänglich großen Differenzen zu den Systemgrößen der anderen Lösungen ohne Eigenlastverbund mit der Zeit abnehmen.

## 6.2 Anwendungen

### 6.2.1 Gegenüberstellung von Messung und Simulation am Beispiel der Unionbrücke Dresden-Radebeul

Dieses Beispiel demonstriert, wie mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Lösungsverfahren sehr komplexe Bauabläufe analysiert werden können. Unter Verwendung eines Schalwagens wurde die Betonfahrbahnplatte der untersuchten Brücke abschnittsweise hergestellt (kein Eigenlastverbund). Für eine realitätsnahe Systemanalyse ist dabei die Berücksichtigung der versteifenden Wirkung der Schalwagenkonstruktion unerlässlich. Baubegleitend durchgeführte Verformungsmessungen ermöglichten in diesem Zusammenhang neben einem Vergleich von Messung und Rechnung auch eine Abschätzung des erforderlichen Modellierungsaufwandes.

***Bauwerk***

Die Unionbrücke Dresden-Radebeul ist eine Autobahnbrücke, welche im Zuge des sechsspurigen Ausbaus der Bundesautobahn A4 neu entstand und im März 2001 dem Verkehr übergeben wurde. Sie besteht aus zwei getrennten Stahl-Beton-Verbundüberbauten. Der Überbau ist in den Achsen 500 und 800 auf massiven Pfeilerscheiben gelagert. In den Achsen 200 bis 400 sowie 600 und 700 befinden sich je zwei schlanke Stahlverbundstützen, in den Achsen 100 und 900 befinden sich die Widerlager. Der Festpunkt der Brücke liegt in der Pfeilerscheibe 500. Tabelle 6.3 beinhaltet die wesentlichen Bauwerksdaten.

| | |
|---|---|
| Gesamtlänge: | 255,52 m, Radius = 2500 m |
| Statisches System: | Durchlaufträger über acht Felder |
| Einzelstützweiten: | zwischen 24,85 m und 35,35 m |
| Lagerung: | Elastomerlager |
| Gefälle: | längs: 0,4 % \| quer: 3 % |
| Querschnitt: | RQ 37,5 halbseitig |

**Tabelle 6.3: Bauwerksdaten der Unionbrücke Dresden-Radebeul**

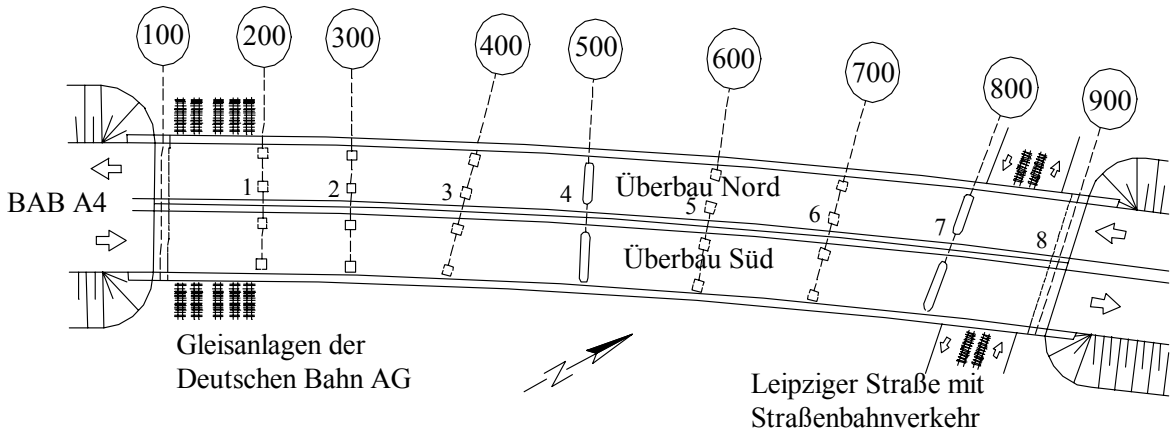



**Bild 6.26: Grundriss Unionbrücke Dresden-Radebeul**

Der Überbauquerschnitt ist ein zweistegiger Plattenbalken aus luftdicht verschweißten Hohlkästen (Beton C35/45 | Betonstahl BSt 500 S | Baustahl S355 J2 G3). Durch unterschiedliche Steg- und Gurtblechdicken sowie abgestufte Lamellenzulagen in den Ober- und Untergurten entstand ein in seinen äußeren Abmessungen konstanter Querschnitt der stählernen Hauptträger. Durch unterschiedlich hohe Hohlkästen wird die Querneigung realisiert. Querträger sind nur in den Stützachsen angeordnet. In Abhängigkeit von der Richtung der Stützenachsen sind die auf der Kurveninnenseite liegenden Hauptträger bis zu 2 m kürzer als die äußeren, die Fahrbahnplatte hat einen in Längsrichtung konstanten Querschnitt. In Querrichtung ist die Platte zu den Hauptträgern hin gevoutet und bedingt durch die große Spannweite in Querrichtung vorgespannt (St 1570/1770). Bild 6.27 zeigt den Regelquerschnitt des im Weiteren betrachteten nördlichen Überbaus.

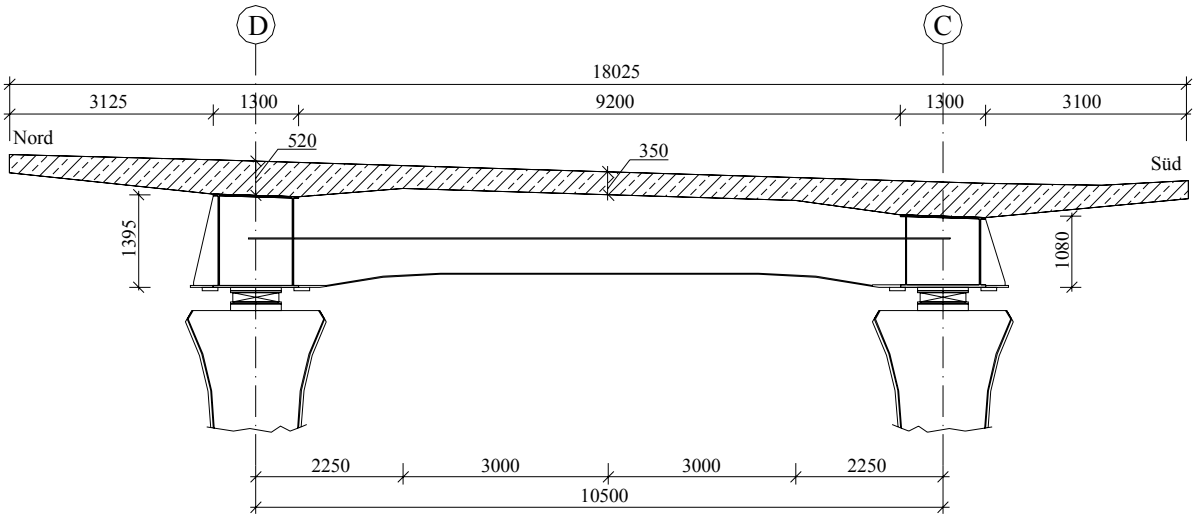



**Bild 6.27: Regelquerschnitt RQ 37,5 halbseitig (Überbau Nord)**

### *Messprogramm*

Vom Lehrstuhl für Stahlbau der TU Dresden wurden im Auftrag der DEGES parallel zum Baufortschritt des Überbaus zu ausgewählten Betonierabschnitten die vertikalen Hauptträgerverformungen ingenieurgeodätisch gemessen und zur Sicherung der Kennwerte für die Rechnungen die Betoneigenschaften bestimmt. Nach der Fertigstellung des Überbaues erfolgten außerdem in größeren Abständen zwei Folgemessungen, um weitere Ausbaustufen zu erfassen. Aufgrund der guten Zugänglichkeit wurden diese Messungen zwischen den Achsen 600 und 800 durchgeführt (Bild 6.28). Weiterhin wurden vor der Verkehrsübergabe im Rahmen einer Probebelastung Dehnungen und Verformungen des Überbaus in dem genannten Messbereich unter einer definierten Belastung ermittelt. Diese dienten der Analyse des Tragverhaltens des Überbaues unter statischer und dynamischer Lasteinwirkung (Lastverteilung, reale Bauwerkssteifigkeit, Eigenschwingverhalten etc.) Die Auswertung dieser Ergebnisse bildete mit Blick auf den erforderlichen Modellierungsaufwand die Basis für Vergleichsrechnungen mit einem Stabwerksmodell. Die daraus gewonnen Erkenntnisse fließen in die später näher beschriebene Modellbildung ein (HANNAWALD ET AL. [59]).

Im Folgenden wird zuerst kurz der Bauablauf und die Einordnung der durchgeführten Messungen in das Bauverfahren dargestellt. Danach werden das daraus abgeleitete Berechnungsmodell sowie die Eingangsgrößen angegeben. Anschließend werden die Messergebnisse einer Berechnung gemäß DIN-FACHBERICHT 104 [46] in Verbindung mit dem Gesamtquerschnittsverfahren (Model 1) und einer Simulationsberechnung mit $C_oB_{eam}NL$ (Modell 2) gegenübergestellt.

### *Bauablauf*

Der Bauablauf stellte sich folgendermaßen dar: Nach Fertigstellung der Widerlager, Pfeilerscheiben und Stützen wurden die Stahlhohlkästen schussweise eingehoben und positioniert, anschließend die Querträger fixiert und alle Stöße verschweißt. Danach wurde die Fahrbahnplatte mit Hilfe einer hierfür entwickelten Schalwagenkonstruktion (Eigengewicht ca. 90 t) im Pilgerschrittverfahren betoniert (Bild 6.28). Bild 6.29 veranschaulicht den beschriebenen Bauablauf zwischen zwei Betonierabschnitten.

Das Betonieren der Abschnitte erfolgte im Abstand von ca. sieben Tagen, drei Tage danach wurde die Fahrbahn in Querrichtung vorgespannt. Am gleichen Tag wurde nach jedem ungeraden Betonierabschnitt zunächst die Zwischenschalung verschoben (Bild 6.29b) und nach jedem Betonierabschnitt der Schalwagen (Bild 6.29c). Die Verformungsmessungen erfolgten direkt nach dem Einbringen des Betons.

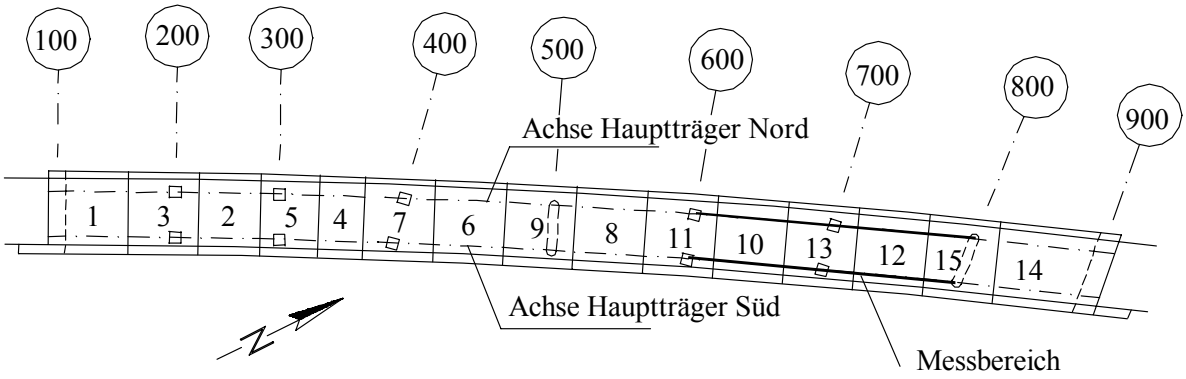
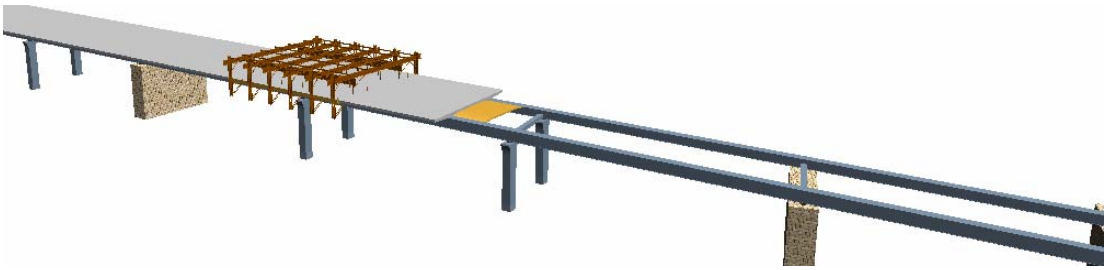


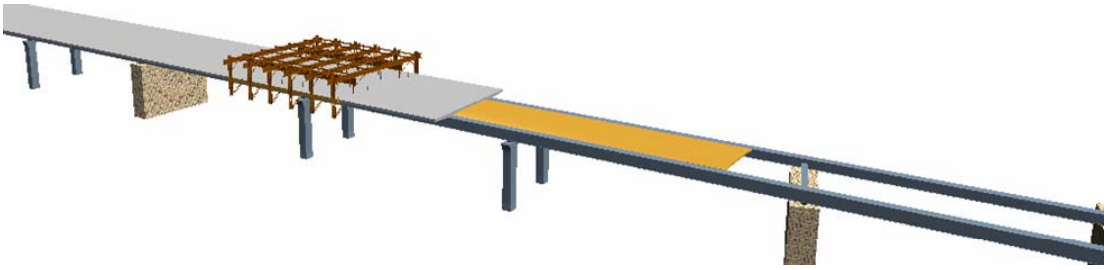

**Bild 6.28: Betonierabschnitte – Pilgerschrittverfahren**

### *Berechnungsmodell und Eingangsgrößen*

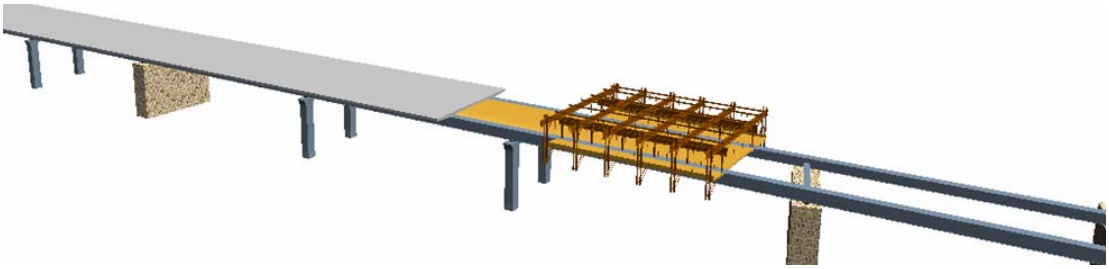
Die Vergleichsrechnungen erfolgten in beiden Fällen an einem ebenen Stabwerksmodell des südlichen Hauptträgers (Achse C). Bezüglich der System- und Querschnittsmodellierung sowie der äußeren Belastungen wurde beiden Lösungsansätzen ein Rechenmodell mit gleichen Eingangsgrößen zugrunde gelegt. Dieses Modell entstand in zwei Studienarbeiten (BROTTKA [21], RICHTER [113]). DIN-FACHBERICHT 104 [46] und dessen Bezugsnormen stellen dabei die Grundlage für normenbasierte Modellparameter und Eingangsgrößen dar. Im Folgenden werden die bemessungsrelevanten Eingangsgrößen wiedergegeben und für die Lösungsverfahren erforderliche modellspezifische Details benannt.



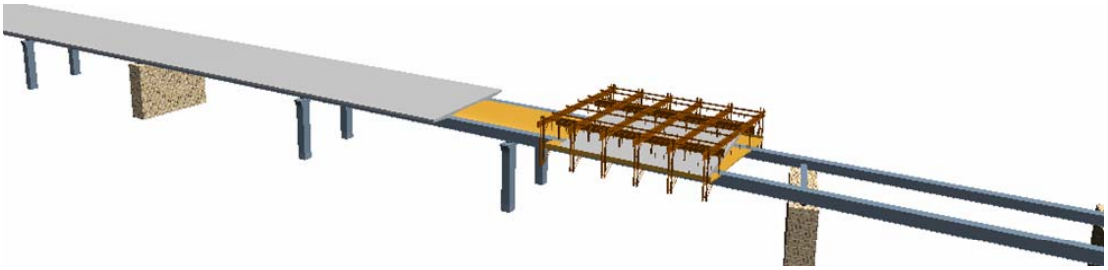
*a) Betonieren von Abschnitt 11*



*b) Verschub der Zwischenschalung*



*c) Verschub des Schalwagens*



*d) Betonieren von Abschnitt 12*

**Bild 6.29: Belastungsänderungen infolge des Herstellungsverfahrens zwischen zwei Betonierabschnitten (Pilgerschrittverfahren) - Überblick**

**Statisches System und Querschnitte:** Der Hauptträger wurde als Durchlaufträger über acht Felder anhand der vorliegenden Konstruktionszeichungen [142] modelliert (Bild 6.30). Die geringe Krümmung des Hauptträgers im Grundriss und die Längsneigung fanden dabei keine Beachtung. Die Querschnitte wurden ebenfalls den Konstruktionszeichnungen [142] entnommen und unter Berücksichtigung der Längsbewehrung sowie der Gurt- und Stegzulagen im Stahlhohlkasten modelliert.

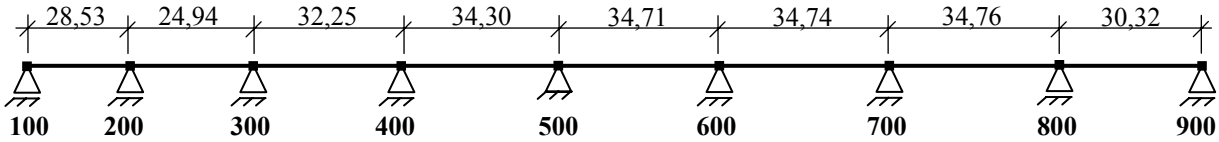



**Bild 6.30: Statisches System und Stützweiten des Hauptträgers Süd, Überbau Nord (in [m])**

Die Schubnachgiebigkeit wurde vereinfacht über die Fläche der Hohlkastenstege abgebildet. Die in Stabwerksmodellen mit breitem Gurt notwendige Annahme einer mitwirkenden Plattenbreite wurde gemäß den Regelungen des DIN-FACHBERICHT 104 [46] idealisiert. Zur Berücksichtigung der Gründungsverhältnisse wurden aus den gemessenen Stützensenkungen vereinfacht lineare Ersatzfedersteifigkeiten ermittelt und in Ansatz gebracht (Verbundstützen: $c_y = 380.000$ kN/m, Pfeilerscheiben $c_y = 760.000$ kN/m). Unter der Annahme eines linear-elastischen Verhaltens der Stützpunktverschiebungen wird damit deren zeit- und lastabhängige Erfassung näherungsweise möglich. In Anlage IV sind die wesentlichen Eingangsgrößen des Systems und der Querschnitte dokumentiert.

**Materialeigenschaften:** Die Materialkennwerte sind den Bezugsnormen des DIN-FB 104 entnommen und in Tabelle 6.4 zusammengestellt. Die baubegleitend durchgeführte experimentelle Ermittlung der Materialeigenschaften Elastizitätsmodul, Zug- und Druckfestigkeit des Betons bestätigt die normativen Regelungen (HANNAWALD ET AL. [59]). Das Schwinden und Kriechen des Betons wurden mit dem Ansatz der DIN 1045-1 [32] erfasst.

| Beton: | C35/45 (DIN 1045-1) |
|---|---|
| $f_{cm}$ | 43 N/mm² |
| $f_{ctm}$ | 3,20 N/mm² |
| $E_{cm}$ | 33.300 N/mm² |
| Zementtyp/-erhärtung | schnell |
| $A_c$ | 3.640.000 mm² |
| $u_c$ | 16.750 mm |
| **Baustahl:** | **S355 J2 G3 (DIN-Fachbericht 103)** |
| $f_{ay}$ | 355 N/mm² |
| $E_a$ | 210.000 N/mm² |
| **Betonstahl:** | **BSt 500 B (DIN 1045-1)** |
| $f_{sy}$ | 500 N/mm² |
| $E_s$ | 200.000 N/mm² |
| Betondeckung oben/unten | 4,5 cm |
| Bewehrung oben/unten | Ø 14 -10 |

**Tabelle 6.4: Materialeigenschaften**

**Bauablauf und Belastungen:** Aus dem in Bild 6.29 dargestellten Bauablauf zwischen zwei Betonierabschnitten resultiert eine Abfolge von Beanspruchungswechseln, die sich folgendermaßen darstellt:

- Einbringen des Betons im betrachteten Abschnitt ($t_{BA(i)} = 0$)
- Drei Tage nach dem Betonieren ($t_{BA(i)} = 3$ d):
  - Quervorspannen der Fahrbahnplatte
  - Umsetzen der Zwischenschalung nach jedem ungeraden Betonierabschnitt - Wirkungsdauer je Position ca. 14 Tage
  - Umsetzen des Schalwagens - Wirkungsdauer je Position ca. sieben Tage.
- Einbringen des Frischbetons im nächsten Abschnitt ca. sieben Tage nach dem Vorangegangenen

Tabelle 6.5 beinhaltet die dem Bauprotokoll [142] entnommenen Betonierzeitpunkte der einzelnen Abschnitte. An diesen Ablauf wurden die Wirkungsdauer der Zwischenschalung und des Schalwagens im Modell angepasst. Der Schalwagen und die Zwischenschalung wurden 14 Tage nach dem Betonieren des letzten Abschnittes entfernt.

Die Länge eines Betonierabschnittes entspricht dabei mit Ausnahme der Randfelder etwa dem Abstand der Viertelspunkte in den Feldern. Die genauen Werte wurden zusammen mit den zugehörigen Positionen des Schalwagens den Schalplänen [142] entnommen.

| BA | Datum | $t_i$ [d] | BA | Datum | $t_i$ [d] | BA | Datum | $t_i$ [d] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17.12.1999 | 0 | 6 | 04.02. 2000 | 48 | 11 | 10.03. 2000 | 83 |
| 2 | 07.01.2000 | 20 | 7 | 11.02. 2000 | 55 | 12 | 17.03. 2000 | 90 |
| 3 | 14.01. 2000 | 27 | 8 | 18.02. 2000 | 62 | 13 | 24.03. 2000 | 97 |
| 4 | 21.01. 2000 | 34 | 9 | 25.02. 2000 | 69 | 14 | 04.04. 2000 | 108 |
| 5 | 28.01. 2000 | 41 | 10 | 03.03. 2000 | 76 | 15 | 13.04. 2000 | 117 |

**Tabelle 6.5: Betonierzeitpunkte**

| | |
|---|---|
| Eigenlasten: | |
| Fahrbahnplatte einschl. Bewehrung und Spannstahl | 90 kN/m |
| Baustahl | $A_a$·78,5 kN/m³ + 10 % für Schotte und Steifen |
| Schalung: | |
| Zwischenschalung | 2,80 kN/m \| Länge 40 m |
| Schalwagen | 17,20 kN/m \| Länge 20 m |
| Schalung und Gerät | 2,90 kN/m \| Länge 20 m |
| Ausbaulasten: | |
| Betonieren der Kappen | 8,60 kN/m \| $t_i$ = 200 d (Juli 2000) |
| Fahrbahnaufbau, Leitplanken, etc. | 16.75 kN/m \| $t_i$ = 275 d (Oktober 2000) |
| Verkehrslasten (nicht kriechwirksam): | |
| Schwerlastfahrzeug (SLF) (72 t) in der rechten Fahrspur (Lastanteil des HT aus Querverteilung 68 %) | 69,50 kN/m \| Länge 7 m |

**Tabelle 6.6: Lastannahmen**

**Regionale Einordnung und Umgebungsbedingungen:** Die baubegleitend ermittelte relative Luftfeuchtigkeit wurde bei der Berechnung der Schwinddehnungen und Kriechbeiwerte berücksichtigt. Dazu wurden die vorliegenden Daten statistisch ausgewertet und als Monatsmittelwerte bereitgestellt. Über den Herstellungszeitraum hinaus fand der Jahresmittelwert der Region Dresden Verwendung.

| Untersuchungszeitraum: | 18.250 Tage (50 Jahre) | | |
|---|---|---|---|
| Umgebungsbedingungen: | | | |
| Monat | rel. Luftfeuchtigkeit [%] | Monat | rel. Luftfeuchtigkeit [%] |
| Dezember | 77 | Mai | 59 |
| Januar | 79 | Juni | 65 |
| Februar | 74 | Juli | 73 |
| März | 81 | August | 63 |
| April | 69 | | |
| Jahresmittel | 75 | | |

**Tabelle 6.7: Umgebungsbedingungen**

**Modell 1:** Das Schwinden und das Kriechen werden mit dem GQV durch ein schrittweises Anpassen der Querschnittswerte in einem Stabwerksprogramm erfasst. Dabei wird vereinfacht von ungerissenem Beton ausgegangen. Wie in Abschnitt 2.2.1.1 erwähnt, ist beim GQV jeder kriechwirksame Beanspruchungswechsel an einem neuen Modell zu erfassen; der damit verbundene Rechenaufwand ist enorm (vgl. RICHTER [113]). Für die Beispielrechnung wurde daher eine in der Praxis übliche Vorgehensweise angewendet, wonach die Auswirkungen des Kriechens an nur einem System analysiert werden (primäre Beanspruchungen). Der umlagerungsbedingte Einfluss sekundärer Beanspruchungen in statisch unbestimmten Systemen wird damit jedoch nur unzureichend erfasst.

**Modell 2:**

| Kenngröße | Wert |
|---|---|
| Querschnittsschichtung Beton: | 21 Schichten gleichverteilt |
| Referenzachse | Lagerachse |
| Parameter $\gamma$ des Tension-Stiffening Modells (Bild 3.42): | 0,7 |
| Parameter der Schrittweitensteuerung: | $\Delta\varphi_K = 0{,}1 \mid \Delta\varepsilon_S = -1\cdot10^{-5}$ |
| Laststufen Belastung/Entlastung: | 2/2 |
| Maximale Anzahl der Iterationen/Abbruchkriterium: | $i_{max} = 50/\ \eta_{zul} = 1\cdot10^{-2}$ |

**Tabelle 6.8: Parameter der Simulationsrechnung**

### *Ergebnisse*

Erste Berechnungen des Tragwerkes mit den Modellen 1 und 2 wiesen den Messungen gegenüber große Verformungsdifferenzen auf. Diese Diskrepanz blieb auch nach Fertigstellung des Überbaus bestehen. Grenzwertbetrachtungen zum Einfluss der Schubnachgiebigkeit, der Materialeigenschaften (Zugfestigkeit, Elastizitätsmodul) sowie dem Langzeitverhalten (Zugkriechen, Verbundkriechen) des Betons ließen keine signifikante Annäherung an die Messwerte erkennen. Dies führte zu der Überlegung, die Steifigkeit der aus Bild 6.29 erkennbaren Schalwagenkonstruktion für die Belastungen aus dem Eigengewicht der Schalwagenkonstuktion und des Frischbetons mit in Ansatz zu bringen. Die Folge sind einerseits geringere Hauptträgerbeanspruchungen und -verformungen im Bereich des zu betonierenden Abschnittes, andererseits werden aber auch die Nachbarfelder und damit auch bereits betonierte Abschnitte während der Bauphase weniger stark beansprucht.

In dem Lösungsverfahren dieser Arbeit wird die Steifigkeit des Schalwagens (Längsträger des Schalwagens (Bild 6.29) Profil HEA 1000) durch das "Freischalten" eines zusätzlichen Stahlteilquerschnittes im betreffenden Trägerabschnitt und Zeitbereich realisiert. Da zwischen Schalwagen und stählernem Hauptträger keine starre Verbindung besteht, wurde im Sinne einer Grenzwertbetrachtung dabei von fehlendem Verbund ausgegangen ($c \rightarrow 0$).

In Bild 6.31 sind exemplarisch die Verformungen in der Mitte von Feld 6 (Achsen 600 bis 700) mit und ohne Berücksichtigung der Schalwagensteifigkeit dargestellt. Ebenfalls enthalten sind die an dieser Stelle gemessenen Verformungen. Es ist deutlich zu erkennen, dass mit dem Ansatz der Schalwagensteifigkeit die gemessenen Verformungen auch rechnerisch nachvollziehbar sind. Bei allen weiteren Simulationsrechnungen mit Modell 2 wurde dieser Effekt deshalb berücksichtigt.

Die simulierte Überfahrt eines Schwerlastfahrzeuges liefert in beiden Fällen eine Verschiebungsamplitude von 9,1 mm, gemessen wurde eine Verschiebung von 8,6 mm.

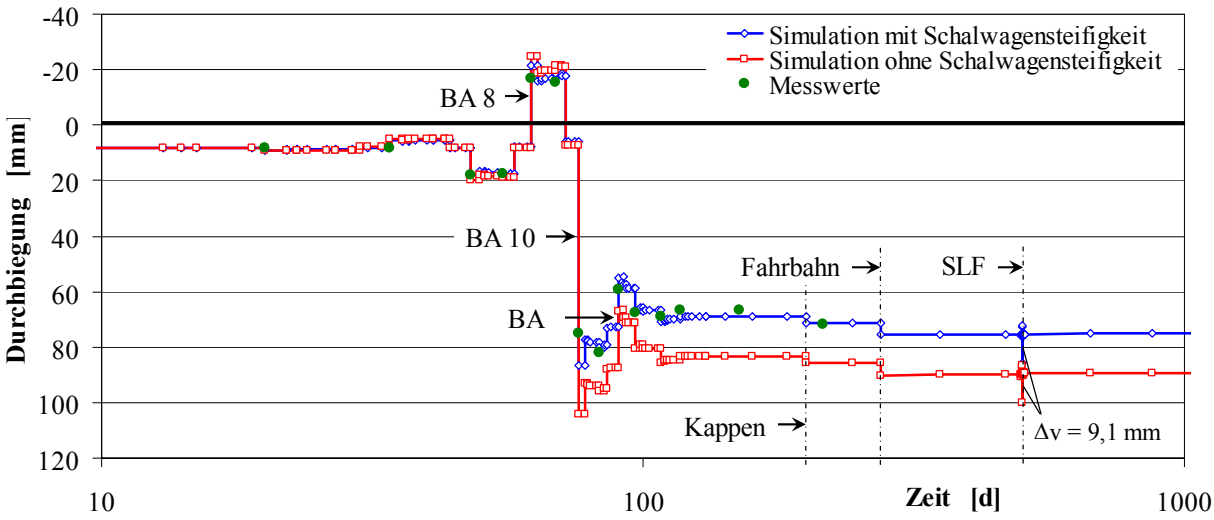



**Bild 6.31: Zeitliche Entwicklung der Trägerdurchbiegung in der Mitte von Feld 6 (Stützen 600-700)**

Die folgenden Abbildungen stellen die gemessenen Hauptträgerverformungen den rechnerischen Prognosen zu den Betonierabschnitten 10 bis 12 und nach dem Aufbringen der Kappen für den Messbereich und seine Nachbarfelder gegenüber.

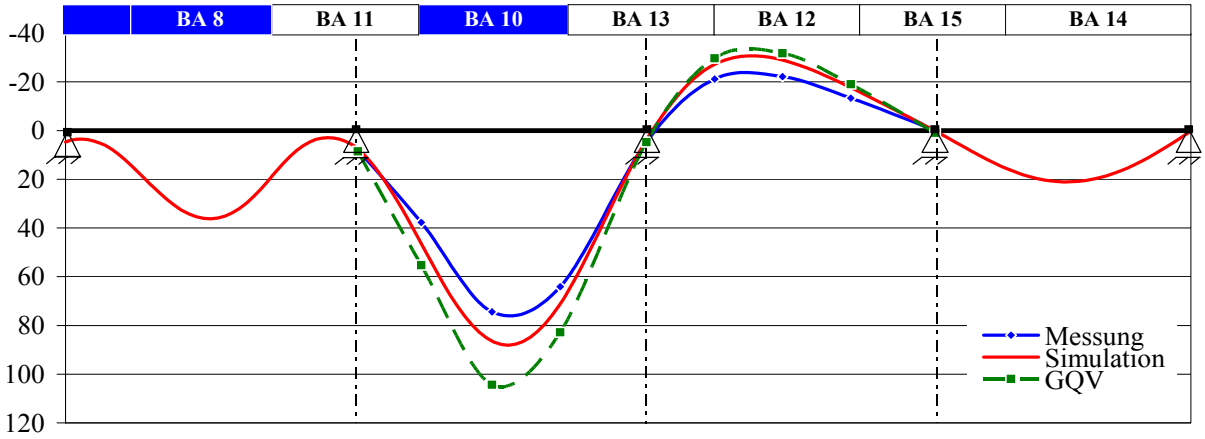



**Bild 6.32: Trägerdurchbiegung nach Betonage BA 10 ($t_i$ = 76 d)**

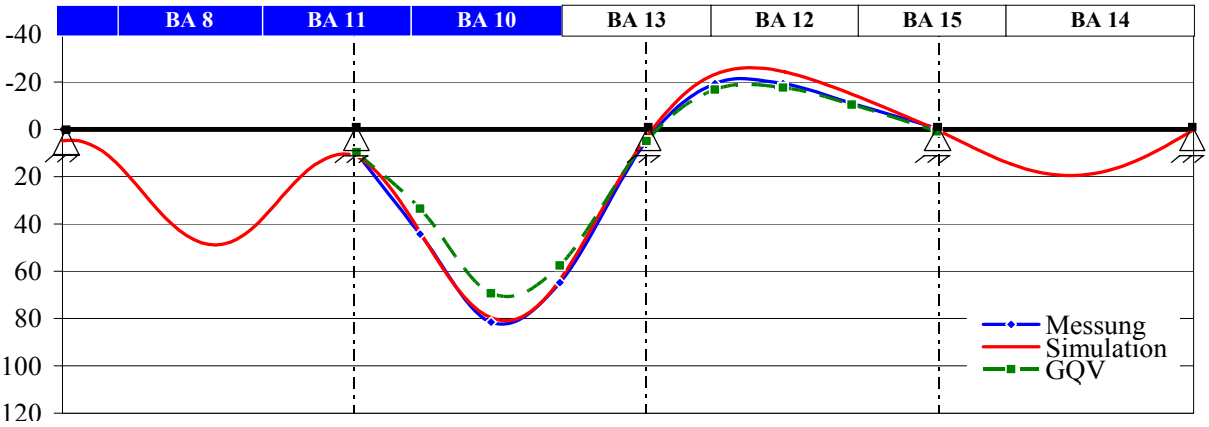



**Bild 6.33: Trägerdurchbiegung nach Betonage BA 11 ($t_i$ = 83 d)**

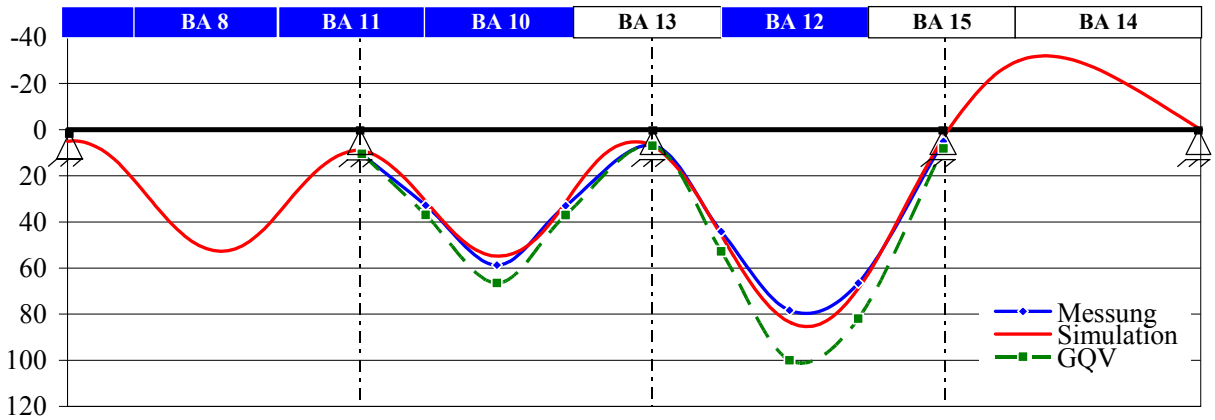



**Bild 6.34: Trägerdurchbiegung nach Betonage BA 12 ($t_i$ = 90 d)**

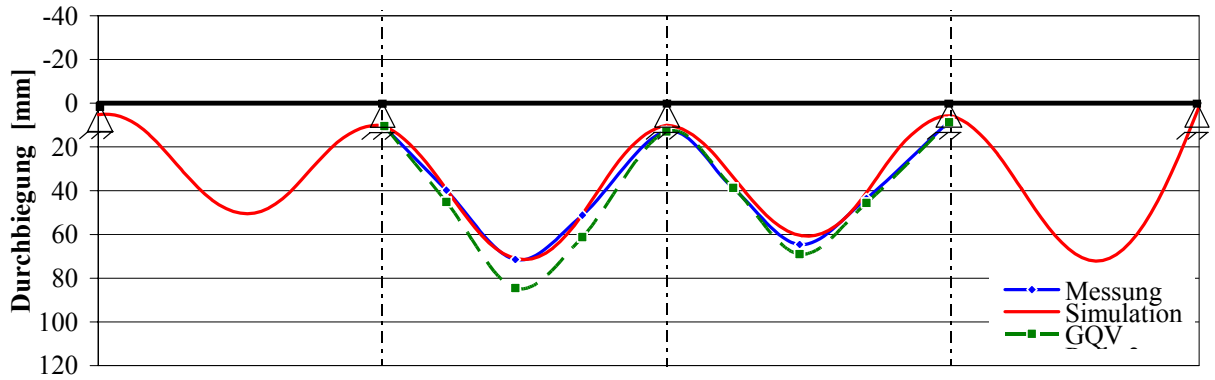



**Bild 6.35: Trägerdurchbiegung nach der Fertigstellung der Kappen ($t_i$ = 200 d)**

Insgesamt ist für den Messbereich eine gute Übereinstimmung zwischen der Messung und dem Modell 2 sichtbar. Die maximale Verformungsdifferenz in der Mitte von Feld 6 beträgt unter der Frischbetoneigenlast des BA 10 12 mm (~16 %). Die großen Abweichungen mit Modell 1 (bis 40 %) resultieren aus der bereits angesprochenen Vernachlässigung der Schalwagensteifigkeit, da die Berücksichtigung nachgiebig verbundener Querschnittsteile mit praxisüblichen Stabwerksprogrammen zurzeit kaum möglich ist.

Für das Verständnis des Tragverhaltens der Brücke sowie zur Einschätzung der Gebrauchstauglichkeitskriterien Schwingungsverhalten und Rissbildung/Rissbreiten im Beton sind neben den Verformungen insbesondere die zeitliche Entwicklung der Spannungen im stählernen Hauptträger und im Betongurt von Interesse. In den folgenden Abbildungen sind deshalb mit Modell 2 berechnete ausgewählte Kennwerte als zeit- oder ortsabhängige Größen dargestellt.

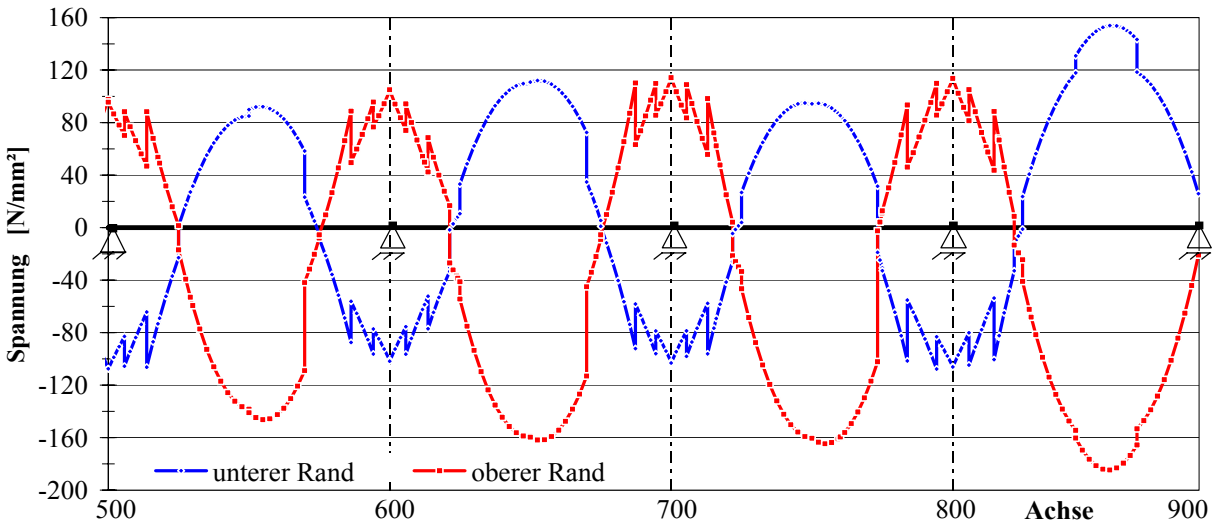



**Bild 6.36: Randspannungen des Stahlträgers zwischen den Achsen 500 und 900 zum Zeitpunkt der Verkehrsübergabe**

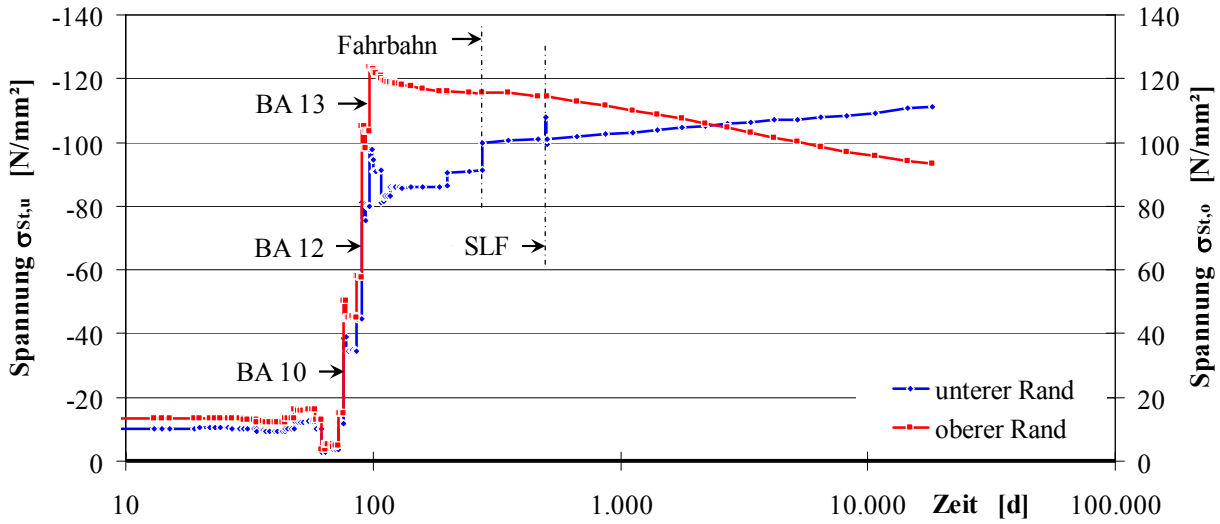



**Bild 6.37: Zeitliche Entwicklung der Randspannungen des Stahlträgers über der Innenstütze Achse 700**

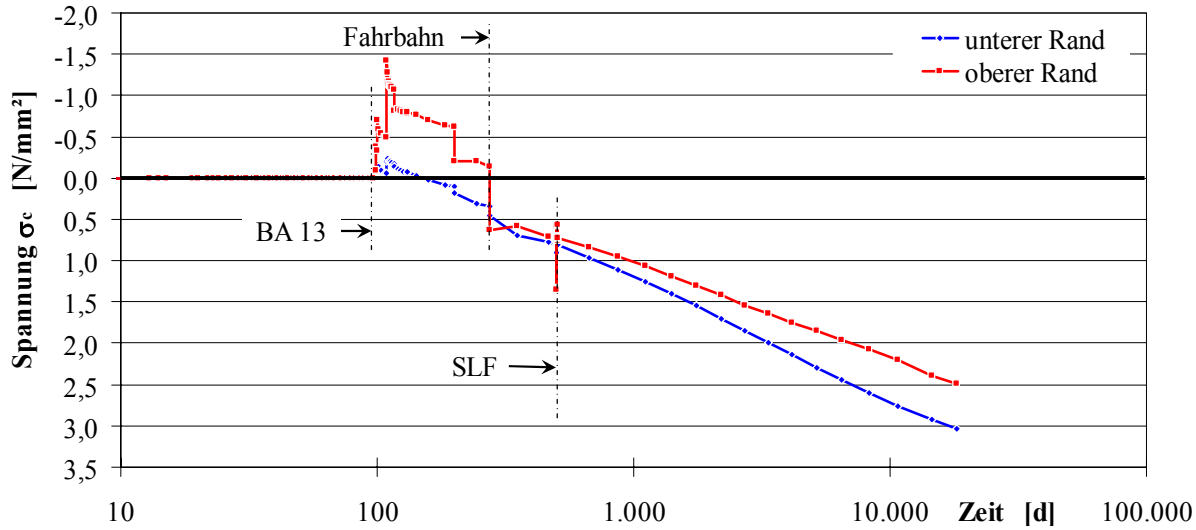



**Bild 6.38: Zeitliche Entwicklung der Randspannungen des Betongurtes über der Innenstütze Achse 700**

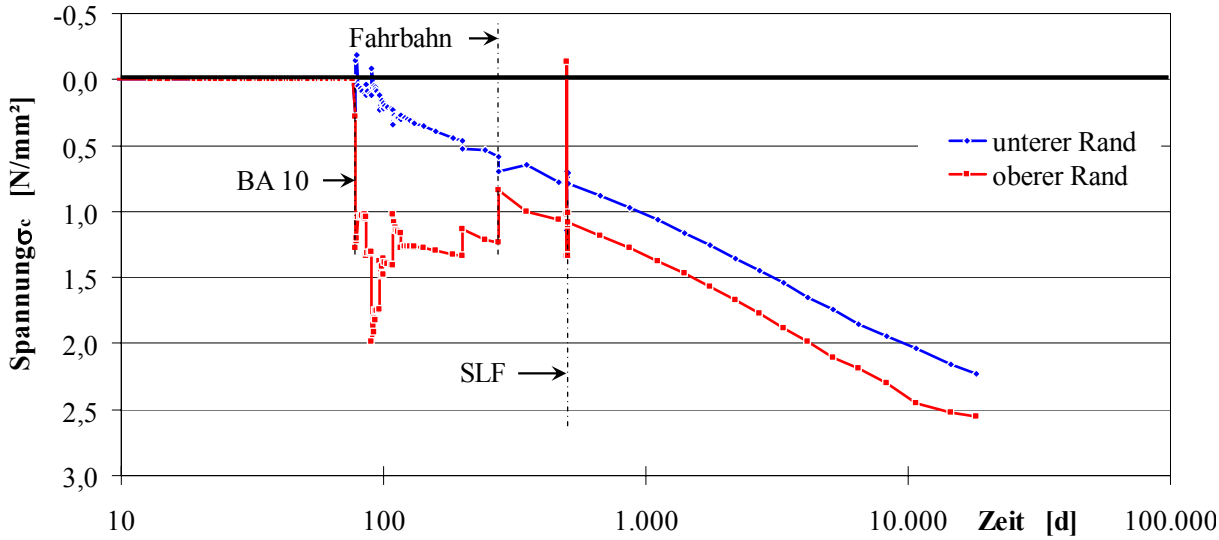



**Bild 6.39: Zeitliche Entwicklung der Randspannungen des Betongurtes über der Mitte von Feld 6 (Achsen 600 – 700 | BA 10)**

Während der Bauphase wird das Tragverhalten durch die verfahrensbedingte Lastfolge bestimmt. Anschließend prägen kriech- und schwindbedingte Umlagerungen in Wechselwirkung mit der Rissbildung im Betongurt das Verhalten der dargestellten Größen.

Die in Bild 6.36 erkennbaren Spannungssprünge werden durch unterschiedliche Steg- und Gurtblechdicken verursacht. Spannungsspitzen im Bereich der Zwischenlager werden damit abgebaut.

Die ersten drei Eigenfrequenzen des Bauwerkes stimmen zum Zeitpunkt der Verkehrsübergabe zwischen Messung und Rechnung nahezu vollständig überein. Sie betragen 2,1 Hz, 2,6 Hz und 3,0 Hz.

Die Herstellung ohne Eigenlastverbund bewirkt einerseits eine große Spannungsamplitude im Stahlträger, andererseits wird der Betongurt nach dem Verschub des Schalwagens nur gering beansprucht. Aufgrund der großen Eigenlast des Schalwagens ist nach dem Verschub ein signifikanter Rückgang der Hauptträgerverformungen zu verzeichnen. In dessen Folge ist der Spannungszustand am oberen Rand des Betongurtes im Feldbereich durch Zugbeanspruchungen und im Bereich der Zwischenstützen durch Druckbeanspruchungen charakterisiert. Auch durch die Ausbaustufen wird dieser Spannungszustand nur geringfügig abgebaut. Dieses Spannungsbild bewirkt, dass die zeitliche Entwicklung der Betonspannungen maßgebend durch das Schwinden und das Zugkriechen bestimmt wird.

Bemerkenswert ist ebenfalls, dass die Spannungsamplituden der simulierten Schwerlastüberfahrt mit einer Fahrzeuglast von 72 t nur gering und ohne Einfluss auf das Langzeitverhalten der Brücke sind. Die Unionbrücke Dresden-Radebeul kann damit unter den getroffenen Vorgaben als eine sehr robuste Konstruktion eingeschätzt werden, für welche eine langfristige Gebrauchstauglichkeit gegeben ist.

### 6.2.2 Rahmenbrücke aus Verbundfertigteilen mit nachträglicher Ortbetonergänzung

Gegenstand der folgenden Betrachtungen ist eine aus Verbundfertigteilen mit nachträglicher Ortbetonergänzung hergestellte Rahmenbrücke, deren stählerne Hauptträger gevoutet sind. Dieser Bauwerkstyp stellt eine elegante Möglichkeit zur stützenfreien Überquerung eines dreispurigen Autobahnquerschnittes dar. Insbesondere der Einsatz von Fertigteilträgern mit nachträglicher Ortbetonergänzung und die luftdicht verschweißten Hohlkästen der stählernen Hauptträger spiegeln dabei aktuelle Entwicklungstendenzen im Stahlverbundbrückenbau wider.

Das statische Modell und die Berechnungsgrundlagen dieses Beispiels wurden einem Referenzbauwerk entnommen, für welches montagebegleitend gemessene vertikale Trägerverformungen des Überbaues zu verschiedenen Ausbaustufen vorliegen. Neben den Überbauverformungen stehen die Spannungs- und Dehnungsentwicklung im Fertigteil- und Ortbetongurt sowie die herstellungsbedingten Systemveränderungen im Mittelpunkt der Betrachtungen. Des Weiteren wird auf die Rissentwicklung im Bereich der Rahmenecken sowie den Einfluss ausgewählter Modellparameter auf den Systemzustand eingegangen.

***Berechnungsgrundlagen und Modell***

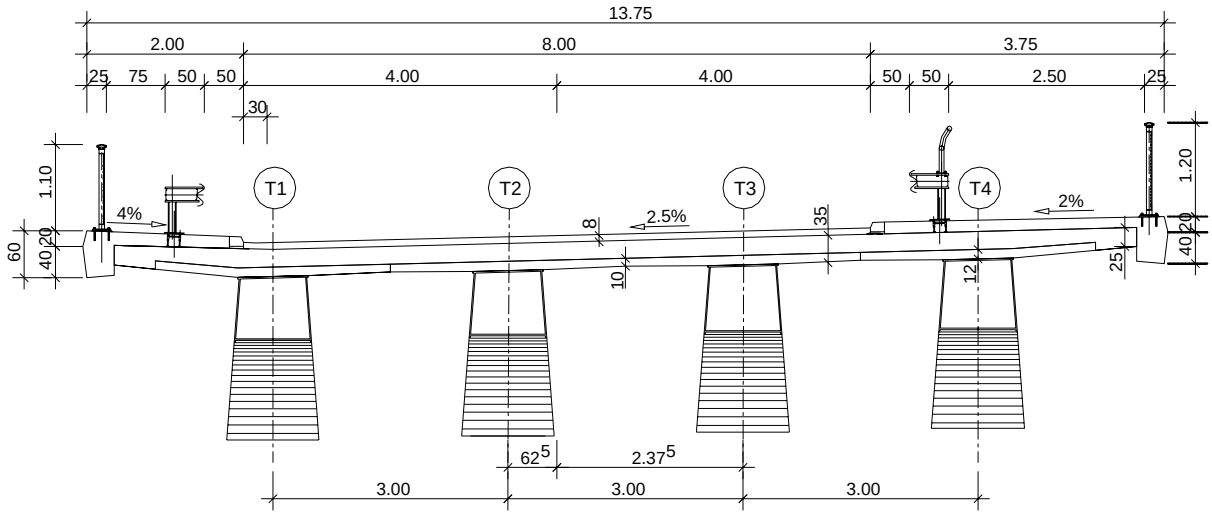
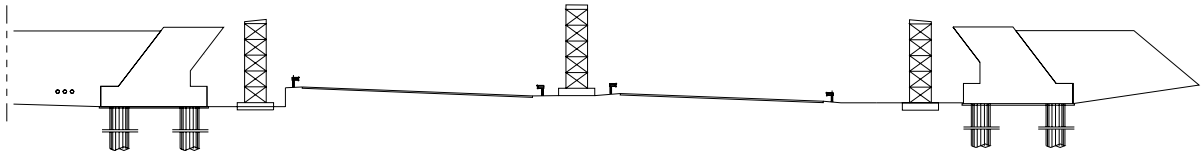
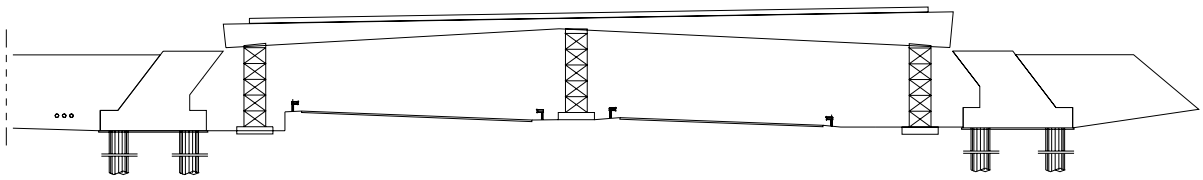


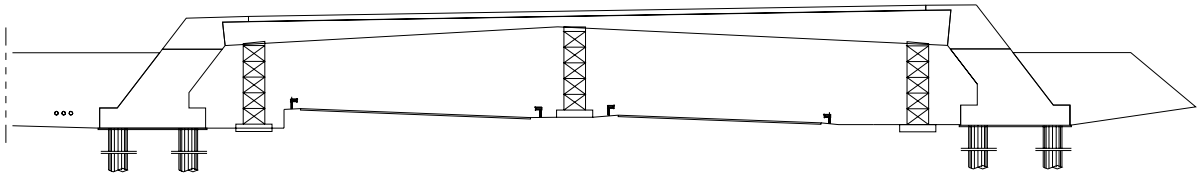

**Bild 6.40: Querschnitt**



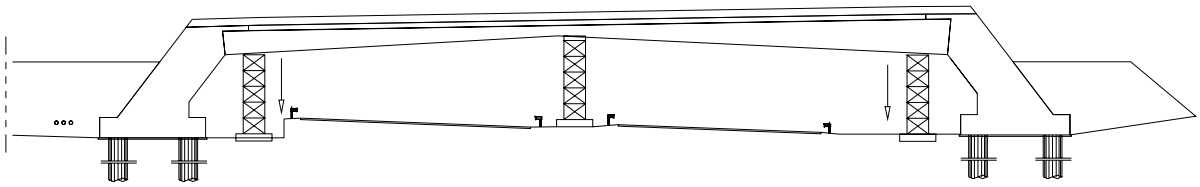
***a) Herstellen der Widerlager und Hinterfüllung***
***Aufstellen der Hilfsstützen vor dem Widerlager und im Mittelstreifen***



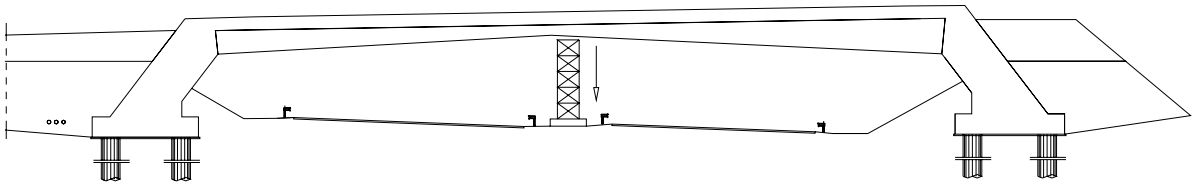
***b) Auflegen der Verbundfertigteile***



*c) Betonieren der Einspannbereiche bis Oberkante Fertigteil*



*d) Absenken der Hilfsstützung vor den Widerlagern und Betonieren der Ortbetonplatte*



*e) Absenken der Hilfsstützung im Mittelstreifen und restliche Hinterfüllung der Widerlager*

**Bild 6.41: Herstellung des Rahmentragwerkes mit Hilfsstützen an den Ränder und im Mittelstreifen**

**Statisches System und Querschnitte:** Für die Berechnung wird das Brückenbauwerk durch einen ebenen Rahmen modelliert. Vereinfachend wird dabei der Systemzustand am Rahmen in Trägerachse 2 analysiert. Die erforderlichen Modellparameter sind in Anlage V dokumentiert.

Zur Berücksichtigung des Zusammenwirkens zwischen Baugrund und Gründung wurden an einem FE-Modell des Widerlagers Ersatzfedern ermittelt, mit deren Hilfe die elastische Einspannung der Rahmenfüße realisiert wird. Für die Hilfsstützungen wurden ebenfalls Ersatzfedern in Ansatz gebracht, deren Steifigkeit aus den gemessenen Stützpunktverschiebungen resultieren.

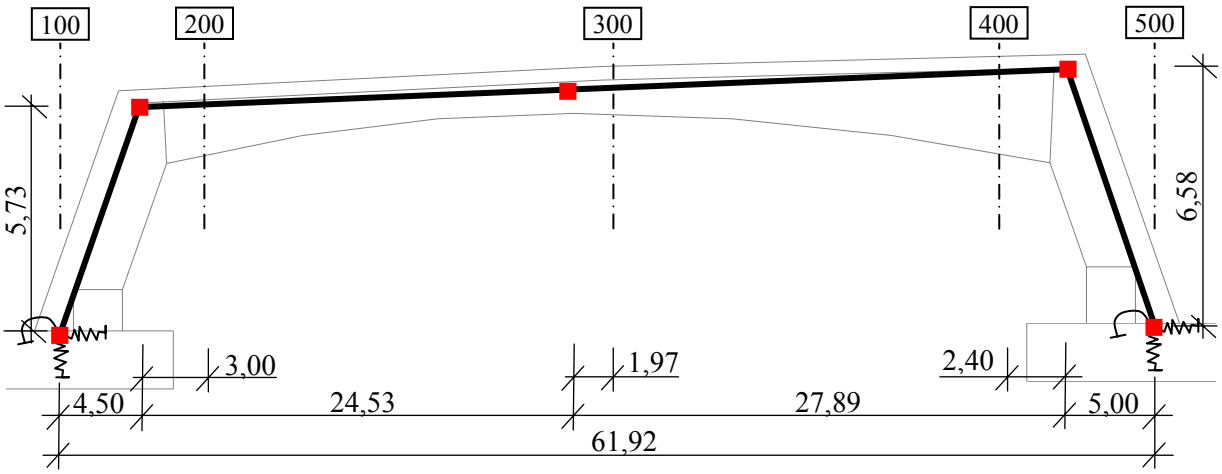



**Bild 6.42: Statisches System des ebenen Rahmentragwerkes (Trägerachse 2 | Angaben in [m])**

| | $c_x$ [kN/m] | $c_y$ [kN/m] | $c_\varphi$ [kNm/rad] |
|---|---|---|---|
| Widerlager Achse 100 | 412.600 | 1.050.000 | 13.700.000 |
| Widerlager Achse 500 | 412.600 | 1.050.000 | 14.100.000 |
| Hilfsstütze Achsen 200 und 400 | 60.000 | - | - |
| Hilfsstütze Achse 300 | 70.000 | - | - |

**Tabelle 6.9: Ersatzfedern zur Berücksichtigung der Gründungsverhältnisse**

**Material:** Die Materialkennwerte sind den Bezugsnormen des DIN-FB 104 entnommen und in Tabelle 6.10 zusammengestellt. Das Schwinden wurde mit dem Ansatz der DIN 1045-1 und das Kriechen des Betons mit dem RS-Modell [104] erfasst.

| Beton - Fertigteil: | C45/55 (DIN 1045-1) |
|---|---|
| $f_{cm}$ | 53 N/mm² |
| $f_{ctm}$ | 3,80 N/mm² |
| $E_{cm}$ | 35.700 N/mm² |
| Zementtyp/-erhärtung | normal |
| $A_c$ | 1.800.000 mm² |
| $u_c$ | 2.100 mm |
| **Beton - Ortbeton:** | **C30/37 (DIN 1045-1)** |
| $f_{cm}$ | 38 N/mm² |
| $f_{ctm}$ | 2,90 N/mm² |
| $E_{cm}$ | 31.900 N/mm² |
| Zementtyp/-erhärtung | schnell |
| $u_c$ | 3.000 mm |
| **Baustahl:** | **S355 J2 G3 (DIN-Fachbericht)** |
| $f_{ay}$ | 355 N/mm² |
| $E_a$ | 210.000 N/mm² |
| **Betonstahl:** | **BSt 500 B (DIN 1045-1)** |
| $f_{sy}$ | 500 N/mm² |
| $E_s$ | 200.000 N/mm² |
| Betondeckung oben/unten | 4,5 cm |
| Bewehrung Fertigteil (mittig) | Ø 14 -10 |
| Grundbewehrung Ortbeton oben/unten | Ø 12 -12 |
| (Zulagen in den Rahmenecken s. Anlage V) | |

**Tabelle 6.10: Materialeigenschaften**

**Bauablauf und Belastungen:** Der prinzipielle Bauablauf ist in Bild 6.41 dargestellt. Daraus ergibt sich folgende zeitliche Abfolge von System und Belastungswechseln:

| $t_i$ [d] | Aktivität | $t_0$ | $t_s$ |
|---|---|---|---|
| 0 | Verlegen der Verbundfertigteile (Beton 28 Tage Alt ) | 28 | 7 |
| 7 | Betonieren der Einspannbereiche | 3 | 3 |
| 10 | Absenken der Hilfsstützen vor dem Widerlager | | |
| 21 | Betonieren der Ortbetonplatte | 3 | 3 |
| 24 | Absenken der Mittelstützung | | |
| 42 | Fertigstellung Kappen und Fahrbahn | | |
| 80 | Verkehrsfreigabe | | |

**Tabelle 6.11: Bauablauf**

Die Eigenlasten werden anhand der Querschnittsfläche generiert, beim Baustahl wurde ein Zuschlag von 10 % für Steifen und Schotte berücksichtigt. Der Belastungsanteil des Trägers aus dem Fahrbahnausbau beträgt 7,50 kN/m. Für die Prognose der sich im Untersuchungszeitraum einstellenden Trägerdurchbiegung wurde außerdem mit den Zeitpunkt der Verkehrsfreigabe ein Dauerlastanteil von $^1/_3$ der Verkehrsbelastung in der Hauptspur berücksichtigt.

Parameter der nichtlinearen Berechnung:

| Kenngröße | Wert |
|---|---|
| Untersuchungszeitraum: | 18.250 Tage (50 Jahre) |
| Relative Luftfeuchte: | 80 % |
| Querschnittsschichtung Beton: | 6 Schichten Fertigteil \| 11 Schichten Ortbeton |
| Referenzachse | Verbundfuge Stahlträger – Fertigteil, Schwereachse des Widerlagerquerschnittes |
| Parameter $\gamma$ des Tension-Stiffening Modells (Bild 3.42): | 0,7 |
| Parameter der Schrittweitensteuerung: | $\Delta\varphi_K = 0{,}1 \mid \Delta\varepsilon_S = -1\cdot10^{-5}$ |
| Laststufen Belastung/Entlastung: | 2/2 |
| Maximale Anzahl der Iterationen/Abbruchkriterium: | $i_{max} = 50 / \eta_{zul} = 1\cdot10^{-2}$ |

**Tabelle 6.12: Parameter der Simulationsrechnung**

### *Ergebnisse*

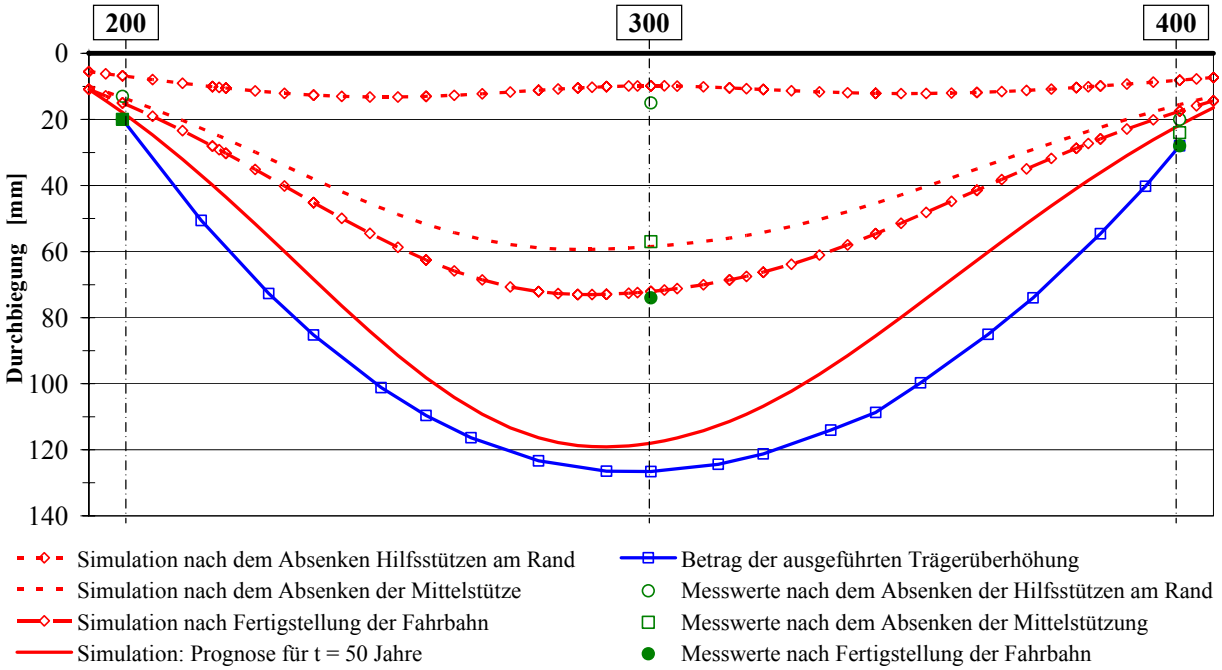



**Bild 6.43: Durchbiegung von Träger 2 zu verschiedenen Ausbaustufen**

Die Gegenüberstellung der gemessenen und berechneten Trägerverformungen zeigt insgesamt eine gute Übereinstimmung. Als signifikante Einflussgröße des statischen Modells erweist sich die Nachgiebigkeit der Hilfsstützungen. Im Fall einer starren Stützung werden in der Achse 300 während des gesamten Betrachtungszeitraumes etwa 10 mm geringere Durchbiegungen erhalten. Allerdings führt diese unter der Ortbetonlast zur Rissbildung im Fertigteil und damit zu einem temporären Steifigkeitsverlust über der Mittelstütze sowie einer Verformungszunahme in den benachbarten Feldbereichen.

Die Prognose der Trägerdurchbiegung zum Ende des Untersuchungszeitraumes von 50 Jahren belegt, dass die ausgeführte Überhöhung des VFT-Trägers nicht überschritten wird. Der zeitliche Verlauf der Durchbiegungen lässt allerdings auch erkennen, das die Überbauverformungen in starkem Maße durch das Langzeitverhalten des Betons geprägt sind. Eine wesentliche Ursache dafür stellt die herstellungsbedingte hohe Spannungsauslastung des Ortbetonquerschnittes mit etwa 20 % der mittleren Druckfestigkeit dar (Bild 6.45).

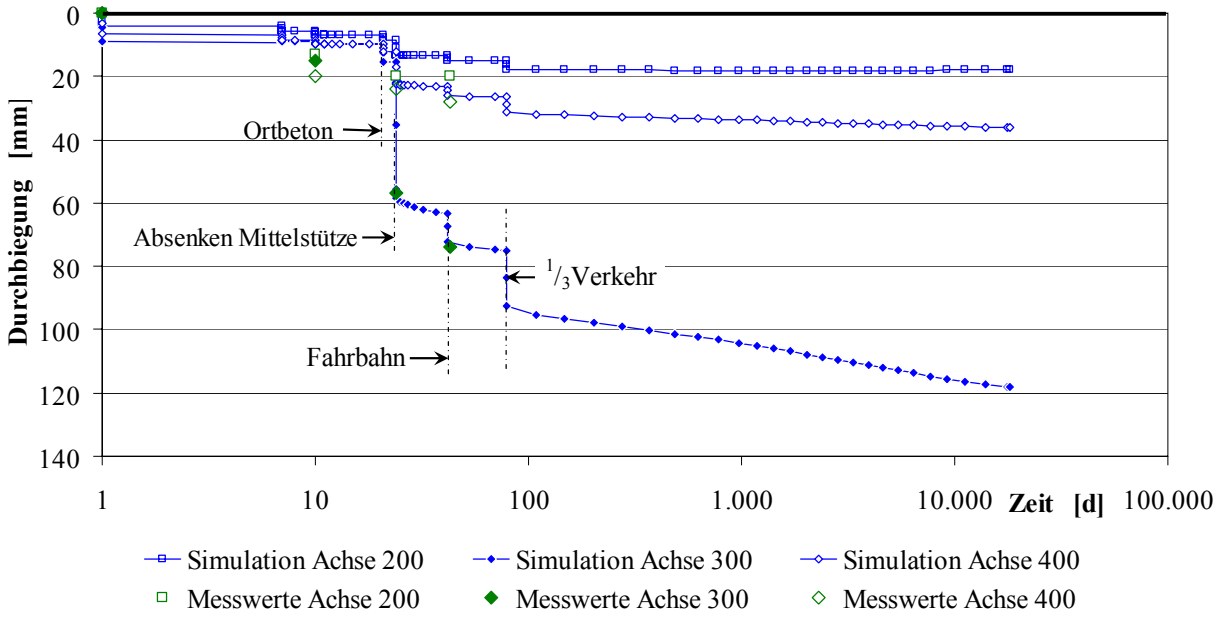



**Bild 6.44: Zeitliche Entwicklung der Durchbiegung von Träger 2 in den Achsen 200 bis 400 und Gegenüberstellung mit Messwerten**

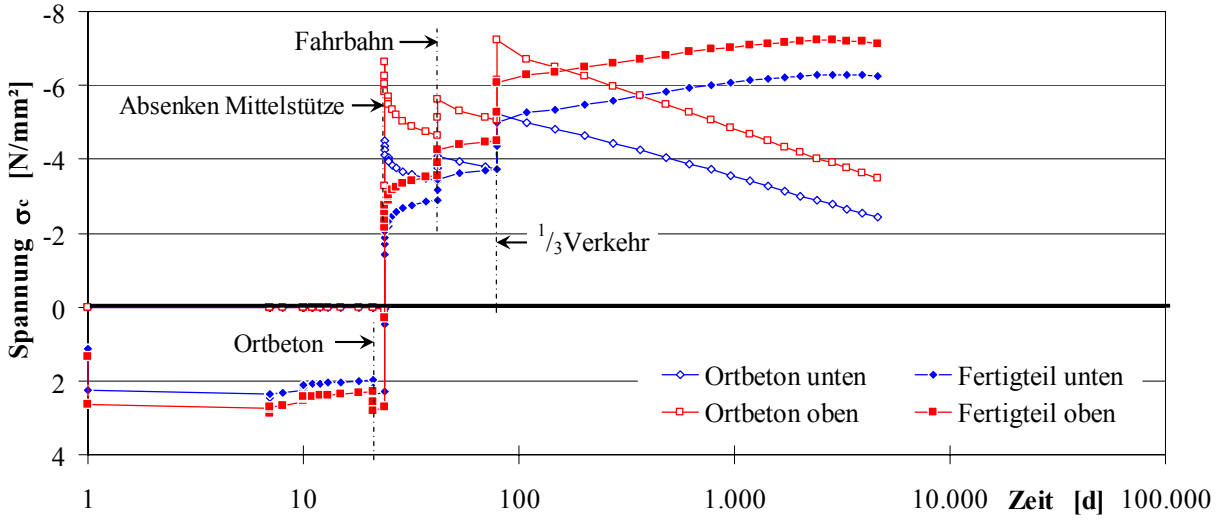



**Bild 6.45: Zeitliche Entwicklung der Randspannungen des Fertigteil- und Ortbetongurtes in der Achse 300**

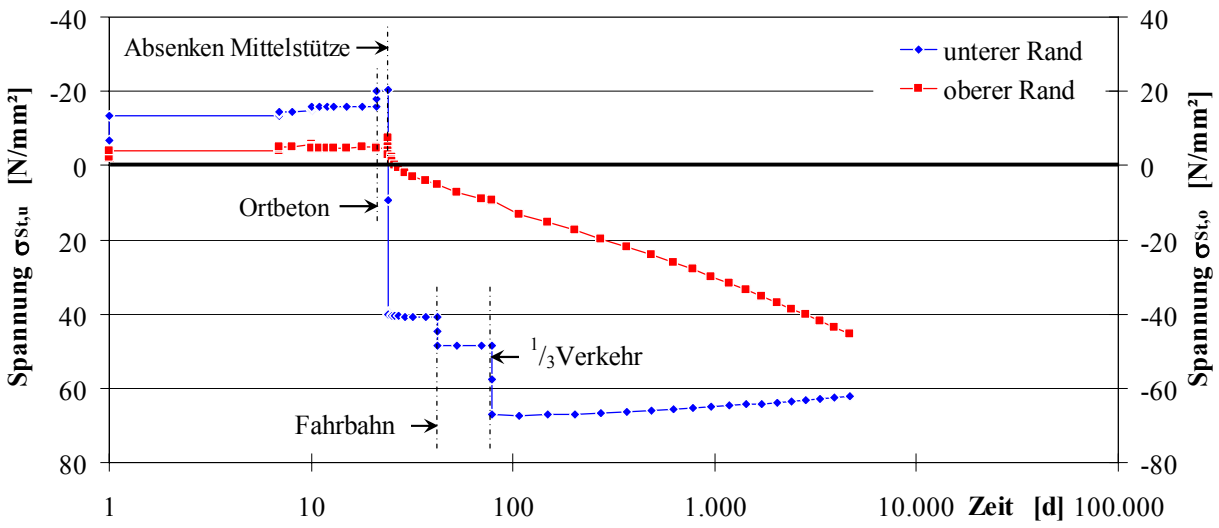



**Bild 6.46: Zeitliche Entwicklung der Randspannungen des Stahlträgers in der Achse 300**

Aus der Darstellung der Randspannungen des Stahlträgers und der Betongurte sind die Umlagerungen infolge Langzeitverhalten des Betons ersichtlich. Während der Bauphase ist der Spannungsverlauf im Wesentlichen durch die Beanspruchungswechsel geprägt.

Der Fertigteilgurt wird bis zum Entfernen der Hilfsstütze im Bereich der Achse 300 auf Zug beansprucht. Unterschiedliche Betonfestigkeitsklassen und -alter führen in der Folge zu einer gegenseitigen Beeinflussung durch das Schwinden und Kriechen. Die in Bild 6.45 dargestellten Randspannungen zeigen, dass der Spannungszustand des Fertigteilbetons durch die Kriechumlagerungen des Ortbetons dominiert wird und damit trotz der eigenen kriechbedingten Umlagerungen zunächst eine Zunahme der Druckspannungen zu verzeichnen ist.

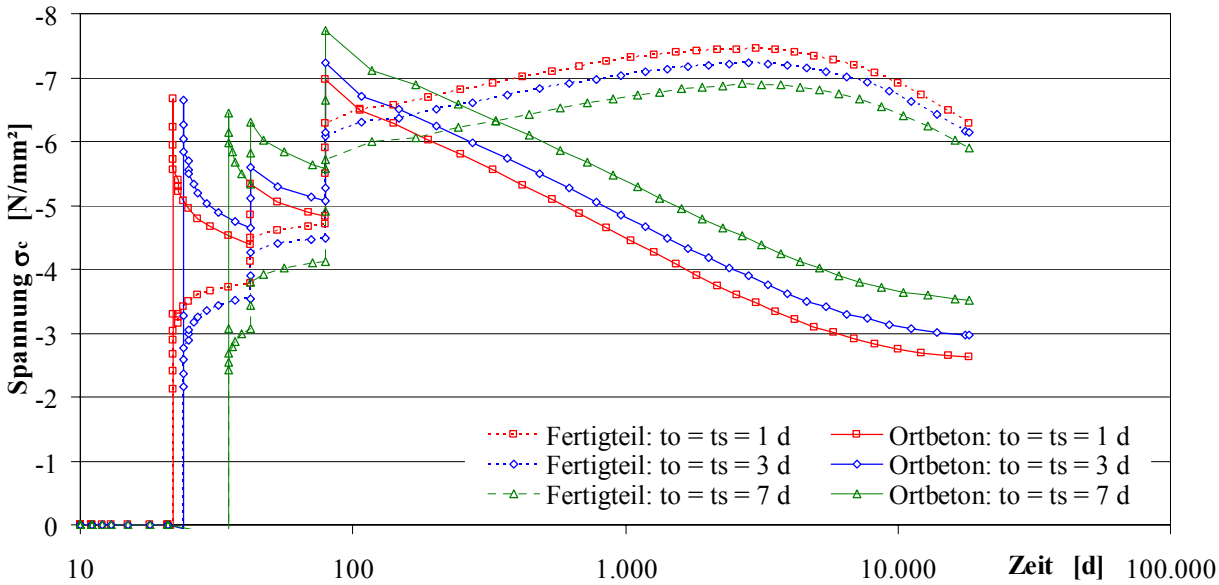



**Bild 6.47: Zeitliche Entwicklung der Randspannungen des Fertigteil- und Ortbetongurtes in der Achse 300 für unterschiedliche Erstbelastungsalter**

Die gewählte Herstellungstechnologie ermöglicht mit der temporären Mittelstütze eine sehr schlanke Überbaukonstruktion im Scheitelbereich. Die wesentliche Wirkung der Mittelstütze ist dabei, dass die Dauerlasten aus dem Eigengewicht des Überbaues bereits auf den Verbundquerschnitt wirken. Für die Spannungsentwicklung in den Betonteilquerschnitten ist hierbei der Zeitpunkt der Erstbelastung, d.h. des Entfernens der Mittelstütze, von Bedeutung; dieser Einfluss wurde deshalb näher untersucht. Die Ergebnisse sind in Bild 6.47 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass durch eine etwas längere Standzeit der Mittelstütze eine Reduktion der kriech-und schwindbedingten Spannungsumlagerungen erzielt werden kann. Die Trägerdurchbiegungen sind dagegen im Wesentlichen durch die Lastumlagerungen beim Entfernen der Mittelstütze geprägt, der Erstbelastungszeitpunkt des Betons ist dabei von untergeordneter Bedeutung.

Die Rissbildung des Betongurtes konzentriert sich unter den betrachteten Beanspruchungen im Bereich der Rahmenecken (Bild 6.48). Infolge der unterschiedlichen Betonfestigkeiten ist sie dabei nur im Ortbeton zu verzeichnen.

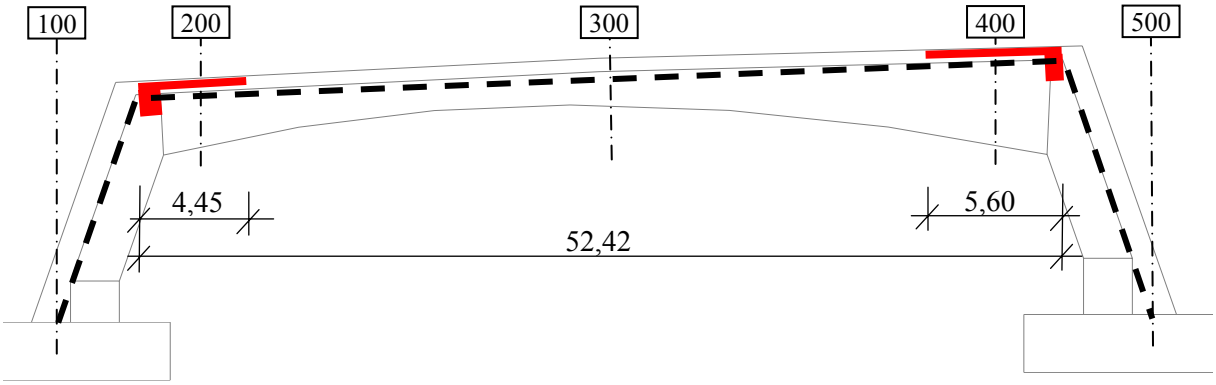



**Bild 6.48: Gerissener Bereich des Betongurtes am Ende des Untersuchungszeitraumes**

Die zeitliche Entwicklung der Spannungen und Verformungen des untersuchten Tragwerkes werden in starkem Maße durch das Herstellungsverfahren beeinflusst. Eine Berücksichtigung des Herstellungsprozesses ist deshalb beim Nachweis unerlässlich. Vielfältige Wechselwirkungen erschweren eine vereinfachte Abschätzung des Trag- und Verformungsverhaltens. Die gute Übereinstimmung von Rechnung und Messung bestätigen die Eignung des Lösungsverfahrens zur Simulation derart komplexer Tragwerksstrukturen.

Insgesamt ist die überprüfte Brücke unter den getroffenen Annahmen als langfristig gebrauchstauglich einzuschätzen.

# Kapitel 7

# Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war die Weiterentwicklung und die verstärkte Etablierung des Verbundbaus als eine leistungsfähige und wirtschaftliche Bauweise. Dieses kann durch das Bereitstellen effizienter und zuverlässiger Berechnungsmethoden, welche sowohl ingenieurgemäße Ansprüche als auch ökonomische Zielsetzungen erfüllen, erreicht werden. Dazu wurde ein deterministisches Lösungsverfahren für die physikalisch nichtlineare Analyse von Verbund-Stabtragwerken unter quasi-statischer Langzeitbeanspruchung entwickelt und dessen programmtechnische Umsetzung vorgestellt. Hinsichtlich der erfassbaren Werkstoffe und Modellierungsmöglichkeiten orientiert sich die Arbeit an baupraktisch relevanten Erfordernissen sowie Besonderheiten und aktuellen Entwicklungen der Stahl-Beton-Verbundbauweise. Neben der Beachtung zeitveränderlicher Materialeinflüsse stellt die Möglichkeit zur Berücksichtigung mehrteiliger, in Längsrichtung auch nachgiebig verbundener Querschnitte eine wesentliche Erweiterung gegenüber den bisher mit Stabtragwerken behandelbaren Verbundkonstruktionen dar.

Die Realisierung der Zielstellung erfolgte in drei Bearbeitungsschwerpunkten:

- Auswahl geeigneter Materialmodelle für die Einzelwerkstoffe Stahl und Beton sowie deren Verbindungen und Verbindungsmittel, jeweils unter Berücksichtigung quasi-statischer Be- und Entlastungen sowie zeitabhängiger Einflüsse.
- Auswahl eines statischen Lösungsansatzes, der den konstruktiven Besonderheiten von Verbundtragwerken in Form der erforderlichen Systemmodellierung und der zu berücksichtigenden Werkstoffabbildung mit vertretbarem numerischen Aufwand gerecht wird.
- Konzeptionelle Verknüpfung einzelner Detailmodelle zu einem zeitabhängigen Lösungsverfahren und Entwicklung einer Applikation als Grundlage für die modellhafte, zeitvariante Erfassung der beschreibenden Kenngrößen.

Bei der Auswahl von Stoffgesetzen standen neben einem möglichst breiten Anwendungsspektrum des realisierten Lösungsverfahrens auch die Zuverlässigkeit und die Plausibilität der Materialmodelle zur Beurteilung von Versagensmechanismen im Vordergrund. Der Verzicht auf eine sehr detaillierte Abbildung einzelner Effekte am Materialpunkt zugunsten eines vertretbaren Rechenaufwandes für die Gesamtstruktur war dabei unumgänglich. Aus diesen Gründen wurden auch ausschließlich Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten implementiert, deren Kenngrößen normativ geregelt und deshalb zum Zeitpunkt der Bauwerksplanung bekannt sind. Die durchgeführten Untersuchungen schlossen die Anwendung hochfester Werkstoffe ein.

Eine wesentliche Voraussetzung zur realitätsnahen Prognose des zeitabhängigen Systemzustandes von Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen unter Gebrauchszustandstypischen Beanspruchungen ist die gemeinsame Berücksichtigung der Materialphänomene Kriechen, Schwinden und Rissbildung sowie der hydratationsbedingten Temperatur- und Festigkeitsentwicklung des Betons. Der modellhaften Formulierung des zeit- und lastabhängigen Materialverhaltens des Betons kam deshalb in dieser Arbeit eine zentrale Rolle zu. Als problematisch erwies sich jedoch das Zusammenführen der Modelle einzelner Materialeffekte zu einem Gesamtmodell. Insbesondere bei der Formulierung zeitunabhängiger Stoffgesetze des (Stahl)Betons und der Kopfbolzendübel-Kennlinien im Zug-Druck-Wechselbereich war eine starke Abstraktion erforderlich. Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Materialmodelle sind in Kapitel 3 dokumentiert.

Zur Einschätzung der Auswirkungen einer Quervorspannung der Gurte auf das Längskriechverhalten des Betons wurden in der Literatur verfügbare zweiaxiale Kriechversuche analysiert. Tendenziell kann daraus für die im Verbundbrückenbau üblichen Spannungsverhältnisse zwischen Längs- und Querrichtung eine Reduzierung der Kriechverformungen in Längsrichtung abgeleitet werden. Quantitative Aussagen sind allerdings aufgrund des geringen Datenumfangs und der unterschiedlichen Versuchsrandbedingungen derzeit nicht möglich.

Basierend auf den Untersuchungen in Kapitel 3 besteht nach Meinung des Verfassers zu folgenden Punkten ein vertiefender zum Teil aber auch ein grundsätzlicher Forschungsbedarf. Die dazu notwendigen Untersuchungen sind als Gegenstand weiterer Forschung zu betrachten:

- Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit des jungen Betons.
- Ursächliche Mechanismen des Betonkriechens im nichtlinearen Druckspannungsbereich
- Quantitative Aussagen zu den Auswirkungen mehraxialer Spannungszustände auf das Betonkriechen
- Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit des Stahlbetons bei Druckbeanspruchung nach vorheriger Rissbildung
- Zeitlicher Verlauf des Verbundkriechens
- Funktionale Beschreibung der Last-Verformungs-Abhängigkeit von KBD im Wechselbereich bei quasi-statischer, nicht ermüdungswirksamer Ent- und Wiederbelastung

Die Systemzustandsanalyse der als ebene Stabwerke modellierten Tragwerke erfolgt mit der Deformationsmethode. Zur numerischen Erfassung der zeitabhängigen Betonverformungen findet in der rechentechnischen Realisierung ein Differenzenverfahren Anwendung. Dessen Effizienz wird in starkem Maße durch die Wahl der Weite eines Zeitschrittes bestimmt. Dazu wurden auf der Grundlage eigener Untersuchungen Anhaltspunkte gegeben. Die Diskretisierung des gesamten Untersuchungszeitraumes in Zeitschritte ermöglicht außerdem die Berücksichtigung herstellungs-, nutzungs- oder sanierungsbedingter System- und Belastungsmodifikationen in ihrer zeitlicher Abfolge durch die Verbindung mehrerer Stabwerksrechnungen an den jeweiligen Intervallgrenzen.

Ausgangspunkt der Berechnungen in jedem Inkrement ist die abschnittsweise Formulierung der Wirkungsgrößen an den Stabrändern der Einzelstäbe des Systems. Diese Vorgehensweise führt auf ein gekoppeltes Stab-DGL-System, dessen numerische Lösung in der vorgestellten Software auf einem RUNGE-KUTTA-Verfahren beruht. Im Verfahren werden aus den Stabdifferentialgleichungen die Stabsteifigkeitsmatrizen und die Belastungsvektoren des kinematisch bestimmt gelagerten Einzelstabes gebildet. In diesem Zusammenhang wurde auch die numerische Erfassung von Systemmodifikationen, von Eigenspannungszuständen und von nichtlinearen Stützungen aufgezeigt. Die Auswirkungen physikalischer Nichtlinearitäten werden dabei durch eine lastgesteuerte, inkrementell-iterative Lösungsstrategie erfasst. Eine Analyse der Eigenschwingungen ist ebenfalls Bestandteil der Systemzustandsbewertung.

Durch eine Erweiterung des Stab-DGL-Systems für in Stablängsrichtung nachgiebig verbundene Querschnittsteile wurde über die bisherigen Anwendungsmöglichkeiten hinaus ein Mittel geschaffen, um eine kontinuierliche Schubnachgiebigkeit der Verbundfuge zwischen Teilquerschnitten in einem Stabwerksmodell rechnerisch zu erfassen. Dieser Ansatz stellt somit auch bauweisenübergreifend eine Möglichkeit zur numerischen Analyse nachgiebiger oder teiltragfähiger Verbundfugen dar.

Perspektivisch kann das Lösungsverfahren weiter vervollkommnet werden, z.B. durch eine Erweiterung der statischen Grundlösung auf die Theorie II. Ordnung. Damit können dann auch überwiegend normalkraftbeanspruchte Bauteile wie Verbundstützen analysiert werden. Eine weitere Möglichkeit besteht außerdem in der Berücksichtigung nicht-affiner Biegelinien der Teilquerschnitte bei der Formulierung des Stab-DGL-Systems. Anwendungsgebiete dafür stellen beispielsweise hybride Konstruktionen im Brückenbau oder der Ingenieurholzbau dar. Bei einer möglichen Ausweitung des statischen Modells auf räumliche Systeme ist abzuwägen, ob gegenüber einem solchen Schritt der Übergang auf einen FE-Ansatz zu bevorzugen ist.

Im Hinblick auf eine Vielzahl tatsächlich stochastischer Material- und Modellparameter sollte die Beurteilung des Tragverhaltens von Stahl-Beton-Verbundbauwerken zukünftig auch durch probabilistische oder weiterführende Untersuchungen ergänzt werden, da unter dem Aspekt der Dauerhaftigkeit und Gebrauchstauglichkeit oftmals das wahrscheinliche Verhalten einer Konstruktion, also die Angabe realistischer Bereiche der Strukturantwort interessieren. Das in dieser Arbeit entwickelte Lösungsverfahren stellt dafür die deterministische Grundlösung bereit.

Anhand von Testbeispielen wurden einzelne Algorithmen des Lösungsverfahrens mit geschlossenen Lösungen der zugrunde liegenden Differentialgleichungen sowie weiteren Lösungsansätzen verglichen. Dabei konnte eine sehr gute Übereinstimmung erzielt werden. Bei der Analyse realer Brückenbauwerke zeigt die Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse mit normativen Lösungen und Messergebnissen eine gute Übereinstimmung auf. Darüber hinaus ermöglichen die gewonnenen Systeminformationen einen tieferen Einblick in das Tragverhalten der untersuchten Bauwerke und damit ein besseres Verständnis der ablaufenden Mechanismen und deren Wechselwirkungen.

Insgesamt steht durch die Zusammenführung spezieller Teilprobleme in einem Lösungsansatz mit dem vorgestellten Verfahren ein leistungsfähiges, numerisches Simulationswerkzeug für die bauweisenübergreifende, realitätsnahe Prognose des Trag- und Verformungsverhaltens von Verbundkonstruktionen zur Verfügung. Neben der Vorhersagegenauigkeit ist das Lösungsverfahren aber auch aus ökonomischer Sicht gegenüber dem manuellen Arbeitsaufwand auf der Basis normativer Verfahren erheblich effizienter. Orientiert an den aktuellen Entwicklungen im Stahl-Beton-Verbundbrückenbau tragen aus technischer und wirtschaftlicher Sicht insbesondere die gegebenen Modellierungsmöglichkeiten bei der Abbildung aktueller Herstellungstechnologien zu einer Verbesserung der Analyse und Überschaubarkeit komplexer Systeme bei. Weitere Vorteile liegen u.a. in der Möglichkeit von Grenzwertuntersuchungen und in der Berücksichtigung des tatsächlichen Bauablaufes im Modell. Orientiert am speziellen Anwendungsgebiet der Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen konnte in dieser Arbeit die zielgerichtete Verknüpfung zeitabhängiger, praxisrelevanter Einflussgrößen in einem Applikationsentwurf realisiert werden.

Software dominiert bereits heute das Arbeitsgeschehen in nahezu allen Ingenieurdisziplinen. Im Bauwesen eignet sich die Baustatik aufgrund der Schematisierbarkeit der verwendeten Lösungsalgorithmen dazu in besonderem Maße. Vor allem nichtlineare Berechnungsmethoden werden in Zukunft zunehmend an Bedeutung gewinnen. In der Realisierung einer leistungsfähigen, weitgehend automatisierten numerischen Modellbildung auf der Basis parametrischer CAD-Systeme besteht künftig eine Möglichkeit zur Steigerung der Nutzungsfähigkeit derartiger Produkte und damit auch der Formenvielfalt und Wettbewerbsfähigkeit zu entwerfender Bauwerke. Der kreativen Intelligenz des Ingenieurs werden dadurch zunehmend weniger Grenzen gesetzt.

# Literaturverzeichnis


[1] **ACKERMANN, G.; BURKHARDT, M.:** *Tragverhalten von bewehrten Verbundfugen bei Fertigteilen und Ortbeton in den Grenzzuständen der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit*
Beton- und Stahlbetonbau 87 (1992); Heft 7; S. 165-170

[2] **AOYAMA, H.; NOGUCHI, H.:** *Mechanical properties of concrete under load cycles idealizing seismic actions*
In: Structural Concrete under Seismic Action; AICAP-Symposium Rom; CEB-Bulletin 132-1; Rom; 1979; S. 31-63

[3] **AICHER, S.:** *Ein modifiziertes γ-Verfahren für das mechanische Analogon: dreischichtiger Sandwichverbund – zweiteiliger, verschieblicher Verbund*
Bautechnik 64 (1987); Heft 1; S. 21-29

[4] **ARGYRIS, H. J.**: *Die Matrizentheorie der Statik*
Ingenieur-Archiv 25 (1957); S. 174-192

[5] **ARIBERT, J.; ABDEL-AZIZ, K.:** *Calcul des poutres mixtes jusqu'à l'état ultime avec un effet de soulévment à l'interface acier-béton*
Construction Métallique Nr. 4; 1985

[6] **ARTHANARI, S.:** *Influence of temperature and biaxial stresses on creep in concrete*
Dissertation; University of London; 1966

[7] **BAHN, B.-Y.; HSU, C.-T. T.:** *Stress-strain behaviour of concrete under cyclic loading*
ACI Materials Journal 95 (1998); Heft 2; S. 178-193

[8] **BARICAKO, T.:** *Numerische Simulation der Schädigung bei Stabtragwerken aus bewehrtem Hochleistungsbeton unter mehrachsiger zyklischer Querschnittsbeanspruchung*
Dissertation; Universität Bochum; Institut für Konstruktiven Ingenieurbau; zgl. Fortschritt-Berichte VDI; Reihe 4; Nr. 188; VDI-Verlag Düsseldorf; 2003; ISSN 0178-9511

[9] **BARTZSCH, M.; BOTHE, E.; GRAF, W.; MÖLLER, B.; SCHNEIDER, R.:** *Systemmodifikation und ihre Auswirkung auf den Schnittkraft- und Deformationszustand von Tragwerken*
Bautechnik 78 (2001); Heft 4; S. 263-271

[10] **BAŽANT, Z. P. ET AL.:** *Improved prediction model for time-dependent deformations of concrete; Part 1-7*
Materials and Structures 24 (1991): S. 327-345 u. 409-421; 25 (1992): S. 21-28 u. 84-94 u. 163-169 u. 219-223; 26 (1993): S. 567-574

[11] **BAŽANT, Z. P.; BAWEJA, S.:** *Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures – model B3*
Materials and Structures 28 (1995); S. 357-365

[12] **BAŽANT, Z. P.; HUET, C.; MÜLLER, H. S.:** *Comment on recent analysis of concrete creep linearity and applicability of principle of superposition*
Materials and Structures 27 (1994); S. 359-361

[13] **BECKER, J.:** *Beitrag zur Auslegung der Verdübelung von Verbundträgern des Hochbaus unter ruhender und nichtruhender Belastung*
Dissertation; Universität Kaiserslautern; 1997

[14] **BLESSENOHL, B.:** *Zur numerischen Berechnung der Auswirkungen des Kriechens und Schwindens auf Betonverbundtragwerke – Grundlagen und Algorithmen für die EDV*
Dissertation; RWTH Aachen; 1990

[15] **BOCKHOLD, J.; STANGENBERG, F.:** *Modellierung des nichtlinearen Kriechens von Beton*
Stahlbetonbau 99 (2004); Heft 3; S. 209-216

[16] **BODE, H.; KÜNZEL, R.:** *Zur Verwendung von Profilblechen beim Trägerverbund*
In: Festschrift Baehre; Karlsruhe; 1988; S. 485-502

[17] **BODE, H.; SCHANZENBACH, J.:** *Das Tragverhalten von Verbundträgern bei Berücksichtigung der Dübelnachgiebigkeit*
Stahlbau 58 (1989); Heft 3; S. 65-74

[18] **BOGENSPERGER, T.:** *Erweiterte Stabtheorie und der gevoutete Träger im Brückenbau*
Dissertation; TU Graz; Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke; Heft 11; 2001

[19] **BOLTZMANN, L.:** *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*
Analen der Physik und Chemie; Ergänzungs-Band 7; 1876

[20] **BREUNINGER, U.:** *Zum Tragverhalten liegender Kopfbolzendübel unter Längsschubbeanspruchung*
Dissertation; Universität Stuttgart; Mitteilungen des Instituts für Konstruktion und Entwurf I; 1/2000

[21] **BROTTKA, J.:** *Analyse des Tragverhaltens einer Verbundbrücke – Interpretation und rechnerischer Vergleich statischer Dehnungs- und Verformungsmessungen hinsichtlich ausgewählter Tragwerksparameter*
Diplomarbeit TU Dresden; Fakultät Bauingenieurwesen; Lehrstuhl für Stahlbau;
2000 (unveröffentlicht)

[22] **BÜRKNER, K.-E.:** *Elasto-plastische Berechnung von nachgiebig verdübelten Verbundtragwerken – Finite-Element-Berechnungen und Versuche*
Dissertation; Ruhr Universität Bochum; Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen; 1/1981

[23] **BURSI, O, S.; GRAMOLA, G.:** *Behaviour of composite substructures with full and partial shear connection under quasi-static cyclic and pseudo-dynamic displacements*
Materials and Structures 33 (2000); Heft 4; S. 154-163

[24] **BUSEMANN, R.:** *Berechnung von Verbundträgern nach dem Kriechfaserverfahren*
Stahlbau 20 (1951); Heft 9; S. 105-109

[25] **BUSJÄGER, D.; QUAST, U.:** *Programmgesteuerte Berechnung beliebiger Massivbauquerschnitte unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft (Programm MASQUE)*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 415; Beuth-Verlag GmbH; Köln; 1990

[26] **BYFORS, U.:** *Plain concrete at early ages*
Swedish Cement and Concrete Institute; 1980

[27] **CHEN, F.:** *Numerische Simulation des nichtlinearen Trag- und Schädigungsverhaltens von Stahlbeton-Stabtragwerken bei monotoner und zyklischer Beanspruchung*
Dissertation; Universität Bochum; Institut für Konstruktiven Ingenieurbau; zgl. Fortschritt-Berichte VDI; Reihe 4; Nr. 171; VDI-Verlag Düsseldorf; 2001; ISSN 0178-9511

[28] **CUNZE OLIVEIRA LANA, A. J.:** *Zur Gebrauchsfähigkeit von Verbundträgern mit nachgiebiger Verdübelung*
Dissertation; Ruhr Universität Bochum; Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen; 1/1992

[29] **DÄBRITZ, M.:** *Untersuchungen zum Kriechen der Betonfahrbahnplatten von Stahl-Beton-Verbundbrücken unter mehraxialer Beanspruchung*
Diplomarbeit; technische Universität Dresden; Lehrstuhl für Stahlbau; 2005; unveröffentlicht

[30] **DAFSTB HEFT 525:** *Erläuterungen zu DIN 1045-1*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 525; Beuth-Verlag GmbH; Köln; 2003

[31] **DIENER, J.:** *Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Berechnung langzeitbelasteter Bauteile aus Stahlbeton und Spannbeton unter besonderer Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens und der Rissbildung*
Dissertation; Bauhaus-Universität Weimar; 1998

[32] **DIN 1045:** *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton*
*Teil 1:* *Bemessung und Konstruktion*
*Teil 2:* *Beton; Festlegung, Eigenschaften, Herstellung und Konformität; Anwendungsregeln zu DIN EN 206-1*
Beuth-Verlag GmbH; Berlin; Ausgabe 2001-07

[33] **DIN 1048-5:** *Prüfverfahren für Beton - Teil 5: Festbeton, gesondert hergestellte Probekörper*
Beuth-Verlag GmbH; Berlin; Ausgabe 1991-06

[34] **DIN 4227:** *Spannbeton – Bauteile aus Normalbeton mit beschränkter oder voller Vorspannung*
Beuth-Verlag GmbH; Köln; Ausgabe 1988-07

[35] **DIN EN 12390-2:** *Prüfung von Festbeton - Teil 2: Herstellung und Lagerung von Probekörpern für Festigkeitsprüfungen*
Beuth-Verlag GmbH; Berlin; Ausgabe 2001-06

[36] **DISCHINGER, F.:** *Untersuchung über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken*
Bauingenieur 18 (1937), Heft 36/37; S. 487-520 und 20 (1939); Heft 5/6; S. 53-63

[37] **DÖINGHAUS, P.:** *Zum Zusammenwirken hochfester Baustoffe in Verbundkonstruktionen*
Dissertation; RWTH Aachen; Institut für Massivbau; 2002; ISBN 3-9807302-4-7

[38] **DUCRET, J.-M.; LEBET, J.-P.:** *Effects of concrete hydration on composite bridges*
In: Composite Construction – Conventional and Innovative; IABSE 1997; S. 193-198;
ISBN 3-85748-092-0

[39] **DUDA, H.:** *Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 419; Beuth-Verlag GmbH; Köln; 1991

[40] **ECKFELDT, L.:** *Möglichkeiten und Grenzen der Berechnung von Rissbreiten in veränderlichen Verbundsituationen*; Dissertation; TU Dresden; 2005
URL: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:swb:14-1138179912681-09751

[41] **EHLERT, W.:** *Grenzzustände schlanker Verbundträger*
Dissertation; Ruhr Universität Bochum; Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen; 7/1981

[42] **EIERLE, B.:** *Berechnungsmodelle für Rissgefährdete Betonbauteile unter frühem Temperaturzwang*
Dissertation; TU München; Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau; 4/2000

[43] **ELIGEHAUSEN, R.; MAYER, U.; LETTOW, S.:** *Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen in Stahlbetonbauteilen*
Abschlussbericht zum DFG-Forschungsvorhaben EL 72/8-1+2; Universität Stuttgart; Institut für Werkstoffe im Bauwesen; 2000

[44] **EUROCODE 2:** *Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken*
*Teil 1:* *Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau;*
Deutsche Fassung DIN V ENV 1992-1-1; Ausgabe 1992-06
*Teil 2:* *Betonbrücken*; Deutsche Fassung ENV 1992-2:199; Ausgabe 1997-10
*DIN-Fachbericht 102 - Betonbrücken*; Ausgabe 2003-03
Beuth-Verlag GmbH; Berlin

[45] **EUROCODE 3:** *Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten*
*Teil 1-1:* *Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*;
Deutsche Fassung DIN V ENV 1993-1-1; Ausgabe 2005-07
*Teil 2:* *Stahlbrücken*; Deutsche Fassung ENV 1993-2; Ausgabe 2001-02
*DIN-Fachbericht 103 - Stahlbrücken*; Ausgabe 2003-03
Beuth-Verlag GmbH; Berlin

[46] **EUROCODE 4:** *Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton*
*Teil 1-1:* *Allgemeine Bemessungsregeln, Bemessungsregeln für den Hochbau;*
Deutsche Fassung ENV 1994-1-1; Ausgabe:1994-02
*Teil 2:* *Verbundbrücken;* Deutsche Fassung ENV 1994-2; Ausgabe:2000-06
*DIN-Fachbericht 104 - Verbundbrücken*; Ausgabe 2003-03
Beuth-Verlag GmbH; Berlin

[47] **EUROCODE 5** *Bemessung und Konstruktion von Holzbauwerken*
*Teil 1-1:* *Allgemeine Bemessungsregeln, Bemessungsregeln für den Hochbau;*
Deutsche Fassung ENV 1995-1-1:1993; Ausgabe:1994-06
*Teil 2:* *Brücken;* Deutsche Fassung ENV 1995-2:1997; Ausgabe:1999-08
Beuth-Verlag GmbH; Berlin

[48] **FAELLA, C.; MARTINELLI, E.; NIGRO, E.:** *Shear connection nonlinearity and deflections of steel-concrete composite beams: a simplified method*
Journal of Structural Engineering 129 (2003); Heft 1; S. 12-20

[49] **FLEDERER, H.:** *Beitrag zur Berechnung von Verbundträgern im Gebrauchszustand unter Berücksichtigung stochastischer Größen*
Dissertation; TU Dresden; Lehrstuhl für Stahlbau; Schriftenreihe des Instituts für Tragwerke und Baustoffe; Heft 20; 2002; ISSN 0947-4218

[50] **FRANKE, L.:** *Einfluss der Belastungsdauer auf das Verbundverhalten von Stahl in Beton (Verbundkriechen)*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 268; Beuth-Verlag GmbH; Köln; 1976

[51] **FRITSCHE, T.:** *Schnittgrößenverteilung nachträglich ergänzter Betonbauteile im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit unter Berücksichtigung der Rissbildung*
Dissertation; TU München; Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau; 6/2001

[52] **GARDNER, N. J.; LOCKMANN, M. J.:** *Design provisions for drying shrinkage and creep of normal-strength concrete*
ACI Materials Journal; 98 (2001); Heft 2; S. 159-167

[53] **GATTESCO, N.:** *Fatigue in stud shear connectors*
In: Composite Construction – Conventional and Innovative; IABSE 1997; S. 139-144;
ISBN 3-85748-092-0

[54] **GATTESCO, N.:** *Analytical modelling of nonlinear behaviour of composite beams with deformable connection*
Journal of Constructional Steel Research 52 (1999); S. 195-218

[55] **GOLLWITZER, T.; GEBBEKEN, N.:** *Ein neues FEM-Stabelement für nachgiebige Verbundquerschnitte*
Bautechnik 81 (2004); Heft 7; S. 549-554

[56] **GOPALAKRISHNAN, K. S.:** *Creep of concrete under multiaxial compressive stresses*
Dissertation; University of Calgary; 1968

[57] **GÜNTHER, G.:** *Verbundverhalten zwischen Stahl und Beton unter monoton steigernder, schwellender und lang andauernder Belastung*
Dissertation; Gesamthochschule Kassel; 1989

[58] **GUTSCH, A.-W.:** *Stoffeigenschaften jungen Betons – Versuche und Modelle*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 495; Beuth-Verlag GmbH; Köln; 1999

[59] **HANNAWALD, F.; REINTJES, K.-H.; GRAßE, W.:** *Messwertgestützte Beurteilung des Gebrauchsverhaltens einer Stahlverbund-Autobahnbrücke*
Stahlbau 72 (2003); Heft 7; S. 507-516

[60] **HANNAWALD, J.:** *Differentielles Materialgesetz zur Beschreibung des dreidimensionalen Betonkriechens: Physikalisch konsistente Identifikation der Parameter*
Dissertation; RWTH-Aachen; 2002; ISBN 3-86073-304-4

[61] **HÄNSEL, J.:** *Praktische Berechnungsverfahren für Stahlträgerverbundkonstruktionen unter besonderer Berücksichtigung neuer Erkenntnisse zum Betonzeitverhalten*
Dissertation; Ruhr Universität Bochum; Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen; 2/1975

[62] **HANSWILLE, G.:** *Zur Rissbreitenbeschränkung bei Verbundträgern*
Dissertation; Ruhr Universität Bochum; Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen; 1/1986

[63] **HANSWILLE, G; JOST, K.; SCHMITT, C.; TRILLMICH, R.:** *Experimentelle Untersuchungen zur Tragfähigkeit von Kopfbolzendübeln mit großem Schaftdurchmesser*
Stahlbau 67 (1998); Heft 7; S. 555-560

[64] **HAWKINS, N. M.; MITCHELL, D.:** *Seismic response of composite shear connectors*
Journal of Structural Engineering 110 (1984); Heft 9; S. 2120-2136

[65] **HEGGER, J.; SEDLACEK, G.; DÖINGHAUS; P.; TRUMPF, H.:** Untersuchungen zur Duktilität der Verbundmittel bei Anwendung von hochfestem Stahl und hochfestem Beton
Stahlbau 70 (2001); Heft 7; S 436-446

[66] **HEILMANN, H. G.:** *Beziehung zwischen Zug- und Druckfestigkeit des Betons*
beton 19 (1969); Heft 2; S. 68-70

[67] **HEILIG, R.:** *Theorie des Elastischen Verbunds*
Stahlbau 22 (1953); Heft 5; S. 104-108

[68] **HOISCHEN, A.:** *Beitrag zur Berechnung zusammengesetzter Vollwandträger mit elastischen Verbindungsmitteln*
Dissertation; TH Karlsruhe; 1952

[69] **IBACH, H.-D.:** *Zum Kriechen und Schwinden von Verbundbrücken*
Dissertation; TU München; Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau 2/2001

[70] **JANSEN, D. C.; SHAN, S. P.:** *Effect of length on compressive strain softening of concrete*
Journal of Engineering Mechanics 123 (1997); Heft 1; S. 25-35

[71] **JENISCH, F.-M.:** *Einflüsse des profilierten Betongurts und der Querbiegung auf das Tragverhalten von Verbundträgern*
Dissertation; Universität Kaiserslautern; Shaker Verlag Aachen; 2000; ISBN 3-8265-7523-7

[72] **KARSAN, D.; JIRSA, J.-O.:** *Behavior of concrete under compressive loadings*
Journal of the Structural Division 1969 (95); Heft 12; S. 2543-2564

[73] **KLUGER, J.:** *Numerische Modelle zur physikalisch nichtlinearen Analyse von Stahlbeton-Faltwerken*
Dissertation; TU Dresden; Veröffentlichungen des Lehrstuhls für Statik; Heft 1; 1999

[74] **KNEIDL, R.:** *Ein Beitrag zur linearen und nichtlinearen Berechnung von Schichtbalken-systemen*
Dissertation; TU München; Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau 6/1991

[75] **KNEIDL, R.:** *Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Trägern mit veränderlichem nachgiebigem Verbund*
Bauingenieur 65 (1990); Heft 6; S. 281-288

[76] **KÖNIG, G.; TUE, N.:** *Grundlagen und Bemessungshilfen für die Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 466; Beuth-Verlag GmbH; Köln; 1996

[77] **KÖNIG, G.; TUE, N. V.; ZINK, M.:** *Hochleistungsbeton - Bemessung, Herstellung und Anwendung;* Verlag Ernst & Sohn; Berlin; 2001; ISBN 3-433-01738-7

[78] **KORDINA, K.; SCHUBERT, L.; TROITZSCH, U.:** *Kriechen von Beton unter Zugbeanspruchung*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 498; Beuth-Verlag GmbH; Köln; 2000

[79] **KREUZINGER, H.:** *Bemessung im Holzbau – Verbundkonstruktionen*
Holzbaukalender 2002; Bruderverlag; 2001; S. 598-621

[80] **KURRER, K.-E.:** *Geschichte der Baustatik*
Verlag Ernst und Sohn; 1. Auflage; Berlin; 2002; ISBN 3-433-01641-0

[81] **LANIG, N.:** *Langzeitverhalten von Beton bei mehrachsiger Beanspruchung*
Dissertation; TU München; Lehrstuhl für Massivbau; 1988

[82] **LAUBE, M.:** *Werkstoffmodell zur Berechnung von Temperaturspannungen in massigen Betonbauteilen im jungen Alter*
Dissertation; TU Braunschweig; 1990

[83] **LEBET, J.-P.:** *Comportement des ponts mixtes acier-béton avac interaction partielle de la connexion et fissuration du béton*
Dissertation; EPEL Lausanne; No. 611; 1986

[84] **LEFFER, A.:** *Zum Ermüdungsverhalten einbetonierter Kopfbolzendübel unter realitätsnaher Beanspruchung im Verbundbrückenbau*
Dissertation; Universität Kaiserslautern; 2002

[85] **LEIHKAUF, S.:** *Geometrisch und physikalisch nichtlineare Statik räumlicher Stabtragwerke aus Stahl unter Berücksichtigung realer Anschluss- und Aussteifungsbedingungen*
Dissertation; TU Dresden; Lehrstuhl für Stahlbau; Schriftenreihe des Instituts für Tragwerke und Baustoffe; Heft 14; 2001; ISSN 0947-4218

[86] **LOCHER, F. W.:** *Die Festigkeit des Zements*
beton 26 (1976); Heft 7; S. 247-249 und Heft 8; S. 283-286

[87] **LOKUGE, W. P.; SANJAYAN, J. G.; SETUNGE, S.:** *Triaxial test results of high-strength concrete subjected to cyclic loading*
Magazine of Concrete Research 55 (2003); Heft 4; S. 321-329; ISSN: 0024-9831

[88] **LUNGERSHAUSEN, H.:** *Zur Schubtragfähigkeit von Kopfbolzendübeln*
Dissertation; Ruhr Universität Bochum; Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen; 7/1988

[89] **MAEDA, Y.; MATSUI, S.; HIRAGI, H.:** *Effects of concrete-placing direction on static and fatigue strengths of stud shear connectors*
Technology Reports of the Osaka University 33 (1983); Nr. 1733, S. 397-406

[90] **MEHLHORN, G.:** *Grundlagen zur physikalisch nichtlinearen FEM-Berechnung von Tragwerken aus Konstruktionsbeton*
Bauingenieur 70 (1995); S. 313-320

[91] **MENRATH, H.:** *Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern*
Dissertation; Universität Stuttgart; Institut für Baustatik; Bericht Nr. 29 (1999)

[92] **MENSINGER, M.:** *Zum Ermüdungsverhalten von Kopfbolzendübeln im Verbundbau*
Dissertation; Universität Kaiserslautern; Verlag Mainz; 2000; ISBN 3-89653-679-6

[93] **MEYER, I. F.:** *Ein werkstoffgerechtes Schädigungsmodell und Stababschnittselement für Stahlbeton unter zyklischer und nichtlinearer Beanspruchung*
Dissertation; Ruhr Universität Bochum; Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen; 4/1988

[94] **MEYER, H.-G.:** *Beitrag zur Frage des Querkriechens von Beton unter ein- und zweiachsiger Druckbeanspruchung*
Dissertation; TH Hannover; 1967

[95] **MIER VAN, JAN G. M.:** *Fracture processes of concrete - assessment of material parameters for fracture models*
CRC Press; ISBN 0-8493-9123-7

[96] **MODELCODE 1990** (CEB-FIP)**:** *Design code*
Comité Euro-Internaltional du Béton (CEB) (Hrsg.); Verlag Thomas Telford; 1993; ISBN 0-7277-1696-4

[97] **MÖHLER, K.:** *Über das Tragverhalten von Biegeträgern und Druckstäben mit zusammengesetzten Querschnitten und nachgiebigen Verbindungsmittels*
Habilitation; TH Karlsruhe; 1956

[98] **MORITA, S.; KAKU, T.; SUDO, E.:** *Force-strain relationship of reinforcing bars embedded in concrete under reversed loadings*
In: Structural Concrete under Seismic Action; AICAP-Symposium Rom; CEB-Bulletin 132-2; Rom; 1979; S. 7-14

[99] **MUGHRABI, H.:** *Hundert Jahre Bauschinger-Effekt*
Zeitschrift für Metallkunde 77 (1986); Heft 11, S. 703-707

[100] **MÜLLER, H.; GRAF, W.:** *Lineare Kinetik von Stabtragwerken – Bausteine 4 und 7 des Programmsystems STATRA – Grundlagen und Beispiele*
Schriftenreihe Bauforschung - Baupraxis; Heft 139; Verlag Bauinformation; Berlin; 1984

[101] **MÜLLER, H.; JÄGER, W.:** *Berechnung des Schnittkraft- und Verschiebungszustandes nach Elastizitätstheorie I. und II. Ordnung sowie linearisierte Stabilitätsuntersuchungen räumlicher Tragwerke – Grundlagen und Beispiele*
Schriftenreihe Bauforschung - Baupraxis; Heft 95; Verlag Bauinformation; Berlin; 1982

[102] **MÜLLER, H.; WOLF, C.-D.; KARGER, D.; GÖHLER, R.:** *Berechnung des Schnittkraft- und Verschiebungszustandes ebener Stabtragwerke nach Theorie I. und II. Ordnung sowie Stabilitätsuntersuchungen – Grundlagen und Anwendungsrichtlinien zum Baustein 1 des Programmsystems STATRA*
Schriftenreihe Bauforschung, Reihe Wissenschaftsorganisation und Informationsverarbeitung; Heft 21; Verlag Bauinformation; Berlin; 1975

[103] **MÜLLER, H. S.:** *Zur Vorhersage des Kriechens von Konstruktionsbeton*
Dissertation; Universität Karlsruhe (TH); 1986

[104] **MÜLLER, H. S.; HILSDORF, H. K.:** *Evaluation of the time dependent behavior of concrete*
CEB-Bulletin 199; Lausanne; 1990; ISSN 0378-9489

[105] **MÜLLER, H. S.; KVITZEL, V.:** *Kriechen und Schwinden von Beton – Grundlagen der neuen DIN 1045 und Ansätze für die Praxis*
Beton- und Stahlbetonbau 97 (2002); Heft 1; S. 8-19

[106] **OBHOLZER, A.:** *Über ein EDV-orientiertes Verfahren zur Erfassung des zeitabhängigen Materialverhaltens bei statisch unbestimmten Verbundkonstruktionen*
Dissertation; Universität Innsbruck; 1980

[107] **OBHOLZER, A.:** *Elektronische Berechnung von Verbundtragwerken unter Berücksichtigung von Schwinden und Kriechen nach CEB/FIP bei praktischen Bauabläufen*
Bauingenieur 58 (1983); Heft 12; S. 471-479

[108] **OLLGARD, J. G.; SLUTTER, R. G.; FISHER, J. W.:** *Shear strength of stud connectors in lightweight and normal-weight concrete*
AISC Engineering Journal 1971; Heft 4; S. 55-64

[109] **OZBOLT, J.; MAYER, U.:** *Nichtlineare Berechnung von Stabtragwerken aus Stahl- und Spannbeton unter Berücksichtigung von Zeiteinflüssen*
Bauingenieur 72 (1997); S. 439-445

[110] **PAMP, R.:** *Zur Auswirkung der Hydratation bei Verbundbrücken*
Dissertation; Ruhr Universität Bochum; Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen; 2/1991

[111] **RANDL, N.; WICKE, M.:** *Schubübertragung zwischen Alt- und Neubeton – Experimentelle Untersuchungen, theoretischer Hintergrund und Bemessung*
Beton- und Stahlbetonbau 95 (2000); Heft 8; S. 461-473

[112] **REMMEL, G.:** *Zum Zug- und Schubtragverhalten von Bauteilen aus hochfestem Beton*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 444; Beuth Verlag GmbH; Köln; 1994

[113] **RICHTER, C.:** *Analyse des Tragverhaltens einer Verbundbrücke – Auswertung und rechnerischer Vergleich zeitabhängiger Verformungsmessungen*
Diplomarbeit TU Dresden; Fakultät Bauingenieurwesen; Lehrstuhl für Stahlbau; 2000 (unveröffentlicht)

[114] **RILEM TC 107 SUBCOMMITTEE 5:** *Data base on creep and shrinkage test*
RILEM Draft Report; prinzipal authors: Müller, H. S.; Bažant, Z.; Küttner, C. H.; 1998; unveröffentlichter Arbeitsbericht

[115] **ROHLING, A.:** *Zum Einfluss des Verbundkriechens auf die Rissbreitenentwicklung sowie die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen*
Dissertation; TU Braunschweig; Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz; 1987; ISBN 3-89288-024-7

[116] **ROIK, K.-H.; HANSWILLE, G.:** *Beitrag zur Bestimmung der Tragfähigkeit von Kopfbolzendübeln*
Stahlbau 55 (1983); Heft 10, S. 301-308

[117] **ROTTLER, S.:** *Kriechen von Beton unter veränderlicher Spannung*
Dissertation; TH Karlsruhe; 1998

[118] **RÜSCH, H.; KORDINA, K.; HILSDORF, H.:** *Versuche über das Kriechen unbewehrten Betons – Der Einfluss des mineralogischen Charakters der Zuschläge auf das Kriechen von Beton*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 146; Verlag Ernst und Sohn; Berlin; 1962

[119] **RUßWURM, D.; SCHÄFER, J.:** *Entwicklung der Betonstähle*
beton 51 (2001); Heft 4, S. 192-196

[120] **SAPOUNTZAKIS, J. T.; KATSIKADELIS, S.:** *An new model for the analysis of composite steel – concrete slab and Beam structures with deformable connection*
Computional Mecanics 31 (2003); S. 340-349

[121] **SAENZ, L. P.:** *Equation for the stress-strain of concrete*
ACI Journal 61 (1964); Heft 9; S. 1227-1239

[122] **SARGIN, M.:** *Stress-strain-relationship for concrete and analysis of concrete sections – study no. 4*
Solid Mechanics Division; University of Waterloo; Waterloo, Ontario, Canada; 1971

[123] **SATTLER, K.:** *Ein allgemeines Berechnungsverfahren für Tragwerke mit elastischem Verbund*
Veröffentlichung des DStV; Heft 8; Köln; 1955

[124] **SATTLER, K.:** *Theorie der Verbundkonstruktionen - Band 1. Theorie*
Verlag Ernst & Sohn; Berlin; 1959;

[125] **SCHANZENBACH, J.:** *Zum Einfluss von Dübelnachgiebigkeit und Unterverdübelung auf das Tragverhalten von Verbunddurchlaufträgern im Hoch- und Industriebau*
Dissertation; TU Kaiserslautern; 1988

[126] **SCHEELE.:** *Zum Tragverhalten von Kopfbolzendübeln unter formschlüssiger Belastung*
Dissertation; Universität Kaiserslautern; 1991

[127] **SCHELLING, W.:** *Die Berechnung nachgiebig verbundener, zusammengesetzter Biegeträger im Ingenieurholzbau*
Dissertation; TH Karlsruhe; 1968

[128] **SCHNEIDER, R.:** *Stochastische Analyse und Simulation des nichtlinearen Verhaltens ebener Stabtragwerke mittels M-N-Q-Interaktionsmodell*
Dissertation; TU Dresden; Veröffentlichungen des Lehrstuhls für Statik; Heft 2; 2001;
ISSN 1617-6928

[129] **SCHOLZ, A.:** *Ein Beitrag zur Berechnung von Flächentragwerken aus Holz*
Dissertation; TU München; 2004

[130] **SCHULER, G.:** *Durchlaufträger mit elastischem Verbund bei abschnittsweise veränderlichen Steifigkeiten*
Dissertation; TH Karlsruhe; 1987

[131] **SHEN, J.-H.:** *Lineare und nichtlineare Theorie des Kriechens und der Relaxation von Beton unter Druckbeanspruchungen*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 432; Beuth-Verlag GmbH; Köln; 1992

[132] **SIPPEL, T. M.:** *Zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Betriebsbelastung*
Dissertation; Uni Stuttgart; Veröffentlichungen des Lehrstuhls für Statik; Heft 2; 2001; ISBN 3-9805102-0-4

[133] **SOFISTIK AG (2004).:** URL: http://www.sofistik.de/. (01.11.2005)

[134] **STAMM, K.; WITTE, H.:** *Sandwichkonstruktionen – Berechnung, Fertigung, Ausführung*
Springer-Verlag Wien New York; 1. Auflage; 1974; ISBN 3-211-81121-4

[135] **STANDFUß, F.:** *Neue Entwicklungen im Brückenbau*
In: 14. Dresdner Brückenbausymposium; Technische Universität Dresden, Institut für Massivbau (Hrsg.); Dresden; 1998

[136] **STEMPNIEWSKI, L.; EIBL, J.:** *Finite Elemente im Stahlbeton*
In: Betonkalender 1996; Teil II; S. 577-647

[137] **STÜSSI, F.:** *Über den verdübelten Balken*
Schweizerische Bauzeitung 122 (1943); Heft 21; S. 271-274

[138] **TORRES, LI.; LOPEZ-ALMANSA, F.; BOZZO, L. M.:** *Tension-stiffening model for cracked flexural concrete members*
Journal of Structural Engineering 130 (2004); Heft 8; S. 1242-1251

[139] **TSOUKANTAS, S. G.; TASSIOS, T. P.:** *Shear resistance of connections between reinforced concrete linear precast elements*
ACI Structural Journal 86 (1989); Heft 3; S. 242-249

[140] **TROST, H.:** *Auswirkung des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton- und Spannbeton*
Beton- und Stahlbetonbau 62 (1967), Heft 10; S. 230-238 und Heft 11; S. 261-269

[141] **TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J.:** *Stiffness and deflection analysis of complex structures*
Journal of Aeronautical Science 23 (1956); S. 805-824

[142] **UNIONBRÜCKE DRESDEN-RADEBEUL:** *DEGES Deutsche Einheit Fernstraßenplanungs- und -bau GmbH, Ausführungszeichnungen Planungsunterlagen und Bauprotokolle für BW 9 der A4 km 31,5-0,0*
(unveröffentlicht)

[143] **WEYER, U.; UHLENDAHL, J.:** *Verbundträger im Brückenbau – Rissesicherung schlaff bewehrter, durchlaufender Verbundbrücken*
Studiengesellschaft Stahlanw. e.V.; Projekt 196; Düsseldorf; 1995; ISBN 3-930621-32-0

[144] **WAGNER, O.:** *Das Kriechen unbewehrten Betons*
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; Heft 131; Ernst & Sohn; Berlin; 1958

[145] **WAPENHANS, W.:** *Beitrag zur Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton mit elastischem Verbund und zur Profilierung von Stahlblechen für den Flächenverbund*
Dissertation A; TU Dresden; 1983

[146] **WRIGGERS, P.:** *Nichtlineare Finite-Element-Methode*
Springer-Verlag; Berlin Heidelberg New-York; 1. Auflage; 2001; ISBN 3-540-67747-X

[147] **ZILCH, K.; PENKA, E.; SCHNEIDER, R.:** *Nichtlineare Berechnungen im Massivbau Materialmodelle und Sicherheitskonzepte*
In: Wriggers, P.; Meißner, U.; Stein, E.; Wunderlich, W. (eds.): Finite Elemente in der Baupraxis - FEM '98; Ernst & Sohn; Berlin 1998; S. 1-12

# Anlagen

## Anlage I

### Datenbank zweiaxiales Kriechen

Die vom RILEM TC 107 SUBCOMMITTEE 5 [114] angegebenen „Qualitäts“-Kriterien zur Bewertung einaxialer Kriechversuche wurden durch die Beschreibung der Art des mehraxialen Spannungszustandes ergänzt. Damit wird der Einfluss des Querdruckes auf die Längsverformungen verdeutlicht.

| Probengeometrie | | | | | | | Zemente | | Zuschlagstoffe | Betoneigenschaften | | | vor Versuchsbeginn | | | | | | | | | | Versuchszeitraum | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bez. | Würfel, Scheibe, Zylinder | l [cm] | b [cm] | d [cm] | Normalbeton/ Zementleim | bewehrt, n. bewehrt, vorgespannt | Zementtyp | Zementgehalt [kg/m³] | $d_{max}$ [mm] | Herkunft | w/z-Wert | $f_{ck}$ [N/mm²] | E [N/mm²] | konstante Lagerungs-/Umgebungsbedingungen | RH [%] | T [°C] | $t_S$ [d] | $t_0$ [d] | $(t-t_0)$ [d] | $\sigma_{max}:f_{ck}$ | $\sigma_{min}:\sigma_{max}$ | Belastung x [N/mm²] | Belastung y [N/mm²] | Belastung z [N/mm²] | konst. Belastung | RH [%] | T [°C] | Angabe elast. Dehnung | Angabe Kriechdehnung | parallele Schwindprobe/ Schwinden von Gesamtverformung trennbar | ablesbare Meßwerte | Erläuterungen |
| Lanig | 1988 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| S5 | s | 20 | 20 | 5 | n | n | PC | 330 | 16 | | 0,55 | 40,4 | 36913 | + | 99 | 20 | 1 | 28 | 90 | 0,3 | 0 | 13 | 0 | 0 | + | 99 | 20 | (-) | + | + | + | |
| | s | 20 | 20 | 5 | n | n | PC | 331 | 16 | | 0,55 | 41,7 | 35833 | + | 65 | 20 | 8 | 28 | 90 | 0,3 | 0 | 13 | 0 | 0 | + | 65 | 20 | (-) | + | + | + | |
| S7 | s | 20 | 20 | 5 | n | n | PC | 332 | 16 | | 0,55 | 40,4 | 36913 | + | 99 | 20 | 1 | 28 | 90 | 0,3 | 1 | 13 | 13 | 0 | + | 99 | 20 | (-) | + | + | + | elast. Dehnung nur an ein- und dreiachsigen Proben |
| | s | 20 | 20 | 5 | n | n | PC | 333 | 16 | | 0,55 | 41,7 | 35833 | + | 65 | 20 | 8 | 28 | 90 | 0,3 | 1 | 13 | 13 | 0 | + | 65 | 20 | (-) | + | + | + | ermittelt, keine Relaxationsversuche |
| S9 | s | 20 | 20 | 5 | n | n | PC | 334 | 16 | | 0,55 | 42,3 | 36913 | + | 99 | 20 | 1 | 28 | 90 | 0,3 | 0,5 | 13 | 6,5 | 0 | + | 99 | 20 | (-) | + | + | + | |
| | s | 20 | 20 | 5 | n | n | PC | 336 | 16 | | 0,55 | 41,7 | 35833 | + | 65 | 20 | 8 | 28 | 90 | 0,3 | 0,5 | 13 | 6,5 | 0 | + | 65 | 20 | (-) | + | + | + | |
| Gopalakrishnan | 1967 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | parallel 13 Proben einachsig belastet |
| TC-1 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 28 | 0,23 | 1,0 | 6,8 | 6,6 | 6,3 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | |
| TC-2 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 28 | 0,13 | 1,0 | 4,0 | 3,8 | 3,8 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | Ablesbarkeit der Meßwerte eingeschränkt, da |
| TC-3 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 28 | 0,14 | 0,8 | 4,1 | 3,4 | 4,3 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | Diagramme auf schwer ablesbarem Mikrofilm |
| BC-4 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 22 | 0,17 | 0,7 | 5,2 | 3,5 | 0,0 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | |
| TC-5 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 28 | 0,33 | 0,8 | 10,0 | 7,7 | 3,1 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | |
| TC-5R | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 28 | 0,33 | 0,8 | 9,9 | 7,6 | 3,0 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | |
| TC-6 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 28 | 0,37 | 0,9 | 11,2 | 9,7 | 2,1 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | |
| TC-7 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 28 | 0,42 | 0,9 | 12,6 | 11,5 | 2,5 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | |
| BC-8 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 28 | 0,42 | 0,6 | 12,6 | 7,3 | 0,0 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | |
| BT-9 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 28;14 | 0,28 | 0,7 | 8,4 | 5,6 | 0;10,1 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | $\sigma_3$ n. 28 d aufgebracht |
| TC-10 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 28;7 | 0,44 | 0,13/0,72 | 13,2 | 1,8;9,5 | 1,9 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | $\sigma_3$ n. 28 d erhöht |
| BT-11 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 70;28 | 0,45 | 1,0 | 13,3 | 13,9 | 0;9,1 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | $\sigma_3$ n. 70 d aufgebracht |
| TC-12 | w | 25,4 | 25,4 | 25,4 | n | n | PC(T.3) | 250 | 19 | | 0,72 | 29,9 | | + | 98 | 25 | 1 | 8 | 63;31 | 0,43 | 1,1 | 12,9 | 13,6 | 6,4;13,5 | + | 98 | 25 | + | + | - | (+) | $\sigma_3$ n. 63 d erhöht |
| Meyer | 1967 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Meßwerte tabellarisch, stufenw. Lastaufbringung |
| B4-K1 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 31,4 | | + | 99 | 20 | 7 | 32 | 70 | 0,31 | 0,9 | 9,8 | 8,6 | 0 | + | 65 | 20 | + | + | + | + | Wasserlagerung bis t=7d, Paraffinversiegelung kurz |
| B4-K2 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 31,4 | | + | 99 | 20 | 7 | 32 | 70 | 0,42 | 0 | 13,1 | 0 | 0 | + | 65 | 20 | + | + | + | + | vor Lastaufbringung; hier keine Gleitschicht zw. |
| B4-K3 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 31,4 | | + | 99 | 20 | 7 | 32 | 70 | 0,26 | 0,99 | 8 | 8,1 | 0 | + | 65 | 20 | + | + | + | + | Druckplatte und Probe! |
| B1-K1 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | Leine-Kiessand. Quarzmehl: Sieblinie A-B | 0,7 | 31,2 | 27800 | + | 99 | 20 | 7 | 30 | 35 | 0,46 | 0,50 | 14,3 | 7,1 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | |
| B1-K2 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 31,2 | 27800 | + | 99 | 20 | 7 | 30 | 35 | 0,23 | 0 | 0 | 7,1 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | |
| B1-K3 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 31,2 | 27800 | + | 99 | 20 | 7 | 30 | 35 | 0,43 | 0 | 0 | 13,4 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | Wasserlagerung bis t=7d, Trocknung bei 70°C bis |
| B1-K4 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 31,2 | 27800 | + | 99 | 20 | 7 | 30 | 35 | 0,44 | 0,52 | 7,1 | 13,7 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | 50% Wassersättigung, dann 6-fache |
| B1-K5 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 31,2 | 27800 | + | 99 | 20 | 7 | 30 | 35 | 0,43 | 0 | 0 | 13,3 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | Chlorkautschukversiegelung |
| B1-K6 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 31,2 | 27800 | + | 99 | 20 | 7 | 30 | 35 | 0,44 | 0,98 | 13,3 | 13,6 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | |
| B5-K1 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 27,5 | 24300 | + | 65 | 20 | 7 | 35 | 66 | 0,46 | 0,97 | 12,4 | 12,8 | 0 | + | 65 | 20 | + | + | + | + | |
| B5-K2 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 27,5 | 24300 | + | 65 | 20 | 7 | 35 | 66 | 0,47 | 0 | 0 | 13 | 0 | + | 65 | 20 | + | + | + | + | Wasserlagerung bis t=7d, Lagerung unter |
| B5-K3 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 27,5 | 24300 | + | 65 | 20 | 7 | 35 | 66 | 0,48 | 0,95 | 12,5 | 13,2 | 0 | + | 65 | 20 | + | + | + | + | Laborbedingungen, Paraffinversiegelung kurz vor |
| B5-K4 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 27,5 | 24300 | + | 65 | 20 | 7 | 35 | 66 | 0,46 | 0 | 0 | 12,8 | 0 | + | 65 | 20 | + | + | + | + | Aufbringen der Belastung |
| C1-K1 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 32,9 | 32700 | + | 99 | 20 | 7 | 61 | 56 | 0,40 | 0 | 13 | 0 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | |
| C1-K2 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 32,9 | 32700 | + | 99 | 20 | 7 | 61 | 56 | 0,41 | 0,96 | 13,6 | 13 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | |
| C1-K3 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 32,9 | 32700 | + | 99 | 20 | 7 | 61 | 56 | 0,45 | 0,83 | 14,7 | 12,2 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | Wasserlagerung bis t=7d, dann 6-facher |
| C2-K1 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 26,1 | 28300 | + | 99 | 20 | 7 | 35 | 38 | 0,31 | 0,64 | 8 | 12,5 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | Chlorkautschukanstrich, bis und während Versuch |
| C2-K2 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 26,1 | 28300 | + | 99 | 20 | 7 | 35 | 38 | 0,28 | 0 | 7,2 | 0 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | unter Laborbedingungen, E-Modul im Alter von 53 |
| C2-K3 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 26,1 | 28300 | + | 99 | 20 | 7 | 35 | 38 | 0,52 | 0 | 13,6 | 0 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | d ermittelt |
| C2-K4 | s | 40 | 40 | 6 | n | n | PC | 257 | 7 | | 0,7 | 26,1 | 28300 | + | 99 | 20 | 7 | 35 | 38 | 0,49 | 0,54 | 12,7 | 6,9 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | + | + | |
| Arthanari | | 1966 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Temp.-Unterschied in Probe ± 2°C |
| S1 | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | | - | 99 | 25 | 7 | 10 | 50 | 0,1;0,2 | 0,5;1 | 6,9 | 3,4;6,9 | 0 | + | 52 | 25 | + | + | 1 | (+) | Klimaanlage kaputt, Temp. änderte sich um 4°C, |
| S1u | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | | - | 99 | 25 | 7 | 10 | 50 | 0,20 | 0 | 6,9 | 0 | 0 | + | 52 | 25 | + | + | - | (+) | RH um 20%, Druckverlust in Hydraulik wg. Leck |
| S2 | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | | + | 99 | 25 | 7 | 10 | 60 | 0,1;0,2 | 0,5;1 | 6,9 | 3,4;6,9 | 0 | + | 52 | 55;80 | + | + | 3 | (+) | 2 Heizer abgebrannt |
| S2u | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | | + | 99 | 25 | 7 | 10 | 60 | 0,20 | 0 | 6,9 | 0 | 0 | + | 52 | 55;80;96 | + | + | - | (+) | |
| S3 | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | | + | 99 | 25 | 7 | 100 | 60 | 0,1;0,2 | 0,5;1 | 6,9 | 3,4;6,9 | 0 | + | 99 | 58;84;102 | + | + | 3 | (+) | Ablesbarkeit der Meßwerte eingeschränkt, da |
| S3u | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | | + | 99 | 25 | 7 | 100 | 60 | 0,20 | 0 | 6,9 | 0 | 0 | + | 99 | 58;84 | + | + | - | (+) | Diagramme auf schwer ablesbarem Mikrofilm |
| S4a | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | | + | 99 | 25 | 7 | 10 | 60 | 0,1;0,2 | 0,5;1 | 6,9 | 3,4;6,9 | 0 | + | 99 | 42;96 | + | + | 4 | (+) | |
| S4au | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | | + | 99 | 25 | 7 | 10 | 60 | 0,20 | 0 | 6,9 | 0 | 0 | + | 99 | 42;96 | + | + | - | (+) | |
| S4b | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | Themse-Flußkies | 0,56 | 35,2 | | + | 99 | 20 | 7 | 100 | 60 | 0,1;0,2 | 0,5;1 | 6,9 | 3,4;6,9 | 0 | + | 99 | 20 | + | + | - | (+) | |
| S5 | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | 30337 | + | 99 | 20 | 7 | 15 | 60 | 0,20 | 1 | 6,9 | 6,9 | 0 | + | 99 | 20;40;62 | + | + | 1 | (+) | Bestimmung E-Modul, Dichtheit d. Versiegelung |
| S5u | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 320 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | 30337 | + | 99 | 20 | 7 | 15 | 60 | 0,20 | 0 | 6,9 | 0 | 0 | + | 99 | 40;62 | + | + | - | (+) | |
| S6 | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 319 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | | + | 99 | 20 | 7 | 15 | 60 | 0,20 | 0 | 6,9 | 0 | 0 | + | 99 | 80 | + | + | 2 | (+) | |
| S6u | s | 30,48 | 30,5 | 10,2 | n | n | OPC | 320 | 0,953 | | 0,56 | 35,2 | | - | 99 | 20 | 7 | 15 | 60 | 0,20 | 0 | 6,9 | 0 | 0 | + | 99 | 0;20;80 | + | + | - | (+) | n. 7 d Kühlschrank f. 0°C ausgefallen → Abbruch |

## Anlage II

## Revised Summation Model – Formelapparat nach MÜLLER/HILSDORF [104], S. 34 ff.

### *Kriechzahl*

$$\varphi(t,\tau,t_0) = \phi_d(t,\tau) + [\phi_{fb}(t,t_0) - \phi_{fb}(\tau,t_0)] + [\phi_{fd}(t,t_0) - \phi_{fd}(\tau,t_0)]$$

### *Kriechdehnung für eine aus n Spannungssprüngen bestehende Lastgeschichte*

$$\varepsilon_{cc}(t,t_0) = \frac{1}{E_{cm}} \cdot \sum_{i=0}^{n} [\phi_d(t,\tau_i) + \{\phi_{fb}(t,t_0) - \phi_{fb}(\tau_i,t_0)\} + \{\phi_{fd}(t,t_0) - \phi_{fd}(\tau_i,t_0)\}] \cdot \Delta\sigma_i$$

### *Beschreibung der Kriechfunktion*

$$\phi(t,\tau,t_0) = \phi_d(t,\tau) + \phi_{fb}(t,\tau,t_0) + \phi_{fd}(t,\tau,t_0)$$

$\phi_d$ … Kriechkoeffizient für verzögert elastische Verformung

$\phi_{fb}$ … Basisfließkoeffizient, die Fließkomponente, welche sich unter Last bei konstantem Feuchtegehalt entwickelt

$\phi_{fd}$ … Koeffizient des Trocknungsfließens, Fließkomponente infolge des Austrocknens des Betons unter Belastung

$t$ … Betonalter zur betrachteten Zeit [d]

$t_0$ … Betonalter bei der ersten Belastung [d]

$\tau$ … Betonalter zur Zeit der Belastung oder bei Belastungsänderung [d]

$f_{cm}$ … Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen in [N/mm²]

$E_{cm}$ … Elastizitätsmodul nach 28 Tagen in [N/mm²]

RH … relative Umgebungsluftfeuchte in [%]

$h_0$ … wirksame Bauteildicke [mm] $\Rightarrow h_0 = 2 \cdot A_c/u$

### verzögerte Elastizität $\phi_d$ (t,τ)

$$\phi_d(t,\tau) = \phi_{d0} \cdot \beta_d(t,\tau)$$

Grundmaß: $$\phi_{d0} = \frac{0.9}{\sqrt[5]{f_{cm}}}$$

Zeitverlaufsfunktion: $$\beta_d(t,\tau) = \left[0.25 + \frac{46}{60+\sqrt{\tau}}\right] \cdot \left[0.24 + \sum_{i=1}^{4} a_i \left(1 - e^{-b_i\left(t^{0.35} - \tau^{0.35}\right)}\right)\right]$$

mit:

| i | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 0.23 | 0.22 | 0.19 | 0.12 |
| $b_i$ | 1.30 | 2.90 | 8.80 | 42 |

**Fließkoeffizienten $\phi_{fb}$ und $\phi_{fd}$**

$$\phi_f(t,\tau,t_0) = \phi_f(t,t_0) - \phi_f(\tau,t_0)$$

Basisfließkoeffizient $\phi_{fb}(t,t_0)$

$$\phi_{fb}(t,t_0) = \phi_{fb_0} \cdot \beta_{fb}(t,t_0)$$

Grundmaß: $$\phi_{fb_0} = \frac{1.1}{\sqrt{f_{cm}}}$$

Zeitverlaufsfunktion: $$\beta_{fb}(t,t_0) = \ln\left[\left(\frac{7 \cdot f_{cm}}{10000} + \frac{7}{2 + t_0^{1.2}}\right) \cdot (t - t_0)^{2/3} + 1\right]$$

Trocknungsfließen $\phi_{fd}(t,t_0)$

$$\phi_{fd}(t,t_0) = \phi_{fd_0} \cdot \phi_{fd_1} \cdot \beta_{fd}(t,t_0)$$

Festigkeitsbeiwert: $$\phi_{fd_0} = \frac{38}{\sqrt{f_{cm}}}$$

Feuchtebeiwert: $$\phi_{fd_1} = 1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^{1.5}$$

Zeitverlaufsfunktion: $$\beta_{fd}(t,t_0) = \frac{e^{-0.001 t_0} + 0.2}{t_0^{0.15}} \cdot \left[\frac{t - t_0}{0.35 \cdot f_{cm} \cdot h_0 + t - t_0}\right]^{0.4}$$

Der Koeffizient des Trocknungsfließens ist Null für RH = 100 % und $h_0 \Rightarrow \infty$

Einfluss des Zementtyps

$\Rightarrow$ berücksichtigt durch modifiziertes Erstbelastungsalter

$$t_0 = t_{0,act} \cdot \left[\frac{9}{2 + t_{0,act}^{1.2}} + 1\right]^{\alpha}$$

$t_{0,act}$ … aktuelles Betonalter bei Erstbelastung in [Tagen]

$\alpha$ … Koeffizient zur Berücksichtigung der Zementart

| Zementtyp | $\alpha$ |
|---|---|
| SL | -1 |
| N,R | 0 |
| RS | 1 |

Einfluss veränderlicher Temperaturen

$\Rightarrow$ berücksichtigt durch modifiziertes Erstbelastungsalter

$t_{0,act} = t_{0,T}$

$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \cdot \exp\left[-\left(\frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)} - 13{,}65\right)\right]$$

$T(\Delta t_i)$: Temperatur in [°C] im Zeitintervall $\Delta t_i$

$t = (t - t_0)_{act} + t_0$

$(t - t_0)_{act}$: aktuelle Belastungszeit

## Anlage III

## Schwindansatz der DIN 1045-1 – Formelapparat nach DAFSTB HEFT 525 [30], S. 65 ff.

***Beschreibung der Schwinddehnung***

$$\varepsilon_{cs}(t) = \varepsilon_{cas}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s)$$

$\varepsilon_{cas}$ … Verformungskomponente infolge Schrumpfens

$\varepsilon_{cds}$ … Verformungskomponente infolge Trocknungsschwindens

$t$ … Betonalter zur betrachteten Zeit [d]

$t_s$ … Betonalter zum Schwindbeginn [d]

$f_{cm}$ … Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen in [N/mm²]

$E_{cm}$ … Elastizitätsmodul nach 28 Tagen in [N/mm²]

RH … relative Luftfeuchte der Umgebung in [%]

$h_0$ … wirksame Bauteildicke [mm] $\Rightarrow h_0 = 2 \cdot A_c/u$

**Schrumpfen $\varepsilon_{cas}(t)$**

$$\varepsilon_{cas}(t) = \varepsilon_{cas0}(f_{cm}) \cdot \beta_{as}(t)$$

Grundmaß: $$\varepsilon_{cas0}(f_{cm}) = -\alpha_{as}\left(\frac{f_{cm}}{60 + f_{cm}}\right)^{2,5} \cdot 10^{-6}$$

Zeitverlaufsfunktion: $$\beta_{as}(t) = 1 - \exp\left(-0{,}2 \cdot \sqrt{t}\right)$$

**Trocknungsschwinden $\varepsilon_{cds}(t,t_s)$**

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot (t - t_s)$$

Grundmaß: $$\varepsilon_{fcds0}(f_{cm}) = \left[(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{10}\right)\right] \cdot 10^{-6}$$

Feuchtebeiwert: $$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1{,}55 \cdot \left[1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^3\right] & \text{für}: 40\% \le RH \le 99\% \cdot \beta_{s1} \\ 0{,}25 & \text{für}: \quad RH > 99\% \cdot \beta_{s1} \end{cases}$$

$$\text{mit: } \beta_{s1} = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0,1} \le 1{,}0$$

zur Berücksichtigung der inneren Austrocknung des Betons

Zeitverlaufsfunktion: $$\beta_{ds}(t-t_s)=\sqrt{\frac{(t-t_s)}{350\cdot\left(\frac{h_0}{100}\right)^2+(t-t_s)}}$$

$\alpha$ … Koeffizienten zur Berücksichtigung des Zementtyps

| Zementtyp | $\alpha_{as}$ | $\alpha_{ds1}$ | $\alpha_{ds2}$ |
|---|---|---|---|
| SL | 800 | 3 | 0,13 |
| N,R | 700 | 4 | 0,12 |
| RS | 600 | 6 | 0,12 |

## Anlage IV

## Systemkenngrößen und Querschnittswerte der Unionbrücke

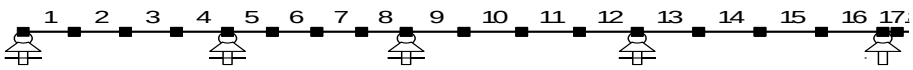
### *Knotenkoordinaten*

| Knoten-Nr. | x-Koord. [m] | y-Koord. [m] | Kommentar |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,000 | 0,000 | Achse 100 |
| 2 | 7,131 | 0,000 | 1/4 $b_m$ |
| 3 | 14,263 | 0,000 | Feldmitte |
| 4 | 21,394 | 0,000 | 3/4 $b_m$ |
| 5 | 28,525 | 0,000 | Achse 200 \| Länge Feld 1 = 28,525 m |
| 6 | 34,759 | 0,000 | 1/4 $b_m$ |
| 7 | 40,993 | 0,000 | Feldmitte |
| 8 | 47,226 | 0,000 | 3/4 $b_m$ |
| 9 | 53,460 | 0,000 | Achse 300 \| Länge Feld 2 = 24,935 m |
| 10 | 61,523 | 0,000 | 1/4 $b_m$ |
| 11 | 69,586 | 0,000 | Feldmitte |
| 12 | 77,648 | 0,000 | 3/4 $b_m$ |
| 13 | 85,711 | 0,000 | Achse 400 \| Länge Feld 3 = 32,251 m |
| 14 | 94,283 | 0,000 | 1/4 $b_m$ |
| 15 | 102,856 | 0,000 | Feldmitte |
| 16 | 111,428 | 0,000 | 3/4 $b_m$ |
| 17 | 120,000 | 0,000 | Achse 500 \| Länge Feld 4 = 34,289 m |
| 18 | 122,000 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 19 | 124,750 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 20 | 128,678 | 0,000 | 1/4 $b_m$ |
| 21 | 137,355 | 0,000 | Feldmitte |
| 22 | 144,221 | 0,000 | Übergang BA 8 - BA 11 |
| 23 | 146,033 | 0,000 | 3/4 $b_m$ |
| 24 | 149,960 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 25 | 152,710 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 26 | 154,710 | 0,000 | Achse 600 \| Länge Feld 5 = 34,710 m |
| 27 | 156,710 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 28 | 159,460 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 29 | 162,121 | 0,000 | Übergang BA 11 - BA 10 |
| 30 | 163,395 | 0,000 | 1/4 $b_m$ und IWA |
| 31 | 172,081 | 0,000 | Feldmitte IWA |
| 32 | 179,021 | 0,000 | Übergang BA 10 - BA 13 |
| 33 | 180,766 | 0,000 | 3/4 $b_m$ und IWA |
| 34 | 185,051 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 35 | 187,551 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 36 | 189,451 | 0,000 | Achse 700 \| Länge Feld 6 = 34,741 m |
| 37 | 191,351 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 38 | 193,951 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 39 | 197,021 | 0,000 | Übergang BA 13 - BA 12 |
| 40 | 198,140 | 0,000 | 1/4 $b_m$ und IWA |
| 41 | 206,829 | 0,000 | Feldmitte IWA |
| 42 | 214,921 | 0,000 | Übergang BA 12 - BA 15 |
| 43 | 215,517 | 0,000 | 3/4 $b_m$ und IWA |
| 44 | 218,606 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 45 | 222,206 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |

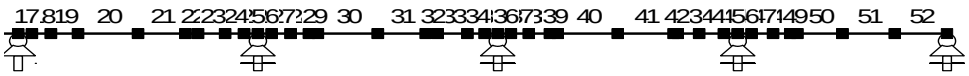
| Knoten-Nr. | x-Koord. [m] | y-Koord. [m] | Kommentar |
|---|---|---|---|
| 46 | 224,206 | 0,000 | Achse 800 \| Länge Feld 7 = 34,755 m |
| 47 | 226,206 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 48 | 229,306 | 0,000 | Querschnittssprung Stahl |
| 49 | 231,785 | 0,000 | 1/4 $b_m$ |
| 50 | 232,821 | 0,000 | Übergang BA 15 - BA 14 |
| 51 | 239,364 | 0,000 | Feldmitte IWA |
| 52 | 246,942 | 0,000 | 3/4 $b_m$ |
| 53 | 254,521 | 0,000 | Achse 900 \| Länge Feld 8 = 30,315 m |

***Stäbe – Zuordnung der Betonierabschnitte und Querschnitte***

| Stab-Nr. | Stab-länge [m] | QS Anfang | QS Ende | Betonier-abschnitt | Stab-Nr. | Stab-länge [m] | QS Anfang | QS Ende | Betonier-abschnitt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,13 | 1 | 2 | 1 | 27 | 2,75 | 21 | 16 | 11 |
| 2 | 7,13 | 2 | 2 | 1 | 28 | 2,66 | 17 | 39 | 11 |
| 3 | 7,13 | 2 | 2 | 1 | 29 | 1,27 | 39 | 2 | 10 |
| 4 | 7,13 | 3 | 4 | 3 | 30 | 8,69 | 37 | 37 | 10 |
| 5 | 6,23 | 4 | 5 | 3 | 31 | 6,94 | 37 | 37 | 10 |
| 6 | 6,23 | 6 | 6 | 2 | 32 | 1,74 | 37 | 37 | 13 |
| 7 | 6,23 | 6 | 6 | 2 | 33 | 4,29 | 2 | 22 | 13 |
| 8 | 6,23 | 5 | 7 | 5 | 34 | 2,50 | 23 | 24 | 13 |
| 9 | 8,06 | 7 | 8 | 5 | 35 | 1,90 | 25 | 26 | 13 |
| 10 | 8,06 | 9 | 9 | 4 | 36 | 1,90 | 26 | 25 | 13 |
| 11 | 8,06 | 9 | 9 | 4 | 37 | 2,60 | 24 | 23 | 13 |
| 12 | 8,06 | 8 | 10 | 7 | 38 | 3,07 | 22 | 40 | 13 |
| 13 | 8,57 | 10 | 11 | 7 | 39 | 1,12 | 40 | 2 | 12 |
| 14 | 8,57 | 12 | 12 | 6 | 40 | 8,69 | 38 | 38 | 12 |
| 15 | 8,57 | 12 | 12 | 6 | 41 | 8,09 | 38 | 38 | 12 |
| 16 | 8,57 | 11 | 13 | 9 | 42 | 0,60 | 38 | 38 | 15 |
| 17 | 2,00 | 13 | 14 | 9 | 43 | 3,09 | 2 | 27 | 15 |
| 18 | 2,75 | 15 | 16 | 9 | 44 | 3,60 | 28 | 29 | 15 |
| 19 | 3,93 | 17 | 2 | 9 | 45 | 2,00 | 30 | 31 | 15 |
| 20 | 8,68 | 2 | 2 | 8 | 46 | 2,00 | 31 | 32 | 15 |
| 21 | 6,87 | 2 | 2 | 8 | 47 | 3,10 | 33 | 34 | 15 |
| 22 | 1,81 | 2 | 2 | 11 | 48 | 2,48 | 9 | 35 | 15 |
| 23 | 3,93 | 18 | 19 | 11 | 49 | 1,04 | 35 | 35 | 14 |
| 24 | 2,75 | 20 | 21 | 11 | 50 | 6,54 | 35 | 35 | 14 |
| 25 | 2,00 | 14 | 5 | 11 | 51 | 7,58 | 35 | 35 | 14 |
| 26 | 2,00 | 5 | 14 | 11 | 52 | 7,58 | 35 | 36 | 14 |



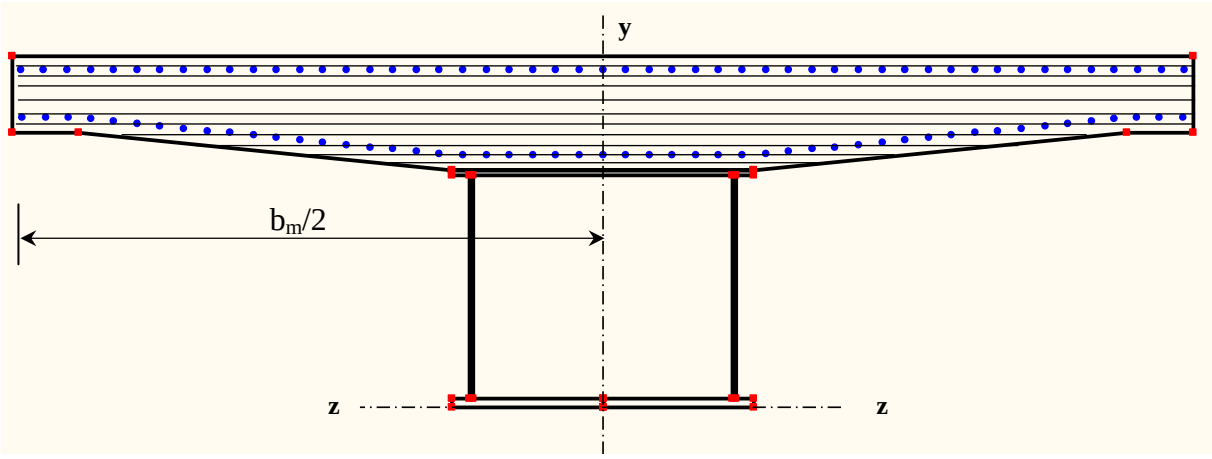

- Feld 1 - - Feld 2 - - Feld 3 - - Feld 4 -




- Feld 5 - - Feld 6 - - Feld 7 - - Feld 8 -

***Querschnitte – Stahlsteg- und -gurtblechdicke, mitwirkende Breite***

| QS | b-Steg [mm] | d-OG [mm] | d-UG [mm] | $b_m/2$ [mm] | QS | b-Steg [mm] | d-OG [mm] | d-UG [mm] | $b_m/2$ [mm] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 18 | 25 | 40 | 2.538 | 21 | 22 | 60 | 85 | 2.960 |
| 2 | 18 | 25 | 40 | 3.627 | 22 | 18 | 25 | 40 | 3.212 |
| 3 | 22 | 90 | 130 | 3.621 | 23 | 22 | 55 | 85 | 3.212 |
| 4 | 22 | 90 | 130 | 2.261 | 24 | 22 | 55 | 85 | 2.952 |
| 5 | 22 | 90 | 130 | 2.766 | 25 | 22 | 85 | 125 | 2.952 |
| 6 | 18 | 25 | 40 | 2.772 | 26 | 22 | 85 | 125 | 2.762 |
| 7 | 22 | 90 | 130 | 2.377 | 27 | 18 | 25 | 40 | 3.273 |
| 8 | 22 | 90 | 130 | 3.412 | 28 | 22 | 65 | 100 | 3.273 |
| 9 | 18 | 25 | 40 | 3.420 | 29 | 22 | 65 | 100 | 2.428 |
| 10 | 22 | 90 | 130 | 2.670 | 30 | 22 | 100 | 160 | 2.428 |
| 11 | 22 | 90 | 130 | 3.591 | 31 | 22 | 100 | 160 | 2.624 |
| 12 | 18 | 25 | 40 | 3.591 | 32 | 22 | 100 | 160 | 2.937 |
| 13 | 22 | 90 | 130 | 2.747 | 33 | 22 | 65 | 100 | 2.937 |
| 14 | 22 | 90 | 130 | 2.960 | 34 | 22 | 65 | 100 | 3.423 |
| 15 | 22 | 60 | 85 | 2.960 | 35 | 18 | 25 | 40 | 3.812 |
| 16 | 22 | 60 | 85 | 3.229 | 36 | 18 | 25 | 40 | 2.679 |
| 17 | 18 | 25 | 40 | 3.229 | 37 | 18 | 25 | 40 | 3.630 |
| 18 | 22 | 25 | 40 | 3.627 | 38 | 18 | 25 | 40 | 3.632 |
| 19 | 22 | 25 | 40 | 3.235 | 39 | 18 | 25 | 40 | 3.502 |
| 20 | 22 | 60 | 85 | 3.235 | 40 | 18 | 25 | 40 | 3.520 |



## Anlage V

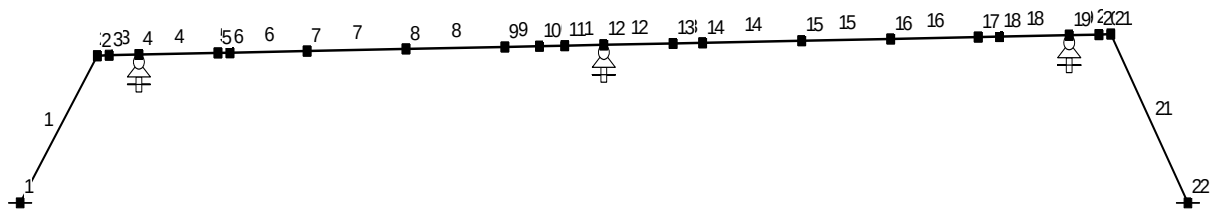
## Verbundfertigteil-Rahmen - Systemkenngrößen und Querschnittswerte

### *Knotenkoordinaten*

| Knoten-Nr. | x-Koord. [m] | y-Koord. [m] | Kommentar |
|---|---|---|---|
| 1 | -4,500 | -5,730 | Rahmenfußpunkt – Auflager (Achse 100) |
| 2 | -0,600 | 0,000 | Rahmenecke |
| 3 | 0,000 | 0,024 | A1 – Beginn VFT-Träger |
| 4 | 1,500 | 0,048 | S1 – Hilfsstütze (Achse 200) |
| 5 | 5,500 | 0,112 | S 2,5 |
| 6 | 6,100 | 0,122 | Eckbewehrung (Beginn/Ende) |
| 7 | 10,000 | 0,184 | S 3 |
| 8 | 15,000 | 0,265 | S 4 |
| 9 | 20,000 | 0,345 | S 5 |
| 10 | 21,750 | 0,373 | S 5,5 |
| 11 | 23,025 | 0,393 | S 6 – Scheitel |
| 12 | 25,000 | 0,425 | S 7 -mittlere Hilfsstütze (Achse 300) |
| 13 | 28,500 | 0,481 | S 7,5 |
| 14 | 30,000 | 0,505 | S 8 |
| 15 | 35,000 | 0,585 | S 9 |
| 16 | 39,500 | 0,657 | S 9,5 |
| 17 | 43,921 | 0,728 | Eckbewehrung (Beginn/Ende) |
| 18 | 45,000 | 0,745 | S 11 |
| 19 | 48,521 | 0,802 | S 12 – Hilfsstütze (Achse 400) |
| 20 | 50,021 | 0,826 | A 2 – Ende VFT-Träger |
| 21 | 50,621 | 0,850 | Rahmenecke |
| 22 | 54,521 | -5,730 | Rahmenfußpunkt – Auflager (Achse 500) |

### *Stäbe – Zuordnung der Betonierabschnitte und Querschnitte*

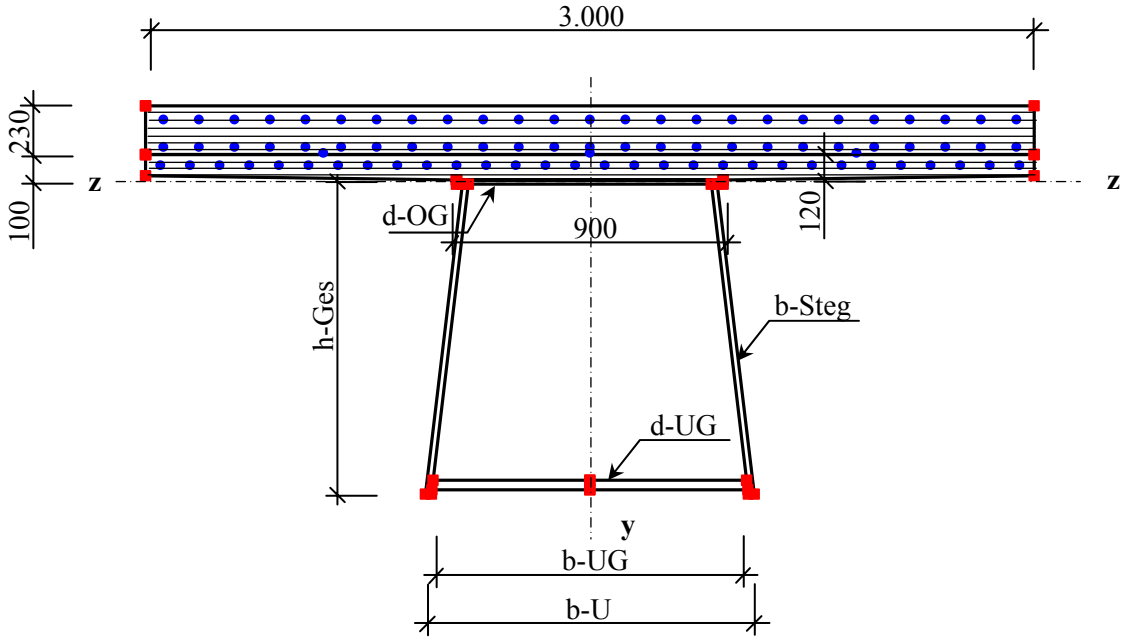
| Stab-Nr. | Stab-länge [m] | QS Anfang | QS Ende | Wirkungs beginn [d] | Stab-Nr. | Stab-länge [m] | QS Anfang | QS Ende | Wirkungsb eginn [d] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,580 | 28 | 28 | 0 | 12 | 3,500 | 14 | 15 | 0 |
| 2 | 0,600 | 29 | 29 | 7 | 13 | 1,500 | 16 | 17 | 0 |
| 3 | 1,500 | 1 | 2 | 0 | 14 | 5,000 | 17 | 18 | 0 |
| 4 | 4,000 | 3 | 4 | 0 | 15 | 4,500 | 18 | 19 | 0 |
| 5 | 0,600 | 5 | 6 | 0 | 16 | 4,421 | 20 | 21 | 0 |
| 6 | 3,900 | 7 | 8 | 0 | 17 | 1,079 | 22 | 23 | 0 |
| 7 | 5,000 | 8 | 9 | 0 | 18 | 3,521 | 24 | 25 | 0 |
| 8 | 5,000 | 9 | 10 | 0 | 19 | 1,500 | 26 | 27 | 0 |
| 9 | 1,750 | 10 | 11 | 0 | 20 | 0,600 | 30 | 30 | 7 |
| 10 | 1,275 | 12 | 13 | 0 | 21 | 7,580 | 28 | 28 | 0 |
| 11 | 1,975 | 13 | 14 | 0 | | | | | |



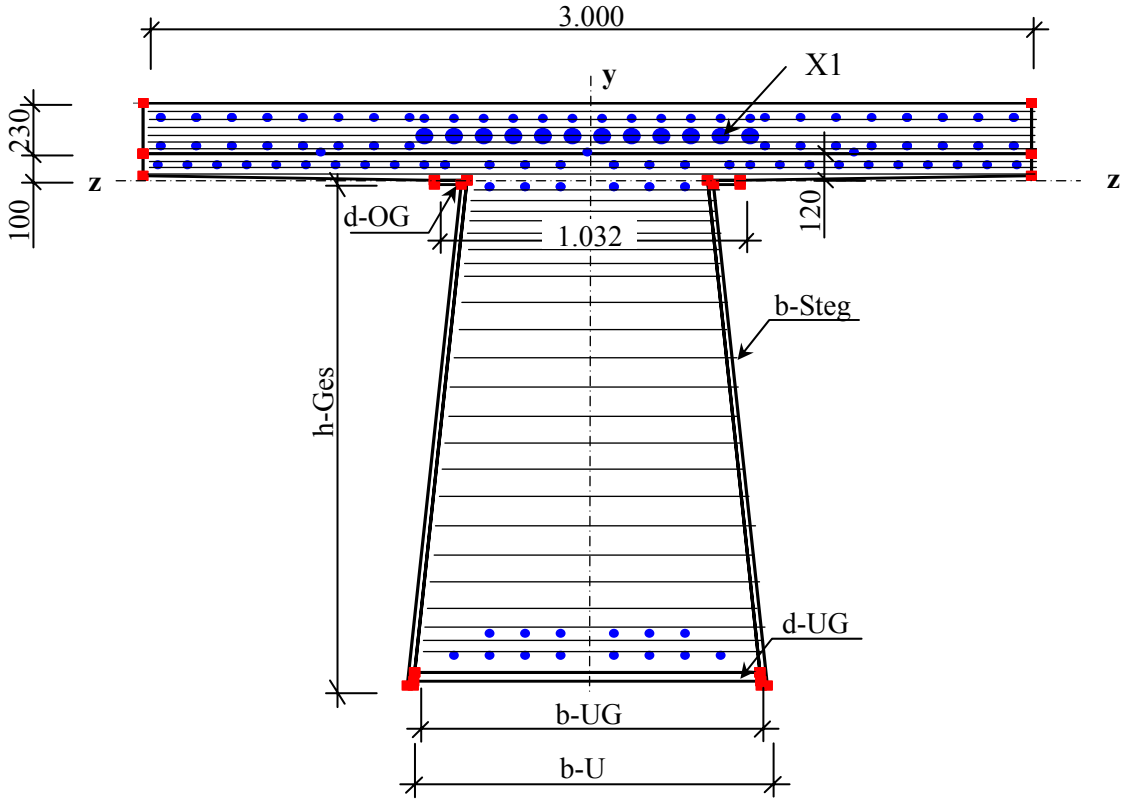

***Querschnitte – Abmessungen des Stahlhohlkasten***

| QS | b-Steg [mm] | d-OG [mm] | d-UG [mm] | h-Ges [mm] | b-UG [mm] | B-U [mm] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 20 | 45 | 1.605 | 1.098 | 1.130 |
| 2 | 20 | 20 | 45 | 1.481 | 1.078 | 1.110 |
| 3 | 20 | 20 | 45 | 1.481 | 1.078 | 1.110 |
| 4 | 20 | 20 | 45 | 1.202 | 1.030 | 1.043 |
| 5 | 14 | 20 | 30 | 1.202 | 1.030 | 1.043 |
| 6 | 14 | 20 | 30 | 1.167 | 1.024 | 1.035 |
| 7 | 14 | 20 | 30 | 1.167 | 1.024 | 1.035 |
| 8 | 14 | 20 | 30 | 976 | 992 | 992 |
| 9 | 14 | 20 | 30 | 831 | 968 | 968 |
| 10 | 14 | 20 | 30 | 797 | 962 | 962 |
| 11 | 14 | 20 | 30 | 815 | 965 | 962 |
| 12 | 25 | 30 | 60 | 815 | 965 | 962 |
| 13 | 25 | 30 | 60 | 831 | 968 | 968 |
| 14 | 25 | 30 | 60 | 872 | 975 | 975 |
| 15 | 25 | 30 | 60 | 983 | 992 | 990 |
| 16 | 14 | 20 | 30 | 983 | 992 | 990 |
| 17 | 14 | 20 | 30 | 1.031 | 1.002 | 1.002 |
| 18 | 14 | 20 | 30 | 1.267 | 1.042 | 1.042 |
| 19 | 14 | 20 | 30 | 1.551 | 1.091 | 1.094 |
| 20 | 14 | 20 | 40 | 1.551 | 1.091 | 1.094 |
| 21 | 14 | 20 | 40 | 1.887 | 1.149 | 1.151 |
| 22 | 14 | 20 | 40 | 1.887 | 1.149 | 1.151 |
| 23 | 14 | 20 | 40 | 1.973 | 1.160 | 1.160 |
| 24 | 20 | 20 | 40 | 1.973 | 1.160 | 1.160 |
| 25 | 20 | 20 | 40 | 2.295 | 1.215 | 1.215 |
| 26 | 20 | 20 | 40 | 2.295 | 1.215 | 1.215 |
| 27 | 20 | 20 | 40 | 2.444 | 1.240 | 1.240 |

***Querschnitte: 3-25***




***Querschnitte: 1, 2 und 25, 26***




X1: Achse 100: – 12 x 3 Ø 28 -10
Achse 500: – 12 x 4 Ø 25 -10