# Numerische Simulation von kritischen und nahkritischen Zweiphasenströmungen mit thermischen und fluiddynamischen Nichtgleichgewichtseffekten

von

Michael Wein

Stuttgart · 2002

# Numerische Simulation von kritischen und nahkritischen Zweiphasenströmungen mit thermischen und fluiddynamischen Nichtgleichgewichtseffekten

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät Maschinenwesen der

Technischen Universität Dresden

genehmigte

**Dissertation**

von

Dipl.-Ing. Michael Wein

aus Koblenz

Tag der Einreichung: 2. Juli 2001
Tag der mündlichen Prüfung: 12. April 2002

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. J. Huhn, TU Dresden
Prof. Dr. sc. techn. H. Quack, TU Dresden
Prof. Dr.-Ing. W. Lischke, Hochschule Zittau/Görlitz

Dieses Dokument wurde mit dem Textsatzsystem LaTeX $2_\varepsilon$ mit deutschen Anpassungen gesetzt und mit *dvips* nach Postscript konvertiert. Die PDF-Version wurde mit *dvipdfm* erstellt.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im wesentlichen während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Thermodynamik und Technische Gebäudeausrüstung der Technischen Universität Dresden, Fakultät für Maschinenwesen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. J. Huhn, Inhaber der Professur für Wärme- und Stoffübertragung am Institut für Thermodynamik und TGA der TU Dresden, für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für deren kritischen Betreuung und Durchsicht. Dieser Dank gilt auch für die erlebnisreichen Stunden und (seil-)spannenden Minuten bei gemeinsamen Begehungen von Kletterfelsen im malerischen Elbsandsteingebirge.

Herrn Prof. Dr. sc. techn. H. Quack vom Institut für Energiemaschinen und Maschinenlabor der TU Dresden, Lehrstuhl für Kälte- und Kryotechnik, und Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Lischke, Professor für Energietechnik/Kerntechnik des Fachbereiches Maschinenwesen an der Hochschule Zittau/Görlitz, danke ich für die hilfreiche Diskussion der Arbeit und für die Übernahme der Korreferate.

Weiterhin möchte ich meinen Dank gegenüber Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. A. Dittmann, Direktor des Instituts für Thermodynamik und TGA der TU Dresden, zum Ausdruck bringen. Zum einen für die Gelegenheit, die Arbeit an seinem Institut anfertigen zu können, und zum anderen für die in vorbildlicher Weise auch in schwierigen Zeiten geleistete Unterstützung und für das mir entgegengebrachte vorbehaltlose Vertrauen.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für die Finanzierung der Forschungsarbeiten im Rahmen des Schwerpunktprogramms "Transiente Effekte in mehrphasigen Strömungen mit einer oder mehreren Komponenten" sehr verbunden.

Frau B. Zwiebel danke ich für die Mithilfe bei der Abwicklung ökonomischer und verwaltungstechnischer Angelegenheiten. Meinem Freund und damaligen Kollegen, Herrn Dipl.-Ing. M. Funke, schulde ich Dank für seinen kompetenten Rat bei programm- und netzwerktechnischen Fragen und dafür, daß ich mich auch in privaten Dingen immer an ihn wenden konnte.

Auch bei allen an dieser Stelle nicht namentlich genannten ehemaligen KollegInnen, studentischen Hilfskräften und MitarbeiterInnen des Instituts für Thermodynamik und TGA, des Instituts für Energiemaschinen und Maschinenlabor sowie dem Werkstattverbund der energietechnischen Institute, die durch ihre kritische Diskussion und tatkräftige Hilfe zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich mich herzlich bedanken.

Nicht zuletzt danke ich insbesondere meinen Eltern, meinem Freundeskreis und meinen jetzigen KollegInnen. Ihr Rückhalt und ihr Entgegenkommen haben mir sehr geholfen. Besonders zu erwähnen sind hier Frau A. Mainz und Herr Dr. phil. I. Dehnert, die das Manuskript sorgfältig korrekturgelesen haben.

Ferner versichere ich hiermit an Eides statt, daß ich die vorliegende Dissertationsschrift ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Stuttgart, im April 2002 Michael Wein

»*Gesetzt, jemand würde mitteilen, daß nicht die Wahrheit die Wahrheit ist, sondern der Weg sei die Wahrheit, das heißt, daß die Wahrheit nur im Werden, im Prozeß der Aneignung sei, daß es also kein Resultat gäbe, . . . dann wäre seine Aussage gerade ein Resultat.*«

Sören Kierkegaard (1813–1855)

# Kurzfassung

Wein, Michael:
**Numerische Simulation von kritischen und nahkritischen Zweiphasenströmungen mit thermischen und fluiddynamischen Nichtgleichgewichtseffekten**

Es wurde ein neues Zweifluidmodell entwickelt, um Nichtgleichgewichtseffekte in kritischen und nahkritischen Einkomponenten-Zweiphasenströmungen von anfänglich unterkühlten oder siedenden Fluiden durch Rohre und Düsen zu untersuchen. Das vorgeschlagene Sechs-Gleichungsmodell besteht aus den phasenbezogenen Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls, der Bilanzgleichung für die thermische Energie der flüssigen Phase sowie einer zusätzlichen Transportgleichung für die volumetrische Blasenanzahl.

Zur Lösung des Systems aus partiellen Differentialgleichungen, wird ein semi-implizites, Finite-Differenzen-Zeitschrittverfahren angewendet. Die Schließung des Gleichungssystems wird durch Einbindung thermodynamischer Beziehungen und konstitutiver Gleichungen, die den strömungsformabhängigen Impuls-, Wärme- und Stofftransport beschreiben, erreicht. Für Strömungssysteme mit spontaner Entspannungsverdampfung aus dem rein flüssigen Zustand (Flashing) werden verschiedene Keimbildungsmodelle eingesetzt, die den Anfangszustand der verzögerten Dampfbildung beschreiben. Auf diese Weise werden thermodynamische Nichtgleichgewichtszustände als Folge von Zuständen mit für die Aktivierung von Keimstellen benötigtem Energieüberschuß, eingeschränkt vorhandener Phasengrenzfläche sowie begrenzter Wärmeübertragung zwischen den Phasen betrachtet. Abweichungen vom fluiddynamischen Gleichgewicht (Phasenschlupf) ergeben sich aufgrund unterschiedlicher Trägheitseigenschaften und verschieden stark ausgeprägter mechanischer Kopplung zwischen den Phasen.

Die mit diesem Modell erhaltenen numerischen Ergebnisse stimmen gut mit experimentellen Werten für Zweiphasenströmungen mit unterschiedlichen Eintrittsbedingungen und Kanalgeometrien überein.

**Stichworte:** kritische Zweiphasenströmung, Nichtgleichgewicht, Zweifluidmodell, semi-implizites Zeitschrittverfahren, Strömungsform, Keimbildung, spontane Verdampfung

# Abstract

Wein, Michael:
**Numerical simulation of critical and near-critical two-phase flows with thermal and fluiddynamic non-equilibrium effects**

A new two-fluid flow model has been developed in order to examine non-equilibrium effects in critical and near-critical one-component two-phase flows of initially subcooled or saturated fluids through pipes and nozzles. The six-equation model proposed consists of the phasic conservation equations of mass and momentum, the liquid thermal energy, and of an additional transport equation for the bubble number density.

To solve for the unknowns of the system of partial differential equations, a semi-implicit finite difference time-marching method is utilized. The closure of the set of equations is accomplished by thermodynamic relationships and additional constitutive equations describing momentum transport, interphase heat, and mass transfer which account for different flow regimes. For fluid flow systems undergoing a sudden change of phase from the pure liquid state (flashing), distinct nucleation models are included to describe the initial state of delayed vapor generation. In this way thermal non-equilibrium states are considered to be the consequence of excessive energy states required to activate nucleation sites, of restricted interfacial area and limited heat transfer between the phases. Deviation from fluiddynamic equilibrium (phasic slip) results from different inertial properties and from distinct strength of mechanical coupling between the phases.

The numerical results obtained with this model agree quite well with experimental data for two-phase flows with various inlet conditions and channel geometries.

**Keywords:** critical two-phase flow, non-equilibrium, two-fluid model, semi-implicit time-marching method, flow pattern, nucleation, flashing

# Inhaltsverzeichnis

**Abbildungsverzeichnis** xv

**Tabellenverzeichnis** xix

**Symbolverzeichnis** xxi

**1. Einleitung** 1

1.1. Erhaltungsgleichungen und Basisgrößen . . . 4
1.2. Stand der Forschung . . . 14
1.3. Zielsetzung und Vorgehensweise . . . 24

**2. Thermofluiddynamisches Modell** 25

2.1. Feldgleichungen des Zweifluidmodells . . . 26
2.2. Thermische und kalorische Zustandsgleichungen, Thermophysikalische Eigenschaften . . . 29
2.3. Konstitutive Modelle . . . 29
2.3.1. Strömungsformen . . . 30
2.3.2. Wandreibung . . . 31
2.3.3. Impulsübertragung zwischen den Phasen . . . 37
2.3.3.1. Reibung zwischen den Phasen . . . 37
2.3.3.2. Einfluß der virtuellen Masse . . . 40
2.3.3.3. Impulsübertragung durch Stofftransport . . . 44
2.3.4. Keimbildung . . . 45
2.3.4.1. Wandkeimbildung . . . 45
2.3.4.2. Keimbildung im Strömungskern . . . 48
2.3.5. Übertragungsfläche . . . 49
2.3.6. Wärmeübertragung zwischen den Phasen . . . 50
2.3.7. Stoffübertragung zwischen den Phasen . . . 52
2.3.8. Kritische Strömung und Druckwellenausbreitung . . . 52

**3. Numerisches Verfahren** 57

3.1. Rechengitter . . . 58
3.2. Semi-implizites Zeitschrittverfahren . . . 60
3.3. Anfangs- und Randbedingungen . . . 63

**4. Ergebnisse** **67**
4.1. Verifikation des Rechenverfahrens . . . . . 67
4.2. Validierung des Rechenverfahrens . . . . . 71
4.2.1. Entspannung von flüssigem Kältemittel im Kapillarrohr (Mikol) 71
4.2.2. Flashing-Experimente von Bolle et al. . . . . 75
4.2.3. Untersuchungen von Zimmer et al.und Abuaf et al. . . . . 76
4.2.4. Marviken-Experimente im Maßstab 1:1 (EPRI-Report) . . . . . 80
4.2.5. Untersuchungen von Kedziur . . . . . 83
4.2.6. Adiabate Expansion in einer Laval-Düse Karasev et al. . . . . 86
4.3. Anwendung des Rechenverfahrens auf eigene Experimente . . . . . 90

**5. Zusammenfassung und Ausblick** **97**

**Literaturverzeichnis** **99**

**A. Variablen im Gleichungssystem** **107**

**B. Ergänzung zur numerischen Lösung** **109**
B.1. Newton-Iteration für lineare Gleichungssysteme . . . . . 109
B.2. Diskretisierte Form des Gleichungssystems . . . . . 110
B.3. Programmsystem 'TPTFM' . . . . . 114
B.4. Programmablaufpläne . . . . . 117

**C. Transienter Simulationsverlauf** **121**

**D. Ergänzung zu den Experimenten** **125**
D.1. Meßtechnische Austattung . . . . . 125
D.1.1. Druckmessung . . . . . 125
D.1.2. Temperaturmessung . . . . . 125
D.1.3. Durchflußmessung . . . . . 126
D.2. Wärmeverlust an der Schauglasarmatur . . . . . 126

# Abbildungsverzeichnis


1.1. Qualitative Darstellung der Abhängigkeit des Massenstromes vom Austrittsdruck ($p_E = \text{const.}$) . . . 1
1.2. $p, v$-Diagramm von Wasser . . . 3
1.3. Kontrollvolumen zur Ableitung der Erhaltungsgleichungen . . . 5
1.4. Idealisierte Darstellung einer Zweiphasenströmung . . . 9
1.5. Einteilung der Modelle zur Berechnung der kritischen Massenstromdichte 14
1.6. Expansionsprozeß im $p, v$-Diagramm . . . 18

2.1. Prinzipieller Aufbau des Zweiphasenströmungsmodells . . . 25
2.2. Idealisierte Darstellung der angenommenen Strömungsformentwicklung eines anfänglich unterkühlten Fluids (*Flashing flow*) . . . 30
2.3. Im Übergangsbereich $2200 < \text{Re} < 3000$ angepaßtes Nikuradse-Diagramm 32
2.4. Zweiphasenmultiplikator R für Wasser nach Friedel [48] . . . 35
2.5. Zweiphasenmultiplikator $\Phi_l^2$ nach Beattie [14] . . . 36
2.6. Vereinfachte Darstellung der zwischen den Phasen wirkenden Kräfte am Beispiel einer Dampfblase . . . 37
2.7. Einfluß mehrerer benachbarter Blasen bzw. Partikeln auf den Widerstandsbeiwert . . . 38
2.8. Widerstandsbeiwert $C_{W,b}$ von Einzelblasen in Luft-/Wasserströmung . . . 39
2.9. Virtueller Massekoeffizient nach Prins [103] . . . 42
2.10. Vergleich von Berechnungsgleichungen für den virtuellen Massekoeffizienten 44
2.11. An einer Blase beim Ablösen angreifende Kräfte . . . 47
2.12. Volumetrische Blasenanzahl nach Dagan et al. [31] . . . 49
2.13. Wärmeübergang an einer Dampfblase in überhitzter Flüssigkeit . . . 51
2.14. Schallgeschwindigkeiten eines gesättigten Zweiphasen-Wassergemisches . 55

3.1. Nodalisierungsschema . . . 59

4.1. Vergleich berechneter Druckverteilungen, Richter [110] . . . 68
4.2. Vergleich berechneter Temperaturdifferenzen zwischen dampfförmiger und flüssiger Phase . . . 69
4.3. Vergleich berechneter Verteilungen des Dampfvolumenanteils . . . 69
4.4. Vergleich berechneter Geschwindigkeitsverteilungen . . . 70
4.5. Vergleich gemessener und berechneter Druckverteilungen, Mikol [88], Fall 2 72

4.6. Anteil des Reibungsdruckverlustes am Gesamtdruckabfall . . . . . 73
4.7. Vergleich berechneter Verteilungen des Dampfvolumenanteils . . . . . 73
4.8. Vergleich berechneter Verteilungen des Strömungsdampfgehaltes . . . . . 74
4.9. Vergleich gemessener und berechneter Temperaturverteilungen . . . . . 74
4.10. Berechnete Geschwindigkeitsverteilungen . . . . . 75
4.11. Gemessene und berechnete Druckverteilungen, Bolle et al. [18] . . . . . 75
4.12. Vergleich gemessener und berechneter Druckverteilungen, Run 309, Zimmer et al. [145] . . . . . 77
4.13. Vergleich gemessener und berechneter Verteilungen des Dampfvolumenanteils, Run 309 . . . . . 78
4.14. Mit dem Programm "TPTFM" berechnete Verteilungen der Strömungsgeschwindigkeit von Dampf und Flüssigkeit, Run 309 . . . . . 79
4.15. Vergleich gemessener und berechneter Druckverteilungen, Run 780 . . . . 79
4.16. Vergleich gemessener und berechneter Verteilungen des Dampfvolumenanteils, Run 780 . . . . . 80
4.17. Berechnete Verteilungen der volumetrischen Blasenanzahl und der Phasengrenzfläche, Marviken-Experiment, EPRI-Report [44] . . . . . 81
4.18. Berechnete Druckprofile und Verteilungen des Dampfvolumenanteils, Marviken-Experiment . . . . . 81
4.19. Nachrechnung eines Marviken-Druckentlastungsexperimentes, EPRI-Report [44] . . . . . 82
4.20. Druckverteilung bei einphasiger Strömung, Kaltwasserversuch, Kedziur [73] 83
4.21. Vergleich gemessener und berechnter Druckverteilungen bei gesättigtem Eintrittszustand, Kedziur [73] . . . . . 84
4.22. Berechnete Strömungsgeschwindigkeiten von Dampf und Flüssigkeit . . . 85
4.23. Berechnete Temperaturprofile nach dem Zweifluidmodell und unter Voraussetzung von homogenem Gleichgewicht . . . . . 86
4.24. Vergleich gemessener und berechneter Druckverteilungen in der Laval-Düse bei verschiedenen Gegendrücken, Karasev et al. [71] . . . . . 87
4.25. Berechnete Verteilungen des Dampfvolumenanteils in der Laval-Düse bei verschiedenen Gegendrücken . . . . . 88
4.26. Berechnete Geschwindigkeitsverteilungen von Dampf und Flüssigkeit bei Unterschallströmung, Versuch Nr.2 . . . . . 89
4.27. Berechnete Geschwindigkeitsverteilungen von Dampf und Flüssigkeit bei Überschallströmung . . . . . 89
4.28. Vergleich gemessener Wandtemperaturen mit berechneten Temperaturverteilungen von Flüssigkeit und Dampf in der Laval-Düse . . . . . 90
4.29. Schema der Versuchsanlage mit Teststrecke . . . . . 91
4.30. Versuchsanlage "Zweiphasenströmung" . . . . . 92

4.31. Konvergente Düse . . . . . 93
4.32. Funkenblitzaufnahme von einem überhitzten Freistrahl . . . . . 94
4.33. Aufbau der Schauglasarmatur mit Düseneinsatz . . . . . 94
4.34. Wanddruckmeßstellen in der Vertikalebene . . . . . 95
4.35. Spontanes Sieden in einer ebenen, konvergent-divergenten Düse, Konturaufnahme Versuch RB02 . . . . . 95
4.36. Konturdarstellung Versuch RB03 . . . . . 95
4.37. Vergleich gemessener und berechneter Druckverteilungen, Versuche RB02 und RB03 . . . . . 96
4.38. Vergleich gemessener und berechneter Verteilungen des Dampfvolumenanteils, Versuche RB02 und RB03 . . . . . 96

B.1. Programmstart und Initialisierung . . . . . 117
B.2. Berechnung der Druck- und Geschwindigkeitsfelder . . . . . 118
B.3. Berechnung der übrigen Variablen . . . . . 119

C.1. Entwicklung der Druckverteilung . . . . . 121
C.2. Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils der flüssigen Phase . . . . . 122
C.3. Entwicklung der Dampfvolumengehalt-Verteilung . . . . . 122
C.4. Entwicklung des Massenstromes . . . . . 123
C.5. Entwicklung der Verteilungen von Unterkühlung bzw. Überhitzung . . . . 123

D.1. Drucktransmitter, Typ JUMO 4AP-30 . . . . . 125
D.2. Pt100-Fühler, Typ T463 . . . . . 126
D.3. Pt100-Fühler, Typ P448-1 . . . . . 126
D.4. Magnetisch-induktiver Aufnehmer, Typ MG 711/E . . . . . 127
D.5. Schauglasarmatur . . . . . 127

# Tabellenverzeichnis


1.1. Wiedergabegenauigkeit einiger Verfahren für die Versuche von Ardron und Ackerman [7], $N = 31$ Versuche, Quelle: Elias und Lellouche [39] . . . . . 23

2.1. Gültigkeitsbereich der Reibungskorrelationen nach Friedel [48] . . . . . 34

3.1. Randbedingungen für den Fall "unterkühlte Flüssigkeit am Eintritt" . . . 64

3.2. Randbedingungen für den Fall "gesättigtes Zweiphasengemisch" und schlupffreie Strömung am Eintritt . . . . . 64

4.1. Vergleich gemessener und berechneter Massenströme, Versuch von Sozzi und Sutherland [124] . . . . . 68

4.2. Vergleich gemessener und berechneter Massenströme, Reynolds-Zahl am Eintritt: $\mathrm{Re}_{exp} = 5.58 \cdot 10^4$, Kapillarrohr-Experiment von Mikol [88] . . . 72

4.3. Gemessene und berechnete Daten der Experimente, Bolle et al. [18] . . . 76

4.4. Meßwerte und Rechenergebnisse von BNL-Versuchen, Zimmer et al. [145] und Abuaf et al. [1] . . . . . 77

4.5. Versuchsbedingungen und Resultate, Marviken-Experiment IV, EPRI-Report [44] . . . . . 80

4.6. Gemessene und berechnete Daten der Experimente von Kedziur [73] . . . 83

4.7. Meßwerte und Rechenergebnisse, Karasev et al. [71] . . . . . 87

4.8. Eintrittsbedingungen und Vergleich gemessener und berechneter Massenströme für die konvergente Düse . . . . . 93

A.1. Zusammenstellung der Variablen des Zweifluidmodells (bezogen auf das Gleichungssystem (2.1)-(2.6), S.27) unabhängige Variablen: Zeit $t$, axiale Koordinate $z$ . . . . . 107

A.2. Überblick über die zur Schließung des Gleichungssystems benötigten Beziehungen, PV: Primärvariablen ($p$, $T_l$, $\epsilon_v$, $w_v$, $w_l$, $N_b$) . . . . . 108

D.1. Technische Daten des Druckmeßumformers . . . . . 125

D.2. Technische Daten des Temperaturmeßumformers . . . . . 125

D.3. Technische Daten des magn.-ind. Aufnehmers und Meßumformers . . . . 126

# Symbolverzeichnis

### Lateinische Symbole

| *Symbol* | *Bedeutung* | *Einheit* |
|---|---|---|
| $A$ | Fläche, Querschnittsfläche, Oberfläche | $\mathrm{m}^2$ |
| $A$ | Koeffizient in Gl. (3.12), (3.13) | $\mathrm{m}^2\ \mathrm{s/kg}$ |
| $\mathbf{a}$ | Hilfsvektor in Gl. (3.15) | |
| $a_{KS}$ | Konstante | $1/(\mathrm{s\ K}^3)$ |
| $B$ | Koeffizient in Gl. (3.12), (3.13) | $\mathrm{m}/s$ |
| $\mathbf{b}$ | Hilfsvektor in Gl. (3.15) | |
| $\mathbf{b}_{vm}$ | Beschleungigung der virtuellen Masse | $\mathrm{m/s}^2$ |
| $C$ | Courant-Zahl | – |
| $c$ | Schallgeschwindigkeit | m/s |
| $\mathbf{c}$ | Lösungsvektor in Gl. (3.15) | |
| $C_0$ | Verteilungsparameter | – |
| $c_f$ | Rohrreibungskoeffizient | – |
| $c_p$ | spezifische isobare Wärmekapazität | $\mathrm{J/(kg\ K)}$ |
| $C_{vm}$ | virtueller Massekoeffizient | – |
| $C_W$ | Widerstandsbeiwert | – |
| $C'_W$ | modifizierter Widerstandsbeiwert | – |
| $D$ | Durchmesser (Rohr, Kreiszylinder, Kugel), $D = 2\,R$ | m |
| $D_h$ | hydraulischer Durchmesse, $D_h = 4\,A/\xi$ | m |
| $F$ | Hilfsgröße in Gl. (2.103) | – |
| $\mathbf{F}$ | Kraftvektor in Gl. (1.8) | N |
| $f$ | volumetrische Kraft | $\mathrm{N/m}^3$ |
| $\mathbf{f}$ | Vektor in Gl. (1.4) | |
| $\mathbf{f}_R$ | volumetrische Reibungskraft | $\mathrm{N/m}^3$ |
| $G$ | Massenstromdichte | $\mathrm{kg/(m}^2\ \mathrm{s)}$ |
| $H$ | Gesamtenthalpie | J/kg |
| $h$ | spezifische Enthalpie | $\mathrm{J/(kg\ K)}$ |
| $\Delta h_{lv}$ | Verdampfungsenthalpie | J/kg |
| $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ | Einheitsvektoren in $x$-, $y$- und $z$-Richtung | |
| $j$ | Volumenstromdichte | m/s |
| $\mathbf{J}$ | Jacobi-Matrix | |

| | | |
|---|---|---|
| $K$ | Rauhigkeitshöhe | m |
| $\mathbf{K}$ | Beschleunigung in Kraftfeld, z.B. Gravitation $\mathbf{K} = (0, 0, -g)^T$ | $\mathrm{m/s^2}$ |
| $L$ | Länge | m |
| $\mathbf{M}$ | Matrix in Gl. (3.15) | |
| $m$ | Masse | kg |
| $\dot{m}$ | Massenstrom | kg/s |
| $N$ | volumetrische Anzahl (Keimbildungsstellen, Blasen, Tropfen) | $1/\mathrm{m^3}$ |
| $\mathbf{n}$ | Normaleneinheitsvektor | |
| $p$ | Druck | $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$ |
| $\dot{q}$ | Wärmestromdichte | $\mathrm{W/m^2}$ |
| $\tilde{\dot{q}}$ | volumetrische Wärmeleistung | $\mathrm{W/m^3}$ |
| $R$ | Halbmesser (Radius), $R = D/2$ | m |
| $S$ | Schlupfverhältnis | – |
| $s$ | spezifische Entropie | J/(kg K) |
| $T$ | Absoluttemperatur | K |
| $t$ | Zeit | s |
| $u$ | spezifische innere Energie | J/kg |
| $U_{vj}$ | mittlere Driftgeschwindigkeit | m/s |
| $V$ | Volumen | $\mathrm{m^3}$ |
| $v$ | spezifisches Volumen | $\mathrm{m^3/kg}$ |
| $w$ | axiale Geschwindigkeit | m/s |
| $\mathbf{w}$ | Geschwindigkeitsvektor | m/s |
| $w_\tau$ | Schubspannungsgeschwindigkeit | m/s |
| $W_b$ | Blasenbildungsenergie | $\mathrm{J} = \mathrm{N\ m}$ |
| $x$ | Dampfgehalt | – |
| $\dot{x}$ | Strömungsdampfgehalt | – |
| $\mathbf{x}$ | Vektor der Primärvariablen in Gl. (3.15) | |
| $z$ | axiale Koordinate | m |

### Griechische Symbole

| *Symbol* | *Bedeutung* | *Einheit* |
|---|---|---|
| $\alpha^*$ | Wärmeübergangskoeffizient | $\mathrm{W/(m^2\ K)}$ |
| $\beta$ | thermischer Ausdehungskoeffizient | 1/K |
| $\beta'$ | Wichtungsfaktor | – |
| $\Gamma_\Phi$ | allgemeiner Diffusionskoeffizient in Gl. (1.17) | |
| $\Gamma_v$ | Verdampfungsrate | $\mathrm{kg/(m^3\ s)}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\delta_1$ | Hilfsgröße in Gl. (2.103) | $kg^2/m^6$ |
| $\delta_2$ | Hilfsgröße in Gl. (2.103) | $kg/m^3$ |
| $\delta_3$ | Hilfsgröße in Gl. (2.103) | – |
| $\epsilon$ | Volumenanteil | – |
| $\varepsilon$ | Fehlerschranke | – |
| $\zeta$ | Verlustbeiwert | – |
| $\eta$ | Verteilungsparameter in Gl. (2.53) | – |
| $\eta$ | dynamische Viskosität | Pa s = kg/(m s) |
| $\theta$ | Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen | ° |
| $\lambda$ | Widerstandsziffer | – |
| $\lambda$ | Wärmeleitfähigkeit | W/(m K) |
| $\nu_{KS}$ | Keimbildungsfrequenz | 1/s |
| $\xi$ | benetzter Umfang | m |
| $\rho$ | Dichte | $kg/m^3$ |
| $\Sigma'$ | Dekompressionsrate, Druckabsenkungsgeschwindigkeit | Pa/s |
| $\sigma$ | Oberflächenspannung | N/m |
| $\tau$ | Schubspannung | $N/m^2$ |
| $\Phi$ | Strömungsgröße in Gl. (1.17) | |
| $\Phi_l^2$ | Zweiphasenmultiplikator | – |
| $\phi$ | volumetrische Keimbildungsrate | $1/(m^3\ s)$ |
| $\Psi$ | Skalar in Gl. (1.10) | |
| $\omega$ | Korrelationsparameter, azentrischer Faktor | – |

### Dimensionslose Kennzahlen

| *Symbol* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Fr | Froude-Zahl |
| Gb | Gibbs-Zahl |
| Gr | Grashof-Zahl |
| Ja | Jakob-Zahl |
| Nu | Nußelt-Zahl |
| Pr | Prandtl-Zahl |
| Re | Reynolds-Zahl |
| R | Zweiphasenmultiplikator |
| St | Stanton-Zahl |
| We | Weber-Zahl |

**Tiefgestellte Indizes**

| *Symbol* | *Bedeutung* |
|---|---|
| 0 | Ausgangs- / Stagnationszustand |
| $1\phi$ | einphasige Strömung |
| $2\phi$ | zweiphasige Strömung |
| $A$ | Austritt, Ablösung |
| $b$ | Blase |
| $ber$ | berechnet |
| $bn$ | Keimbildung im Strömungskern, Bulkkeimbildung |
| $bs$ | Blasen im Flüssigkeitsschwall |
| $E$ | Eintritt |
| $exp$ | experimentell |
| $F$ | Flashing (spontan einsetzendes Sieden) |
| $f$ | Reibung |
| $Glgw$ | homogenes Gleichgewicht |
| $H$ | Halsquerschnitt |
| $h$ | hydraulisch |
| $i$ | Anzahl von Gitterpunkten |
| $i$ | Index |
| $K$ | Zustand im thermodynamisch kritischen Punkt |
| $k$ | Iterationsindex |
| $krit$ | kritische Strömung, kritische (Blasen-)Größe |
| $KS$ | Keimstelle |
| $l$ | Flüssigkeit |
| $m, E$ | gemittelt mit der kinetischen Energie |
| $m, I$ | impulsgemittelt |
| $O$ | Oberseite |
| $p$ | Pfropfen, Partikel |
| $S \neq 1$ | schlupfbehaftet |
| $S$ | Seitenfläche |
| $s$ | isentrop |
| $S = 1$ | schlupffrei |
| $tr$ | Tropfen |
| $U$ | Unterseite |
| $v$ | Dampf |
| $vm$ | virtuelle Masse |

| | |
|---|---|
| $VU$ | Viskose Unterschicht |
| $W$ | Widerstand |
| $wl$ | Wandreibung, flüssigkeitsseitig |
| $wn$ | Wandkeimbildung |
| $wv$ | Wandreibung, dampfseitig |

### Hochgestellte Indizes

| *Symbol* | *Bedeutung* |
|---|---|
| $'$ | gesättigte Flüssigkeit |
| $''$ | gesättigter Dampf |
| $*$ | zwischen den Phasen |
| $n$ | Zeitschrittindex |
| $s$ | Sättigung |
| $x$ | Hilfsgröße |

### Sonderzeichen

| *Symbol* | *Bedeutung* |
|---|---|
| $\nabla$ | Nabla-Operator, Pseudo-Vektor: $(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$ |
| $\partial f/\partial x$ | erste partielle Ableitung der Funktion $f$ nach $x$ |

### Konstanten

| *Symbol* | *Bedeutung* | *Wert* |
|---|---|---|
| $g$ | Fallbeschleunigung (Norm-) | $9.80665\,\mathrm{m/s^2}$ |
| $k$ | Boltzmann-Konstante | $1.3806 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ |

# 1. Einleitung

Zweiphasenströmungen sind in der energie- und verfahrenstechnischen Industrie von großem Interesse. Eine möglichst genaue Vorhersage der Fluidzustände in zweiphasigen Strömungen beim kritischen Ausströmen ist für die thermohydraulische Auslegung und Dimensionierung von Sicherheitskomponenten sowie für die Analyse realer und hypothetischer Störfälle wie dem Bruch von Rohrleitungen und Behältern von wesentlicher Bedeutung (Emendörfer und Höcker [42], Pahl [97]). Die hierbei auftretende Druckabsenkung verläuft sehr schnell und auf kurzer Wegstrecke. Dabei kann es je nach Druckniveau der vorgeschalteten Anlagenkomponente zu großen Abweichungen vom thermo- und fluiddynamischen Gleichgewicht kommen.

Das große Unsicherheiten bei der Berechnung von Zweiphasenströmungen unter starken Druckgradienten bestehen, kann am Beispiel der Vorgehensweise zur Ermittlung des notwendigen Strömungsquerschnitts von Sicherheitsventilen veranschaulicht werden: Wendet man das in VdTÜV [133] angegebene Berechnungsverfahren auf unterkritische und kritische Luft-/Wasserströmungen mit niedrigem Gasgehalt durch ein Vollhubsicherheitsventil an, so liegt die Standardabweichung zwischen dem prognostizierten und dem gemessenen Druckabfall bei über 400% (Friedel [49]).

Weitere Beispiele für Zweiphasenströmungen, in denen kritische Strömungszustände vorkommen, sind die Nutzung geothermischer Energieressourcen (Ryley [115], Garg und Pritchett [51]), die Durchströmung von Bohrlochdrosseln in Förderanlagen der Erdölindustrie (Surbey et al. [127]), die Treibdüsenströmung in Dampfstrahlkältemaschinen (Jungnickel et al. [70], Menegay [87]) sowie die Strömung in Kondensatableitungen von Turbinen (Ryley und Parker [116]).

Als kritisch bzw. blockiert werden hier Strömungen durch Rohre, Düsen oder Risse bezeichnet, bei denen sich für einen gegebenen stromaufwärts gelegenen Strömungszustand ein fluiddynamisches Maximum des Massenstromes bzw. der Massenstromdichte ergibt. Die **Abb. 1.1** veranschaulicht diesen Zusammenhang qualitativ in Form eines Diagramms, das den sich einstellenden Massenstrom $\dot{m}$ als Funktion des Austrittsdruckes $p_A$ zeigt.

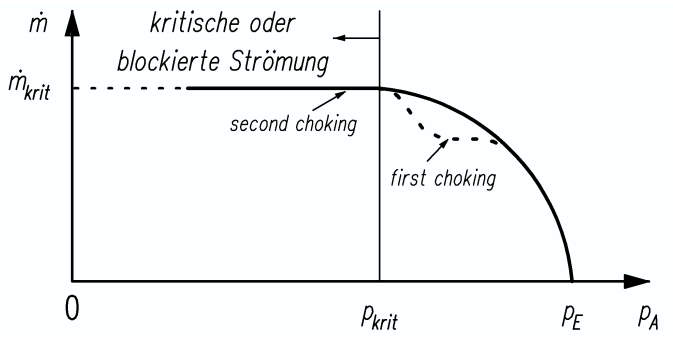



Abb. 1.1: Qualitative Darstellung der Abhängigkeit des Massenstromes vom Austrittsdruck ($p_E$ = const.)

Mit abnehmendem Austrittsdruck nimmt der Massenstrom zunächst kontinuierlich zu. Ab einem gewissen Druck $p_{krit}$ bleibt der Massenstrom konstant und kennzeichnet in dieser Weise die kritische bzw. blockierte Strömung. Senkt man den Gegendruck $p_A$ weiter ab, so bleibt der Massenstrom davon unbeeinflußt. Die mathematische Beschreibung dieses Phänomens lautet:

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial p} = 0 \tag{1.1}$$

und ist als Blockierungskriterium (*Choking criterion*) bekannt.

Im Gegensatz zur kompressiblen einphasigen Strömung, bei der die kritische Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit ist (Truckenbrodt [130], Ganzer [50], Anderson [4]), gibt es eine solche allgemein gültige Beziehung für Zweiphasenströmungen nicht, da hierbei die Annahme einer isentropen Zustandsänderung und der Homogenität des Strömungsmediums nicht gerechtfertigt sind. Neben den sehr komplexen Wechselwirkungen an der Phasengrenzfläche, die eine genaue Voraussage der Stoff-, Impuls- und Energieübertragungsvorgänge stark einschränken, beeinflussen weitere Faktoren wie die Reinheit des Strömungsmediums (gelöste Gase stellen Keimstellen für den Phasenwechsel dar), mögliche Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht und der Einfluß der Kanalgeometrie den kritischen Massenstrom von Zweiphasenströmungen.

So kann die Zunahme des Massenstrom insbesondere bei Expansionsströmungen durch Kanäle mit scharfkantigen Querschnittsverengungen im Einlaufbereich bereits vor Erreichen des theoretisch ermittelten Maximaldurchsatzes stagnieren (vgl. Obermeier [95]). Begründet wird dieser Effekt durch die mit der Strahlkontraktion (*Vena contracta*) verbundenen Druckabsenkung stromab der Eintrittsöffnung. Bei Unterschreitung des Sättigungsdampfdruckes kommt es dann zur Dampfbildung, die zunächst trotz fortgesetzter Absenkung des Gegendruckes eine Durchsatzsteigerung unterbindet. Dieser Effekt wird als *First choking* oder *Upstream choking* bezeichnet. Ein weiteres Verringern des Gegendruckes bewirkt, daß die Verdampfung des überhitzten Flüssigkeitsstrahles ausbleibt, und der Massenstrom nun bis zum Erreichen des absoluten Maximaldurchsatzes wieder ansteigt (*Second choking* oder *Downstream choking*). Auf Einzelheiten im Hinblick auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Druckstörungen kleiner Amplitude und die kritische Strömungsgeschwindigkeit in Zweiphasengemischen wird in Abschnitt 2.3.8 eingegangen.

Für eine den realen Verhältnissen nahekommende Beschreibung von Zweiphasenströmungen bei hohen Massenstromdichten sind im Vergleich zu einphasigen Strömungen meist wesentlich aufwendigere Modelle notwendig. Diese Modelle müssen unter anderem die beobachteten Abweichungen vom Gleichgewichtszustand in geeigneter Weise berücksichtigen. In Abschnitt 1.2 soll ein Überblick über mögliche Konzepte sowie über Art und Umfang von häufig verwendeten Berechnungsmodellen gegeben werden.

Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewichtszustand bei Zweiphasenströmungen können anhand verschiedener Phänomene klassifiziert werden (vgl. Bergles et al. [15]). Von *Kontinuumseffekten* spricht man, wenn sich Nichtgleichgewichtszustände aufgrund ausbleibender Keimbildung einer zweiten Phase innerhalb der ersten einstellen (z.B. Vorliegen des Dampfes im unterkühlten Zustand ohne einsetzende Tröpfchenbildung oder Überhitzung von Flüssigkeit ohne Dampfblasenbildung). *Transiente Effekte* treten auf, wenn das Medium raschen Änderungen des Systemzu-

standes nicht schnell genug folgen kann, um den Gleichgewichtszustand zu erreichen (z.B. Strömung von Dampfblasen in überhitzter Flüssigkeit). Ferner können durch ungleichförmige räumliche Verteilungen von Zustandsgrößen wie Temperatur oder Druck *lokale Effekte* hervorgerufen werden (z.B. Überhitzung der Flüssigkeit und Dampfbildung an beheizten Kanalwänden bei gleichzeitiger Flüssigkeitsunterkühlung im Strömungskern).

Insbesondere bei schnell verlaufenden Entspannungen, die vom stabilen einphasigen Zustand ausgehen, können starke Verzugserscheinungen beobachtet werden. Dabei verharrt das Fluid entgegen den Aussagen der Gleichgewichtsthermodynamik zunächst im einphasigen Zustand. Zur Charakterisierung ordnet man solchen Zwischenzuständen in der Thermodynamik den Begriff "metastabil" zu. Die theoretisch erreichbare Grenze der Metastabilität läßt sich anhand des $p, v$-Diagramms von Wasser veranschaulichen. Sie entspricht der Verbindungslinie der Punkte im Naßdampfgebiet, in denen die Isothermen eine horizontale Tangente aufweisen, $(\partial p/\partial v)_T = 0$ (z.B. Punkte 2 und 4 in **Abb. 1.2**), und wird als Spinodalkurve bezeichnet. Die Binodalkurve wird aus der Siede- und Taulinie (SL und TL in **Abb. 1.2**) gebildet. Da oberhalb der kritischen Isotherme keine Grenze zwischen Gas und Flüssigkeit existiert (fluides Gebiet) können Phasenwechsel Dampf ↔ Flüssigkeit (Verdampfung und Kondensation) nur bei Temperaturen, die unterhalb der kritischen Temperatur liegen ($T < T_K$), stattfinden. Die Bereiche zwischen der Binodal- und Spinodalkurve mit $(\partial p/\partial v)_T < 0$ nennt man metastabil, da hier kurzzeitig überhitzte Zustände der Flüssigkeit bzw. unterkühlte Zustände der Dampfphase möglich sind. Der von der Spinodalkurve nach unten eingeschlossene Bereich umfaßt physikalisch instabile Zustände, da hier $(\partial p/\partial v)_T > 0$ ist.

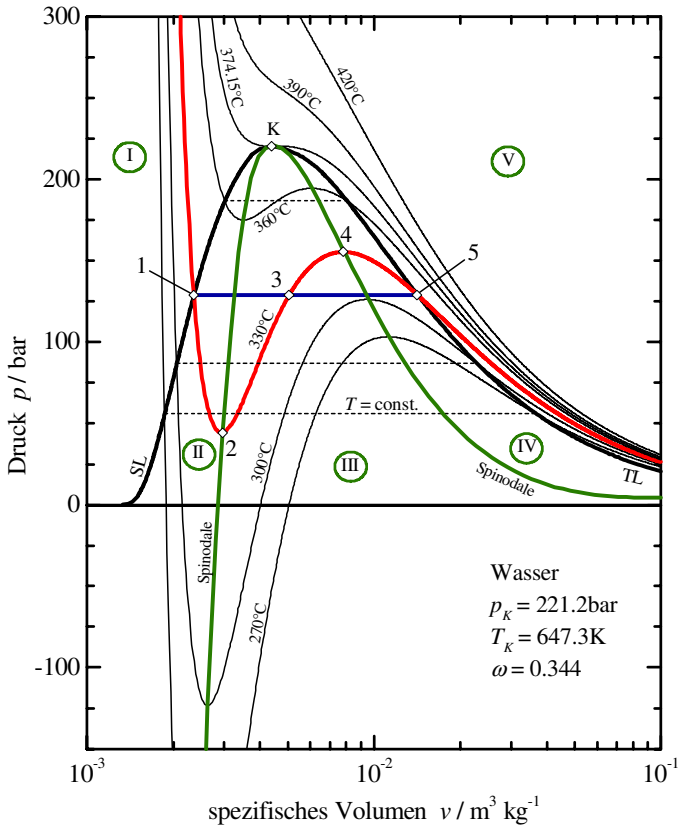



Abb. 1.2: $p, v$-Diagramm von Wasser, berechnet mit der Soave-Redlich-Kwong-Gleichung, Gmehling und Kolbe [53]

**Bereich I**: stabile (unterkühlte) Flüssigkeit

**Bereich II**: metastabile (überhitzte) Flüssigkeit

**Bereich III**: instabiler Bereich, hier: $(\partial p/\partial v)_T > 0$ (physikalisch nicht sinnvoll)

**Bereich IV**: metastabiler (unterkühlter) Dampf

**Bereich V**: stabiler (überhitzter) Dampf

In der Praxis wird die maximale Überhitzung der Flüssigkeit bzw. Unterkühlung der Dampfphase aufgrund einsetzender homogener und heterogener Keimbildung (Blasen- bzw. Tropfenbildung) jedoch eher an der sogenannten kinetischen Grenze erreicht.

Für Berechnungsverfahren, die metastabile Zustände der Dampf- und/oder Flüssigphase berücksichtigen, sind entweder speziell für die metastabilen Bereiche aufgestellte Zustandsgleichungen (z.B. Chukanov und Skripov) notwendig oder man extrapoliert die benötigten Daten auf der Basis von Zustandsgrößen bzw. Approximationsgleichungen des jeweils benachbarten, stabilen Einphasengebietes in den metastabilen Bereich. Die letztgenannte Variante wird in dieser Arbeit für die Ermittlung von thermischen und kalorischen Zustandsgrößen der überhitzten Flüssigkeit gewählt.

## 1.1. Erhaltungsgleichungen und Basisgrößen

Auf die im folgenden aufgeführten Gleichungen und Definitionen grundlegender Größen von Einkomponenten-Zweiphasenströmungen wird in dieser Arbeit mehrfach zurückgegriffen. Sie dienen neben der Charakterisierung des thermofluiddynamischen Zustands der Zweiphasenströmung auch einer vereinfachenden Schreibweise für später benötigte Zusammenhänge.

Um dem Leser das Verständnis für die in den nachfolgenden Kapiteln ausgeführten Gedanken und Zusammenhänge zu erleichtern, werden zunächst die Erhaltungsgleichungen von Masse, Impuls und Energie in integraler und differentieller Form für reibungsbehaftete dreidimensionale, kompressible Strömungen wiedergegeben. Ausführlich kommentierte Herleitungen der Gleichungen findet man z.B. in Wieghardt [142], Aris [8], Anderson [4] und speziell für Zweiphasenströmungen in Kolev [75]. Die Gleichungen sind möglichst allgemein formuliert und gelten bei Verwendung geeigneter Mittelwerte für die abhängigen Variablen auch für zweiphasige Strömungen.

**Massenerhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung):**

Das physikalische Prinzip der Massenerhaltung besagt, daß Masse weder erzeugt noch zerstört werden kann, also konstant bleibt. Im folgenden wird dieses Prinzip auf einen ortsfesten Kontrollraum mit dem Volumen $V$ und der geschlossenen Oberfläche $A$, wie in **Abb. 1.3** skizziert, angewendet. Der Vektor $\mathbf{n}$ sei der Einheitsvektor normal zum Oberflächenelement $dA$. Die Dichte im Ursprung von $\mathbf{n}$ sei $\rho$, die Geschwindigkeit sei $\mathbf{w}$. Der Massenstrom $d\dot{m}$ durch die Fläche $dA$ beträgt:

$$d\dot{m} = \rho\,\mathbf{w}\,\mathbf{n}\,dA = \rho\,\mathbf{w}\,d\mathbf{A} = \rho\,\cos\left(\mathbf{w},\mathbf{A}\right)|\mathbf{w}|\,|d\mathbf{A}| = \rho\,\cos\theta\,|\mathbf{w}|\,dA\,. \tag{1.2}$$

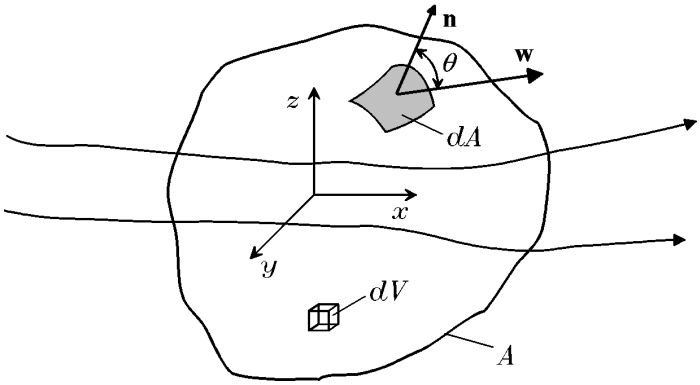



Abb. 1.3: Kontrollraum zur Ableitung der Erhaltungsgleichungen

Den in den Kontrollraum über die Gesamtoberfläche $A$ einströmenden Netto-Massenstrom erhält man durch Integration von Gl. (1.2) über die Oberfläche:

$$-\iint_A \rho\,\mathbf{w}\,d\mathbf{A}\,.$$

Die zeitliche Änderung der Gesamtmasse innerhalb des Kontrollraumes ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,dV\,.$$

Aus dem Prinzip der Massenerhaltung folgt, daß die zeitliche Änderung der Gesamtmasse gleich dem Netto-Massenstrom über die Grenzen des Kontrollraumes ist:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,dV + \iint_A \rho\,\mathbf{w}\,d\mathbf{A} = 0\,.} \tag{1.3}$$

Dies ist die integrale Form des Massenerhaltungssatzes.

Zur Ableitung der differentiellen Form der Kontinuitätsgleichung wird der Satz von Gauß,

$$\iint_A \mathbf{f}\,d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\,dV\,, \tag{1.4}$$

zur Wandlung eines Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral benötigt. Für die Divergenz eines Vektors $\mathbf{f}$ gilt in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \nabla\,\mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\,. \tag{1.5}$$

Wendet man Gl. (1.4) auf den konvektiven Term in Gl. (1.3) an, so ergibt sich:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\,(\rho\,\mathbf{w})\right] dV = 0\,. \tag{1.6}$$

Im allgemeinen kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn der Integrand gleich Null ist. Daraus folgt die differentielle Form der Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \, \mathbf{w}) = 0 \, .} \tag{1.7}$$

**Impulssatz:**

Das zweite Newtonsche Axiom verlangt, daß die zeitliche Änderung des Impulses $m \, \mathbf{w}$ und die Summe aller angreifenden Kräfte im Gleichgewicht stehen:

$$\frac{d \, (m \, \mathbf{w})}{d \, t} = \sum \mathbf{F} \, . \tag{1.8}$$

Auf ein Oberflächenelement $dA$ in **Abb. 1.3** wirkt die Druckkraft $-p \, d\mathbf{A}$, wobei das negative Vorzeichen anzeigt, daß die Druckkraft entgegengesetzt zur Flächennormalen gerichtet ist. Für die am Kontrollraum angreifende Oberflächenkraft durch Druckeinwirkung folgt:

$$- \iint\limits_A p \, d\mathbf{A} \, .$$

Die Volumenkraft eines Kraftfeldes (z.B. Schwerkraft, magnetische Kraft) ist:

$$\iiint\limits_V \rho \, \mathbf{K} \, dV \, .$$

Für die Reibungskraft, deren Integrand hier in pauschalisierter Form einer auf das Volumen bezogenen Reibungskraft $\mathbf{f}_R$ ausgedrückt ist, kann man schreiben:

$$\iiint\limits_V \mathbf{f}_R \, dV \, .$$

Die zeitliche Änderung des Impulses (linke Seite von Gl. (1.8)) entspricht der Summe der Änderung des Impulses im Kontrollraum und dem Netto-Impulsstrom über die Oberfläche:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_V \rho \, \mathbf{w} \, dV + \iint\limits_A (\rho \, \mathbf{w}) \, \mathbf{w} \, d\mathbf{A} \, .$$

Mit Gl. (1.8) lautet der Impulssatz für Fluide in integraler Form:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_V \rho \, \mathbf{w} \, dV + \iint\limits_A (\rho \, \mathbf{w}) \, \mathbf{w} \, d\mathbf{A} = - \iint\limits_A p \, d\mathbf{A} + \iiint\limits_V \rho \, \mathbf{K} \, dV + \iiint\limits_V \mathbf{f}_R \, dV \, .} \tag{1.9}$$

Die Ableitung der differentiellen Schreibweise des Impulssatz erfolgt analog zum obigen Vorgehen unter Anwendung des Gaußschen Satzes auf die Komponenten des Konvektionsterms in Gl. (1.9). Für die Umformung des Oberflächenintegrals über den Druck in ein Raumintegral benötigt man den Greenschen Satz:

$$\iint\limits_A \Psi \, d\mathbf{A} = \iiint\limits_V \operatorname{grad} \Psi \, dV \, . \tag{1.10}$$

Für den Gradienten eines skalaren Feldes $\Psi$ gilt in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{grad}\Psi = \nabla\,\Psi = \mathbf{i}\,\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,z}\,. \tag{1.11}$$

Damit erhält man für die einzelnen Komponenten des Impulses in Richtung von $x$, $y$ und $z$ die sogenannten *Navier-Stokes*-Gleichungen[1]:

$$\boxed{\frac{\partial\,(\rho\,w_x)}{\partial\,t} + \nabla\,(\rho\,w_x\,\mathbf{w}) = -\frac{\partial\,p}{\partial\,x} + \rho\,K_x + f_{R,x}\,,} \tag{1.12}$$

$$\boxed{\frac{\partial\,(\rho\,w_y)}{\partial\,t} + \nabla\,(\rho\,w_y\,\mathbf{w}) = -\frac{\partial\,p}{\partial\,y} + \rho\,K_y + f_{R,y}\,,} \tag{1.13}$$

$$\boxed{\frac{\partial\,(\rho\,w_z)}{\partial\,t} + \nabla\,(\rho\,w_z\,\mathbf{w}) = -\frac{\partial\,p}{\partial\,z} + \rho\,K_z + f_{R,z}\,.} \tag{1.14}$$

**Energieerhaltungssatz (1. Hauptsatz der Thermodynamik):**

Der Energieerhaltungssatz sagt aus, daß Energie weder erzeugt noch zerstört werden kann sondern sich nur in ihrer Form wandeln kann.

Verzichtet man im folgenden auf die Berücksichtigung der Übertragung mechanischer Leistung (z.B. durch Turbinen oder Verdichter), so sind vier Arten von Energieströmen, die von außen dem Kontrollraum zugeführt oder entzogen werden, zu unterscheiden. Mit der Definition eines auf das Volumen bezogenen Wärmestroms $\tilde{\dot{q}}$ läßt sich die durch Leitung oder Strahlung zu- oder abgeführte Wärmeleistung in folgender Weise darstellen:

$$\iiint\limits_V \tilde{\dot{q}}\,dV\,.$$

Die Leistung eines Kraftfeldes, das im Kontrollraum wirkt, kann durch

$$\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{K}\,\mathbf{w}\,dV$$

beschrieben werden. Als Verschiebeleistung wird die Leistung bezeichnet, die für das Einströmen des Fluids in den Kontrollraum gegen den Druck aufgebracht werden muß:

$$-\iint\limits_A p\,\mathbf{w}\,d\mathbf{A}\,.$$

Weil die dem Kontrollraum zugeführten Leistungen positiv angesetzt werden, das Produkt der Vektoren $\mathbf{w}$ und $d\mathbf{A}$ jedoch einen negativen Wert annimmt, erhält die Verschiebeleistung in obiger Gleichung ein negatives Vorzeichen. Die Leistung zur Überwindung der Reibungskräfte (Dissipation) ist:

$$\iiint\limits_V \mathbf{f}_R\,\mathbf{w}\,dV\,.$$

[1] Die Komponenten der Reibungskraft erfassen die Wirkung von Normal- und Schubspannungen auf ein Fluidelement, für die $x$-Komponente gilt z.B.: $f_{R,x} = \dfrac{\partial\,\tau_{xx}}{\partial\,x} + \dfrac{\partial\,\tau_{yx}}{\partial\,y} + \dfrac{\partial\,\tau_{zx}}{\partial\,z}$.

Der konvektive Energiestrom durch das Oberflächenelement $dA$ entspricht dem Produkt aus Massenstrom $\rho\,\mathbf{w}\,d\mathbf{A}$ und spezifischer innerer und kinetischer Energie $(u+\mathbf{w}^2/2)$. Für den gesamten Kontrollraum ist der Netto-Energiestrom also:

$$\iint_A \rho\left[u+\frac{\mathbf{w}^2}{2}\right]\mathbf{w}\,d\mathbf{A}\,.$$

Die zeitliche Änderung der Energie im Inneren des Kontrollraums ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\left[u+\frac{\mathbf{w}^2}{2}\right]dV\,.$$

Damit der Energiesatz erfüllt ist, muß die Gesamtänderung der inneren und der kinetischen Energie im Kontrollraum gleich der Summe der zu- bzw. abgeführten Leistungen sein. Überträgt man diesen Satz in eine Gleichung und faßt die oben aufgeführten Terme zusammen, so erhält man die integrale Form des Energieerhaltungssatzes:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\left[u+\frac{\mathbf{w}^2}{2}\right]dV+\iint_A \rho\left[u+\frac{\mathbf{w}^2}{2}\right]\mathbf{w}\,d\mathbf{A}\\ &=-\iint_A p\,\mathbf{w}\,d\mathbf{A}+\iiint_V \rho\,\mathbf{K}\,\mathbf{w}\,dV+\iiint_V \mathbf{f}_R\,\mathbf{w}\,dV+\iiint_V \tilde{q}\,dV\,.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Ersetzt man die Oberflächenintegrale mit Hilfe von Gl. (1.4) und setzt den Integranden gleich Null, so folgt der Erhaltungssatz der Energie in differentieller Form:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(u+\frac{\mathbf{w}^2}{2}\right)\right]+\nabla\left[\rho\left(u+\frac{\mathbf{w}^2}{2}\right)\mathbf{w}\right]=-\nabla\left(p\,\mathbf{w}\right)+\rho\left(\mathbf{K}\,\mathbf{w}\right)+\mathbf{f}_R\,\mathbf{w}+\tilde{q}\,.\tag{1.16}$$

Da die differentiellen Gleichungen (1.7), (1.12) bis (1.14) und (1.16) Divergenzterme der Größen $\rho\,\mathbf{w}$, $\rho\,w_x\,\mathbf{w}$, $\rho\,w_y\,\mathbf{w}$, $\rho\,w_z\,\mathbf{w}$ und $\rho\,(u+\mathbf{w}^2/2)\,\mathbf{w}$ enthalten, nennt man ihre Schreibweise Divergenzform. Vergleicht man diese Gleichungen in ihrem formalen Aufbau, so läßt sich eine Ähnlichkeit feststellen. Offenbar gehorchen die abhängigen Variablen einem allgemeinen Erhaltungsprinzip, das in Vektorschreibweise wie folgt dargestellt werden kann (Patankar [99]):

$$\underbrace{\frac{\partial\left(\rho\,\Phi\right)}{\partial t}}_{\text{instationärer Term}}+\underbrace{\operatorname{div}(\rho\,\mathbf{w}\,\Phi)}_{\text{Konvektionsterm}}=\underbrace{\operatorname{div}\left(\Gamma_\Phi\,\operatorname{grad}\Phi\right)}_{\text{Diffusionsterm}}+\underbrace{S_\Phi}_{\text{Quellterm}}.\tag{1.17}$$

In dieser allgemeinen Transportgleichung ist $\Phi$ die interessierende Strömungsgröße (z.B. die innere Energie, vgl. hierzu die Diskussion der Energietransportgleichung in Elsner et al. [41], oder die turbulente kinetische Energie) und $\Gamma_\Phi$ der zu $\Phi$ gehörende Diffusionskoeffizient. Von Gl. (1.17) wird später in Zusammenhang mit der volumenbezogenen Anzahl von Dampfblasen in Zweiphasenströmungen Gebrauch gemacht.

Mehrdimensionale Strömungsberechnungen erfordern schon bei einphasigen Strömungen einen relativ großen Aufwand im Hinblick auf die räumliche Diskretisierung, die

Eingabe von Randbedingungen und die Auswertung von numerischen Ergebnissen. Darüberhinaus muß die verwendete Rechentechnik den hohen Anforderungen an Rechenleistung und Speicherplatz genügen. Zwar existieren leistungsfähige kommerzielle 3D/2D-Strömungsprogramme wie z.B. Fluent 5[2] oder Star-CD[3], die auch eine Simulation von Mehrphasenströmungen ermöglichen, allerdings ist die Anwendbarkeit dieser Programme oft auf spezielle Probleme und einheitliche Strömungsformen beschränkt. Insbesondere bei Untersuchungen grundlegender Art stellt die wesentlich einfachere eindimensionale Simulation, trotz gewisser Einschränkungen im Hinblick auf die Auflösbarkeit lokaler Phänomene, ein geeignetes Werkzeug dar.

In den folgenden Ausführungen wird eine nichtadiabate Zweiphasenströmung durch einen Kanal mit variablem Strömungsquerschnitt $A = A(z)$ behandelt. Dazu wird der in **Abb. 1.4** skizzierte Kanalabschnitt betrachtet, in dem die flüssige und die dampfförmige Phase jeweils kontinuierlich unter Einfluß der Gravitation strömen. Zur Veranschaulichung der im weiteren Verlauf dieses Abschnitts vorgestellten Größen, ist eine geschichtete Strömung dargestellt.

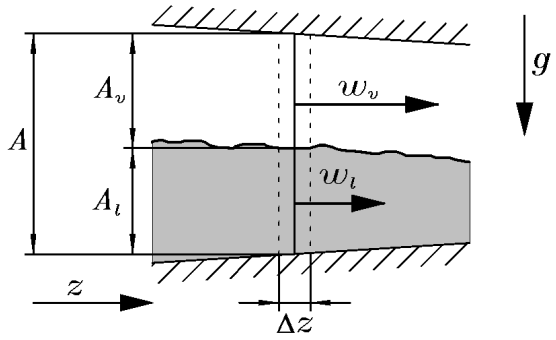



Abb. 1.4: Idealisierte Darstellung einer Zweiphasenströmung zur Veranschaulichung der Definition des Dampfvolumenanteils $\epsilon_v$

Die Strömung sei instationär und quasi-eindimensional, d.h. die unter Berücksichtigung von Querschnittsänderungen gemittelten Strömungsgrößen und die Stoffeigenschaften ändern sich nur mit der Zeit und in Strömungsrichtung[4]. Im Gegensatz zum später vorgestellten Zweifluidmodell mit getrennter Betrachtung der Einzelphasen, wird hier die Zweiphasenströmung als Ganzes betrachtet. Übertragungsvorgänge und Wechselwirkungen zwischen den Phasen bleiben dabei unberücksichtigt. Wie bereits erwähnt, gelten die oben dargelegten Erhaltungssätze auch für zweiphasige Strömungen sofern es gelingt, geeignete Mittelwerte für die abhängigen Variablen zu finden. Im Falle einer diskontinuierlich strömenden Phase, also z.B. bei der Strömung von in kontinuierlicher Flüssigkeit dispergierten Dampfblasen oder der Strömung von Tropfen in Dampf, kommt das Konzept der sogenannten Ensemblemittelung (Ishii [65]) zum Tragen. Bei

[2]Fluent Inc., Lebanon, USA
[3]Computational Dynamics Ltd., London, UK
[4]Beim Übergang von der mehrdimensionalen Betrachungsweise auf quasi-eindimensionale Verhältnisse wird auf eine Indizierung der Komponenten der vektoriellen Strömungsgrößen nach ihrer Richtung verzichtet. Es gilt z.B.: $w_z = w$.

dieser geht man von der Vorstellung aus, daß die örtlichen Eigenschaften der Gesamtheit von Einzelvolumina der diskontinuierlichen Phase durch zeitliche Mittelung makroskopisch beschrieben werden können.

Die in **Abb. 1.4** eingezeichneten Strömungsgeschwindigkeiten $w_v$ und $w_l$ stellen mittlere Werte dar, die durch Integration über die jeweils von Dampf bzw. von Flüssigkeit besetzten Querschnittsanteile $A_v$ bzw. $A_l$ und Bezug auf diese Querschnitte erhalten werden. Für eine vereinfachte Schreibweise ist es weiterhin zweckmäßig, eine über den Strömungsquerschnitt $A$ gemittelte Dichte des Zweiphasengemisches einzuführen:

$$\rho_m = \frac{1}{A} \int_A \rho \, dA \,. \tag{1.18}$$

Die mittlere Massenstromdichte $G = \dot{m}/A$ über den Strömungsquerschnitt $A$ ist:

$$G = \frac{1}{A} \int_A \rho \, w \, dA \,. \tag{1.19}$$

Wendet man Gl. (1.3) sinngemäß auf den Kanalabschnitt in **Abb. 1.4** mit $dV = A \, dz$ an, so erhält man für die differentielle Form der Kontinuitätsgleichung einer quasi-eindimensionalen Strömung:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \, A) + \frac{\partial}{\partial z} (G \, A) = 0 \,.} \tag{1.20}$$

Das Verhältnis des vom Dampf eingenommenen Volumens zum eingezeichneten Kontrollvolumen der Länge $\Delta z$ in Strömungsrichtung wird als volumetrischer Dampfgehalt oder kurz als Dampfvolumenanteil bezeichnet:

$$\epsilon_v = \frac{V_v}{V_v + V_l} \,. \tag{1.21}$$

Für einen infinitesimal kleinen Kanalabschnitt $\Delta z \to 0$ kann das Volumenverhältnis in Gl. (1.21) durch den Quotienten der von der Dampfphase durchströmten Querschnittsfläche $A_v$ und dem gesamten Strömungsquerschnitt $A$ ersetzt werden:

$$\epsilon_v = \frac{A_v}{A} = \frac{A_v}{A_v + A_l} \,. \tag{1.22}$$

Da die Summe der von Dampf und Flüssigkeit eingenommenen Querschnitte $A_v$ und $A_v$ in einem Einkomponenten-Dampf/Flüssigkeitssystem gleich dem Gesamtquerschnitt $A$ ist, gilt für den Flüssigkeitsvolumenanteil:

$$\epsilon_l = 1 - \epsilon_v \,. \tag{1.23}$$

Die mittlere Dichte kann ausgehend von Gl. (1.18) folgendermaßen entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{1}{A} \left[ \int_{A_v} \rho_v \, dA_v + \int_{A_l} \rho_l \, dA_l \right] \\ &= \rho_v \, \frac{A_v}{A} + \rho_l \, \frac{A_l}{A} \,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Mit Gl. (1.22) und (1.23) kann man nun für die mittlere Dichte $\rho_m$ des Zweiphasengemisches schreiben:

$$\begin{aligned} \rho_m &= \epsilon_v\,\rho_v + \epsilon_l\,\rho_l \\ &= \epsilon_v\,\rho_v + (1-\epsilon_v)\,\rho_l\,. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Zur Formulierung der Impulsgleichung wird die mit $G^2$ als Maß für den Impulsstrom gemittelte Dichte definiert:

$$\frac{1}{\rho_{m,I}} = \frac{1}{G^2\,A}\int\limits_A \rho\,w^2\,dA\,. \tag{1.26}$$

Mit Gl. (1.26) und durch Anwendung der integralen Impulsbilanz nach Gl. (1.9) auf quasi-eindimensionale Verhältnisse ergibt sich die differentielle Impulsgleichung für ein Zweiphasengemisch:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\,t}\,(G\,A) + \frac{\partial}{\partial\,z}\left(\frac{G^2\,A}{\rho_{m,I}}\right) = -A\,\frac{\partial\,p}{\partial\,z} - f_w\,A - \rho_m\,g\,A\,\sin\theta\,.} \tag{1.27}$$

Hierin ist als Volumenkraft die auf die Strömung durch einen geneigten Kanal einwirkende Schwerkraft erfaßt. Für Zweiphasenströmungen, in denen Abweichungen vom thermischen und fluiddynamischen Gleichgewicht von Bedeutung sind, ist die Verwendung des Dampfmassenstromanteiles (oder Strömungsdampfgehaltes) gebräuchlich (Huhn [62], Mayinger [86]):

$$\dot{x} = \frac{\dot{m}_v}{\dot{m}} = \frac{\dot{m}_v}{\dot{m}_v + \dot{m}_l}\,. \tag{1.28}$$

Ersetzt man in Gl. (1.28) die phasenbezogenen Massenströme durch das Produkt von Dichte, Strömungsquerschnitt und Phasengeschwindigkeit folgt mit $\dot{m} = G\,A$ und Gl. (1.22):

$$\dot{x} = \frac{\rho_v\,w_v\,A_v}{G\,A} = \frac{\epsilon_v\,\rho_v\,w_v}{G}\,. \tag{1.29}$$

Analog gilt für den Anteil der strömenden Flüssigkeit:

$$1 - \dot{x} = \frac{(1-\epsilon_v)\,\rho_l\,w_l}{G}\,. \tag{1.30}$$

Stellt man diese Gleichungen nach den Phasengeschwindigkeiten um, so erhält man:

$$w_v = \frac{\dot{x}\,G}{\epsilon_v\,\rho_v}\,, \tag{1.31}$$

$$w_l = \frac{(1-\dot{x})\,G}{(1-\epsilon_v)\,\rho_l}\,. \tag{1.32}$$

Für die Gl. (1.26) läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{m,I}} &= \frac{1}{G^2\,A}\left[\int\limits_{A_v}\rho_v\,w_v^2\,dA_v + \int\limits_{A_l}\rho_l\,w_l^2\,dA_l\right] \\ &= \frac{1}{G^2}\left[\epsilon_v\,\rho_v\,w_v^2 + (1-\epsilon_v)\,\rho_l\,w_l^2\right]\,. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Nach Einsetzen der Gl. (1.31) und (1.32) in Gl. (1.33) kann die impulsgemittelte Dichte wie folgt berechnet werden:

$$\rho_{m,I} = \left[ \frac{\dot{x}^2}{\epsilon_v \, \rho_v} + \frac{(1-\dot{x})^2}{(1-\epsilon_v) \, \rho_l} \right]^{-1} . \tag{1.34}$$

Bei der Formulierung der Energiegleichung für das Zweiphasengemisch, hat es sich als sinnvoll erwiesen, die mit $G^3$ als Maß für die kinetische Energie der Strömung gemittelte Dichte:

$$\frac{1}{\rho_{m,E}} = \left[ \frac{1}{G^3 \, A} \int\limits_A \rho \, w \, w^2 \, dA \right]^{1/2} . \tag{1.35}$$

zu verwenden. Für sie gilt mit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{m,E}} &= \left\{ \frac{1}{G^3 \, A} \left[ \int\limits_{A_v} \rho_v \, w_v \, w_v^2 \, dA_v + \int\limits_{A_l} \rho_l \, w_l \, w_l^2 \, dA_l \right] \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{1}{G^3} \left[ \epsilon_v \, \rho_v \, w_v^3 + (1-\epsilon_v) \, \rho_l \, w_l^3 \right] \right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{1.36}$$

sowie mit Gl. (1.31) und (1.32) auch:

$$\rho_{m,E} = \left[ \frac{\dot{x}^3}{\epsilon_v^2 \, \rho_v^2} + \frac{(1-\dot{x})^3}{(1-\epsilon_v)^2 \, \rho_l^2} \right]^{-1/2} . \tag{1.37}$$

Die mittlere spezifische innere Energie des Zweiphasengemisches im Kontrollraum sei

$$u_m = \epsilon_v \, \rho_v \, u_v + (1-\epsilon_v) \, \rho_l \, u_l \, . \tag{1.38}$$

Der konvektive Term der Energiegleichung soll unter Verwendung der spezifischen Enthalpie des Gemisches aus Dampf und Flüssigkeit,

$$h = u + \frac{p}{\rho} = \dot{x} \, h_v + (1-\dot{x}) \, h_l \, , \tag{1.39}$$

formuliert werden. Mit Gl. (1.15) ergibt sich für die Energiegleichung bei eindimensionaler Betrachtungsweise:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \, t} \left[ \left( u_m + \frac{G^2}{2 \, \rho_{m,I}} \right) A \right] + \frac{\partial}{\partial \, z} \left[ G \left( h + \frac{G^2}{2 \, \rho_{m,E}^2} \right) A \right] = -GA \, \frac{f_w}{\rho_m} - GA \, g \sin\theta + \tilde{q} \, A \, .} \tag{1.40}$$

Das System aus den Erhaltungsgleichungen (1.20), (1.27) und (1.40) kann als Ausgangsbasis für einfache Verfahren zur Berechnung von stationären und instationären, homogenen und schlupfbehafteten Gleichgewichtsströmungen dienen, auf die im nachfolgenden Abschnitt 1.2 eingegangen wird.

In Ergänzung zu den oben genannten Zusammenhängen werden im Anschluß noch weitere wichtige Größen zur Beschreibung von Zweiphasenströmungen eingeführt: Als Schlupfverhältnis $S$ wird der Quotient der Strömungsgeschwindigkeiten von Dampf und Flüssigkeit bezeichnet:

$$S = \frac{w_v}{w_l} \, . \tag{1.41}$$

Setzt man in Gl. (1.41) die Phasengeschwindigkeiten nach Gl. (1.31) und (1.32) ein, so läßt sich das Schlupfverhältnis als Funktion von Dampfanteil $\epsilon_v$, Flüssigkeitsvolumenanteil $\epsilon_l$, Dampfmassenstromanteil $\dot{x}$ und Dichteverhältnis $\rho_l/\rho_v$ darstellen:

$$S = \frac{\epsilon_l}{\epsilon_v} \frac{\dot{x}}{1-\dot{x}} \frac{\rho_l}{\rho_v} \,. \tag{1.42}$$

Für den Dampfvolumenanteil erhält man mit Gl. (1.23) nach Umstellung der obigen Gleichung den Zusammenhang:

$$\epsilon_v = \left[1 + S \frac{1-\dot{x}}{\dot{x}} \frac{\rho_v}{\rho_l}\right]^{-1} \,. \tag{1.43}$$

Für den Sonderfall einer schlupffreien Zweiphasenströmung ($w_v = w_l$) gilt: $S = 1$. Man nennt dies eine *homogene* Strömung, für die sich Gl. (1.43) zu:

$$\epsilon_v = \frac{\dot{x}\,\rho_l}{\dot{x}\,\rho_l + (1-\dot{x})\,\rho_v} \tag{1.44}$$

vereinfacht. Die Werte für die Dichte nach Gl. (1.25), (1.34) und (1.37) sind in diesem Fall identisch:

$$\rho_m = \rho_{m,I} = \rho_{m,E} \qquad (\text{für } S = 1) \,. \tag{1.45}$$

Die mittlere Geschwindigkeit des Zweiphasengemisches $w_m$ Strömungen kann mit $G = \rho_m\, w_m = \dot{x}G + (1-\dot{x})G$ in folgender Weise berechnet werden:

$$w_m = \frac{\epsilon_v\,\rho_v\,w_v + \epsilon_l\,\rho_l\,w_l}{\rho_m} \,. \tag{1.46}$$

Für Prozesse mit Phasenumwandlung, die als Folge von Gleichgewichtszuständen beschrieben werden können (quasistatische Zustandsänderungen), ist die Verwendung des Dampfmassengehaltes (oder kurz: Dampfgehalt) $x$ üblich. Der Dampfgehalt ist definiert als das Verhältnis von Dampfmasse zur Gesamtmasse des Zweiphasengemisches (Elsner und Dittmann [40]):

$$x = \frac{m_v}{m} = \frac{m_v}{m_v + m_l} \tag{1.47}$$

und kann bei bekanntem Anfangszustand im Falle des hier vorausgesetzten thermodynamischen Gleichgewichtes mit Hilfe des *Hebelgesetzes der Phasenmengen* (Baehr [9]) aus den spezifischen Volumina, den spezifischen Enthalpien oder Entropien der siedenden Flüssigkeit (Index $'$) und des gesättigten Dampfes (Index $''$) berechnet werden:

$$x = \frac{m''}{m' + m''} = \frac{v - v'}{v'' - v'} = \frac{h - h'}{h'' - h'} = \frac{s - s'}{s'' - s'} \,. \tag{1.48}$$

Für den Zusammenhang zwischen Strömungsdampfgehalt und Dampfgehalt gilt:

$$\dot{x} = \frac{S\,x}{1 + (S-1)\,x} \,, \tag{1.49}$$

so daß sich bei schlupffreier Strömung $x = \dot{x}$ ergibt.

## 1.2. Stand der Forschung

Die bekannten Berechnungsmodelle zur Beschreibung von kritischen Einkomponenten-Zweiphasenströmungen lassen sich - wie in **Abb. 1.5** dargestellt - in Abhängigkeit vom thermischen und fluiddynamischen Verhalten, das man der flüssigen und der dampfförmigen Phase unterstellt, in Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsmodelle einteilen.

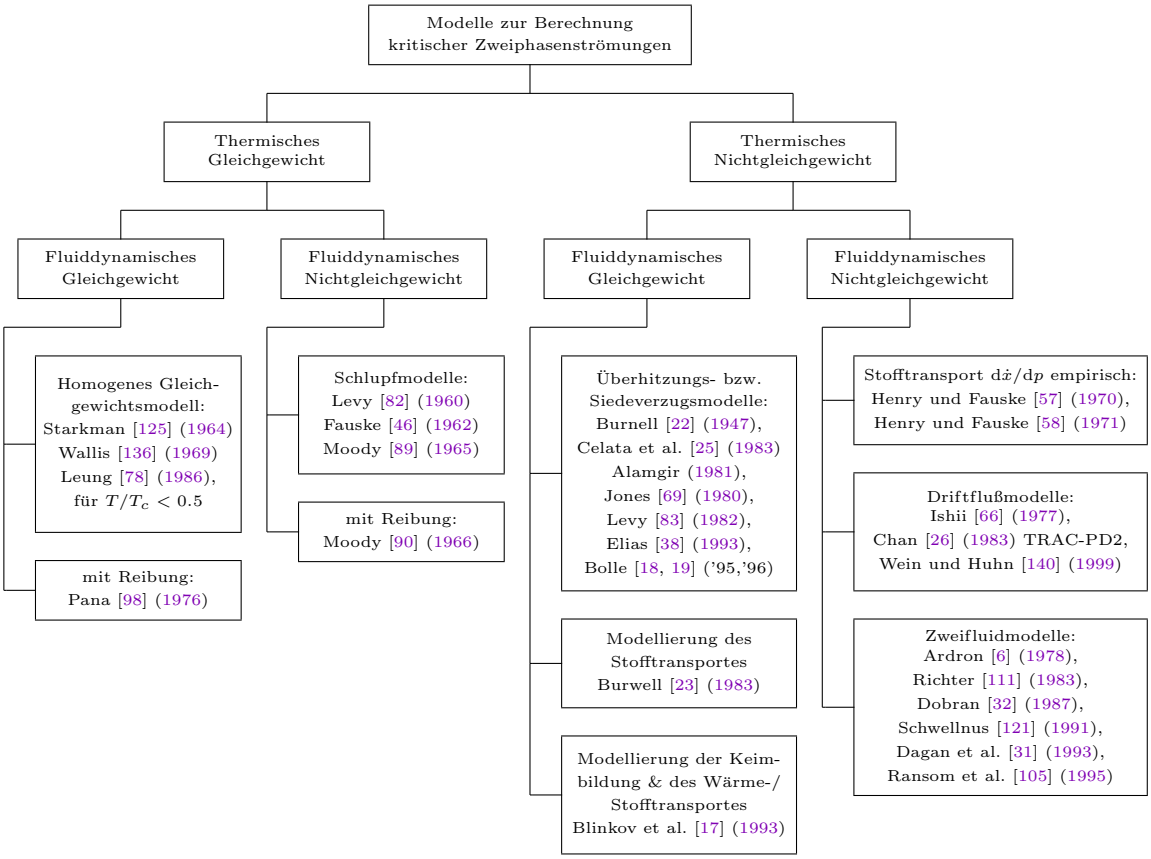



Abb. 1.5: Einteilung der Modelle zur Berechnung der kritischen Massenstromdichte

Bei den Modellen, die thermisches Gleichgewicht voraussetzen, wird angenommen, daß Temperaturunterschiede zwischen den Phasen sofort und vollständig durch Wärmetransport und Phasenwechsel (hier Verdampfung oder Kondensation) abgebaut werden und daß die Phasen daher stets im Sättigungszustand vorliegen. Werden hingegen unterschiedliche Temperaturen von Dampf und Flüssigkeit berücksichtigt, so spricht man von thermischen Nichtgleichgewichtsmodellen. In diesen Modellen müssen zusätzliche Annahmen für den Wärme- und Stofftransport zwischen den Phasen und bei anfänglich einphasiger Strömung auch für die Keimbildung getroffen werden.

Als weiteres Merkmal zur Einordnung der Berechnungsmodelle kann das fluiddynamische Verhalten im Hinblick auf die Ausbildung von Geschwindigkeitsunterschieden zwischen den Phasen dienen. Im Falle homogener (schlupffreier) Strömung wird davon ausgegangen, daß eine stark ausgeprägte mechanische Kopplung der Phasen eine Relativbewegung zwischen Dampf und Flüssigkeit unterbindet. Dies trifft bei starker Dispergierung der diskontinuierlichen Phase, also z.B. bei der Blasen- oder Sprühströmung zu (vgl. Burwell und Ringer [23] und Blinkov et al. [17]). Erst bei

Zweiphasenströmungen mit höheren Dampfanteilen, insbesondere bei weitestgehend separiert strömenden Phasen wie bei der Ringströmung, gewinnt das fluiddynamische Nichtgleichgewicht an Bedeutung. Neben der Strömungsform tragen vor allem die dichteabhängigen Trägheitseigenschaften der Phasen dazu bei, daß sich unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten in beschleunigten bzw. verzögerten Strömungen einstellen. Dies gilt vor allem bei niedrigen Drücken, da hier das Verhältnis von Dampf- zu Flüssigkeitsdichte klein ist.

Im *homogenen Gleichgewichtsmodell* (Starkman et al. [125], Wallis [136]) wird das Zweiphasengemisch als quasi-einphasiges Fluid mit gleichen Phasengeschwindigkeiten, Temperaturen und Drücken betrachtet. Weiterhin wird angenommen, daß die Expansion isentrop verläuft. Ausgehend von den Erhaltungsgleichungen für das Zweiphasengemisch, Gl. (1.20), (1.27) und (1.40), erhält man für die kritische Massenstromdichte bei stationärer Strömung ($\partial \ldots / \partial t = 0$) damit:

$$G_{krit} = \rho_m \left[2 \left(H_0 - x\, h_v - (1-x)\, h_l\right)\right]^{1/2} , \tag{1.50}$$

mit dem Gleichgewichts-Dampfgehalt $x$ nach Gl. (1.48) unter Ausnutzung von $s_0 =$ const. und der Gesamtenthalpie nach

$$H_0 = h + \frac{w^2}{2} . \tag{1.51}$$

Die Berechnung der kritischen Massenstromdichte erfolgt durch sukzessives Absenken des Austrittsdruckes $p_A$ solange, bis die Massenstromdichte ein Maximum aufweist. Dann gilt: $p_A = p_{krit}$. Dieses Modell ergibt sinnvolle Resultate bei Zweiphasenströmungen mit relativ langsam verlaufenden Zustandsänderungen und geringen Druckgradienten, wie z.B. bei der Strömung durch lange Rohre.

Als weitere bedeutende Vertreter von homogenen Gleichgewichtsmodellen sind die Arbeiten von Pana [98], in der auch Reibungseffekte berücksichtigt werden, sowie die Berechnungsverfahren von Leung [78], Leung und Grolmes [81], Leung und Epstein [80] und Leung [79], die sich in Einzelheiten wie Strömungsrichtung und Eintrittsbedingungen (unterkühlt, gesättigt) voneinander unterscheiden, zu nennen. Die sogenannte $\omega$-Methode von Leung stellt eine sehr einfach zu handhabende Methode zur Abschätzung der kritischen Massenstromdichte dar:

$$G_{krit} = \frac{p_{krit}}{p_0} \left(\frac{p_0}{\omega\, v_0}\right)^{1/2} . \tag{1.52}$$

Der in Gl. (1.52) verwendete Parameter $\omega$ hängt nur von den Stagnationsgrößen im Ausgangszustand ab:

$$\omega = \frac{\dot{x}_0 \left(v_0'' - v_0'\right)}{v_0} + \frac{c_{pl0}\, T_0\, p_0}{v_0} \left(\frac{v_0'' - v_0'}{h_0'' - h_0'}\right)^2 . \tag{1.53}$$

Während der erste Term in Gl. (1.53) die mit dem Vorhandensein von Dampf im Ausgangszustand zusammenhängende Kompressibilität des Zweiphasengemisches repräsentiert, beschreibt der zweite Term die durch spontan einsetzende Verdampfung (*Flashing*) hervorgerufene, zusätzliche Kompressibilität. Für das kritische Druckverhältnis $p_{krit}/p_0$ in Gl. (1.52) werden explizite Approximationsgleichungen oder Berechnungsgleichungen in transzendenter Form formuliert, die allein vom Korrelationsparameter

$\omega$ abhängen. Bei horizontaler Strömung von Wasser lautet die Näherungsgleichung für das kritische Druckverhältnis nach Leung:

$$\frac{p_{krit}}{p_0} = \begin{cases} 0.6055 + 0.1356\,\ln\omega - 0.0131\,(\ln\omega)^2 & \text{für } \omega \geq 4 \\ 0.66\,\omega^{0.11} & \text{für } \omega < 4. \end{cases} \tag{1.54}$$

Unter Berücksichtigung zehn weiterer Fluide (u.a. Ammoniak, Stickstoff, Ethanol, R11) gibt Leung die folgende Korrelation an:

$$\frac{p_{krit}}{p_0} = 0.55 + 0.217\,\ln\omega - 0.046\,(\ln\omega)^2 + 0.004\,(\ln\omega)^3. \tag{1.55}$$

Die Beziehungen nach Gl. (1.54) und (1.55) sind bis zu einer reduzierten Temperatur von $T/T_K = 0.9$ bzw. bis zu einem reduzierten Druck von $p/p_K = 0.5$ gültig.

Als *Schlupfmodelle* werden Berechnungsansätze bezeichnet, die von unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten ausgehen. Zur Ermittlung der kritischen Massenstromdichte mit $\partial G/\partial p = 0$ müssen somit diejenigen Werte von Druck und Phasenschlupf bestimmt werden, die den Durchsatz im kritischen Querschnitt maximieren, also $(\partial G/\partial S)_p = 0$ erfüllen. Moody [89] geht von einer Kombination aus Kontinuitäts- und Energiegleichung für das Zweiphasengemisch aus und unterstellt eine isentrope Entspannung des Zweiphasengemisches. In diesem Fall ergibt sich für den Wert des Phasenschlupfes die Kubikwurzel aus dem Dichteverhältnis von Flüssigkeit und Dampf:

$$S_{krit} = \left(\frac{\rho_l}{\rho_v}\right)^{1/3}. \tag{1.56}$$

Dies entspricht einer Maximierung der mit der kinetischen Energie gemittelten Dichte, Gl. (1.37). Ersetzt man in dieser Gleichung den Dampfvolumenanteil $\epsilon_v$ gemäß Gl. (1.43), so läßt sich schreiben

$$\rho_{m,E} = \left\{ \left[ \frac{\dot{x}}{\rho_v} + S\,\frac{1-\dot{x}}{\rho_l} \right] \left[ \dot{x} + \frac{(1-\dot{x})}{S^2} \right]^{1/2} \right\}^{-1}. \tag{1.57}$$

Die kritische Massenstromdichte ergibt sich mit $s_0 = \text{const.}$ und

$$\dot{x} = \frac{s_0 - s_l}{s_v - s_l} \tag{1.58}$$

bei diesem Modell zu:

$$G_{krit} = \rho_{m,E}\,\left[2\,(H_0 - \dot{x}\,h_v - (1-\dot{x})\,h_l)\right]^{1/2}. \tag{1.59}$$

Die Lösung erfolgt in gleicher Weise wie für Gl. (1.50). Die Gl. (1.56) wendet Moody [90] auch auf kritische Zweiphasenströmungen durch lange Rohre an, wobei zusätzlich der Reibungseinfluß miteinbezogen wird. Zu beachten ist, daß die Schlupfbeziehung Gl. (1.56) ausschließlich für den kritischen Strömungsquerschnitt gültig ist.

Zu einem anderen Ergebnis kommt Fauske [46]. Unter Verwendung der Kombination aus Kontinuitäts- und Impulsgleichung für das Zweiphasengemisch folgert er, daß die Massenstromdichte ein Maximum aufweist, wenn das Geschwindigkeitsverhältnis von

Dampf und Flüssigkeit im kritischen Querschnitt gleich der Quadratwurzel aus dem Quotienten von Flüssigkeits- und Dampfdichte ist:

$$S_{krit} = \left(\frac{\rho_l}{\rho_v}\right)^{1/2}. \tag{1.60}$$

Man erhält diesen Zusammenhang auch durch die Ermittlung des Maximums der impulsgemittelten Dichte nach Gl. (1.34).

Für die Berechnung des örtlichen Schlupfes, die nicht auf das Vorhandensein kritischer Strömungsverhältnisse beschränkt ist, gibt es zahlreiche Ansätze. Die auf einer rein analytischen Betrachtungsweise für getrennt voneinander strömende Phasen basierende Schlupfbeziehung von Levy [82] ermöglicht die Berechnung des Phasenschlupfes aus Dichteverhältnis und Dampfvolumenanteil:

$$S = \left[\frac{\rho_l}{\rho_v}\,\epsilon_v\right]^{1/2}. \tag{1.61}$$

Die Schlupfbeziehung von Ahmad [2] beruht hingegen auf Experimentaldaten und beschreibt das Geschwindigkeitsverhältnis als Funktion von Dichteverhältnis und Reynolds-Zahl, die mit der Gesamtmassenstromdichte und der Flüssigkeitsviskosität gebildet wird:

$$S = \left(\frac{\rho_l}{\rho_v}\right)^{0.205} \left(\frac{G D_h}{\eta_l}\right)^{-0.016}. \tag{1.62}$$

In neueren Arbeiten von Huq und Loth [63, 64], die sich mit der Korrelierung des Phasenschlupfes befassen, wird folgende Beziehung vorgeschlagen:

$$S = \frac{\rho_l}{\rho_v}\,\frac{B}{B + D - 1}. \tag{1.63}$$

Darin sind die Hilfsgrößen $B$ und $D$ wie folgt definiert:

$$B = 2\,\dot{x}\,(1 - \dot{x}), \tag{1.64}$$

$$D = \left[1 + 2\,B\,\left(\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1\right)\right]^{1/2}. \tag{1.65}$$

Dieses Modell berücksichtigt sowohl den Einfluß des Druckes bzw. des Dichteverhältnisses auf den Phasenschlupf als auch die Endpunktbedingungen für den Dampfvolumenanteil, wonach bei verschwindend kleinem Dampfanteil ($\epsilon_v \to 0$) bzw. sehr kleinem Flüssigkeitsvolumenanteil ($\epsilon_v \to 1$) homogene Strömungsverhältnisse ($S \to 1$) vorliegen. Der nach Gl. (1.62) relativ geringe Einfluß der Massenstromdichte auf den Phasenschlupf wird von Gl. (1.63) nicht erfaßt. Die genannten Schlupfkorrelationen liefern für vergleichende oder abschätzende Rechnungen erste Anhaltswerte. Naturgemäß können strömungsformabhängige und transiente Effekte, wie der Einfluß der virtuellen Masse und die Wirkung lokal wirkender Druckgradienten, von den Korrelationen nicht erfaßt werden.

Bei der Analyse von Entspannungsvorgängen mit spontan einsetzender Verdampfung, wird der ihr vorausgehende Siedeverzug häufig in Abhängigkeit vom Ausmaß der möglichen Flüssigkeitsüberhitzung beschrieben, man spricht hier auch von

*Überhitzungs- oder Siedeverzugsmodellen.* **Abb. 1.6** stellt den möglichen Weg einer solchen im Punkt E beginnenden Entspannung im $p, v$-Diagramm dar, die nach Borkar et al. [20] nahezu isotherm verläuft. Spontanes Sieden setzt erst nach Unterschreiten des Sättigungsdampfdruckes $p^s(T_E)$ im Punkt F beim Druck $p_F$ ein, die entsprechende Flüssigkeitsüberhitzung ist $T_E - T^s(p_F)$.

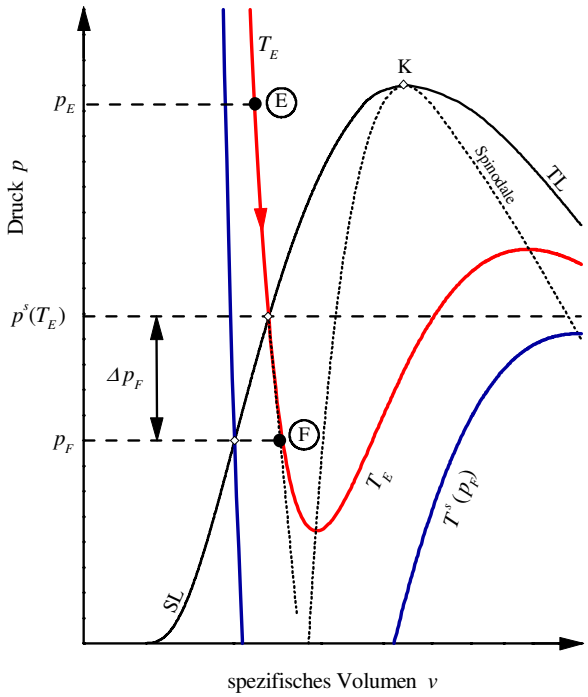



Abb. 1.6: Expansionsprozeß im $p, v$-Diagramm

Zur Berechnung des Überhitzungsdruckes $\Delta p_F$ kann beispielsweise das auf der heterogenen Keimbildungstheorie basierende, halbempirische Modell von Alamgir und Lienhard [3] genutzt werden. Sie führten statische Dekompressionsversuche an einem mit Wasser gefüllten Zylinder-Kolben-Systems aus. Für die Ermittlung des minimalen Druckes, der bei höchstmöglicher Flüssigkeitsüberhitzung herrscht, machten sie die vollständige Bedeckung der Zylinderwand mit Dampfblasen zur Bedingung. Die Auswertung der Meßergebnisse führte zu der folgenden Formulierung für den maximalen Überhitzungsdruck:

$$\Delta p_F = p^s(T_E) - p_F = 0.258\, \frac{\sigma_E^{3/2}\, (T_E/T_K)^{13.73}\, (1 + 14\,\Sigma'^{0.8})^{0.5}}{(k\,T_K)^{1/2} \left(1 - \dfrac{\rho''(T_E)}{\rho'(T_E)}\right)} \,. \tag{1.66}$$

Darin ist $T_E$ die Absoluttemperatur im Anfangszustand und $T_K$ die kritische Temperatur des Mediums. Die Druckabsenkungsrate $\Sigma' = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ ist in Matm/s einzusetzen. Gl. (1.66) ist gültig für Temperaturen $0.62 \le T/T_K \le 0.935$ und Druckabsenkungsraten $4 \cdot 10^2 \mathrm{MPa/s} \le \Sigma' \le 1.83 \cdot 10^5 \mathrm{MPa/s}$. Von entscheidendem Einfluß auf die erreichbare Überhitzung ist die Geschwindigkeit mit der die Druckabsenkung durchgeführt wird. Je schneller die Druckabsenkung verläuft, desto größer wird die erreichbare Flüssigkeitsüberhitzung $\Delta T = T_E - T^s(p_F)$ bzw. der Überhitzungsdruck $\Delta p_F = p^s(T_E) - p_F$ sein, bevor Keimbildung einsetzt. Jones [69] hat der Korrelation von Alamgir und Lienhard einen Term hinzugefügt, der den Einfluß der turbulenten

Schwankungsbewegungen in der Flüssigphase berücksichtigt und zu einer geringeren Flüssigkeitsüberhitzung führt.

Levy und Abdollahian [83] verwenden in ihrem Modell, das eine homogene Nichtgleichgewichtsströmung voraussetzt, die Korrelation von Alamgir und Lienhard [3] in leicht modifizierter Form[5] auf Grundlage der Daten aus Reocreux [108] und Zimmer et al. [145]. Sie erhalten erwartungsgemäß höhere kritische Durchsätze als mit dem homogenen Gleichgewichtsmodell. Während für Druckentlastungsexperimente, die an Originalanlagen durchgeführt wurden, gute Übereinstimmungen zwischen Berechnungsmodell und Versuch erzielt wurden, wich die Vorhersagegenauigkeit für Teststrecken im Modellmaßstab bei hohem Druckniveau deutlich von den Meßergebnissen ab. Diese Abweichung verstärkte sich noch bei Düsen mit abrupt endenden Kontraktionsstrecken. Bei im Verhältnis zum Durchmesser sehr kurzen Düsen und geringer Eintrittsunterkühlung ergaben sich relative Massenstromabweichungen von etwa -44%. Als mögliche Ursachen wurden neben nicht geeignet gewählter Parameter die Druckabsenkungsrate $\Sigma'$, der Einfluß dreidimensionaler Effekte sowie Wechselwirkungen zwischen kritischem Druck und stromab des Austritts reflektierten Verdünnungswellen angeführt.

Eine dem Modell von Alamgir und Lienhard ähnliche Methode wird von Elias und Chambré [38] vorgeschlagen, die insbesondere auch bei vergleichsweise kleinen Dekompressionsraten angewendet werden kann (Gültigkeitsbereich: $0.57 \leq T/T_K \leq 0.935$, $1.3 \cdot 10^{-2}\text{MPa/s} \leq \Sigma' \leq 1.85 \cdot 10^{5}\text{MPa/s}$). Als Berechnungsgleichung geben Elias und Chambré eine transzendente Beziehung für den Überhitzungsdruck $\Delta p_F$ an, die neben der Abhängigkeit von Dekompressionsrate und Eintrittstemperatur auch die Heterogenität des Strömungsmediums erfaßt und die oben geschilderten Probleme bei der Anwendung von Gl. (1.66) deutlich reduziert. Ergänzend muß angemerkt werden, daß die genannten Überhitzungsmodelle prinzipiell auch bei Modellen, die Phasenschlupf in spontan siedenden Strömungen berücksichtigen, angewendet werden können. Da sie jedoch zumeist in Modellen eingesetzt werden, die ausschließlich Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht zulassen, sind sie in **Abb. 1.5** dieser Untergruppe zugeordnet worden.

Bei der kritischen Zweiphasenströmung durch kurze Rohre oder Düsen wird oft angenommen, daß die sehr kleine Zeitspanne, die das Medium für das Durchströmen des Drosselorganes benötigt, keinen Phasenwechsel ermöglicht. Da in diesem Fall der Strömungsdampfgehalt $\dot{x}$ während der Entspannung konstant bleibt, spricht man von eingefrorener Strömung (*Frozen flow*). Für am Eintritt in unterkühltem Zustand vorliegende Flüssigkeiten bleibt die Dampfbildung somit gänzlich aus, und die einphasige, inkompressible Strömung kann bei Vernachlässigung von Reibungsverlusten mit der Bernoulli-Gleichung beschrieben werden:

$$G_{krit} = \left[2\,\rho_0\,(p_0 - p_{krit})\right]^{1/2}. \tag{1.67}$$

Für die Berechnung der Massenstromdichte muß der Druck $p_{krit}$ im kritischen Strömungsquerschnitt bekannt sein. Burnell [22] gibt für diesen Druck eine von der Oberflächenspannung abhängige empirische Gleichung für Wasser mit $0.1 \leq p/\text{MPa} \leq$

[5] Der Term $(1 + 14\,\Sigma'^{0.8})^{0.5}$ in Gl. (1.66) wurde ersetzt durch $(0.49 + 13.25\,\Sigma'^{0.8})^{0.5}$.

1.21 an, die eine Überhitzung der Flüssigkeit impliziert:

$$p_{krit} = p^s(T_0)\left[1 - \frac{0.264\,\sigma(T_0)}{\sigma(p = 1.21\mathrm{MPa})}\right]. \tag{1.68}$$

Auch für die Strömung durch längere Rohre kann die Betrachtung der Expansion als einphasiger Strömungsvorgang bei ausreichend großer Eintrittsunterkühlung sinnvolle Ergebnisse liefern. Celata et al. [25] folgen dieser Vorgehensweise für Eintrittsunterkühlungen, die größer als 15 bis 20 K sind. Zusätzlich berücksichtigen sie jedoch den Druckverlust am Rohreinlauf und den bei langen Rohren nicht mehr vernachlässigbaren Druckabfall durch Wandreibung. Ferner gehen sie von der Annahme aus, daß sich am Rohraustritt gerade der zur Eintrittstemperatur gehörige Sättigungsdampfdruck einstellt:

$$G_{krit} = \left[\frac{2\,\rho_0\,(p_0 - p^s(T_0))}{1 + \zeta + \lambda\,L/D_h}\right]^{1/2}. \tag{1.69}$$

Hierin sind $\zeta$ der Verlustbeiwert für den Rohreintritt (bei gut abgerundetem Rohreinlauf: $\zeta \approx 0.05$, Gersten [52]) und $\lambda$ die Rohrreibungszahl ($\lambda \approx 0.03{-}0.04$ als Anhaltswert im Übergangsbereich laminar/turbulent).

Das von Bolle et al. [18, 19] aufgestellte *Homogene Relaxationsmodell* verwendet eine von Downar-Zapolski et al. [34] vorgeschlagene, empirische Korrelation für den zeitlichen Verzug der Verdampfung. Die ortsabhängige Relaxationszeit wird dabei als Funktion des lokalen Dampfvolumenanteils und des relativen Druckabfalls ermittelt. Für spontan siedende Strömungen von Heißwasser durch ein Sicherheitsventil (vgl. Abschnitt 4.1, S.67,) konnten bei der Nachrechnung gute Übereinstimmungen mit experimentellen Ergebnissen erzielt werden.

Einen anderen Weg - unter Umgehung von Überhitzungsmodellen obiger Art - beschreiten Blinkov et al. [17]. Sie berücksichtigen thermische Nichtgleichgewichtseffekte mit Hilfe von Teilmodellen, die sowohl unterschiedliche Keimbildungsmechanismen (Shin und Jones [122]) als auch den Wärme- und Stofftransport an der Phasengrenze in Verbindung mit den Erhaltungsgleichungen für Masse und Energie beschreiben. Unter Annahme schlupffreier, quasi-eindimensionaler Strömung gelingt ihnen die Nachrechnung zahlreicher Experimente mit großer Übereinstimmung zwischen Versuch und Simulationsergebnis.

Im folgenden werden sogenannte *nichthomogene Nichtgleichgewichtsmodelle* betrachtet. Auf der Basis eigener experimenteller Ergebnisse stellten Henry und Fauske [56, 57] ein Berechnungsmodell auf, das Phasenschlupf und Flüssigkeitsüberhitzung in Strömungen durch lange Rohre ($L/D > 40$) mit geringen Strömungsdampfgehalten berücksichtigt. Eine Erweiterung dieses Modells für das kritische Ausströmen von Einkomponenten-Zweiphasengemischen aus Düsen, Blenden und kurzen Rohren, die auch unterkühlte Eintrittszustände erfaßt, stellt die Arbeit von Henry und Fauske [58] dar. Gemeinsam ist den oben genannten Modellen, daß der eingeschränkte Stofftransport bei der Verdampfung mit Hilfe eines experimentell ermittelten Parameters als Bruchteil des Stofftransportes bei homogener Gleichgewichts-Zweiphasenströmung beschrieben wird[6]:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}p}\right|_H = N \left.\frac{\mathrm{d}\dot{x}_{Glgw}}{\mathrm{d}p}\right|_H, \tag{1.70}$$

[6]Der Index $H$ kennzeichnet die Zustände im Halsquerschnitt von Düsen.

wobei der Gleichgewichtsdampfgehalt definiert ist als

$$\dot{x}_{Glgw} = \frac{s_0 - s'}{s'' - s'} \,. \tag{1.71}$$

Für den Parameter $N(\dot{x}_{H,Glgw})$ gilt:

$$N = \begin{cases} 20\,\dot{x}_{H,Glgw} & \text{für Rohrströmungen mit } \dot{x}_{H,Glgw} < 0.05\,, \\ 1 & \text{für Düsen mit } \dot{x}_{H,Glgw} > 0.14\,, \\ \dot{x}_{H,Glgw}/0.14 & \text{für Düsen mit } \dot{x}_{H,Glgw} \leq 0.14\,. \end{cases} \tag{1.72}$$

Als Eingangsgrößen für die Berechnung des kritischen Massenstromes und des kritischen Druckes müssen dabei lediglich die Geometrie des Strömungskanals und der Stagnationszustand am Eintritt vorgegeben werden.

In *Driftflußmodellen* erfolgt die Berücksichtigung des Phasenschlupfes mittels empirischer oder semi-empirischer Korrelationen, die den Impulstransport zwischen den Phasen beschreiben. Dabei wird - wie Zuber und Findlay [147] und Ishii und Zuber [68] darlegen - die Gas- bzw. Dampfgeschwindigkeit als Relativgeschwindigkeit des Dampfes zur auf den Kanalquerschnitt bezogenen Gesamtvolumenstromdichte $j$ ausgedrückt:

$$w_v = C_0\, j + U_{vj} \tag{1.73}$$

mit:

$$j = \frac{\dot{V}}{A} = \epsilon_v\, w_v + \epsilon_l\, w_l \,. \tag{1.74}$$

Der Verteilungsparameter $C_0$ hängt vom radialen Profil der Geschwindigkeit und des Dampfvolumenanteils bzw. der Strömungsform ab. Ein Ansatz, der einen großen Bereich möglicher Strömungsformen abdeckt, wurde auf der Basis eigener Messungen von Nabizadeh-Araghi [91] entwickelt. Für die Blasenströmung gilt beispielsweise nach [68]:

$$C_0 = 1.2 - 0.2 \left(\frac{\rho_v}{\rho_l}\right)^{1/2} . \tag{1.75}$$

Für die mittlere Driftgeschwindigkeit $U_{vj}$ gilt bei Blasenströmung [147]:

$$U_{vj} = 1.41 \left[\frac{(\rho_l - \rho_v)\,\sigma g}{\rho_l^2}\right]^{1/4} . \tag{1.76}$$

Mit diesen Werten erhält man für den Phasenschlupf (Kolev [75]):

$$S = \frac{\rho_l}{1 - \dot{x}} \left[(C_0 - 1)\,\frac{\dot{x}}{\rho_v} + C_0\,\frac{1 - \dot{x}}{\rho_l} + \frac{U_{vj}}{G}\right] . \tag{1.77}$$

Homogene Strömungsverhältnisse ($S = 1$) ergeben sich danach für $C_0 = 1$ und $U_{vj} = 0$.

Im TRAC-PD2[7] Programmsystem (Chan und Masiello [26]) werden solche Driftflußbeziehungen verwendet, um den Einfluß der Relativgeschwindigkeit in der Impulsgleichung für das Zweiphasengemisch erfassen zu können. Das Verfahren von Wein und Huhn [139,

[7] TRAC = Transient Reactor Analysis Code

140] stellt eine Erweiterung der oben erwähnten Arbeit von Blinkov et al. [17] dar, bei dem neben der Möglichkeit vom Sättigungszustand ausgehende Zweiphasenströmungen berücksichtigen zu können, das fluiddynamische Ungleichgewicht unter Verwendung der Schlupfkorrelation von Huq und Loth [63], Gl. (1.63), eingebunden wurde (vgl. auch Abschnitt 4.2.3, S.76).

Ein auf die Blasenströmung beschränktes *Zweifluidmodell* mit getrennten Impulsgleichungen, bei dem die zwischen den Phasen wirkenden Kräfte als Summe von Widerstand und virtueller Massekraft beschrieben werden, stellt Ardron [6] vor. Bei der Wärmeübertragung von der Flüssigkeit auf die Dampfblasen wird davon ausgegangen, daß Wärmeleitung der maßgebliche Mechanismus ist. Da Änderungen der Flüssigkeitstemperatur unberücksichtigt bleiben, ist die Anwendbarkeit dieses Verfahrens auf relativ geringe Dampfgehalte begrenzt.

Das von Richter [111] entwickelte Zweifluidmodell berücksichtigt verschiedene Strömungsformen und daran angepaßte Korrelationen zur Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen den Phasen im Hinblick auf Impuls-, Energie- und Stoffübertragung. Für die volumetrische Anzahl von Dampfblasen im Anfangszustand der Verdampfung wählt Richter einen Wert von $N_b = 10^{11}\,\mathrm{m}^{-3}$. Die Keimbildung wird in diesem solange unterdrückt, bis eine gewisse Flüssigkeitsüberhitzung erreicht wird bzw. ein vorgegebener Mindestradius der Dampfblasen von $R_b = 25\,\mu\mathrm{m}$ vorliegt. Dobran [32] verbesserte das Richter-Modell, indem er in der Energiegleichung für die Dampfphase die Änderung der kinetischen Energie bei Verdampfung einbezieht. Im Zweifluidmodell von Schwellnus und Shoukri [121] werden zusätzlich Änderungen der volumetrischen Blasenanzahl miteinbezogen.

Die Arbeit von Dagan et al. [31] befaßt sich mit der Simulation kritischer Zweiphasenströmungen in Rohren und stellt ein eindimensionales Zweifluid-Modell unter Berücksichtigung des thermischen und mechanischen Nichtgleichgewichtes durch wärmeleitungsbestimmtes Blasenwachstum nach Olek et al. [96] dar. Es wird festgestellt, daß die Annahme gesättigten Dampfes in einer überhitzten Flüssigkeit in Bereichen, in denen die Dampfblasen durch Koaleszenz eine kontinuierliche Phase bilden, möglicherweise unrealistisch ist. Daher wird die Gültigkeit des Modells auf geringe Strömungsdampfgehalte beschränkt. Für die volumetrische Anzahl von bei spontanem Sieden erzeugten Dampfblasen wird eine empirische Korrelation abgeleitet, in der allein das Längen-Durchmesser-Verhältnis des Rohres eingeht (vgl. Abschnitt 2.3.4.2). Die Ergebnisse zeigten, daß der Massenstrom in Rohren mit Längen bis zum zehnfachen Durchmesser deutlich größer ist, als der nach dem homogenen Gleichgewichtsmodell berechnete Massenstrom.

Einen umfassenden Überblick über verbreitete Verfahren zur Modellierung von kritischen Zweiphasenströmungen geben Elias und Lellouche [39]. Zehn Verfahren wurden auf der Basis von ca. 1800 experimentellen Datensätzen für kritische Zweiphasenströmungen von Wasser auf ihren Anwendungsbereich und ihre Vorhersagequalität hin geprüft. In **Tabelle 1.1** sind die mittlere Abweichung und die Standardabweichung der mit verschiedenen Verfahren berechneten kritischen Massenstromdichten von gemessenen Werten aufgeführt. Die Versuchsdaten stammen aus den Rohrströmungsexperimenten von Ardron und Ackerman [7] mit unterkühltem Wasser. Die

Definitionen der mittleren Abweichung und der Standardabweichung lauten:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{G_{i,ber} - G_{i,exp}}{G_{i,exp}} ,$$

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left[ \frac{G_{i,ber} - G_{i,exp}}{G_{i,exp}} - \mu \right]^2 \right\}^{1/2} .$$

| Modell | $\mu$ | $\sigma$ |
|---|---|---|
| | % | % |
| Homogenes Gleichgewicht, Wallis [136] | 76.2 | 12.4 |
| Isenthalpe Expansion | 68.1 | 15.3 |
| Burnell [22] | -26.8 | 38.5 |
| Moody [89] | 21.5 | 23.8 |
| Moody mit angepaßten Funktionen | 23.0 | 23.8 |
| Henry und Fauske [57] | 6.5 | 22.3 |
| Henry-Fauske mit angepaßten Funktionen | 22.8 | 25.0 |
| Driftfluß (GSL), Elias und Lellouche [39] | 18.1 | 14.8 |
| Driftfluß, Wein und Huhn [140] | 7.1 | 9.7 |

Tabelle 1.1.: Wiedergabegenauigkeit einiger Verfahren für die Versuche von Ardron und Ackerman [7], $N = 31$ Versuche, Quelle: Elias und Lellouche [39]

Sowohl analytische Modelle, wie das homogene Gleichgewichtsmodell oder das Modell von Moody, als auch Verfahren mit angepaßten, expliziten Funktionen für die kritische Massenstromdichte wurden wegen großer Streuung der Ergebnisse als nicht empfehlenswert beurteilt. Genauere Vorhersagen lieferten die numerischen Verfahren auf der Basis der Erhaltungsgleichungen. Dabei wird betont, daß die Qualität dieser Verfahren in entscheidender Weise von den verwendeten konstitutiven Beziehungen zur Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen den Phasen abhängt. Am Beispiel der Versuche von Ardron und Ackerman mit unterkühltem Wasser zeigen Elias und Lellouche eindrucksvoll den Einfluß von meßtechnisch bedingten Unsicherheiten bei der Angabe von Eintrittsbedingungen (Temperatur und Druck)[8] auf die Vorhersage des kritischen Massenstromes. Zur Beurteilung verwenden sie ein eigenes Driftflußmodell (GSL, Elias und Chambré [37]). Danach bewirkt eine Reduzierung des Eingabewertes für die Eintrittstemperatur um 0.1 K bereits eine um 2.3% genauere Wiedergabe (gemessen an der durchschnittlichen relativen Abweichung der berechneten Massenstromdichte gegenüber den experimentellen Werten) der Versuchsergebnisse. In Einzelfällen betrug die "Verbesserung" 5 bis 8%. Durch einen um 1000Pa gegenüber den Meßwerten erhöhten Eintrittsdruck sinkt die durchschnittliche relative Abweichung der Massenstromdichte von 20% auf 16%, sorgt also für eine um 4% genauere Simulation. Aus einer Kombination von Temperaturreduzierung um 0.1 K und Druckerhöhung um 1000Pa am Eintritt resultiert eine Änderung der mittleren Abweichung von 6%. Eine geschickte Variation

[8] Der geschätzte Fehler allein durch Signalrauschen lag bei den Experimenten von Ardron und Ackerman [7] bei ±0.1 K für die Temperatur und ± 700Pa für den Absolutdruck.

des rechnerischen Eintrittsdruckes innerhalb eines Bereiches von ±0–2% vom Meßwert ist nach Angaben von Elias und Lellouche demnach ausreichend, alle Rechenergebnisse für die Versuche von Ardron und Ackerman in exakte Übereinstimmung mit den Experimenten zu bringen.

## 1.3. Zielsetzung und Vorgehensweise

Das Ziel dieser Arbeit ist die Bereitstellung eines Verfahrens zur Berechnung von kritischen und nahkritischen Zweiphasenströmungen (flüssig/dampfförmig) mit Phasenübergang. Dabei wird eine physikalisch konsistente Beschreibung thermischer und fluiddynamischer Nichtgleichgewichtseffekte durch Einbindung geeigneter mechanistischer Teilmodelle in die Erhaltungsgleichungen angestrebt. Um einen möglichst weiten Bereich sich einstellender Dampfanteile abzudecken, sollen verschiedene Strömungsformen berücksichtigt werden. Änderungen von Zustandsgrößen und Strömungsvariablen sollen zeitlich und entlang der betrachteten Kanalgeometrie aufgelöst werden können.

Eine Auswertung der verfügbaren Literatur ergab, daß nach wie vor große Unsicherheiten bei der Analyse und Vorhersage von Zweiphasenströmungen, bei denen Abweichungen vom Gleichgewichtszustand von Bedeutung sind, bestehen. Obwohl ein für solche Strömungen universell gültiges Verfahren derzeit nicht existiert und aufgrund der Komplexität der sich überlagernden Phänomene auch nicht in Reichweite scheint, soll das vorgestellte Verfahren für möglichst viele Problemstellungen anwendbar sein.

Das oben genannte Ziel soll in folgenden Teilschritten erreicht werden:

- Darstellung eines geeigneten Satzes von Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, Energie und Anzahl von Dampfblasen auf der Basis der zeitabhängigen, quasieindimensionalen Formulierung des Zweifluidmodelles,
- Auswahl und Implementierung notwendiger konstitutiver Beziehungen zur Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen den Phasen (Impuls-, Wärme und Stofftransport), der Keimbildung und der Wandreibung,
- Örtliche und zeitliche Diskretisierung der Bilanzgleichungen mit einem teilimpliziten Finite-Differenzen-Verfahren,
- Darstellung des teilimpliziten Zeitschrittverfahrens zur Lösung des diskretisierten Gleichungssystems,
- Einbindung variabler Randbedingungen für unterkühlte und gesättigte Eintrittsbedingungen sowie für instationäre Verhältnisse,
- Verifizierung und Validierung des Berechnungsverfahrens durch Vergleich mit bekannten Modellen und experimentellen Ergebnissen.

# 2. Thermofluiddynamisches Modell

Zur Veranschaulichung des prinzipiellen Aufbaus des Zweiphasenströmungsmodelles stellt **Abb. 2.1** dessen wesentliche Komponenten dar. Die äußeren Blöcke "Feldgleichungen", "Fluideigenschaften" und "Schließungsbeziehungen" repräsentieren die physikalische Ebene des Modells und werden in diesem Kapitel beschrieben. In Kapitel 3 wird die verwendete numerische Methode, das semi-implizite Zeitschrittverfahren, erläutert.

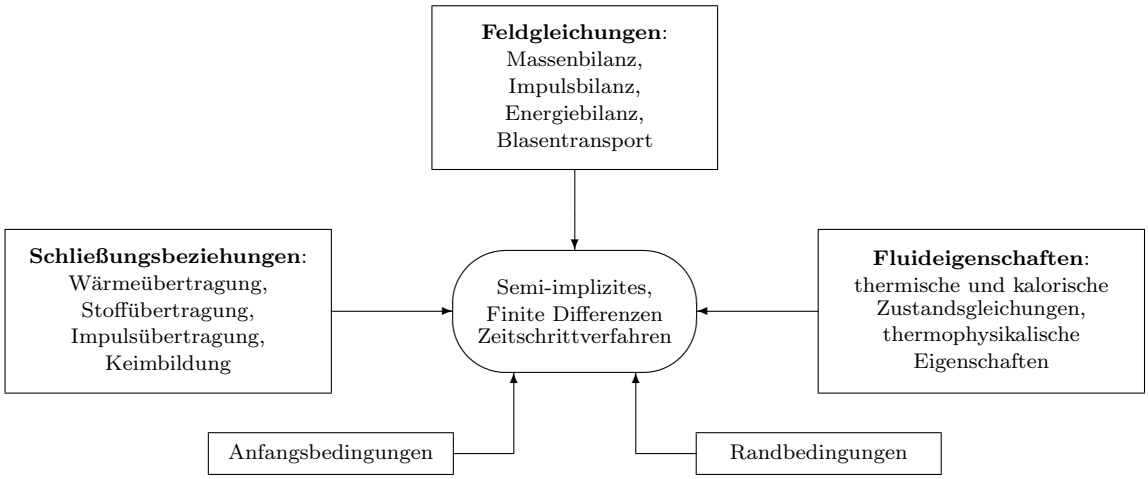



Abb. 2.1: Prinzipieller Aufbau des Zweiphasenströmungsmodells

Zunächst sollen die Feldgleichungen, die aus den Kontinuitäts-, Impuls- und Energiegleichungen der Einzelphasen bestehen, bereitgestellt werden. Zusätzlich wird eine Transportgleichung für die volumetrische Blasenanzahl verwendet. Als grundlegende Betrachtungsweise wird dabei eine Eulersche Beschreibung der Zweiphasenströmung verwendet, wobei sowohl die Dampfphase als auch die Flüssigkeit als kontinuierlich strömende Medien aufgefaßt werden. Um die Schließung des sich ergebenden Gleichungssystems zu ermöglichen, werden ergänzende Beziehungen benötigt. Diese umfassen thermische und kalorische Zustandsgleichungen bzw. Gleichungen zur Berechnung von thermophysikalischen Fluideigenschaften, sowie Korrelationen zum Wärme-, Stoff-[1] und Impulstransport. Ferner werden Korrelationen eingebunden, welche die Keimbildungsphänomene in anfänglich einphasigen Strömungen mit Phasenwechsel beschreiben.

Im strengen Sinne sind bereits stationäre Einphasenströmungen durch Kanäle mit Querschnittsänderungen dreidimensional. Dies gilt in verstärktem Maße für Mehrphasenströmungen mit ungleichförmiger Verteilung der Phasen über dem Strömungsquerschnitt. Daher ist die hier angewendete quasi-eindimensionale Betrachtungsweise als eine Näherung anzusehen, wobei alle Strömungsgrößen als gleichmäßig über den Querschnitt

[1] Da in dieser Arbeit Zweiphasenströmungen reiner Stoffe behandelt werden, bezieht sich der Begriff "Stofftransport" hier stets auf die mit der Umwandlung Flüssigkeit ↔ Dampf durch Verdampfung und Kondensation verbundenen Vorgänge.

verteilt angenommen werden. Somit sind diese Größen bei stationärer Strömung lediglich von der axialen Koordinate in Hauptströmungsrichtung abhängig. Innerhalb des quasi-eindimensionalen Zweifluidmodells werden mehrdimensionale Effekte, wie die Keimbildung an der Wand und im Strömungskern, oder die Wärmeübertragung zwischen den Phasen an unterschiedlich geformten Dampfvolumina mit komplexen Phaseninteraktionen (Blasen-/Schwallströmung), mit Hilfe geeigneter, volumenbezogener Quellterme einbezogen.

Obwohl experimentelle Beobachtungen in blockierter Strömung mehrdimensionale Effekte wie Schichtkavitation als wichtig erscheinen lassen (vgl. Zimmer et al. [145] und Fincke [47]), entziehen sich diese Phänomene bisher einer einheitlichen theoretischen Beschreibung und gehen über die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit hinaus.

Ein wesentliches Motiv für die Entwicklung des vorgestellten Zweifluidmodells gründet sich auf die Defizite und Unsicherheiten in der Beschreibung der hydrodynamischen Nichtgleichgewichtseffekte des Driftflußmodells von Wein und Huhn [139, 140], das dieser Arbeit vorausging. Im Driftflußmodell werden die unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten durch halbempirische oder algebraische Schlupfkorrelationen eingebunden. Da neben der Impulsübertragung zwischen den Phasen auch die konvektive Wärmeübertragung und der mit ihr verbundene Stofftransport von Abweichungen des hydrodynamischen Gleichgewichts (in Form der Relativgeschwindigkeit zwischen den Phasen) beeinflußt wird, kann die Informationsdichte im Hinblick auf die Entwicklung des thermischen Nichtgleichgewichtes durch die getrennte Betrachtung der Phasen deutlich gesteigert werden.

## 2.1. Feldgleichungen des Zweifluidmodells

Die eindimensionale Formulierung des in dieser Arbeit verwendeten Zweifluid-Zweiphasenströmungsmodells erhält man durch zeitliche bzw. statistische Mittelung der örtlichen, phasenseparierten und für einen bestimmten Augenblick formulierten Erhaltungsgleichungen (*Instantaneous formulation*). Diese Vorgehensweise zur Ableitung der zeitlich gemittelten Gleichungen wird ausführlich von Ishii [65] erläutert. Abweichend von den Ausführungen in Abschnitt 1.1, bei denen die Zweiphasenströmung als Ganzes betrachtet wurde, führt dies für ein Einkomponenten-Dampf/Flüssigkeitssystem zu jeweils zwei Kontinuitäts-, Impuls- und Energiegleichungen (vgl. Trapp und Riemke [129]).

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß auf beide Phasen - außer bei der Betrachtung der Keimbildungsvorgänge - jeweils der gleiche Druck wirkt. Ferner soll sich die Dampfphase stets im Sättigungszustand gemäß den lokal herrschenden Druckverhältnissen befinden. Im Gegensatz dazu wird für die flüssige Phase angenommen, daß sie unterkühlte, gesättigte und überhitzte Zustände annehmen kann. Da das Augenmerk hier vor allem auf Zweiphasenströmungen mit geringen Strömungsdampfgehalten liegt, erscheint die Annahme, der Dampf sei stets gesättigt, erlaubt. Folgerichtig wird für die Dampfphase keine Abweichung vom thermischen Gleichgewicht erwartet. Bei höheren Dampfvolumenanteilen hingegen, wie z.B. beim Vorliegen von Ringströmung, kann die Kerntemperatur des Dampfes von der Sättigungstemperatur merklich abweichen, da die Wärmeleitfähigkeit des Dampfes wesentlich kleiner ist als die Wärmeleitfähigkeit der

flüssigen Phase.

Damit kann bei bekanntem thermischen Zustand des Dampfes, der lediglich vom statischen Druck abhängt, die Energiegleichung für die Dampfphase aus der weiteren Betrachtung entfallen. Für die flüssige Phase werden Änderungen der potentiellen Energie sowie viskose und turbulente Dissipationsterme vernachlässigt. Ersetzt man weiterhin den kinetischen Anteil an der Änderung der Gesamtenergie der Flüssigkeit durch Einbindung der Impulsgleichung, so erhält man die hier verwendete thermische Formulierung der Energiegleichung. Diese ermöglicht es, die Änderung der Gesamtenergie der flüssigen Phase durch Erfassung der zeitlichen und konvektiven Änderungen der inneren Energie zu beschreiben. Um Änderungen der volumetrischen Blasenanzahl berücksichtigen zu können, wird zusätzlich eine Blasentransportgleichung - wie von Kocamustafaogullari und Ishii [74] vorgeschlagen - verwendet (vgl. Gl. (1.17)).

Das Basis-Gleichungssystem zur Beschreibung wandadiabater, quasi-eindimensionaler Zweiphasenströmungen besteht somit aus den folgenden sechs partiellen Differentialgleichungen:

▷ Masse des Dampfes

$$\frac{\partial(\epsilon_v\,\rho_v)}{\partial\,t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\,z}\,(\epsilon_v\,\rho_v\,w_v\,A) = \Gamma_v \tag{2.1}$$

▷ Masse der Flüssigkeit

$$\frac{\partial(\epsilon_l\,\rho_l)}{\partial\,t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\,z}\,(\epsilon_l\,\rho_l\,w_l A) = -\Gamma_v \tag{2.2}$$

▷ Impuls des Dampfes

$$\epsilon_v\,\rho_v\,\frac{\partial\,w_v}{\partial\,t} + \epsilon_v\,\rho_v\,w_v\,\frac{\partial\,w_v}{\partial\,z} = -\epsilon_v\,\frac{\partial\,p}{\partial\,z} - \epsilon_v\,\rho_v\,g\,\sin\,\theta - f_{wv} + \Gamma_v\,(w^* - w_v) - f^* \tag{2.3}$$

▷ Impuls der Flüssigkeit

$$\epsilon_l\,\rho_l\,\frac{\partial\,w_l}{\partial\,t} + \epsilon_l\,\rho_l\,w_l\frac{\partial\,w_l}{\partial\,z} = -\epsilon_l\,\frac{\partial\,p}{\partial\,z} - \epsilon_l\,\rho_l\,g\,\sin\,\theta - f_{wl} - \Gamma_v\,(w^* - w_l) + f^* \tag{2.4}$$

▷ Thermische Energie der Flüssigkeit

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\,(\epsilon_l\,\rho_l\,u_l) + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\,z}\,(\epsilon_l\,\rho_l\,u_l\,w_l\,A) = -\frac{p}{A}\,\frac{\partial}{\partial\,z}\,(\epsilon_l\,w_l\,A) - p\,\frac{\partial\,\epsilon_l}{\partial\,t} - \Gamma_v\,h_l^x - A^*\,\dot{q}^* \tag{2.5}$$

▷ Volumetrische Anzahl der Dampfblasen

$$\frac{\partial\,N_b}{\partial\,t} + \frac{1}{A}\,\frac{\partial}{\partial\,z}\,(N_b\,w_v\,A) = \phi_{wn} + \phi_{bn} \tag{2.6}$$

Die sechs abhängigen Primärvariablen in diesem System aus den Feldgleichungen (2.1)-(2.6) sind der statische Druck $p$, der Dampfvolumenanteil $\epsilon_v$, die Strömungsgeschwindigkeiten von Dampf und Flüssigkeit, $w_v$ und $w_l$, die spezifische innere Energie der Flüssigkeit $u_l$ und die volumetrische Blasenanzahl $N_b$. Die unabhängigen Variablen sind die Zeit $t$ sowie die axiale Koordinate $z$. Ferner sind die abhängigen Sekundärvariablen die Phasendichten $\rho_v$ und $\rho_l$, die Temperatur der flüssigen Phase $T_l$ und die Sättigungstemperatur $T^s$, die mit den Übertragungsgrößen bei der Phasenumwandlung und den Dampfeigenschaften verknüpft ist. Eine Auflistung der im Gleichungssystem (2.1)-(2.6) vorkommenden Variablen sowie eine Darstellung der für die Reduzierung der Anzahl von Variablen bzw. für die Erreichung der Bestimmtheit des Gleichungssystems benötigten konstitutiven Beziehungen befindet sich im Anhang A, S.107.

Der Term $\Gamma_v$ auf der rechten Seite der Dampf-Kontinuitätsgleichung, Gl. (2.1), beschreibt die volumetrische Stoffübertragungsrate durch den Phasenwechsel, und entspricht einem Quellterm im Falle von Verdampfung bzw. einer Senke im Falle der Kondensation. Die Gesamtkontinuität erfordert das Erscheinen von $\Gamma_v$ mit negativem Vorzeichen auf der rechten Seite von Gl. (2.2).

Die Kraftterme auf der rechten Seite der Impulsgleichungen, Gl. (2.3) und (2.4), repräsentieren - von links nach rechts - die wirkenden Druckkräfte (axiale Druckgradienten), die Schwerkraft mit dem Neigungswinkel $\theta$ des Strömungskanals gegenüber der Horizontalen, die Wandreibung, die Impulsübertragung durch den Stofftransport und die volumetrische Kraftwirkung $f^*$ aufgrund der Reibung zwischen den Phasen und der zusätzlichen Masse.

In der Energiegleichung für die flüssige Phase, Gl. (2.5), berücksichtigt der Term $-p\,\partial\epsilon_l/\partial t$ die der Flüssigkeit reversibel durch Expansion bzw. Kompression entnommene bzw. zugeführte Leistung. Die durch Reibung an der Kanalwand hervorgerufene Dissipationsenergie und die axiale Wärmeleitung werden vernachlässigt.

Die Terme $-\Gamma_v h_l^x$ und $-A^*\,\dot{q}^*$ stellen den an die Stoffübertragung an der Phasengrenzfläche gekoppelten Wärmestrom (Verdampfung/Kondensation) sowie die thermische Energieübertragung aufgrund des treibenden Temperaturgefälles zwischen den Phasen dar. Die mit dem Stofftransport verbundene spezifische Enthalpie $h_l^x$ ist definiert als:

$$h_l^x = \begin{cases} h_l(p, T_l) & \text{bei Verdampfung, } T_l > T_v \\ h_l^s(p) & \text{bei Kondensation, } T_l < T_v. \end{cases} \tag{2.7}$$

Die Quellterme $\phi_{wn}$ und $\phi_{bn}$ in der Blasentransportgleichung, Gl. (2.6), spiegeln die Wirkung der an der Wand bzw. im Strömungskern stattfindenden Keimbildung wider.

Im Hinblick auf die gewählte Form der Bilanzgleichungen ist anzumerken, daß die Kontinuitätsgleichungen, Gl. (2.1) und Gl. (2.2), die Energiegleichung für die Flüssigkeit, Gl. (2.5), sowie die Blasentransportgleichung, Gl. (2.6) in konservativer Schreibweise oder Divergenzform aufgeführt sind. Die Impulsgleichungen, Gl. (2.3) und Gl. (2.4), sind hingegen in nicht-konservativer Form geschrieben. Die Verwendung der nicht-konservativen Impulsgleichungen mit den primitiven Variablen $w_v$ und $w_l$ ist hierbei vor allem bei der Umsetzung in das in Kapitel 3 beschriebene numerische Lösungsverfahren von Vorteil.

Ein gravierender Nachteil der nicht-konservativen Formulierung besteht darin, daß sie zur Auflösung starker Diskontinuitäten (z.B. Verdichtungsstöße in Strömungen durch konvergent-divergente Düsen mit Übergang vom Unterschall zum Überschall und anschließender, stoßbedingter Verzögerung der Strömung zurück zu Unterschall) nicht geeignet ist. In solchen Fällen treten räumliche bzw. axiale Oszillationen von Druck, Dichte und Geschwindigkeit um die Unstetigkeit auf, die eine Konvergenz der Lösung behindern. Ferner kann die Rechnung derart instabil werden, daß sie zum Abbruch führen kann. Andererseits ist häufig auch bei Verfahren, die von der konservativen Form der Bilanzgleichungen ausgehen, das explizite Hinzufügen von sogenannter expliziter künstlicher Viskosität zu den Berechnungsgleichungen zur Stabilisierung der Lösung und zur Dämpfung von Oszillationen notwendig (vgl. Anderson [5]).

Ergänzend wird darauf hingewiesen, daß die hier vorgenommene Einschränkung auf wandadiabate Strömungen durch Berücksichtigung eines zusätzlichen Quellterms (bei Aufheizung der Flüssigkeit über die Kanalwand) bzw. einer Senke (bei Kühlung) auf der rechten Seite der Energiegleichung (2.5) aufgehoben werden kann.

## 2.2. Thermische und kalorische Zustandsgleichungen, Thermophysikalische Eigenschaften

Das dargestellte Zweifluidmodell beinhaltet drei unabhängige thermodynamische Zustandsgrößen, nämlich den statischen Druck $p$, den Dampfvolumenanteil $\epsilon_v$ und die Flüssigkeitstemperatur $T_l = f(p, u_l)$. Alle anderen thermischen, kalorischen und thermophysikalischen Variablen sowie deren Ableitungen werden aus den unabhängigen Zustandsgrößen ermittelt. Um kurze Programmausführungszeiten zu erhalten, sind möglichst schnelle Berechnungsformulierungen für die thermodynamischen Eigenschaften und ergänzende Gleichungen notwendig. Für die Eigenschaften von Wasser und Dampf wurden Approximationen gemäß dem neuen industriellen Standard IAPWS-IF97, Wagner et al. [134] und Wagner und Kruse [135], in das Berechnungsprogramm eingebunden. Zustands- und thermophysikalische Größen des Kältemittels R22 ($CHF_2Cl$) wurden mit Hilfe der Gleichungen von Baehr und Tillner-Roth [11] berechnet bzw. unter Verwendung tabellierter Werte (aus VDI-WA97 [132, Abschn. Dc]) interpoliert.

## 2.3. Konstitutive Modelle

Zur Schließung des Ausgangsgleichungssystems, Gl. (2.1)–(2.6), sind zusätzliche Beziehungen, die den Impuls, Wärme- und Stofftransport beschreiben, notwendig. Darüberhinaus müssen Ansätze zur Formulierung der verzögerten Blasenbildung und der spontanen Verdampfung anfänglich unterkühlter Strömungen spezifiziert werden. Innerhalb dieses Abschnitts werden die konstitutiven Modelle für die Wandreibung und die Reibung zwischen den Phasen einschließlich der virtuellen Massekräfte vorgestellt. Außerdem soll die korrelative Ermittlung von Blasenbildung, Entwicklung der Phasengrenzfläche sowie die Beschreibung der Wärme- und Stoffübertragung dargelegt werden.

Ein wichtiger Aspekt bei der Verwendung von Korrelationen, die ursprünglich für stationäre und vollentwickelte Strömungsbedingungen entwickelt wurden, besteht in der Annahme, daß diese Beziehungen auf transiente Strömungsvorgänge in quasi-stationärer Weise angewendet werden können. Da in der vorliegenden Arbeit primär die Größen des stationären Strömungfeldes von Interesse sind, dient die hier angewendete Zeitschritttechnik in erster Linie dazu, diesen Zustand numerisch zu erreichen. Unter dieser Einschränkung erscheint die Anwendung von Korrelationen, die für den stationären Strömungsfall bewährt sind, gerechtfertigt.

Da alle oben genannten konstitutiven Modelle eng mit der internen Struktur der Zweiphasenströmung, der geometrischen Gestalt der Phasen sowie deren Verteilung innerhalb des Strömungskanals zusammenhängen, muß eine Strömungsformkarte festgelegt werden. Diese soll eine eindeutige Zuordnung der anzuwendenden Korrelationen zu der jeweils vorliegenden Strömungsform ermöglichen.

### 2.3.1. Strömungsformen

Eine einfache, von Blinkov et al. [17] für Zweiphasenströmungen mit hoher Massenstromdichte vorgeschlage Strömungsformkarte wurde in das Rechenprogramm 'TPTFM' eingebunden. Die in **Abb. 2.2** gezeigte Karte verwendet den Dampfvolumenanteil $\epsilon_v$ als Hauptkriterium für die Festlegung der Übergänge zwischen den berücksichtigten Strömungsregimen.

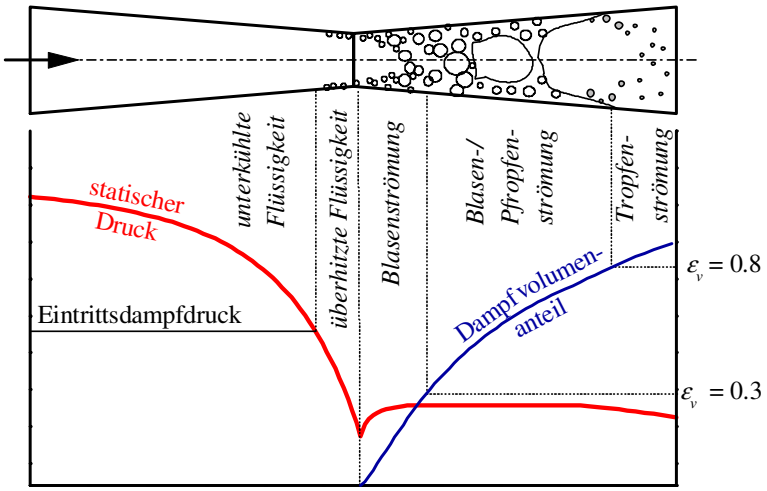



Abb. 2.2: Idealisierte Darstellung der angenommenen Strömungsformentwicklung für die Zweiphasenströmung eines anfänglich unterkühlten Fluids (*Flashing flow*)

Für Dampfvolumenanteile $\epsilon \leq 0.3$ wird von der Strömung sphärisch geformter Blasen ausgegangen (vgl. VDI-WA97 [132, Abschn. Lgb]). Liegt der Dampfvolumenanteil im Bereich $0.3 < \epsilon < 0.8$, so beginnen die Blasen sich zunächst anzusammeln und teilweise zu koaleszieren, um größere Dampfmengen, die näherungsweise als zylindrischer Pfropfen (sogenannte Taylorblasen) betrachtet werden, auszubilden. In diesem Bereich

koexistieren folglich blasen- und pfropfenförmige Dampfvolumina. Dabei nimmt der Volumenanteil der kleineren Blasen mit zunehmendem Dampfvolumenanteil ab, während der Volumenanteil der Taylorblasen steigt.

Im Bereich $\epsilon \geq 0.8$ entwickelt sich die Tropfenströmung. Dabei wird von der Vorstellung ausgegangen, daß sich die im Dampf dispergierten Flüssigkeitstropfen zum einen aufgrund von Wellenbildung und Entrainment (Tropfenmitriß) an der Mantelfläche der Taylorblasen und zum anderen als Folge von Zerteilungsvorgängen der im Schwall verbliebenen kleineren Dampfblasen ausbilden. Ähnliche Einteilungen der Strömungsformen finden sich in Dobran [32], Richter [110] und Schwellnus und Shoukri [121].

Da sich die vorliegende Arbeit auf Zweiphasenströmungen mit hoher Massenstromdichte konzentriert, kann auf die Berücksichtigung der aus der Wirkung der Schwerkraft resultierenden Tendenz zur Schichtung der Phasen hier verzichtet werden.

Testrechnungen mit geringen Variationen der Bereichsgrenzen des Dampfvolumenanteils von $\pm 0.05$ ergaben, daß die Änderungen keinen signifikanten Einfluß auf die Ergebnisse haben. Es wurde jedoch keine systematische Empfindlichkeitsanalyse im Hinblick auf die angenommenen Strömungsformübergänge durchgeführt.

### 2.3.2. Wandreibung

Der Einfluß der Wandreibung in **einphasiger Strömung** wird mit Hilfe bekannter Korrelationen für den Wandreibungsbeiwert (*Fanning-Faktor*)

$$c_{f,1\phi} = \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2}\, w_{1\phi}^2} \tag{2.8}$$

berücksichtigt. Für die häufig verwendete Widerstandsziffer $\lambda$ gilt:

$$\lambda = 4\, c_{f,1\phi}. \tag{2.9}$$

Sie wird in dieser Arbeit nach Beziehungen von Hagen-Poiseuille (z.B. in Gersten [52]) für die laminare Strömung ($\mathrm{Re} < 2.2 \cdot 10^3$) und Blasius [16] (hydraulisch glatte Rohre) bzw. Colebrook [29] (rauhe Rohre) für die turbulente Strömung in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl Re

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_l\, w_l\, D_h}{\eta_l} \tag{2.10}$$

und der relativen Rauhigkeit $K/D_h$ berechnet. Die Rauhigkeit $K$ entspricht dabei der über eine repräsentative Kanallänge gemittelten Höhe von Erhebungen, die in den Strömungsbereich hineinragen (fertigungstechnisch bedingte Oberflächentoleranzen, Verkrustungen, Ablagerungen etc.). Für Kanäle mit nicht-kreisförmigem Querschnitt wird allgemein statt des Rohrdurchmessers der hydraulische oder auch äquivalente Durchmesser $D_h$, der das Verhältnis von fluidgefüllter Querschnittsfläche $A$ und benetztem Umfang $\xi$ angibt, eingesetzt:

$$D_h = \frac{4\, A}{\xi}. \tag{2.11}$$

$$\text{Hagen-Poiseuille:} \quad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} \quad \text{(laminar)}, \tag{2.12}$$

$$\text{Blasius:} \quad \lambda = 0.3164\,\mathrm{Re}^{-1/4} \quad \text{(turbulent, hydraulisch glatt)}, \tag{2.13}$$

$$\text{Colebrook:} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\,\log\left(\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{K/D_h}{3.71}\right) \quad \text{(turbulent, mit Rauhigkeit)}. \tag{2.14}$$

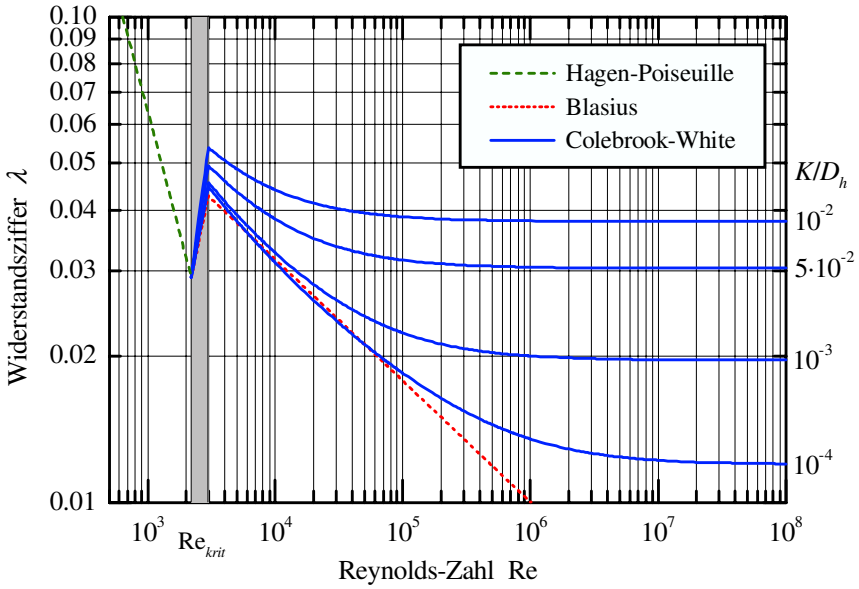



Abb. 2.3: Im Übergangsbereich $2200 < \mathrm{Re} < 3000$ angepaßtes Nikuradse-Diagramm, Widerstandsziffer $\lambda$ von Rohren in Abhängigkeit von der relativen Rauhigkeit $K/D_h$ und der Reynolds-Zahl Re

**Abb. 2.3** zeigt das auf die Gleichungen Gln. (2.12) - (2.14) aufbauende Rohrwiderstandsdiagramm nach Nikuradse [93] in doppeltlogarithmischer Auftragung. Im Übergangsbereich von laminarer zu turbulenter Strömung, hier $2.2{\cdot}10^3 < \mathrm{Re}_{krit} < 3{\cdot}10^3$, wird die Widerstandsziffer $\lambda$ linear interpoliert.

Für die auf das durchströmte Volumen bezogene Wandreibungskraft bei reiner Flüssigkeitsströmung erhält man:

$$f_{wl} = 2\,c_{fl}\,\frac{\rho_l\,w_l^2}{D_h}. \tag{2.15}$$

Bei **zweiphasiger Strömung** wird ein Ansatz nach Friedel [48] für den Zweiphasenmultiplikator angewendet, um eine Formulierung für die volumetrische Reibungskraft, die von der Wand auf die flüssige Phase ausgeübt wird, zu erhalten:

$$f_{wl} = f_{wl,2\phi} = 2\,c_{fl}\,\mathrm{R}\,\frac{G^2}{\rho_l D_h}, \tag{2.16}$$

Hierin ist der Zweiphasenmultiplikator R als das Verhältnis der durch Reibung an der Kanalwand verursachten Druckverluste in der Zweiphasenströmung und in der einphasigen Strömung definiert:

$$\mathrm{R} = \left.\frac{(\Delta p/\Delta z)_{2\phi}}{(\Delta p/\Delta z)_{1\phi}}\right|_{G}. \tag{2.17}$$

Streng genommen beinhaltet ein solcher Reibungsansatz auch den Impulstransport bzw. die Wirkung der Reibung zwischen den Phasen (vgl. Huhn [62]). Eine Aufspaltung des Druckverlustes in die Anteile Wandreibung und Reibung zwischen den Phasen wie von Chisholm [28] vorgeschlagen, würde zusätzlich eine strömungsformabhängige und mit weiteren Unsicherheiten behaftete Spezifizierung der von den Einzelphasen benetzten Wandbereiche voraussetzen. Stattdessen wird der Einfluß der Reibung zwischen den Phasen separat erfaßt (siehe Abschnitt 2.3.3.1).

Im Hinblick auf die dampfseitige Reibung wird hier vereinfachend angenommen, daß die Dampfphase mit der Kanalwand bis zum Erreichen der Tropfenströmung ($\epsilon_v \leq 0.8$) nicht in Berührung tritt, und daß die Reibung zwischen Dampf und Wand für Dampfvolumenanteile $\epsilon_v > 0.8$ vernachlässigt werden kann:

$$f_{wv} \approx 0. \tag{2.18}$$

Bei der Anwendung von Gl. (2.17) ist zu beachten, daß für die Berechnung der Einphasendruckverluste $(\Delta p/\Delta z)_{1\phi}$ jeweils eine Strömung mit der Gesamtmassenstromdichte $G$ des Zweiphasengemisches bei vollständiger Füllung des Kanalquerschnittes zu unterstellen ist. Folglich wird der Reibungskoeffizient für die einphasige Strömung, $c_{f,l}$ in Gl. (2.16), mit der auf die Flüssigkeitseigenschaften bezogenen Reynoldszahl

$$\mathrm{Re}_l = \frac{G\, D_h}{\eta_l}, \tag{2.19}$$

berechnet, wobei für die Gesamtmassenstromdichte des Zweiphasengemisches gilt:

$$G = \epsilon_v \rho_v w_v + \epsilon_l \rho_l w_l. \tag{2.20}$$

Friedel [48] gibt folgende Korrelationen für den Zweiphasenmultiplikator an:

- für horizontale und vertikal aufwärts gerichtete Strömung ($\theta = 0°$ und $\theta = 90°$):

$$R = A + 3.43\, \dot{x}^{0.685}\, (1-\dot{x})^{0.24} \left(\frac{\rho_l}{\rho_v}\right)^{0.8} \left(\frac{\eta_v}{\eta_l}\right)^{0.22} \left(1 - \frac{\eta_v}{\eta_l}\right)^{0.89} \mathrm{Fr}_l^{-0.047}\, \mathrm{We}_l^{-0.0334}, \tag{2.21}$$

- für vertikal abwärts gerichtete Strömung ($\theta = -90°$):

$$R = A + 38.5\, \dot{x}^{0.76}\, (1-\dot{x})^{0.314} \left(\frac{\rho_l}{\rho_v}\right)^{0.86} \left(\frac{\eta_v}{\eta_l}\right)^{0.73} \left(1 - \frac{\eta_v}{\eta_l}\right)^{6.84} \mathrm{Fr}_l^{-0.0001}\, \mathrm{We}_l^{-0.037}. \tag{2.22}$$

Für den Parameter $A$ gilt:

$$A = (1-\dot{x})^2 + \dot{x}^2\, \frac{\rho_l\, \lambda_v}{\rho_v\, \lambda_l}. \tag{2.23}$$

Die Kennzahlen Fr und We sind folgendermaßen definiert:

$$\mathrm{Fr} = \frac{G^2}{g\, D_h\, \rho_l^2}, \tag{2.24}$$

$$\mathrm{We} = \frac{G^2\, D_h}{\rho_l\, \sigma}, \tag{2.25}$$

mit $D_h$ nach Gl. (2.11) und $G$ gemäß Gl. (2.20). Im Berechnungsprogramm wird Gl. (2.21) für Neigungswinkel von $-45° \leq \theta \leq 90°$ gegenüber der Horizontalen verwendet, während für den Bereich $-90° \leq \theta < -45°$ Gl. (2.22) angewendet wird.

Die Widerstandsziffern $\lambda_i$ $(i = v, l)$ für die reine Gas- bzw. Dampfströmung und die reine Flüssigkeitsströmung mit der Gesamtmassenstromdichte $G$ werden nach Techo et al. [128] ohne Berücksichtigung der Wandrauhigkeit in Abhängigkeit von der phasenbezogenen Reynolds-Zahl berechnet

$$\lambda_i = \frac{64}{\mathrm{Re}_i} \quad \text{für } \mathrm{Re}_i \leq 1055, \tag{2.26}$$

$$\lambda_i = \left[0.86859\ \ln\left(\frac{\mathrm{Re}_i}{1.964 \ln \mathrm{Re}_i - 3.8215}\right)\right]^{-2} \quad \text{für } \mathrm{Re}_i > 1055, \tag{2.27}$$

$$\text{mit:} \quad \mathrm{Re}_i = \frac{G\, D_h}{\eta_i} \quad (i = v, l)\,. \tag{2.28}$$

| Parameter | Gültigkeitsbereich der Gln. (2.21) und (2.22) |
|---|---|
| Strömungsmassendampfgehalt | $\dot{x} < 1$ |
| Massenstromdichte | $15\mathrm{kg/(m^2s)} < G < 8210\mathrm{kg/(m^2s)}$ |
| Druck | $0.6\mathrm{bar} < p < 212\mathrm{bar}$ |
| Dichteverhältnis | $2 < \rho_l/\rho_v < 1615$ |
| Zähigkeitsverhältnis | $2 < \eta_l/\eta_v < 46$ |
| Durchmesser | $3.2\mathrm{mm} < D_h < 55.9\mathrm{mm}$ |
| Oberflächenspannung | $2 \cdot 10^{-3}\mathrm{N/m} < \sigma < 69 \cdot 10^{-3}\mathrm{N/m}$ |

Tabelle 2.1.: Gültigkeitsbereich der Reibungskorrelationen nach Friedel [48]

In **Abb. 2.4** ist der Zweiphasenmultiplikator $R$ für eine horizontale, gesättigte Wasser-Dampf-Strömung mit $G = 1 \cdot 10^3\mathrm{kg/m^2s}$ und $D_h = 40\mathrm{mm}$ in Abhängigkeit vom Dampfvolumenanteil $\epsilon_v$ mit dem Druck $p$ als Parameter aufgetragen. Die dargestellten Kurven zwischen $p = 1\mathrm{bar}$ und $p = 200\mathrm{bar}$ umfassen folgende Bereiche: Dichteverhältnis: $2.953 < \rho_l/\rho_v < 1624$, Zähigkeitsverhältnis: $2.09 < \eta_l/\eta_v < 23.12$, Oberflächenspannung: $0.98 \cdot 10^{-3}\mathrm{N/m} < \sigma < 59 \cdot 10^{-3}\mathrm{N/m}$. Sie liegen damit größtenteils innerhalb des Gültigkeitsbereiches nach **Tabelle 2.1**[2].

[2]Berücksichtigte Einkomponentengemische: $H_2O$, R 11, R 12, R 22, R 113 und $N_2$.

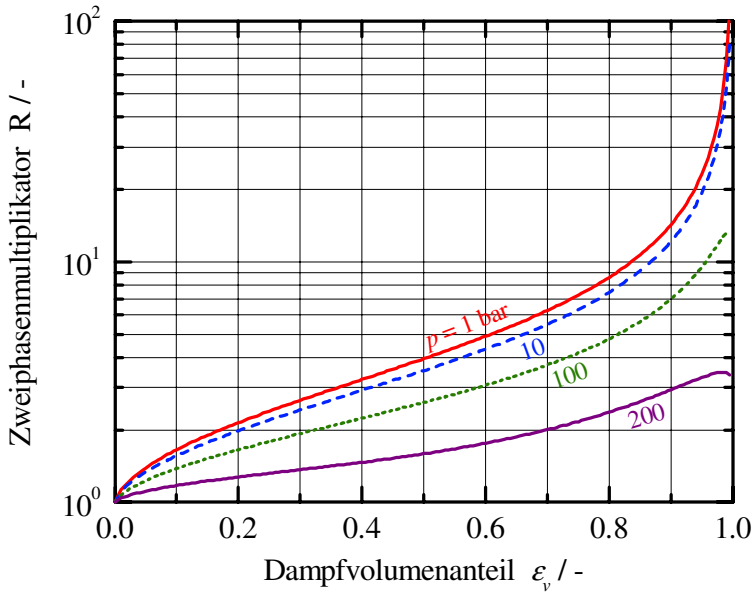



Abb. 2.4: Zweiphasenmultiplikator R für Wasser nach Friedel [48] für horizontale Zweiphasenströmungen, $G = 1000$ kg/m$^2$s, $D_h = 40$ mm

Für den später in Kapitel 4 durchgeführten Vergleich von Rohrströmungsberechnungen mit unterschiedlichen Reibungsmodellen werden an dieser Stelle die verwendeten Korrelationen für den Zweiphasenmultiplikator nach Beattie [14][3] der Vollständigkeit halber aufgeführt:

$\epsilon_v < 0.3$:

$$\Phi_l^2 = \left[1 + \dot{x}\left(\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1\right)\right]^{0.8} \left\{1 + \dot{x}\left[\frac{3.5\eta_v + 2\eta_l}{\eta_v + \eta_l}\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1\right]\right\}^{0.2}, \tag{2.29}$$

$0.3 \leq \epsilon_v < 0.8$:

$$\Phi_l^2 = \left[1 + \dot{x}\left(\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1\right)\right]^{0.8} \left[1 + \dot{x}\left(3.5\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1\right)\right]^{0.2}, \tag{2.30}$$

$0.8 \leq \epsilon_v < 0.95$:

$$\Phi_l^2 = \left[1 + \dot{x}\left(\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1\right)\right]^{0.8} \left[1 + \dot{x}\left(\frac{\eta_v}{\eta_l}\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1\right)\right]^{0.2}, \tag{2.31}$$

$\epsilon_v \geq 0.95$:

$$\Phi_l^2 = \left(\frac{\eta_v}{\eta_l}\right)^{0.2} \left(\frac{\rho_v}{\rho_l}\right)^{0.8} \left[1 + \dot{x}\left(\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1\right)\right]^{1.8}. \tag{2.32}$$

Im Gegensatz zu den von Friedel vorgeschlagenen Berechnungsgleichungen für den Zweiphasenmultiplikator $R$ bleibt der Einfluß der Massenstromdichte in diesen Korrelationen unberücksichtigt. Bei der Anwendung obiger Gleichungen ist zu beachten, daß die

[3] Die Gleichungen zur Berechnung des Zweiphasenmultiplikators nach Beattie wurden der Arbeit von Blinkov et al. [17] entnommen. Angaben über die Gültigkeitsbereiche sind darin nicht aufgeführt.

volumetrische Reibungskraft in diesem Fall nicht nach Gl. (2.16) berechnet wird. Stattdessen gilt bei der Verwendung der Zweiphasenmultiplikatoren von Beattie:

$$f_{wl} = f_{wl,2\phi} = 2\, c_{flo}\, \Phi_l^2\, \frac{G^2}{\rho_l D_h}\,, \tag{2.33}$$

wobei der Reibungskoeffizient $c_{flo}$ so berechnet wird, als ob allein der flüssige Anteil den Kanalquerschnitt durchströmen würde. Die **Abb. 2.5** zeigt den Verlauf des Zweiphasenmultiplikators nach Beattie bei verschiedenen Drücken.

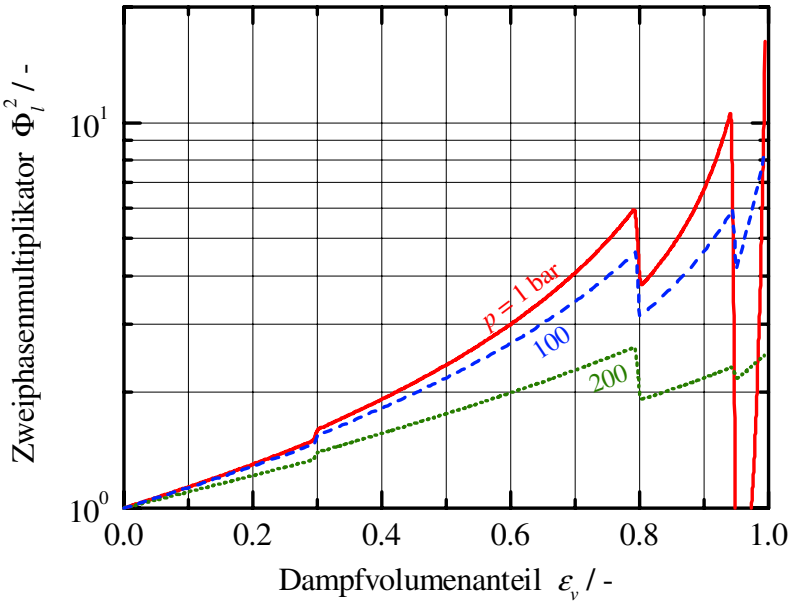



Abb. 2.5: Zweiphasenmultiplikator $\Phi_l^2$ nach Beattie [14]

Die oben dargestellte Vorgehensweise zur Ermittlung des Wandreibungseinflußes scheint eine sinnvolle Näherung für konvergente Kanäle zu sein, da hier erwartet werden kann, daß der Druckgradient die Grenzschicht relativ dünn hält. Wendet man das Verfahren dagegen auf divergente Kanalabschnitte an, wobei die Grenzschichtverschiebung in der Zweiphasenströmung stark von der in einphasiger Strömung abweichen kann, ergeben sich größere Unsicherheiten bei der Vorhersage der Reibungsdruckverluste. Ferner ist nach Angaben von Hoffmann und Wong [59], die modelltheoretische Untersuchungen zum Druckabfall bei unterkühltem Sieden durchführten, der Einfluß einer wandnahen Blasenschicht auf die effektive Rauhigkeit - und damit auf den Reibungsdruckabfall - derzeit auch aufgrund von nicht in ausreichendem Maß verfügbarer experimenteller Daten nicht quantifizierbar. Durch Blasenschichten hervorgerufene Effekte wie die Zunahme der Kernmassenstromdichte (*Wandblockierung*) und erhöhte Reibung werden in dieser Arbeit daher nicht berücksichtigt.

Für Zweiphasenströmungen mit hoher Massenstromdichte durch relativ kurze Rohre und Drosselorgane stellt der Druckverlust durch Wandreibung meist eine untergeordnete Einflußgröße dar. In diesen Fällen werden die Änderungen des Druckes in Hauptströmungsrichtung vom Druckabfall durch Beschleunigung bzw. vom Druckanstieg durch Verzögerung der Strömung dominiert. Andererseits wurde festgestellt, daß die Einbeziehung des Wandreibungseinflusses für eine möglichst genaue Vorhersage der Zweiphasenströmung durch verhältnismäßig lange Rohre ($L/D \gg 1$) wichtig ist.

### 2.3.3. Impulsübertragung zwischen den Phasen

Der in den Impulsgleichungen (2.3) und (2.4) aufgeführte Term $f^*$ bezeichnet die auf das Volumen bezogene, zwischen den Phasen wirkende Kraft und umfaßt den Reibungs- bzw. Formwiderstand und die zusätzliche, auch als virtuell bezeichnete Massekraft, die sich aufgrund der Relativbeschleunigung zwischen den Phasen einstellt:

$$f^* = f^*_W + f^*_{vm} + f^*_R. \tag{2.34}$$

Die oben genannten Kraftanteile werden in den beiden folgenden Abschnitten erläutert. Die mit dem Stofftransport an der Phasengrenze verbundene Impulsübertragung wird in Abschnitt 2.3.3.3 beschrieben. In **Abb. 2.6** sind die bei der Impulsübertragung zwischen den Phasen maßgeblichen Kräfte am Beispiel einer mit der Relativgeschwindigkeit $w_v - w_l$ angeströmten, anwachsenden Dampfblase dargestellt, wobei der hier eingezeichnete Widerstand den Einfluß der zusätzlichen Masse beinhaltet.

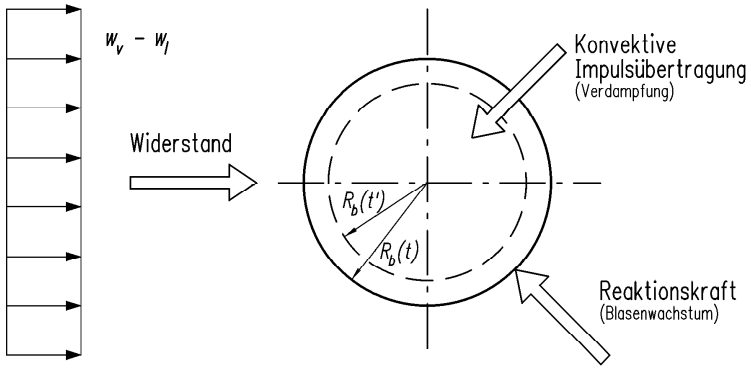



Abb. 2.6: Vereinfachte Darstellung der zwischen den Phasen wirkenden Kräfte am Beispiel einer Dampfblase

Die in Gl. (2.34) aufgeführte Reaktionskraft aufgrund des Blasenwachstums wird in dieser Arbeit vernachlässigt, d.h. $f^*_R = 0$. Eine Berücksichtigung dieses Terms würde die dynamische Modellierung des Druckungleichgewichtes zwischen den Phasen - insbesondere in der trägheitsgesteuerten Phase des Blasenwachstums - z.B. mit Hilfe der *Rayleigh*-Impulsgleichung erforderlich machen. Ferner wird die *Basset*-Kraft (Basset [13]), die den Effekt der Beschleunigung auf den reibungsbedingten Widerstand und die Entwicklung der Grenzschicht um die Blase darstellt, vernachlässigt.

#### 2.3.3.1. Reibung zwischen den Phasen

Die volumetrische Reibungskraft zwischen den Phasen für den Bereich der **Blasenströmung**, $\epsilon_v \leq 0.3$, wird mit Hilfe des Widerstandskoeffizienten und der volumetrischen Phasengrenzfläche berechnet, vgl. Richter [110]:

$$f^*_W = f^*_{W,b} = \frac{C'_{W,b}}{2} \frac{3}{4\,R_b} \epsilon_v \left(1 - \epsilon_v\right)^3 \rho_l \left(w_v - w_l\right) \left|w_v - w_l\right|. \tag{2.35}$$

Um die gegenseitige Beeinflussung einer Vielzahl von Blasen (Blasenschwarm) zu berücksichtigen, wird der von Rowe und Henwood [113] vorgeschlagene modifizierte Widerstandsbeiwert verwendet:

$$C'_{W,b} = C_{W,b}\,(1-\epsilon_v)^{-2n}\,. \tag{2.36}$$

Der Exponent $n$ in der obigen Gleichung hat nach Wallis [136] einen Wert von $n \approx 2.35$ für $\mathrm{Re}_b > 1000$. **Abb. 2.7** zeigt das Verhältnis des Widerstandsbeiwertes der Einzelblase zum Widerstandsbeiwert des Blasenschwarms gemäß Gl. (2.36). Ergänzend sind Datenpunkte eingetragen, die aus Experimenten mit Feststoffpartikeln stammen.

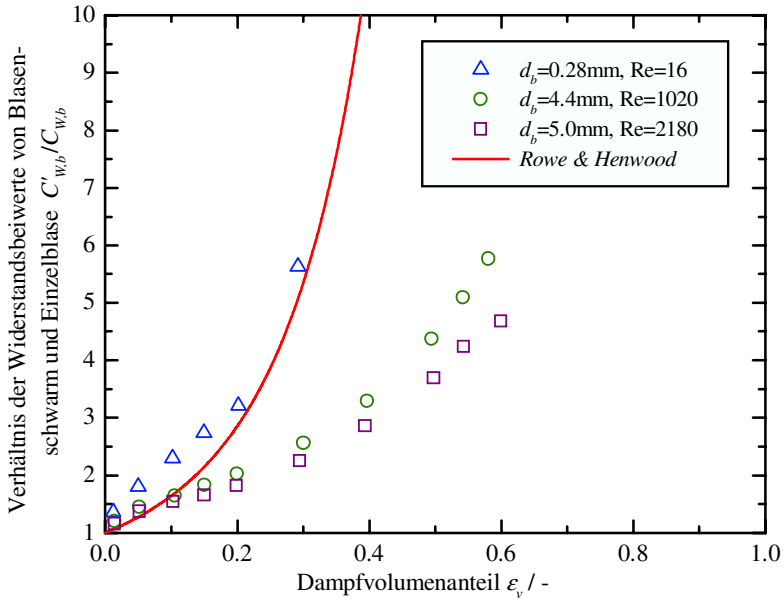



Abb. 2.7: Einfluß mehrerer benachbarter Blasen bzw. Partikeln auf den Widerstandsbeiwert (Quelle: Prins [103])

Der Widerstandsbeiwert einer sphärisch geformten Einzelblase $C_{W,b}$ hängt von der Blasen-Reynoldszahl

$$\mathrm{Re}_b = \frac{(1-\epsilon_v)\rho_l |w_v - w_l|\, 2\,R_b}{\eta_l} \tag{2.37}$$

ab und wird wie folgt berechnet (vgl. **Abb. 2.8**):

$$C_{W,b} = \begin{cases} 24\,\mathrm{Re}_b^{-1} & \mathrm{Re}_b \le 0.8 \text{ (Stokes)} \\ 24\,\mathrm{Re}_b^{-1}\left(1+0.15\,\mathrm{Re}_b^{0.687}\right) & 0.8 < \mathrm{Re}_b < 10^3 \text{ (Wallis)} \\ 0.44 & 10^3 \le \mathrm{Re}_b < 3.5\cdot 10^5 \text{ (unterkritisch).} \end{cases} \tag{2.38}$$

Die Annahme kugelförmiger Blasen stellt lediglich ein grobe Näherung der wirklichen Verhältnisse dar. In der Realität sind die Strömungsbedingungen aufgrund von Blasendeformation, der mit steigendem Dampfvolumenanteil zunehmenden Tendenz zur Blasenkoaleszenz sowie der inneren Zirkulation der Blasen wesentlich komplexer. Ferner sollte sich für kurz aufeinander folgende Blasen eine Reduzierung des Widerstandsbeiwertes für die Blasen, die sich im Nachlauf "vorausschwimmender" Blasen befinden, bemerkbar machen.

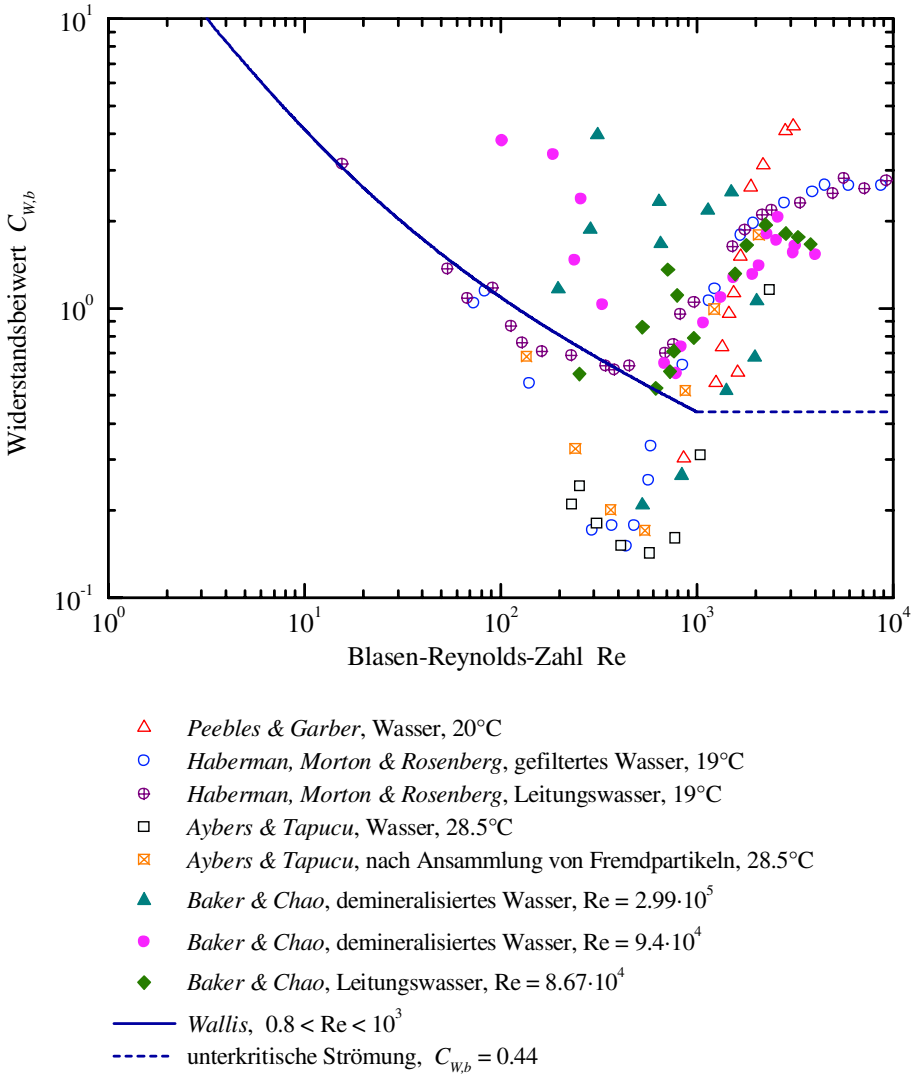



Abb. 2.8: Widerstandsbeiwert $C_{W,b}$ von Einzelblasen in Luft-/Wasserströmung (Quelle: Prins [103])

Die Widerstandsminderung durch innere Zirkulation bei schleichender Strömung wird hier näherungsweise mit Hilfe der Gleichung von Hadamard [54] erfaßt:

$$C_{W,b} = \frac{24}{\mathrm{Re}_b} \frac{2\,\eta_l + 3\,\eta_v}{3\,(\eta_l + \eta_v)}\,, \quad \mathrm{Re}_b \leq 1. \tag{2.39}$$

Für die **Blasen-/Pfropfenströmung**, $0.3 < \epsilon_v < 0.8$, wird vorgeschlagen, die Gesamtreibung an der Phasengrenzfläche als aus zwei Anteilen bestehend zu modellieren: dem Anteil aufgrund des Widerstands, der auf die kleineren Blasen im Schwarm ausgeübt wird, und dem Anteil, der aus der Reibung zwischen den Phasen an der Mantelfäche der zylindrisch geformten Taylorblasen (Pfropfen) stammt. Damit kann die Reibung zwischen den Phasen wie folgt korreliert werden:

$$f_W^* = \frac{\epsilon_{v,bs}}{\epsilon_v} f_{W,bs}^* + \frac{\epsilon_{v,p}}{\epsilon_v} f_{W,p}^*\,, \tag{2.40}$$

wobei $f^*_{W,bs}$ aus Gl. (2.35) bei $\epsilon_{v,bs}$ bestimmt wird. Um die Reibung zwischen den Phasen für die Pfropfen,

$$f^*_{W,p} = \frac{2\, c^*_{f,p}}{D_h}\, \epsilon^{1/2}_{v,p}\, \rho_v\, (w_v - w_l)\, |w_v - w_l|\,, \tag{2.41}$$

ermitteln zu können, wird der Reibungskoeffizient für ringförmige Strömungen nach Richter [110]

$$c^*_{f,p} = 0.005\ \left[1 + 75\,(1 - \epsilon_{v,p})\right] \tag{2.42}$$

verwendet.

Der Gesamtdampfvolumenanteil in der Blasen-/Pfropfenströmung entspricht der Summe der Dampfvolumenanteile der Pfropfen (Taylorblasen) und der noch nicht zusammengewachsenen und im Flüssigkeitsfilm bzw. Flüssigkeitsschwall verbliebenen Blasen.

$$\epsilon_v = \epsilon_{v,p} + \epsilon_{v,bs}. \tag{2.43}$$

Die Vorgehensweise zur Vorhersage der Dampfvolumenanteile $\epsilon_{v,p}$ und $\epsilon_{v,bs}$ wird im Abschnitt 2.3.5, S.49, vorgestellt.

Die mit Gl. (2.40) vorgeschlagene Beziehung beinhaltet ein gewisses Maß an Unsicherheit, da zu erwarten ist, daß die sich die einstellende Strömungsgeschwindigkeit der Blasen innerhalb der Flüssigkeitsschwälle von der Geschwindigkeit der Taylorblasen (Dampfpfropfen) aufgrund unterschiedlich stark ausgeprägter mechanischer Kopplung unterscheidet. Andererseits ermöglicht Gl. (2.40) den im Hinblick auf die Numerik gewünschten stetigen Übergang an den Bereichsgrenzen des Dampfvolumenanteils $\epsilon_{v,b} = 0.3$ (Blasen- zu Blasen-/Pfropfenströmung) und $\epsilon_{v,a} = 0.8$ (Blasen-/Pfropfenströmung zu Ringströmung). Die gewählte Formulierung ergab weit bessere Ergebnisse im Vergleich zu den einfachen Interpolationsprozeduren, die von Richter [110] und Schwellnus und Shoukri [121] für die Beschreibung der Reibung zwischen den Phasen in den oben genannten Bereichen des Dampfvolumenanteils angesetzt wurden.

Für das Strömungsregime der dispersen **Tropfenströmung**, $\epsilon_v > 0.8$, wird in der vorliegenden Programmversion eine zu Gl. (2.35) analoge Beziehung benutzt, wobei der Tropfendurchmesser als charakteristische Länge einzusetzen ist.

#### 2.3.3.2. Einfluß der virtuellen Masse

Die effektive Gesamtmasse eines beschleunigten Körpers, der sich durch ein ihn umgebendes Fluid bewegt, besteht aus der Masse des Körpers und einer zusätzlichen, "virtuellen" Masse. Die entsprechende zusätzliche Kraft ergibt sich aus den Trägheitseigenschaften des Fluids in der unmittelbaren Umgebung des Körpers. Mathematische Formulierungen der virtuellen Masse verwenden daher einen Koeffizienten $C_{vm}$, der das zur effektiven Gesamtmasse beitragende Volumen des verdrängten Fluids beschreibt. Grundlegende Arbeiten zur virtuellen Masse und deren Wirkung wurden von Prandtl et al. [102, Abschnitt 6.7], Zuber und Findlay [147], Zuber [146], Wijngaarden [143], Drew et al. [35], Drew [36], Cook und Harlow [30] veröffentlicht. Allerdings stimmen die in diesen Quellen vorgeschlagenen mathematischen Formulierungen für die zusätzliche Masse nicht immer überein.

Nach dem *Newton*schen Grundgesetz, das besagt, daß die an einem Körper angreifende Kraft und die durch sie hervorgerufene Beschleunigung gleichgerichtet und einander

proportional sind, läßt sich in Vektorschreibweise für die von der Flüssigkeit auf eine Gas- bzw. Dampfblasen wirkende virtuelle Massekraft pro Volumeneinheit schreiben:

$$\mathbf{f}^*_{vm} = C_{vm}\,\rho_l\,\mathbf{b}_{vm}, \tag{2.44}$$

wobei $\mathbf{b}_{vm}$ die Beschleunigung ist, und das Produkt $C_{vm}\,\rho_l$ die auf das Gesamtblasenvolumen bzw. Dampfvolumen bezogene, zusätzlich zu beschleunigende Masse darstellt. Mit Hilfe dieses Koeffizienten kann die volumetrische Massekraft bzw. der Quotient aus zusätzlich wirkender Trägheitskraft und Volumeneinheit als Produkt aus verdrängter Fluidmasse und der substantiellen Ableitung der Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Fluid beschrieben werden. Für den hier relevanten eindimensionalen Fall einer sich mit der mittleren Momentangeschwindigkeit $w_v$ bewegenden Gruppe geschlossener Dampfvolumina (z.B. dispers verteilte Dampfblasen in kontinuierlich strömender Flüssigkeit) in einer mit der mittleren Momentangeschwindigkeit $w_l$ strömenden Flüssigkeit läßt sich die zusätzliche volumetrische Massekraft darstellen als:

$$f^*_{vm} = C_{vm}\,\epsilon_l\,\epsilon_v\,\rho_m \left[\frac{\partial(w_v - w_l)}{\partial t} + w_l\frac{\partial w_v}{\partial z} - w_v\frac{\partial w_l}{\partial z}\right]. \tag{2.45}$$

Eine geeignete Einbindung der virtuellen Massekraft hat sich insbesondere für Systeme, die schnelle Änderungen des Strömungszustandes aufweisen, also vor allem auch für die hier betrachteten kritischen Zweiphasenströmungen, als wichtig erwiesen (Drew et al. [35]). Dies gilt nach Schwellnus und Shoukri [121] insbesondere für den Bereich der Blasenströmung. Bleibt der Einfluß der hierbei auf die Dampfblasen wirkende Zusatzkraft unberücksichtigt, so erfahren die Dampfblasen physikalisch nicht sinnvolle, zu hohe Beschleunigungswerte innerhalb des Flüssigkeitsfeldes. Ishii [67] bestätigt die auch in der vorliegenden Arbeit gemachte Erfahrung, daß die Stabilität des numerischen Lösungsverfahrens positiv von dieser Größe beeinflußt wird.

Nach Durchführung von Strömungsexperimenten mit dispers verteilten Partikeln unterschiedlicher Form zeigte Houghton [60], daß der virtuelle Massekoeffizient $C_{vm}$ von der geometrischen Form der Partikeln abhängt. Für kugelförmige Partikeln ermittelte er einen Wert von $C_{vm} = 0.5$. Damit bestätigt er die Ergebnisse von Zuber [146] und Wijngaarden [143].

Für die **Blasenströmung**, $0 < \epsilon_v \leq 0.3$, und die **Tropfenströmung**, $0.8 \leq \epsilon_v < 1$ wird dieser Wert des virtuellen Massekoeffizienten daher bei Annahme sphärischer, nicht-deformierbarer Blasen bzw. Tropfen übernommen:

$$C_{vm,b} = C_{vm,tr} = 0.5. \tag{2.46}$$

Für separierte Strömungen (Ring-/Schichtenströmung), bei denen beide Phasen kontinuierlich strömen, gilt nach Angabe von Zuber und Wijngaarden: $C_{vm} \to 0$. Aus diesem Grund wurde der Einfluß der beschriebenen Zusatzkraft für Dampfvolumenanteile $\epsilon_v > 0.3$ von Richter [110] und Schwellnus und Shoukri [121] vollständig vernachlässigt. Die von Prins [103] durchgeführten experimentellen Untersuchungen von Blasenströmungen durch konvergente Rohre bestätigen die Tendenz, daß der virtuelle Massekoeffizient mit steigendem Dampfvolumenanteil abnimmt, vgl. **Abb. 2.9**[4].

[4]Dreieck- und Kreissymbole in **Abb. 2.9** gehören zu Experimenten mit unterschiedlichen Teststrecken.

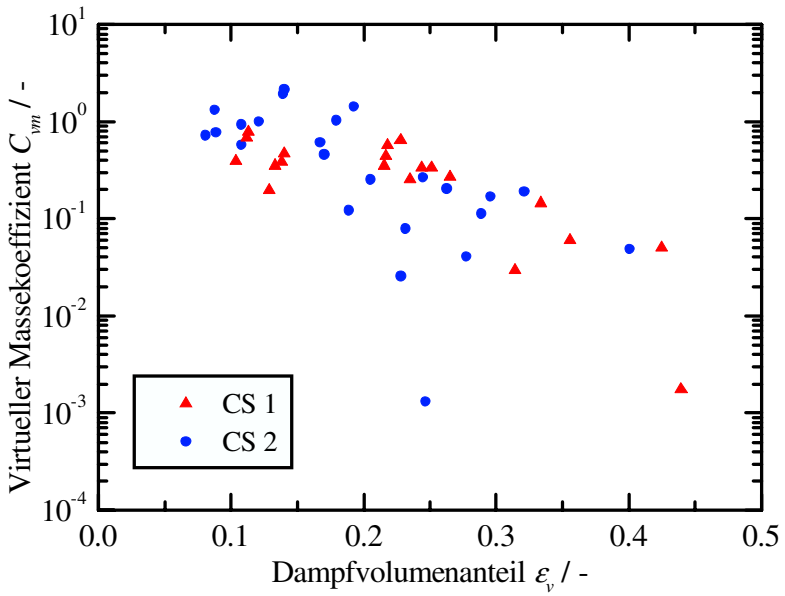



Abb. 2.9: Virtueller Massekoeffizient nach Prins [103]

Um eine Beschreibung des virtuelle Massekoeffizienten für die **Blasen-/Pfropfenströmung** zu ermöglichen, wird in der vorliegenden Arbeit ein in dieser Art neuer phänomenologischer Ansatz vorgestellt, der auf den im folgenden erläuterten Beobachtungen beruht. Der Übergang von der Blasenströmung zur Blasen-/Pfropfenströmung wird bei Überschreiten des Dampfvolumenanteils $\epsilon_{v,b} = 0.3$ angenommen. Dabei bewirken die Blasenagglomeration und die einsetzende Blasenkoaleszenz bei steigendem Dampfvolumenanteil eine Separierung der Phasen. Diese Erscheinung sollte qualitativ zu einer Verminderung des virtuellen Massekoeffizienten führen. Andererseits sollte der virtuelle Massekoeffizient bei höheren Dampfvolumenanteilen wieder ansteigen, da sich Flüssigkeitstropfen als Folge von Entrainmenteffekten an der Mantelfläche der Pfropfen (Taylorblasen) sowie durch Zerteilung der mit kleinen Dampfblasen durchsetzten Schwälle ausbilden. Gute Ergebnisse wurden mit der folgenden Formulierung für den Übergangsbereich zwischen Blasen- und disperser Tropfenströmung erzielt:

$$C_{vm,bs} = \frac{\epsilon_{v,bs}}{\epsilon_v} C_{vm,b} + \frac{\epsilon_{v,p}}{1-\epsilon_v} C_{vm,p} \,, \tag{2.47}$$

wobei der virtuelle Massekoeffizient für die verhältnismäßig großen Taylorblasen mit $C_{vm,p} = 0.125$ abgeschätzt wurde. Mit der neuartigen Beziehung nach Gl. (2.47) kann der Effekt der virtuellen Masse auch für Zweiphasenströmungen mit nicht gleichartiger Phasenverteilung (hier Blasen und Pfropfen) über eine einfache Wichtung der jeweiligen Dampfvolumenanteile erfaßt werden. Die Ermittlung des Dampfvolumenanteils aus den in den Schwällen verbliebenen Blasen $\epsilon_{v,bs}$ sowie des Pfropfen-Dampfvolumenanteils $\epsilon_{v,p}$ am Gesamtdampfvolumenanteil $\epsilon_v$ wird in Abschnitt 2.3.5, S.49, beschrieben.

In der theoretischen Arbeit von Wijngaarden [143] wird hingegen festgestellt, daß die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, die eine Vielzahl von Blasen (Blasenschwarm) in einer beschleunigten Flüssigkeit erreicht, kleiner ist als die Geschwindigkeit, die eine Einzelblase erreichen würde. Dieses Ergebnis setzt Wijngaarden in die folgende Formu-

lierung um:

$$C_{vm} = 0.5\,(1 + 2.78\,\epsilon_v\,)\,. \tag{2.48}$$

Danach steigt der virtuelle Massekoeffizient mit zunehmendem Dampfvolumenanteil an. Zu ähnliche Ergebnissen kommen Zuber [146]:

$$C_{vm} = \frac{1}{2}\,\frac{1+2\epsilon_v}{1-\epsilon_v} \tag{2.49}$$

und Ruggles [114], der nach Auswertung von Experimentaldaten aus Luft/Wasser-Blasenströmungen mit $\epsilon_v \leq 0.2$ folgende Ausgleichsfunktion angibt:

$$C_{vm} = 0.5\,\left(1 + 12\,\epsilon_v^2\right)\,. \tag{2.50}$$

Das gegenläufige Verhalten der Gln. (2.47) und (2.48)/(2.49)/(2.50) kann teilweise damit begründet werden, daß eine Abnahme der Blasenanzahl durch Blasenkoaleszenz in den Korrelationen von Wijngaarden, Zuber und Ruggles nicht berücksichtigt wird, während dieser Effekt in der vorliegenden Arbeit über die Beschreibung des Blasentransportes und der Phasengrenzflächenkonzentration (vgl. Abschnitt 2.3.5, S.49,) miteinbezogen wird.

Drew et al. [35] nehmen an, daß die von Zuber ermittelte Beziehung bis zu einem Dampfvolumenanteil von $\epsilon_v = 0.5$ angewendet werden kann, und daß für den verbleibenden Bereich die Spiegelung des funktionalen Zusammenhangs nach Gl. (2.49) an der senkrechten Achse durch diesen Punkt zulässig ist:

$$C_{vm} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1+2\epsilon_v}{1-\epsilon_v}, & \text{für } \; 0 < \epsilon_v \leq 0.5, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,\dfrac{3-2\epsilon_v}{\epsilon_v}, & \text{für } \; 0.5 < \epsilon_v < 1. \end{cases} \tag{2.51}$$

In Gl. (2.51) bleiben somit Änderungen der Strömungsform bei mittleren Dampfvolumenanteilen ebenfalls unberücksichtigt. Bemerkenswert ist, daß die von Dobran [32] für Blasenströmung verwendete Korrelation:

$$C_{vm} = 0.3\tanh(4\,\epsilon_v) \tag{2.52}$$

stark von den oben genannten Beschreibungen abweicht. Dies unterstreicht, daß die Quantifizierung der virtuellen Massekraft nach wie vor mit großen Unsicherheiten verbunden ist.

Ein Vergleich zwischen den virtuellen Massekoeffizienten als Funktion des Dampfvolumenanteils nach Gln. (2.46) - (2.52) ist in **Abb. 2.10** dargestellt. Man beachte, daß die vorgeschlagene Korrelation den Effekt der Phasenseparierung beim Erreichen der Blasen-/Pfropfenströmung durch Abnahme des virtuellen Massekoeffizienten berücksichtigt. Bei Annäherung an den Bereich der Tropfenströmung setzt - gemäß den getroffenen Annahmen zur Strömungsform - Phasendispergierung aufgrund von Blasenzerfall und Entrainmenteffekten ein. Dabei steigt der virtuelle Massekoeffizient wieder soweit an, bis er den Wert für dispergierte Strömung annimmt.

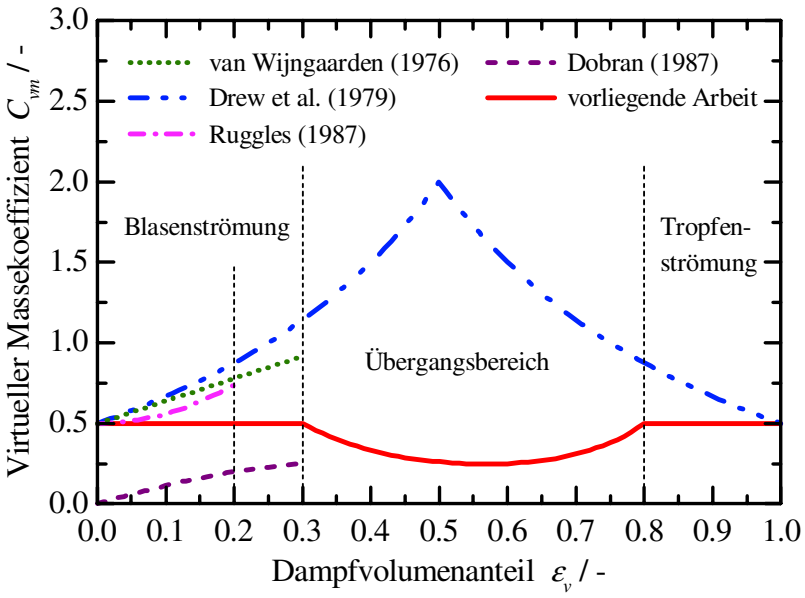



Abb. 2.10: Vergleich von Berechnungsgleichungen für den virtuellen Massekoeffizienten

#### 2.3.3.3. Impulsübertragung durch Stofftransport

Die Kraftwirkung, die mit der Änderung der Strömungsgeschwindigkeit bei der Übertragung von Masse an der Phasengrenzfläche Flüssigkeit/Dampf aufgrund von Verdampfung oder Kondensation verbunden ist, wird mit Hilfe der folgenden Definition der Geschwindigkeit an der Phasengrenzflächen $w^*$ in das Modell einbezogen:

$$w^* = (1-\eta)\, w_v + \eta\, w_l. \tag{2.53}$$

Hierin ist $\eta \in [0,1]$ ein Verteilungsparameter, der den Einfluß der Einzelphasen auf die Grenzflächengeschwindigkeit angibt. Damit lassen sich die mit dem Massetransport verknüpften Terme auf den rechten Seiten der Impulsgleichungen, Gl. (2.3) und (2.4), wie folgt ausdrücken:

$$\Gamma_v\,(w^* - w_v) = -\eta\,\Gamma_v\,(w_v - w_l)\,, \tag{2.54}$$

$$\Gamma_v\,(w^* - w_l) = -\,(1-\eta)\,\Gamma_v\,(w_v - w_l)\,. \tag{2.55}$$

Im Falle der Verdampfung ändert sich die Geschwindigkeit der über die Phasengrenzfläche von der Flüssigkeit abgegebene und der Dampfphase zugeführten Masse von $w_l$ auf $w_v$, wohingegen im Falle der Kondensation die kondensierende Masse letztlich die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit annimmt.

Der mit dem Stofftransport verbundene Impuls geht für $\eta = 1$ vollständig auf die Dampfphase über, während er für $\eta = 0$ ausschließlich auf die Flüssigkeit wirkt. Wallis [136] hat nachgewiesen, daß für reversible Strömungen

$$\eta = 0.5 \tag{2.56}$$

gilt. Dieser Wert wurde in der vorliegenden Arbeit verwendet.

### 2.3.4. Keimbildung

Unter Keimbildung oder Nukleation versteht man den mikroskopischen Effekt, der Phasenübergänge wie Verdampfung und Kondensation einleitet. Dabei unterscheidet man zwischen homogener und heterogener Keimbildung. Bei der *homogenen Keimbildung* entstehen Dampfblasen bzw. Flüssigkeitströpfchen in einem reinen Fluid bei statistischer Verteilung der Keimstellen. Entstehen die Dampfblasen hingegen an prädestinierten Stellen wie Oberflächendefekten (Rauhtiefen, Kratzer, Ablagerungen), Fremdpartikeln (Verunreinigungen) oder Gasresten (Lufteinschlüsse), die als Keimstellen wirken, so liegt *heterogene Keimbildung* vor. In technischen Anlagen spielt die homogene Keimbildung eine untergeordnete Rolle, da die dafür notwendige hohe Reinheit des Fluids meist nicht gegeben ist. Die folgenden Ausführungen beziehen sich daher auf die heterogene Nukleation.

In Strömungen mit Übergang vom anfänglich ein- zum zweiphasigen Zustand (Strömungen mit spontaner Verdampfung, *Flashing flows*) werden räumlich verteilte, heterogene Keimbildungsmechanismen an der Kanalwand und im Strömungskern in die Modellierung einbezogen, um Informationen über die Anzahl erzeugter Dampfblasen zu erhalten. Die Quellterme auf der rechten Seite der Blasentransportgleichung, Gl. (2.6), S. 27, repräsentieren diese beiden Mechanismen. Will man neben den Betrachtungen zur Blasenerzeugung auch Fragmentations- bzw. Zerteilungsvorgänge der jeweils diskontinuierlich vorliegenden Phase (Dampfblasen bzw. Flüssigkeitstropfen) untersuchen, so können diese Effekte durch Formulierung repräsentativer Quellterme in die Transportgleichung für die Anzahl von Blasen bzw. Tropfen oder entsprechender Formulierungen für die volumetrische Phasengrenzfläche eingebunden werden, vgl. Kocamustafaogullari und Ishii [74].

Die aus der Literatur bekannten Angaben über die im Falle der spontan einsetzenden Verdampfung angesetzte Anzahl von Dampfblasen pro Volumeneinheit schwanken sehr stark. Typische Werte liegen bei $N_b = 10^{11}\mathrm{m}^{-3}$ (Richter [110, 111]) und $5 \cdot 10^{8}\mathrm{m}^{-3} < N_b < 5 \cdot 10^{9}\mathrm{m}^{-3}$ (Wolfert et al. [144]). Von Domnick und Durst [33] mit dem Kältemittel R22 durchgeführte Messungen der Blasenanzahl entlang eines durchströmten Rechteckkanals mit sprunghafter Querschnittsverengung am Eintritt ergaben bei Eintrittstemperaturen zwischen 15 und 35°C (4.9bar $< p^s <$ 8.5bar) volumetrische Blasenanzahlen von $1 \cdot 10^{9}\mathrm{m}^{-3} < N_b < 7 \cdot 10^{9}\mathrm{m}^{-3}$.

#### 2.3.4.1. Wandkeimbildung

Die Wandkeimbildung wird - wie von Shin und Jones [122] vorgeschlagen - als zyklischer Prozeß von Blasenwachstum, die mit dem Ablösen der Blase endet, und einer anschließenden Verweilzeit, die bis zur Bildung der nächsten Blase verstreicht, betrachtet. Als aktive Keimstellen wirken dabei Gasreste, die nach der Benetzung der Kanalwand durch das Strömungsmedium in Oberflächendefekten wie Materialausbrüchen oder fertigungstechnisch bedingten Rauhtiefen verbleiben (heterogene Keimbildung). Die wichtigsten Größen und Gleichungen dieses Modells werden hier der Vollständigkeit wegen aufgeführt.

Gestützt auf zahlreiche experimentelle Daten erhielten Shin und Jones [122] mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die folgende dimensionsbehaftete Korrelation

für die Keimbildungsfrequenz pro Keimstelle:

$$\nu_{KS} = a_{KS}(T_l - T_v)^3 = a_{KS}(T_l - T^s)^3. \tag{2.57}$$

mit der Konstante $a_{KS} = 10^4 \mathrm{s}^{-1}\mathrm{K}^{-3}$.

Die Keimstellendichte (auf das Volumen bezogene Anzahl aktiver Keimstellen) ließ sich als Funktion von Ablöseradius $R_A$ und der Keimstellengröße $R_{KS}$ darstellen:

$$N_{KS} = 0.25 \cdot 10^{-7} \frac{R_A^2}{R_{KS}^4}. \tag{2.58}$$

Dabei wurde angenommen, daß die charakteristische Abmessung einer aktiven Keimstelle $R_{KS}$ dem kritischen Radius $R_{krit}$ einer kugelförmigen Dampfblase in überhitzter Flüssigkeit entspricht (Elsner et al. [41], Baehr und Stephan [10]):

$$R_{KS} = R_{krit} = \frac{2\,\sigma\,T^s}{\rho_v \Delta h_{lv}\,(T_l - T^s)}. \tag{2.59}$$

Die Gl. (2.59) erhält man aus der Kombination der *Young-Laplace*-Gleichung, die das Druckungleichgewicht zwischen der kugelförmigen Dampfblase und der sie umgebenden Flüssigkeit aufgrund der Oberflächenspannung beschreibt,

$$\Delta p = p_v - p_l = \frac{2\,\sigma}{R_b} \tag{2.60}$$

und der *Clausius-Clapeyron*-Gleichung, mit der die Druckdifferenz als Flüssigkeitsüberhitzung dargestellt werden kann:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} \approx \frac{\rho_v\,\Delta h_{lv}}{T} \tag{2.61}$$

bzw. nach Integration und Umstellung:

$$T_l - T^s \approx \frac{T^s}{\rho_v\,\Delta h_{lv}}(p_v - p_l). \tag{2.62}$$

Durch Bilanzierung des strömungsmechanischen Widerstands und der Kraft durch Oberflächenspannung, die an einer einzelnen, vollständig in der viskosen Unterschicht anwachsenden Blase angreifen (vgl. **Abb. 2.11**):

Widerstand – effektive Kraftwirkung durch Oberflächenspannung = 0

$$C_W\,\frac{\rho_l}{2}\,\overline{w}_{l,VU}^2\,\pi\,R_A^2 - \sigma\,2\,\pi\,R_{KS} = 0, \tag{2.63}$$

wobei Blasendeformation und Kontaktwinkeleinfluß vernachlässigt wurden, kann der Ablöseradius ermittelt werden:

$$R_A = \left[\frac{4\,\sigma R_{KS}}{C_W \rho_l \overline{w}_{l,VU}^2}\right]^{1/2}. \tag{2.64}$$

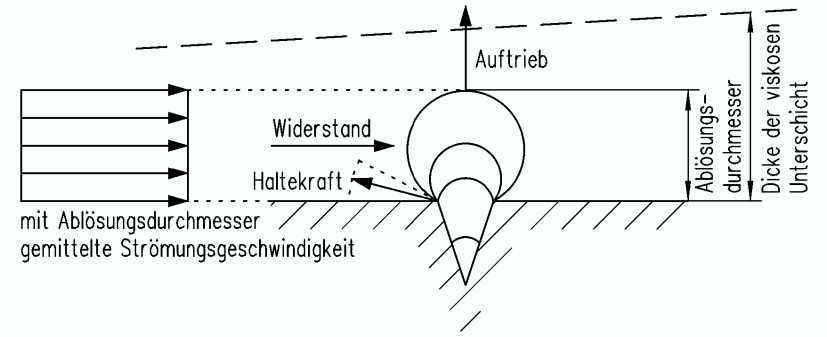



Abb. 2.11: An einer Blase beim Ablösen angreifende Kräfte

Für die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der viskosen Unterschicht gilt nach dem universellen Wandgesetz (Schlichting und Gersten [119]) in Abhängigkeit vom Wandabstand $y$:

$$\frac{\overline{w}_l(y)}{w_\tau} = \frac{w_\tau \rho_l \, y}{\eta_l} \,, \tag{2.65}$$

mit der Schubspannungsgeschwindigkeit:

$$w_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_l}} \,. \tag{2.66}$$

Damit erhält man eine Beziehung für die über den Blasendurchmesser gemittelte Strömungsgeschwindigkeit in der viskosen Unterschicht $\overline{w}_{l,VU}$:

$$\overline{w}_{l,VU} = \frac{1}{2\,R_A} \int_0^{2\,R_A} \frac{\tau_w \, y}{\eta_l} dy \tag{2.67}$$

$$= \frac{\tau_w R_A}{\eta_l} . \tag{2.68}$$

Für Rohrströmungen ergibt sich nach Einsetzen der Widerstandsbeziehung und der Blasius-Gleichung (2.13) bei Vernachlässigung der wandnahen Blasenschicht (vgl. Abschnitt 2.3.2) für den Ablöseradius nach Shin und Jones [122]:

$$R_A = 0.58 \left[ \left( \frac{\sigma R_{KS}}{\rho_l} \right)^{0.5} \left( \frac{\eta_l}{\tau_w} \right)^{0.7} \left( \frac{\rho_l}{\eta_l} \right)^{0.3} \right]^{5/7} . \tag{2.69}$$

Neben Effekten durch Abweichung von der Kugelform und der gegenseitigen Beeinflussung der Dampfblasen werden auch die Einflüsse des Kontaktwinkels (Benetzungswinkel) sowie die Trägheit der verdrängten Flüssigkeit von dieser Korrelation nicht erfaßt.

Aus Gl. (2.69) und Gl. (2.59) läßt sich nun mittels Gl. (2.58) die Anzahl aktiver Keimstellen pro Volumeneinheit ermitteln. Kombiniert man die Gln. (2.57) und (2.58), so ergibt sich für die umfangsgemittelte Rate von an aktiven Wandkeimstellen gebildeten Dampfblasen

$$\phi_{wn} = \frac{\nu_{KS} N_{KS} \xi}{A} \tag{2.70}$$

mit $\xi$, dem Kanalumfang, und $A$, der Kanalquerschnittsfläche (vgl. Kocamustafaogullari und Ishii [74]). Dabei wird für das Einsetzen der Wandkeimbildung vorausgesetzt, daß die Überhitzung der flüssigen Phase für die Bildung lebensfähiger Dampfblasen, also Blasen die mindestens den kritischen Radius nach Gl. (2.59) erreichen, übersteigt. Sofern diese Voraussetzung erfüllt ist, wird davon ausgegangen, daß sich die Wandkeimbildung bis zum Erreichen des Übergangs von der Blasen-/Pfropfenströmung zur Tropfenströmung bei $\epsilon_v = 0.8$ fortsetzt.

#### 2.3.4.2. Keimbildung im Strömungskern

Soplenkov und Blinkov [123] geben für die heterogene Keimbildung an Fremdpartikeln und Gaseinschlüssen bei der Durchströmung von Düsen und kurzen Rohren mit scharfkantigem Eintritt ($4 \leq L/D_h \leq 10$, $L \leq 0.3\,\mathrm{m}$) die folgende, auf Ergebnisse von Druckentlastungsexperimenten beruhende Korrelation an:

$$N_b = \frac{10^{12.5}}{\mathrm{Gb}^{0.15}}\,\mathrm{m}^{-3}, \tag{2.71}$$

mit $\mathrm{Gb} \geq 1.5 \cdot 10^3$. Die Gibbs-Zahl Gb gibt dabei das Verhältnis zwischen dem für die Bildung einer "lebensfähigen" Blase mit dem Radius $R_{krit}$ nach Gl. (2.59) notwendigen Energieüberschuß und der mittleren kinetischen Energie der Moleküle wieder:

$$\mathrm{Gb} = \frac{W_{b,krit}}{k\,T_l}\,. \tag{2.72}$$

Die Blasenbildungsenergie

$$W_b = 4\,\pi\,\sigma\,R_b^2 - \frac{4}{3}\,\pi\,R_b^3\,(p_v - p_l)\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right) \tag{2.73}$$

(vgl. Kolev [75]) weist bei Erreichen des kritischen Radius ein Maximum ($\partial W_b/\partial R_b(R_b = R_{krit}) = 0$) auf. Dampfblasen, deren Größe unterhalb des kritischen Radius liegen, kondensieren unter Abgabe ihrer Energie an die Flüssigkeit. Ist der Energieüberschuß bzw. die Flüssigkeitsüberhitzung hingegen ausreichend groß, so sind die Dampfblasen stabil und in der Lage weiter anzuwachsen.

Bei kritischem Ausströmen mit spontaner Verdampfung durch lange Rohre wird die Anzahl plötzlich entstehender Dampfblasen mit Hilfe der Korrelation von Dagan et al. [31] in Abhängigkeit vom Verhältnis der Rohrlänge zum Rohrdurchmesser ermittelt, vgl. **Abb. 2.12**:

$$N_b = \begin{cases} \exp\left[24 + 2\,\ln\left(\dfrac{L}{D_h}\right)\right]\,\mathrm{m}^{-3}, & L/D_h \leq 10 \\ \exp\left[35 - 2.8\,\ln\left(\dfrac{L}{D_h}\right)\right]\,\mathrm{m}^{-3}, & L/D_h > 10. \end{cases} \tag{2.74}$$

Um den Ort des Entstehens von Dampfblasen festlegen zu können, nahmen Dagan et al. an, daß die notwendige Mindestüberhitzung der Flüssigkeit 3 K betragen müsse. Dieser etwas willkürliche Wert wurde in dieser Arbeit durch das in Gl. (2.59) formulierte Kriterium ersetzt.

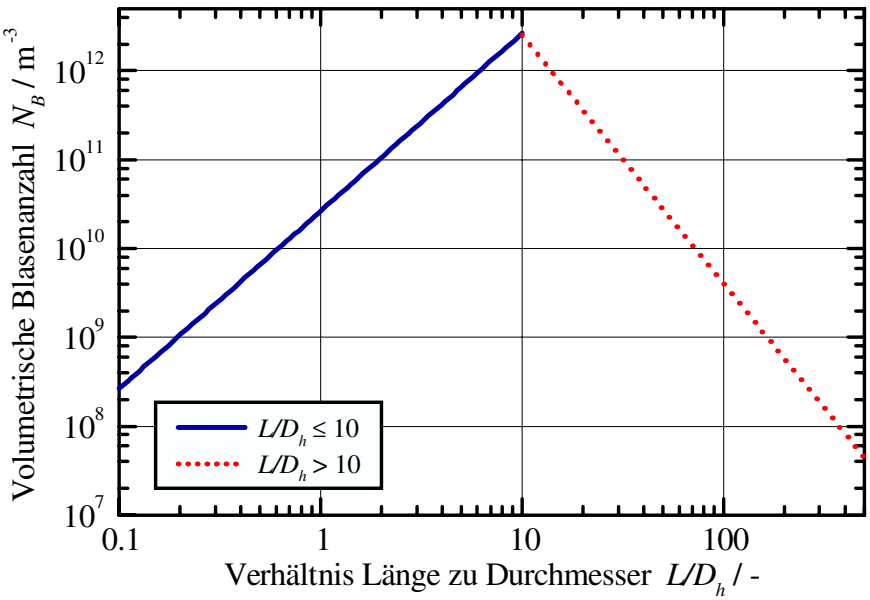



Abb. 2.12: Volumetrische Blasenanzahl nach Dagan et al. [31]

Die Keimbildungsrate bei Strömungssieden wird mit Ausnahme der Rechenzelle, an der spontanes Sieden auftritt (Flashingebene), im gesamten Strömungskanal zu Null angenommen. In der Flashingebene wird eine "Ad hoc"-Bildung von Dampfblasen angenommen, wobei für die Berechnung der Keimbildungsrate

$$\phi_{bn} \simeq N_b \frac{w_l}{\Delta z_F} \tag{2.75}$$

je nach Kanalgeometrie entweder Gl. (2.71) oder Gl. (2.74) verwendet wird.

### 2.3.5. Übertragungsfläche

Die konstitutiven Gleichungen für die volumetrische Phasengrenzfläche hängen von den Annahmen zur geometrischen Gestalt und von der Phasenverteilung im Strömungskanal ab.

Im Bereich der **Blasenströmung**, $0 < \epsilon_v \leq 0.3$, läßt sich die volumetrische Phasengrenzfläche der kugelförmig gedachten Dampfblasen als Funktion der volumetrischen Blasenanzahl $N_b$ und des Dampfvolumenanteils $\epsilon_v$ darstellen:

$$A^* = A_b^* = \frac{3\,\epsilon_v}{R_b} = (36\,\pi\,N_b)^{1/3}\epsilon_v^{2/3}. \tag{2.76}$$

Für die **Blasen-/Pfropfenströmung**, $0.3 < \epsilon_v < 0.8$, wird angenommen, daß einige sphärische Blasen weiter anwachsen, während andere zusammenwachsen um näherungsweise zylindrisch geformte Pfropfen (Taylorblasen) zu bilden. Damit entspricht die Gesamtphasengrenzfläche in diesem Strömungsregime der Summe der Oberflächenanteile der Blasen und der Pfropfen:

$$A^* = A_{bs}^* + A_p^*, \tag{2.77}$$

Der Anteil der Pfropfen an der volumetrischen Phasengrenzfläche beträgt (unter Vernachlässigung der kreisförmigen Stirnflächen)

$$A_p^* = \frac{4\epsilon_{v,p}^{2/3}}{\epsilon_{v,a}^{1/6} D_h} \tag{2.78}$$

Zu beachten ist, daß Gl. (2.78) bei $\epsilon_p = \epsilon_a$ die volumetrische Phasengrenzfläche für die Ringströmung ergibt. Der Dampfvolumenanteil der Pfropfen wird linear zwischen den Bereichsgrenzen $\epsilon_{v,b} = 0.3$ und $\epsilon_{v,a} = 0.8$ interpoliert:

$$\epsilon_{v,p} = \frac{1}{1-\epsilon_{v,b}} \left[ \epsilon_v - \epsilon_{v,b} \left( 1 - \frac{(\epsilon_v - \epsilon_{v,b})(1-\epsilon_{v,a})}{\epsilon_{v,a} - \epsilon_{v,b}} \right) \right]. \tag{2.79}$$

Damit kann der Anteil der im Schwall befindlichen Blasen bestimmt werden:

$$\epsilon_{v,bs} = \epsilon_v - \epsilon_{v,p}. \tag{2.80}$$

Die volumetrische Phasengrenzfläche der Blasen erhält man aus Gl. (2.76) mit $\epsilon_v = \epsilon_{v,bs}$ aus Gl. (2.80):

$$A_{bs}^* = A_b^*(\epsilon_{v,bs}). \tag{2.81}$$

Für die volumetrische Phasengrenzfläche der dispersen **Tropfenströmung**, $\epsilon_v \geq 0.8$, gilt:

$$A^* = A_{tr}^* = \frac{3\,(1-\epsilon_v)}{R_{tr}}, \tag{2.82}$$

wobei der Tropfenradius $R_{tr}$ unter Verwendung einer als konstant angenommenen Weberzahl $\mathrm{We} = 1.26$ (Barnea [12]) berechnet wird:

$$R_{tr} = \frac{\sigma\ \mathrm{We}}{2\ \rho_v (w_v - w_l)^2}. \tag{2.83}$$

### 2.3.6. Wärmeübertragung zwischen den Phasen

Die Wärmestromdichte von der überhitzten Flüssigkeit an die Phasengrenzfläche Dampf/Flüssigkeit, die gemäß den getroffenen Annahmen im Sättigungszustand vorliegen soll, wird nach dem Ansatz von Newton [92] für die Wärmeübertragung zwischen einem strömenden Fluid und einem Körper beschrieben:

$$\dot{q}^* = \alpha^*\ (T_l - T^s)\,, \tag{2.84}$$

dabei ist $\alpha^*$ der Wärmeübergangskoeffizient zwischen den Phasen. Für diesen sollen im folgenden geeignete Korrelationen, jeweils in Abhängigkeit von der angenommenen Strömungsform, angegeben werden.

Für die **Blasenströmung**, $\epsilon_v \leq 0.3$, wird die von Blinkov et al. [17] verwendete Korrelation von Labuntzov et al. [76] übernommen. Diese Korrelation wurde als Näherungslösung für den Bereich des thermisch kontrollierten Wachstums von Dampfblasen, die von überhitzter Flüssigkeit umgeben sind, entwickelt. Danach gilt für den

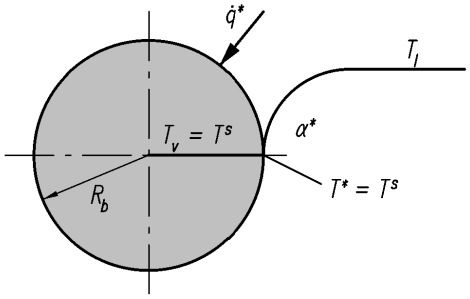



Abb. 2.13: Wärmeübergang an einer Dampfblase in überhitzter Flüssigkeit

Wärmeübergangskoeffizienten unter Vernachlässigung des konvektiven Anteils, der durch die Relativbewegung zwischen den Dampfblasen und der Flüssigkeit hervorgerufen wird:

$$\alpha^* = \alpha_b^* = \frac{12}{\pi}\,\mathrm{Ja}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6\,\mathrm{Ja}}\right)^{2/3} + \frac{\pi}{6\,\mathrm{Ja}}\right]\frac{\lambda_l}{2\,R_b}. \tag{2.85}$$

Die Jakob-Zahl beschreibt darin das Verhältnis von sensibler zu latenter Wärme und ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Ja} = \frac{\rho_l c_{pl}(T_l - T_v)}{\rho_v \Delta h_{lv}}. \tag{2.86}$$

Später dargestellte Ergebnisse von Simulationsrechnungen zeigen, daß die sich einstellenden Relativgeschwindigkeiten im Bereich der Blasenströmung sehr klein sind und daß somit die Vernachlässigung des konvektiven Wärmetransportes bei der Blasenströmung im Rahmen der Modellierung gerechtfertigt ist.

Die Gl. (2.85) wird auch zur Beschreibung des Wärmetransports an die Dampfblasen im Flüssigkeitsschwall der **Blasen-/Pfropfenströmung**, $0.3 < \epsilon_v < 0.8$, verwendet. Für den Wärmeübergang an die Pfropfen geben Blinkov et al. [17] eine konstante Stanton-Zahl an:

$$\mathrm{St}_l = \frac{\mathrm{Nu}_l}{\mathrm{Re}_l\,\mathrm{Pr}_l} = \frac{\dot{q}_p^*}{\rho_l\,|w_v - w_l|\,c_{pl}\,(T_l - T_v)} = 0.0073\,. \tag{2.87}$$

Damit ergibt sich für den Wärmeübergangskoeffizienten:

$$\alpha_p^* = \frac{\dot{q}_p^*}{(T_l - T_v)} = 0.0073\,\rho_l\,|w_v - w_l|\,c_{pl}. \tag{2.88}$$

Der Gesamtwärmestrom entspricht der Summe der Wärmeströme über die Phasengrenzflächen der Blasen und der Pfropfen. Damit kann bei jeweils gleichem treibenden Temperaturgefälle an Blasen und Pfropfen ein Gesamtwärmeübergangskoeffizient definiert werden (Blinkov et al. [17]):

$$\alpha^* = \alpha_{bs}^* = \frac{\alpha_b^* A_{bs}^* + \alpha_p^* A_p^*}{A^*}\,. \tag{2.89}$$

Für den Bereich der dispersen **Tropfenströmung** wird die Nußelt-Korrelation von Lee und Ryley [77] verwendet:

$$\mathrm{Nu}_{tr} = 2 + 0.74\,\mathrm{Re}_{tr}^{1/2}\mathrm{Pr}_v^{1/3}\,, \tag{2.90}$$

wobei

$$\mathrm{Pr}_{tr} = \frac{\eta_v \, c_{p,v}}{\lambda_v}, \tag{2.91}$$

$$\mathrm{Re}_{tr} = \frac{\rho_v \, |w_v - w_l| \, 2R_{tr}}{\eta_v} \, . \tag{2.92}$$

Damit erhält man für den Wärmeübergangskoeffizienten:

$$\alpha^*_{tr} = \frac{\lambda_v \, \mathrm{Nu}_{tr}}{2 \, R_{tr}}. \tag{2.93}$$

Eine ähnliche Nußelt-Gleichung für die Tropfen-Verdampfung (Faktor 0.6 im konvektiven Term von Gl. (2.90)) wurde bereits schon früher von Ranz und Marshall [106, 107] vorgeschlagen.

## 2.3.7. Stoffübertragung zwischen den Phasen

Bei der Modellierung der mit dem Phasenwechsel (Verdampfung und Kondensation) verbundenen Stoffübertragung wird davon ausgegangen, daß der Phasenübergang an der Grenzfläche Dampf/Flüssigkeit stattfindet und mit dem Transport latenter Wärme verbunden ist.

Die Verdampfungs- bzw. Kondensationsrate läßt sich nach Saha [117] als Funktion der Netto-Wärmestromdichte $q^*$ an die Phasengrenzfläche und der volumetrischen Übertragungsfläche $A^*$ beschreiben:

$$\Gamma_v = \frac{\dot{q}^* A^*}{\Delta h_{lv}} = \frac{\alpha^* A^* (T_l - T_v)}{h^s_v - h^s_l}, \tag{2.94}$$

wobei $h^s_v$ und $h^s_l$ die spezifischen Sättigungsenthalpien von Dampf und Flüssigkeit sind. Für den Fall der Verdampfung gilt: $\Gamma_v > 0$ wegen $T_l > T_v$, für die Kondensation gilt: $\Gamma_v < 0$ wegen $T_l < T_v$.

Mit Gl. (2.94) und den in den vorhergehenden Abschnitten 2.3.5 und 2.3.6 bereitgestellten strömungsformabhängigen Beziehungen für die Übertragungsfläche und die Wärmeübergangskoeffizienten stehen nun alle Korrelationen zur Berechnung des Wärme- und Stofftransports zwischen den Phasen zur Verfügung.

## 2.3.8. Kritische Strömung und Druckwellenausbreitung

Bei der reibungsfreien, adiabaten Einphasenströmung kompressibler Medien entspricht die Maximalgeschwindigkeit im engsten Querschnitt eines Drosselorganes, also bei Vorliegen kritischer Strömungsverhältnisse, der isentropen Schallgeschwindigkeit des Stoffes:

$$c_s = \left[ \frac{\partial p}{\partial \rho} \right]^{1/2}_s . \tag{2.95}$$

Für den Zusammenhang zwischen kritischer Massenstromdichte und der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Druckstörungen gilt hier:

$$G_{krit} = \rho \, w_{krit} = \rho \, c_s. \tag{2.96}$$

Überträgt man die Definition der Schallgeschwindigkeit für Einphasensysteme (2.95) auf zweiphasige Fluide[5] gleicher Phasendrücke $p = p_v = p_l$ unter Verwendung der homogenen Dichte $\rho_m$ gemäß:

$$c_{2\phi} = \left[ \frac{\partial p}{\partial \rho_m} \right]^{1/2}, \tag{2.97}$$

so erhält man durch Einsetzen der Definitionsgleichung (1.25)

$$c_{2\phi} = \left[ \frac{\partial p}{\partial \left( \epsilon_v \, \rho_v + (1 - \epsilon_v) \, \rho_l \right)} \right]^{1/2}. \tag{2.98}$$

Ersetzt man in dieser Gleichung den Dampfvolumenanteil nach Gl. (1.43) und differenziert die Größen $\rho_v$, $\rho_l$, $\dot{x}$ und $S$ nach dem Druck, so ergibt sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Druck- und Schallwellen in Zweiphasengemischen:

$$\begin{aligned} c_{2\phi} = \Bigg\{ & \left[ \epsilon_v^2 + \epsilon_v \, \epsilon_l \frac{\rho_l}{\rho_v} \right] \frac{\partial \rho_v}{\partial p} + \left[ \epsilon_l^2 + \epsilon_v \, \epsilon_l \frac{\rho_v}{\rho_l} \right] \frac{\partial \rho_l}{\partial p} + \\ & + (\rho_v - \rho_l) \, \frac{\epsilon_l}{\dot{x} \, (1 - \dot{x})} \, \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} - \epsilon_v \, \epsilon_l \, (\rho_v - \rho_l) \, \frac{\partial S}{\partial p} \Bigg\}^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Das Differential $\partial \dot{x} / \partial p$ drückt den von den Druckänderungen verursachten Stofftransport zwischen den Phasen aus. Bei den als klein vorausgesetzten Amplituden der Druckwellen kann diese Größe meist vernachlässigt werden. Der Ausdruck $\partial S / \partial p$ beschreibt die Änderung des Geschwindigkeitsverhältnisses zwischen den Phasen und ist somit ein Maß für die Impuls- bzw. Kraftübertragung zwischen den Phasen. Damit beinhaltet Gl. (2.99) auch eine Abhängigkeit von der jeweiligen Strömungsform, d.h. von der räumlichen Verteilung und Gestalt der Einzelphasen[6]. Im Gegensatz zur Schallgeschwindigkeit in Einphasenströmungen nach Gl. (2.95), stellt $c_{2\phi}$ in Gl. (2.99) daher keine thermodynamische Zustandsgröße dar. Die in der Gasdynamik gebräuchliche Bezeichnung "Schallgeschwindigkeit" für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Druckwellen ist bei Zwei- bzw. Mehrphasenströmungen zumindest umstritten. Wenn dieser Begriff in der vorliegenden Arbeit dennoch in Zusammenhang mit Zweiphasenströmungen verwendet wird, dann geschieht dies stets mit der Einschränkung, daß er auf einer idealisierenden Modellvorstellung von der Schallausbreitung in zweiphasigen Systemen basiert. Die lokale Schallgeschwindigkeit kann beispielsweise innerhalb der Flüssigkeitsbrücken von Blasenströmungen wesentlich größer sein als die aus Gl. (2.99) berechnete Geschwindigkeit. Ferner werden die in der Realität auftretenden Brechungs- und Reflexionsvorgänge an den Phasengrenzflächen nicht berücksichtigt.

Die Ableitungen der Phasendichten nach dem Druck in Gl. (2.99) lassen sich durch die isentropen Schallgeschwindigkeiten von Dampf und Flüssigkeit

$$\left[ \frac{\partial \rho_v}{\partial p} \right]_s = c_v^{-2} \tag{2.100}$$

[5] Verfahren, die bei der Ableitung von Berechnungsgleichungen für die kritische Massenstromdichte zweiphasiger Gemische von den für Einphasensysteme gültigen Beziehungen nach Gl. (2.95) und (2.96) ausgehen, werden *Ausbreitungsgeschwindigkeitsmodelle* genannt.

[6] Verschiedene nach Strömungsformen differenzierte Ansätze für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Druckwellen findet man z.B. in Mayinger [86].

$$\left[\frac{\partial \rho_l}{\partial p}\right]_s = c_l^{-2} \tag{2.101}$$

ersetzen. Vor allem bei niedrigen Drücken bestimmen der große Dichteunterschied zwischen den Phasen und die Kompressibilität der Dampfphase $(-1/v_v\,(\partial\, v_v/\partial\, p)_T)$ die Schallgeschwindigkeit in Zweiphasenströmungen. Hier beträgt die Schallgeschwindigkeit der Flüssigphase im allgemeinen ein Vielfaches der Schallgeschwindigkeit der Dampfphase[7].

Bei Vernachlässigung des Stofftransportes $(\partial \dot{x}/\partial p = 0)$ und unter Annahme schlupffreier Strömung $(S = 1 \Rightarrow \partial S/\partial p = 0)$ ergibt sich aus Gl. (2.99) die Schallgeschwindigkeit einer homogenen Zweiphasenströmung (vgl. Kolev [75]):

$$c_{2\phi,S=1} = \left[\rho_m \left(\frac{\epsilon_v}{\rho_v\, c_v^2} + \frac{\epsilon_l}{\rho_l\, c_l^2}\right)\right]^{-1/2}. \tag{2.102}$$

Die Schallgeschwindigkeit des Zweiphasengemisches wird in dieser Arbeit im Falle homogener Strömung aus Gl. (2.102) berechnet: $c_{2\phi} = c_{2\phi,S=1}$. Für die Simulation schlupfbehafteter Strömungen wird die Schallgeschwindigkeit $c_{2\phi} = c_{2\phi,S\neq 1}$ mit einer von Cheng et al. [27] stammenden Beziehung in modifizierter Form berechnet:

$$c_{2\phi,S\neq 1}^2 = \frac{\dfrac{\epsilon_v}{\rho_v}\left[\dfrac{F}{S}\right]^2 + \dfrac{\epsilon_l}{\rho_l}\,F^2 + \dfrac{\rho_l\, C_{vm}\,\delta_1}{\epsilon_l}\left[\dfrac{F}{S}\right]^2}{\left[\dfrac{\epsilon_v}{\rho_v\, c_v^2} + \dfrac{\epsilon_l}{\rho_l\, c_l^2}\right]\left[1 + \dfrac{\rho_l\, C_{vm}\,\delta_2}{\epsilon_l}\right] + \dfrac{\epsilon_v\, C_{vm}\delta_3}{\rho_v\, c_v^2}}, \tag{2.103}$$

mit:

$$\delta_1 = \frac{S}{\rho_v\,\rho_l}\left[\epsilon_v + \epsilon_l\, S - \frac{S-1}{S}\,(2\,\epsilon_l\, S + \epsilon_v)\right], \tag{2.104}$$

$$\delta_2 = \frac{S}{\rho_v\,\rho_l}\left[\frac{\rho_m\, F}{S}\left(1 + \frac{\epsilon_v\,\rho_v(S-1)}{\rho_m\, F} - \frac{2\,(S-1)}{S}\right)\right], \tag{2.105}$$

$$\delta_3 = \frac{S-1}{S}\left[\frac{\rho_l}{\rho_v} - S^2\right], \tag{2.106}$$

$$F = 1 + \frac{\epsilon_v \rho_v (S-1)}{\rho_m}. \tag{2.107}$$

Die ursprüngliche Formulierung von Cheng et al. [27] berücksichtigt bei der Ableitung der Beschleunigung der virtuellen Masse (vgl. Gl. (2.44)) auch die Divergenz der Phasengeschwindigkeiten. Da jedoch Unsicherheiten bezüglich der in den resultierenden Zusatztermen benötigten Parametern bestehen, werden diese in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt[8]. Ferner entfallen in der hier verwendeten Fassung der Gleichung für die Schallgeschwindigkeit jene Terme, die mögliche Druckunterschiede zwischen den Phasen erfassen.

[7] Bei einem Druck von $p = 1\,\text{bar}$ betragen die isentropen Schallgeschwindigkeiten von gesättigtem Wasser: $c_l \approx 1520\,\text{m/s}$ und $c_v \approx 472\,\text{m/s}$.

[8] Diese Vereinfachung wird in vielen anderen Zweifluidmodellen (z.B. Ransom et al. [105]) ebenfalls vorgenommen.

Für schlupffreie Zweiphasenströmungen ($S = 1$) und mechanisch stark gekoppelte Strömungsformen ($C_{vm} \to \infty$) entspricht Gl. (2.103) der Beziehung für die homogene Schallgeschwindigkeit Gl. (2.102). Bei mechanisch schwach gekoppelten Strömungsformen ($C_{vm} \to 0$) mit Phasenschlupf (z.B. Ringströmung) geht Gl. (2.103) in die von Reocreux [109] vorgeschlagene Gleichung über:

$$c_{2\phi,S\neq 1} = \frac{1}{\rho_m}\left[\frac{\frac{\epsilon_v^3\,\rho_v}{\dot{x}^2} + \frac{\epsilon_l^3\,\rho_l}{(1-\dot{x})^2}}{\frac{\epsilon_v}{\rho_v\,c_v^2} + \frac{\epsilon_l}{\rho_l\,c_l^2}}\right]^{1/2} . \tag{2.108}$$

Die **Abb. 2.14** zeigt den Vergleich der mit Gl. (2.102) und (2.108) berechneten Schallgeschwindigkeiten eines sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen Zweiphasen-Wassergemisches in Abhängigkeit von Dampfvolumenanteil $\epsilon_v$ und Druck $p$ bei homogener ($S = 1$) bzw. schlupfbehafteter Strömung. Das Schlupfverhältnis wurde dabei nach Gl. (1.60) (Fauske [46]) in Abhängigkeit vom Dichteverhältnis $\rho_l/\rho_v$ berechnet.

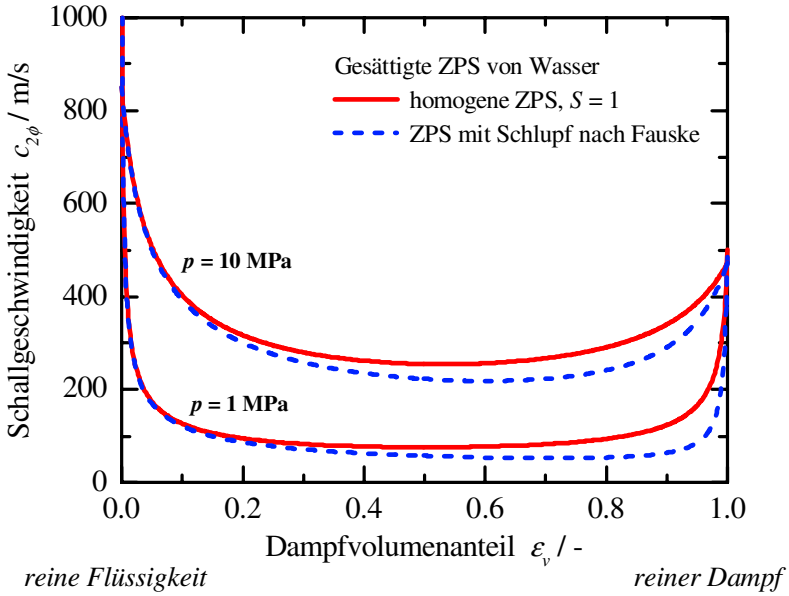



Abb. 2.14: Schallgeschwindigkeiten eines gesättigten Zweiphasen-Wassergemisches (dampfförmig/flüssig)

Bereits geringe Dampfvolumenanteile in einem überwiegend in flüssiger Form vorliegenden Zweiphasengemisch ($\epsilon_v \to 0$) bewirken eine starke Reduzierung der Schallgeschwindigkeit gegenüber den Werten für den einphasigen, flüssigen Zustand. Ein analoges, wenn auch wegen der Dominanz der Dampfkompressibilität nicht so stark ausgeprägtes Absinken der Zweiphasenschallgeschwindigkeit gegenüber der des reinen Dampfes zeigt sich für kleine Flüssigkeitsgehalte ($\epsilon_v \to 1$). Es muß daher bei der Zweiphasenströmung schon bei wesentlich kleineren Strömungsgeschwindigkeiten als bei der Einphasenströmung mit Blockierung und Verdichtungsstößen gerechnet werden.

# 3. Numerisches Verfahren

Zur Lösung des nichtlinearen Systems aus partiellen Differentialgleichungen (2.1)-(2.6), wird eine semi-implizite Finite-Differenzen-Methode angewendet, die auf Arbeiten von Liles und Reed [84], Chan und Masiello [26] und Trapp und Riemke [129] zurückgeht. Die grundlegende Idee dieser Methode basiert darauf, den ursprünglichen Satz von Differentialgleichungen durch ein System aus Finite-Differenzen-Gleichungen zu ersetzen, die bezüglich der zeitlichen Diskretisierung teilimplizit sind. Das bedeutet, daß ein Teil der relevanten Terme mit den aktuellen Werten, also implizit, in die Rechnung eingeht, während die übrigen Terme mit Werten des vorhergehenden Zeitschrittes belegt sind und somit explizit berücksichtigt werden.

Wie später in Abschnitt 3.2 gezeigt wird, erfolgt die Wahl zeitlich implizit behandelter Terme in der Weise, daß die für eine individuelle Rechenzelle geschriebenen Feldgleichungen einzelne Gleichungen für die Strömungsgeschwindigkeiten ergeben, die nur von den iterativ zu ermittelnden Drücken des aktuell betrachteten Zeitschritts abhängen. Erfolgt die örtliche Diskretisierung dabei auf einem versetzten Rechengitter, so bildet der Druckgradient, der aus der Differenz benachbarter Drücke in den Zellzentren berechnet wird, ein treibendes Potential für die dazwischen liegende Strömungsgeschwindigkeit auf dem Zellrand. Somit ergibt sich für die gekoppelte Ermittlung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern ein Lösungsalgorithmus, der mit dem SIMPLE[1]-Verfahren von Patankar und Spalding [100] vergleichbar ist. Dieses Verfahren wurde ursprünglich für vollständig implizit behandelte einphasige Strömungen entwickelt (vgl. auch Patankar [99], Noll [94]) wobei die Teilbezeichnung "semi-implizit" hierbei nicht die Vorgehensweise bei der zeitlichen Diskretisierung kennzeichnet, sondern auf den indirekten Einfluß der Druckkorrekturen auf die Strömungsgeschwindigkeit hinweist. Ein wesentlicher Unterschied zur ursprünglichen Fassung der SIMPLE-Methode besteht darin, daß die konvektiven Flußterme im Hinblick auf die Zeitdiskretisierung explizit, also mit Werten des vorhergehenden Zeitschrittes berechnet werden. Die für die Druckwellenausbreitung maßgeblichen Größen, die konvektiven Geschwindigkeiten in den Kontinuitäts- und Energiegleichungen sowie der Druckgradient in den Impulsgleichungen, werden hingegen implizit erfaßt. Damit ergibt sich als Stabilitätskriterium für die zulässige Zeitschrittweite des semi-impliziten Verfahrens das stoffliche *Courant*-Limit (Trapp und Riemke [129]):

$$\Delta t \leq \min \left[ \frac{\Delta z_i}{|w_{v,i}|}, \frac{\Delta z_i}{|w_{l,i}|} \right], \quad i = 0, 1, \ldots, N+1, \tag{3.1}$$

wobei $N+1$ die Anzahl der Stützstellen entlang der betrachteten Geometrie angibt. Phänomene, deren typische Zeitskalen kleiner sind als die nach Gl. (3.1), können mit dem semi-impliziten Verfahren nicht aufgelöst werden. Als Beispiel hierfür seien die Betrachtungen der Schallausbreitung (akustische Phänomene) in getrennt strömenden Phasen und die Erfassung des trägheitsgesteuerten Blasenwachstums (vgl. Anmerkungen zur Reaktionskraft in Gl. (2.34)) genannt.

[1] Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations

Für gewöhnliche explizite Methoden gilt das sogenannte CFL-Kriterium[2]. Danach wird die Zeitschrittweite im wesentlichen durch die Schallgeschwindigkeit der Einzelphasen bzw. des Zweiphasengemisches begrenzt

$$\Delta t \leq \min \left[ \frac{\Delta z_i}{|w_{v,i}| + |c_{v,i}|}, \frac{\Delta z_i}{|w_{l,i}| + |c_{l,i}|} \right], \quad i = 0, 1, \ldots, N+1. \tag{3.2}$$

Der Rechenaufwand für die Zeitintegration steigt somit beim expliziten Verfahren, da im Vergleich zu teil- oder vollimpliziten Methoden im allgemeinen wesentlich mehr Zeitschritte zum Erreichen der stationären Lösung benötigt werden. Das Vorgehen nach der semi-impliziten Methode erlaubt wesentlich größere Zeitschritte und ermöglicht somit auch die Verwendung von kleineren Rechnerkonfigurationen wie z.B. dem Personal Computer.

Um einphasige Strömungszustände sowie das Erscheinen bzw. Verschwinden einer Phase numerisch berücksichtigen zu können, müssen Mindest- und Maximalwerte für den Dampfvolumenanteil vorgegeben werden. Für den Fall einer reinen Flüssigkeitsströmung wird ein minimaler Dampfvolumenanteil von

$$\epsilon_{v,min} = 1 \cdot 10^{-6} \tag{3.3}$$

vorgegeben. Entsprechend gilt für die reine Dampfströmung:

$$\epsilon_{v,max} = 1 - \epsilon_{v,min}. \tag{3.4}$$

## 3.1. Rechengitter

Bei der hier verwendeten Finite-Differenzen Methode werden die Bilanzgleichungen (2.1)-(2.6) an diskreten Punkten, die über das interessierende Rechengebiet verteilt werden, angewendet, um einen Satz algebraischer und damit numerisch auswertbarer Gleichungen zu erhalten. In dieser Arbeit wird ein versetzt angeordnetes räumliches Gitter (*Staggered grid*, Harlow und Welch [55]) der betrachteten Kanalgeometrie überlagert, wobei nach **Abb. 3.1** thermodynamische Variablen den Zellmitten und Flußgrößen den Zellrändern zugeordnet werden.

Die Beziehungen zwischen den Variablen in der Zellmitte und dem Zellrand erhält man aus der von Liles und Reed [84] vorgeschlagenen 'Weighted Donor Cell'-Methode:

$$\phi'_{i+1/2} = \frac{(1+\beta')\ \phi'_i + (1-\beta')\ \phi'_{i+1}}{2} \quad \text{mit } -1 \leq \beta' \leq 1. \tag{3.5}$$

Das Symbol $\phi'$ steht hier stellvertretend für die an den Zellrändern benötigten physikalischen Größen. Dieser Ansatz stellt einen Kompromiß zwischen der 'Full Donor Cell'-Methode (gleichbedeutend mit Donor-Cell, Upwind- und Aufwärts-Differenzenverfahren, vgl. Patankar [99]) mit $\beta' = w/|w|$ und dem Zentrale-Differenzen-Verfahren mit $\beta' = 0$ dar. Die Upwind-Methode bewirkt eine hohe numerische Stabilität, stellt jedoch ein Verfahren der Genauigkeit 1. Ordnung dar. Das Zentrale-Differenzen-Verfahren ermöglicht zwar eine höhere Genauigkeit, ist aber numerisch weniger stabil. In

[2] CFL steht für Courant-Friedrich-Levy.

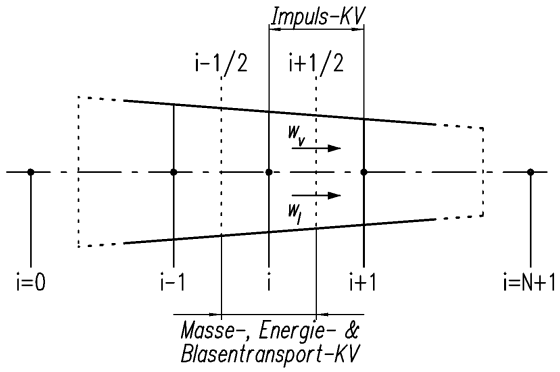



Abb. 3.1: Nodalisierungsschema; • Zellmitte, ··· Zellrand

dieser Arbeit wurde daher als Kompromiß zwischen Genauigkeit und Stabilität ein Wert von $\beta' = 0.5$ für den Wichtungsfaktor gewählt.

Durch kontinuierliches Verringern der Gitterpunktabstände wird in Bereichen, in denen starke Gradienten des Druckes oder der Blasenanzahl erwartet werden, z.B. in der Nähe des Düsenhalses, eine höhere örtliche Auflösung erreicht und der Diskretisierungsfehler verkleinert. Bei den in dieser Arbeit vorgestellten Simulationsergebnissen wurde überwiegend die in Wendt [141] zitierte und im Anschluß kurz dargestellte Methode verwendet.

Zur Ermittlung der auf die Gesamtlänge $l_{ges}$ bezogenen Lage $z_{i+1/2}$ der Stützstellen auf den Zellrändern wird folgende Hyperbelfunktion eingesetzt:

$$\frac{z_{i+1/2}}{l_{ges}} = \frac{\zeta^*}{A}\left\{\sinh\left[\left(\zeta_{i+1/2} - \zeta'\right)\beta_z\right] + A\right\}, \tag{3.6}$$

mit:

$$\zeta_{i+1/2} = \frac{i}{N}, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{3.7}$$

$$A = \sinh\left(\beta_z\,\zeta'\right) \tag{3.8}$$

und

$$\zeta' = \frac{1}{2\,\beta_z}\ln\left[\frac{1 + \left(e^{\beta_z} - 1\right)\,\zeta^*}{1 + \left(e^{-\beta_z} - 1\right)\,\zeta^*}\right]. \tag{3.9}$$

Mittels der auf die Gesamtlänge $l_{ges}$ bezogenen Größe

$$\zeta^* = \frac{z^*}{l_{ges}} \tag{3.10}$$

wird der Ort, an dem die höchste Auflösung bzw. der kleinste Zellabstand erreicht werden soll, festgelegt. Die Größe $z^*$ bezeichnet dabei den Abstand zwischen dem Eintritt und dem hoch aufzulösenden Querschnitt. So wird beispielsweise bei Rohrströmungen mit starken Gradienten am Austritt sinnvollerweise $z^* = l_{ges}$ gewählt. Die Konstante $\beta_z$ in Gl. (3.6) kontrolliert das Ausmaß der Stützstellenverdichtung. Je größer $\beta_z$ ist, umso feiner wird das Rechengitter um den Ort $z^*$ (hier: $\beta_z \approx 2 \ldots 3$). Die Lage der

Stützstellen in den Zellmitten $z_i$, $i = 0, \ldots, N+1$, erhält man durch arithmetische Mittelung bzw. Extrapolation der $z_{i\pm1/2}$-Werte der benachbarten Zellränder.

Neben diesem Verfahren und der Vorgabe äquidistanter Stützstellen ermöglicht das Rechenprogramm auch die Verwendung der von Kolev [75] vorgeschlagenen Methode, bei der die Ortsschrittweiten als Glieder einer geometrischen Reihe bestimmt werden.

## 3.2. Semi-implizites Zeitschrittverfahren

In den Finite-Differenzen-Formulierungen der Kontinuitäts-, thermischen Energie- und Blasentransportgleichung werden lediglich die betreffenden zeitabhängigen Variablen (Dichten, Dampfvolumenanteil, spezifische innere Energie der Flüssigkeit und volumetrische Blasenanzahl), der Druck, die Phasengeschwindigkeiten und die mit der Verdampfungs- bzw. Kondensationsrate verbundenen Terme zum neuen Zeitniveau $t^{n+1}$ berechnet. Alle anderen Größen und insbesondere die konvektiven Terme werden im Hinblick auf die zeitliche Diskretisierung explizit, also zum Zeitniveau $t^n$ ermittelt. Da das verwendete Verfahren zur Zeitintegration also weder auf einer rein expliziten noch einer rein impliziten Methode basiert, wird es als semi-implizit oder auch konvektionsexplizit bezeichnet.

Die Finite-Differenzen-Form der Dampfmassengleichung Gl. (2.1) lautet beispielsweise:

$$(\epsilon_v\rho_v)_i^{n+1} - (\epsilon_v\rho_v)_i^n + \frac{1}{A_i}\frac{\Delta t}{\Delta z_i}\left\{(\epsilon_v^n\rho_v^n w_v^{n+1}A)_{i+1/2} - (\epsilon_v^n\rho_v^n w_v^{n+1}A)_{i-1/2}\right\} = \Delta t\,\Gamma_{v,i}^{n+1}, \quad (3.11)$$

wobei der Index $i$ Variablen in Zellzentren und $i \pm 1/2$ Terme an Zellrändern angibt. Eine Zusammenstellung der verwendeten Finite-Differenzen-Gleichungen für die Gln. (2.1) – (2.6) ist im Anhang B.2, S.110, aufgeführt.

Die mit finiten Differenzen örtlich und zeitlich diskretisierten Impulsgleichungen Gl. (2.3) und (2.4) enthalten nur den betrachteten zeitabhängigen Term sowie die Druckgradiententerme zur aktuellen Zeit $t^{n+1}$. Damit wird eine implizite Kopplung zwischen den Strömungsgeschwindigkeiten an den Zellrändern $i+1/2$ und den stromaufwärts und stromabwärts gelegenen Druckwerten in den Zellzentren (Rechenpunkte $i$ und $i+1$) ermöglicht.

Vereinfacht lassen sich die linearisierten und diskretisierten Impulsgleichungen von Dampf und flüssiger Phase in folgender Weise ausdrücken:

$$w_{v,i+1/2}^{n+1} = A_v^n\left(p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}\right) + B_v^n, \quad (3.12)$$

$$w_{l,i+1/2}^{n+1} = A_l^n\left(p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}\right) + B_l^n. \quad (3.13)$$

Hierbei enthalten die Koeffizienten $A_v^n$, $B_v^n$, $A_l^n$ und $B_l^n$ die konvektiven Terme sowie Kraftwirkungen repräsentierende Terme (Reibungskraft, Widerstand etc.) zur Zeit $t^n$. Im Anhang B.2, S.110, sind die verwendeten Berechnungsgleichungen für die benötigten Größen im einzelnen aufgeführt. Bemerkenswert ist, daß die Gln. (3.12) und (3.13) die

angestrebte Form von einfachen, linearen Beziehungen zwischen den Phasengeschwindigkeiten und dem Druck besitzen. Die Lösung des Gleichungssystems (3.12)/(3.13) erfolgt mit Hilfe des Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche (Engeln-Müllges [43, Kapitel 4.5] und Bronstein und Semendjajew [21, Kapitel 7.1.2.4]).

Die Finite-Differenzen-Gleichungen, die aus den übrigen Bilanzgleichungen (2.2), (2.5) und (2.6) resultieren, ergeben zusammen mit den Beziehungen zwischen Zellzentren und -rändern ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem. In dieser Arbeit wird ein Newton-Iterationsverfahren angewendet, wobei zunächst alle Gleichungen um die jeweils letzten Iterationswerte der Unbekannten linearisiert werden müssen. Die prinzipielle Vorgehensweise zur iterativen Lösung von Gleichungssystemen wird im Anhang B.1, S.109, erläutert. Die Linearisierung der Gl. (3.11) ergibt bei Einbindung der linearisierten Dampf-Impulsgleichung (3.12) die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\Delta p_i^k \left\{ \left[ \epsilon_v \frac{d\rho_v}{dp} \right]_i^k + \frac{\Delta t}{A_i \Delta z_i} \left[ (\epsilon_v \rho_v \beta_v A)_{i+1/2}^n + (\epsilon_v \rho_v \beta_v A)_{i-1/2}^n \right] - \Delta t \left[ \frac{\partial \Gamma_v}{\partial p} \right]_i^k \right\} \\
&\qquad + \Delta \epsilon_i^k \left\{ \rho_{v,i}^k - \Delta t \left[ \frac{\partial \Gamma_v}{\partial \epsilon_v} \right]_i^k \right\} + \Delta T_{l,i}^k \, \Delta t \left[ \frac{\partial \Gamma_v}{\partial T_l} \right]_i^k \\
&\qquad - \frac{1}{A_i} \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \left[ \Delta p_{i+1}^k \, (\epsilon_v \rho_v \beta_v A)_{i+1/2}^n + \Delta p_{i-1}^k \, (\epsilon_v \rho_v \beta_v A)_{i-1/2}^n \right] \\
&= - \left\{ \left( \epsilon_v^k \rho_v^k - \epsilon_v^n \rho_v^n \right)_i - \Delta t \, \Gamma_{v,i}^k + \frac{1}{A_i} \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \left[ \left( \epsilon_v^n \rho_v^n w_v^k A \right)_{i+1/2} - \left( \epsilon_v^n \rho_v^n w_v^k A \right)_{i-1/2} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

wobei der Index $k$ Iterationswerte von Variablen des aktuellen Zeitschrittes $n+1$ kennzeichnet.

Die gleiche Prozedur muß nun auf die verbleibenden drei Bilanzgleichungen bzw. auf die sich aus den Gln. (2.2), (2.5) und (2.6) ergebenden Differenzengleichungen angewendet werden. Das daraus resultierende Gleichungssystem kann für jeden Knotenpunkt in Matrixschreibweise wie folgt formuliert werden:

$$-\mathbf{a}\,\Delta p_{i-1}^k + \mathbf{M}\,\mathbf{x}_i^k - \mathbf{b}\,\Delta p_{i+1}^k = \mathbf{c} \tag{3.15}$$

bzw. nach Multiplikation mit der Inversen von $\mathbf{M}$:

$$-\mathbf{a}\,\mathbf{M}^{-1}\Delta p_{i-1}^k + \mathbf{x}_i^k - \mathbf{b}\,\mathbf{M}^{-1}\Delta p_{i+1}^k = \mathbf{c}\,\mathbf{M}^{-1}. \tag{3.16}$$

Diese Gleichung setzt jede der von dem Vektor

$$\mathbf{x}_i^k = \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta \epsilon_v \\ \Delta T_l \\ \Delta N_b \end{pmatrix}_i^k \tag{3.17}$$

repräsentierten Korrekturen der Primärvariablen im Gitterpunkt $i$ mit den benachbarten Druckkorrekturen $\Delta p_{i-1}^k$ und $\Delta p_{i+1}^k$ in Beziehung. Die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ beinhalten die Faktoren der Druckkorrekturen an den Rechenpunkten $i-1$ und $i+1$. Der Vektor $\mathbf{c}$ stellt die Terme auf den rechten Seiten der linearisierten Finite-Differenzen-Gleichungen dar. Exemplarisch können die Elemente der ersten Zeile der $4 \times 4$ - Matrix $\mathbf{M}$ sowie die

ersten Komponenten der Vektoren **a**, **b** und **c** der Gl. (3.14) entnommen werden. Im Anhang B.2, S.110, sind die Berechnungsgleichungen für die Matrixelemente und die Vektorkomponenten der Gl. (3.15) vollständig aufgeführt.

Aus den Gln. (3.12) und (3.13) ergeben sich die Geschwindigkeiten zur Zeit $t^{n+1}$. Damit stellt die erste Gleichung des Systems (3.16) eine lediglich von den Druckkorrekturen und den Phasengeschwindigkeiten zur Zeit $t^{n+1}$ abhängige Funktion dar:

$$L_i \Delta p_{i-1}^k + \Delta p_i^k + U_i \Delta p_{i+1}^k = R_i. \tag{3.18}$$

Ausgeschrieben für die Knotenpunkte $i = 1, 2, \ldots, N$ lautet Gl. (3.18):

$$\begin{bmatrix} 1 & U_1 & 0 & \ldots & & \\ L_2 & 1 & U_2 & \ddots & & \\ 0 & L_3 & 1 & U_3 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & L_{N-1} & 1 & U_{N-1} \\ & & & & L_N & 1+U_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p_1^k \\ \Delta p_2^k \\ \Delta p_3^k \\ \vdots \\ \Delta p_{N-1}^k \\ \Delta p_N^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{N-1} \\ R_N \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Die Druckkorrekturen an den Rändern ($\Delta p_0^k$ und $\Delta p_{N+1}^k$) werden in Abschnitt 3.3 behandelt. Die Lösung des Gleichungssystems (3.19) mit dem formalen Aufbau $\mathbf{A}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p} = \mathbf{a}$, wobei **A** eine tridiagonale Matrix darstellt, erfolgt durch Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, wobei **L** eine bidiagonale untere Dreiecksmatrix und **U** eine normierte obere Dreiecksmatrix ist. Damit ergibt sich ein äquivalentes System $\mathbf{U}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p} = \mathbf{r}$, aus dem die Lösungen $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}$ berechnet werden. Eine ausführliche Darstellung des verwendeten Algorithmus findet man in Engeln-Müllges [43, Kapitel 4.10].

Mit den nunmehr in allen Knotenpunkten bekannten Druckkorrekturen $\Delta p_i^k$ können die übrigen Korrekturen der Primärvariablen ($\Delta \epsilon_{vi}^k$, $\Delta T_{li}^k$ und $\Delta N_{bi}^k$) aus den drei verbleibenden Gleichungen von Gl. (3.16) berechnet werden. Diese Korrekturen werden zu den Ergebnissen des vorhergehenden Zeitschrittes addiert. Damit erhält man die Iterationswerte für den Dampfvolumenanteil $\epsilon_{vi}^k$, die Flüssigkeitstemperatur $T_{li}^k$ und die volumetrische Blasenanzahl $N_{bi}^k$.

Dieser iterative Vorgang wird nun solange fortgeführt, bis die maximale relative Abweichung der Drücke zweier aufeinanderfolgender Iterationsschritte eine ausreichend klein gewählte Fehlerschranke

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^{k+1} - p_i^k}{p_i^k} = \frac{\Delta p_i^k}{p_i^k}. \tag{3.20}$$

unterschreitet. Typische Werte für die Fehlerschranke, die eine angemessene Genauigkeit bewirken und eine zügiges Fortschreiten der Zeitintegration ermöglichen, liegen im Bereich $10^{-4} \leq \varepsilon \leq 5 \cdot 10^{-3}$.

Die wesentlichen Schritte des oben beschriebenen semi-impliziten Verfahrens für einen einzelnen Zeitschritt bestehen zusammenfassend aus:

1. Abschätzung eines Druckfeldes $p_i^k$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$, aus den Rand- und Anfangsbedingungen bzw. Verwendung der Ergebnisse des vorhergehenden Zeitschrittes,

2. Lösung der gekoppelten Impulsgleichungen (3.12) und (3.13) $\Rightarrow w_{v,i+1/2}^k$, $w_{l,i+1/2}^k$,

3. Aktualisieren von zeitlich implizit berücksichtigten Größen, die von den Primärvariablen abhängen und innerhalb der Iteration benötigt werden (z.B. Keimbildungsraten, Phasengrenzfläche und Wärmestromdichte sowie deren Ableitungen nach den Primärvariablen $p$, $T_l$, $\epsilon_v$ und $N_b$),
4. Ermittlung der Druckkorrekturen $\Delta p_i^k$ aus Gl. (3.18),
5. Lösung der übrigen Gleichungen des Systems (3.16, 2. bis 4. Zeile) $\Rightarrow \Delta\epsilon_{v_i}^k$, $\Delta T_{l_i}^k$, $\Delta N_{b_i}^k$,
6. Berechnung des neuen Druckfeldes: $p_i^{k+1} = p_i^k + \Delta p_i^k$,
7. Aktualisieren der übrigen Primärvariablen: $\epsilon_{v_i}^{k+1} = \epsilon_{v_i}^k + \Delta\epsilon_{v_i}^k$, $T_{l_i}^{k+1} = T_{l_i}^k + \Delta T_{l_i}^k$ und $N_{b_i}^{k+1} = N_{b_i}^k + \Delta N_{b_i}^k$,
8. Setze $p_i^k = p_i^{k+1}$, gehe zu Schritt 2 und wiederhole Schritte 2 bis 8 solange, bis Konvergenz erreicht ist und $\Delta p_i^{k+1}/p_i^k < \varepsilon$.

Für den Fall, daß bei der iterativen Ermittlung des Druckfeldes Konvergenzprobleme aufgrund von Nichtlinearitäten der zu lösenden Gleichungen auftreten, ist die Möglichkeit zur Unterrelaxation der Druckkorrekturen nach Noll [94, Abschnitt 5.2.1] gegeben. Damit kann die Änderung des Druckes bei jeder Iterationsstufe in folgender Weise reduziert werden:

$$p_i^{k+1} = p_i^k + \alpha' \, \Delta p_i^k. \tag{3.21}$$

Für den Wert des Relaxationsfaktors $\alpha' \leq 1$ kann keine Berechnungsvorschrift angegeben werden. Er muß durch Ausprobieren ermittelt werden. Bei den hier vorgestellten Rechnungen war dieses Vorgehen jedoch nicht notwendig, so daß stets $\alpha' = 1$ gesetzt werden konnte.

Bei Verletzung des stofflichen *Courant*-Kriteriums nach Gl. (3.1) innerhalb des Druckkorrekturverfahrens wird die Iteration abgebrochen und die Zeitschrittweite gemäß

$$\Delta t = C \cdot \min \left[ \frac{\Delta z_i}{|w_{v,i}|}, \frac{\Delta z_i}{|w_{l,i}|} \right], \; i = 0, 1, \ldots, N+1. \tag{3.22}$$

berechnet bzw. bei nicht gleichmäßiger Konvergenz nochmals um jeweils ein Viertel ihres aktuellen Wertes reduziert. Für die *Courant*-Zahl $C < 1$ in Gl. (3.22) wird hier stets der Wert $C = 0.75$ verwendet.

## 3.3. Anfangs- und Randbedingungen

An den Zellrändern die außerhalb der betrachteten Kanalgeometrie liegen, müssen Randbedingungen spezifiziert werden. Für den Eintritt und den Austritt (in Abhängigkeit von der Austrittsgeschwindigkeit des Zweiphasengemisches) werden die folgenden Druckkorrekturen angesetzt:

$$\Delta p_0^k = 0, \; p_0 = p_E = \text{const.} \tag{3.23}$$

$$\Delta p_{N+1}^k = \begin{cases} 0, & p_{N+1} = p_A = \text{const. für Unterschallströmung: } w_{m,N+1/2} < c_{2\phi} \\ \Delta p_N^k & \text{für Schall- bzw. Überschallströmung: } w_{m,N+1/2} \geq c_{2\phi}, \end{cases} \tag{3.24}$$

mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit $w_m$ nach Gl. (1.46) und der Schallgeschwindigkeit des Zweiphasengemisches $c_{2\phi}$ nach Gl. (2.103) (vgl. Abschnitt 2.3.8).

Die Eintrittstemperatur der Flüssigkeit wird als konstant angenommen. Ferner werden bei unterkühlten Eintrittszuständen (**Tabelle 3.1**) der Dampfvolumenanteil und die volumetrische Blasenanzahl für $i = 0$ zu Null gesetzt. Falls am Eintritt ein zweiphasiger Zustand vorliegt (**Tabelle 3.2**), wird zunächst der Eintrittsdampfgehalt $x_E$ aus Gl. (1.48) mit Hilfe gemessener Stagnationsenthalpien unter Annahme homogener Zuströmung berechnet. Mit $S_E = 1$ erhält man aus Gl. (1.42) den Dampfvolumenanteil am Eintritt $\epsilon_{v,0}$. Außerdem muß ein geschätzter Anfangswert für die volumetrische Blasenanzahl festgelegt werden (gewählt: $N_{b,0} = 10^9 \mathrm{m}^{-3}$, Rivard und Travis [112]). In diesem Fall kann durch die explizite Angabe der Flüssigkeitstemperatur eine geringe Abweichung von der Sättigungstemperatur, $|T_{l,E} - T^s(p_E)| < 0.05\,\mathrm{K}$, berücksichtigt werden. Die verbleibenden Größen werden mittels linearer Extrapolation aus stromab- bzw. stromaufwärts vorliegenden Größen berechnet.

| | Eintritt | Austritt bei Unterschall bzw. Schall-/Überschallstrg. |
|---|---|---|
| Druck | $p_0 = p_E$ | $p_{N+1} = p_A$ bzw. $p_{N+1} = f(p_{N-1}, p_N, \Delta z)$ |
| Temperatur | $T_{l,0} = T_{l,E}$ | $T_{l,N+1} = f(T_{l,N-1}, T_{l,N})$ |
| vol. Blasenanzahl | $N_{b,0} = 0$ | $N_{b,N+1} = f(N_{b,N-1}, N_{b,N}, \Delta z)$ |
| Dampfvolumenanteil | $\epsilon_{v,0} = 0$ | $\epsilon_{v,N+1} = f(\epsilon_{v,N-1}, \epsilon_{v,N}, \Delta z)$ |

Tabelle 3.1.: Randbedingungen für den Fall "unterkühlte Flüssigkeit am Eintritt"

| | Eintritt | Austritt bei Unterschall- bzw. Schall-/Überschallstrg. |
|---|---|---|
| Druck | $p_0 = p_E$ | $p_{N+1} = p_A$ bzw. $p_{N+1} = f(p_{N-1}, p_N, \Delta z)$ |
| Temperatur | $T_{l,0} = T_{l,E}$ | $T_{l,N+1} = f(T_{l,N-1}, T_{l,N}, \Delta z)$ |
| Enthalpie | $h_0 = h_E \Rightarrow x_E$ | – |
| Dampfvolumenanteil | $\epsilon_{v,0} = f(x_E, S_E = 1)$ | $\epsilon_{v,N+1} = f(\epsilon_{v,N-1}, \epsilon_{v,N}, \Delta z)$ |
| vol. Blasenanzahl | $N_{b,0} = 5 \cdot 10^9$ | $N_{b,N+1} = f(N_{b,N-1}, N_{b,N}, \Delta z)$ |

Tabelle 3.2.: Randbedingungen für den Fall "gesättigtes Zweiphasengemisch" und schlupffreie Strömung am Eintritt

Durch manuelle Variation des Gegendruckes $p_A$ und anschließendem Neustart des Programms mit den Ergebnissen vorhergehender Rechnungen (Programmoption *Restart*) kann überprüft werden, ob kritisches Ausströmen vorliegt. Bleibt der Massenstrom trotz Absenken des Austrittsdruckes konstant, so ist die Strömung im Sinne der in Kapitel 1 angegebenen Definition kritisch.

Als Alternative zu den oben aufgeführten Randbedingungen können zeitabhängige Zustände am Einström- bzw. Ausströmrand vorgegeben werden. So ist es möglich, den

Gegendruck durch Vorgabe einer geeigneten Zeitfunktion kontinuierlich bis zum experimentell festgestellten Austrittsdruck bzw. bis zum Auslegedruck der nachgeschalteten Anlagenkomponente abzusenken, sofern die Austrittsströmung mit Unterschall erfolgt. Darüberhinaus können zeitabhängige Verläufe des Eintrittsdruckes oder des Eintrittsmassenstromes spezifiziert werden. Auf diese Weise läßt sich beispielsweise das transiente Entleeren eines Behälters als Folge quasistationärer Zustände simulieren. Ein Anwendungsfall hierzu wird in Kapitel 4.2 beschrieben. Bei Vorgabe des Eintrittsmassenstromes ist zu beachten, daß die Randbedingung für den Eintrittsdruck nach Gl. (3.23) nicht mehr verwendet werden kann. Der gegebene Massenstrom legt in diesem Fall die Eintrittsgeschwindigkeit fest, während der Eintrittsdruck variiert und aus den stromabwärtigen Werten extrapoliert wird.

Die im Anhang B.4, S.117, aufgeführten Flußdiagramme zeigen die wesentlichen Schritte im Programmablauf. Einen Überblick über die im aufgestellten Programmsystem "TPTFM" enthaltenen Module bietet Anhang B.3, S.114. Darin werden kommentierte Beispiele zu Eingabe- und Steuerdateien angegeben. Die Abbildungen in Anhang C, S.121, veranschaulichen, ausgehend vom Ruhezustand mit plötzlicher Druckabsenkung am Austritt bis zum Erreichen der stationären Lösung, den Ablauf einer exemplarischen Zeitschrittrechnung. Die stationäre Lösung liegt dann vor, wenn die zeitlichen Änderungen der Primärvariablen abgeklungen sind und die Werte des berechneten Massenstromes in jedem Rechenpunkt innerhalb der erreichbaren Verfahrensgenauigkeit übereinstimmen.

# 4. Ergebnisse

Im Rahmen der Code-Verifikation soll zunächst ein Vergleich zwischen den numerischen Ergebnissen des bereits in Kapitel 1.2 erwähnten Zweifluidmodells von Richter [110, 111] und dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren durchgeführt werden. Das Richter-Modell bietet sich für die Verifikation des eigenen Verfahrens an, da darin eine ähnliche Herangehensweise zur Beschreibung der thermischen und fluiddynamischen Nichtgleichgewichtseffekte in kritischen Zweiphasenströmungen verwendet wird.

Anschließend soll das eigene Verfahren auf Zweiphasenströmungen durch unterschiedliche Kanalgeometrien bei verschiedenen Eintrittsbedingungen angewendet werden. Die Validierung des Verfahrens erfolgt durch Vergleich der berechneten Massenströme sowie der axialen Verteilungen wichtiger Größen innerhalb der Strömungskanäle mit experimentellen Ergebnissen.

Im Hinblick auf das am Eintritt vorliegende Temperatur- bzw. Druckniveau werden sowohl unterkühlte als auch gesättigte Zustände betrachtet. Da in spontan siedenden Strömungen (*Flashing flows*) thermische Nichtgleichgewichtseffekte verstärkt auftreten, werden überwiegend Beispiele aufgeführt, bei denen die Entspannung aus dem unterkühlten Flüssigkeitszustand erfolgt. Ferner stellen solche Anwendungsfälle aufgrund der notwendigen Einbindung der Keimbildung höhere Anforderungen an das numerische Simulationsverfahren.

## 4.1. Verifikation des Rechenverfahrens

Das Zweifluidmodell von Richter [110, 111] basiert auf den für die eindimensionale Zweiphasenströmung formulierten Erhaltungsgleichungen von Masse und Impuls der Einzelphasen sowie einer Energiegleichung für das Zweiphasengemisch. Die Wechselwirkungen zwischen den Phasen werden dabei wie in dieser Arbeit mittels konstitutiver Gleichungen für den Impuls-, Wärme- und Stofftransport einbezogen. Die Integration der stationären Erhaltungsgleichungen erfolgt schrittweise entlang der betrachteten Geometrie mit einem expliziten Verfahren, wobei neben dem thermodynamischen Eintrittszustand zu Beginn der Rechnung ein geschätzter Massenstrom anzugeben ist. Der Massenstrom wird nun iterativ solange variiert bis kritische Strömungsverhältnisse erreicht sind. Dabei wird angenommen, daß die kritische Zweiphasenströmung dann vorliegt, wenn der axiale Druckgradient im Austrittsquerschnitt einen Wert von $|\mathrm{d}p/\mathrm{d}z| = 10^4\,\mathrm{MPa/m}$ übersteigt. Das Verfahren kann somit nur auf solche Zweiphasenströmungen angewendet werden, die ein entsprechendes Druckprofil aufweisen und im Sinne des genannten Kriteriums als kritisch bezeichnet werden können. Ferner ist eine Fortsetzung der Rechnung über den kritischen Querschnitt hinaus, wie es beispielsweise bei konvergent-divergenten Kanälen notwendig wäre, in der bestehenden Version des Verfahrens nicht möglich. Den Druckverlust durch Wandreibung bei zweiphasiger Strömung berechnet Richter mit Hilfe des Zweiphasenmultiplikators nach Martinelli und Nelson [85]. Für das Einsetzen von spontanem Sieden bei Überschreiten einer gewissen Flüssigkeitsüberhitzung nach Gln.

(2.60) bzw. (2.61) wird ein Anfangsblasendurchmesser von $d_b = 25\mu$m vorausgesetzt. Die anfängliche Anzahl von Dampfblasen wird mit $N_b = 10^{11}\mathrm{m}^{-3}$ abgeschätzt. Die von Richter berücksichtigten Strömungsformen und deren Übergänge entsprechen denen dieser Arbeit mit Ausnahme des Bereiches $\epsilon_v > 0.8$. In diesem Bereich geht Richter davon aus, daß Ringströmung vorliegt.

Als Referenzfall für den Vergleich zwischen dem Richter-Zweifluidmodell und dieser Arbeit wird ein Versuch von Sozzi und Sutherland [124] verwendet. Bei diesem Versuch wurde am Eintritt unterkühltes Heißwasser durch eine rotationssymmetrische Düse ($L = 44.5\,$mm, $D_E = 43.3\,$mm) mit anschließender Rohrstrecke ($L = 0.23\,$m, $D = 12.7\,$mm) entspannt. Der Eintrittszustand und die gemessenen bzw. berechneten Massenströme sind in **Tabelle 4.1** angegeben. In den folgenden Abbildungen repräsentieren die strichpunktierten Linien die numerischen Ergebnisse des Richter-Modells und die durchgezogenen Linien die Resultate dieses Verfahrens.

| $p_E$ | $T_E^s - T_{l,E}$ | $\dot{m}_{exp}$ | $\dot{m}_{ber}^{\mathrm{Richter}}$ | $\dot{m}_{ber}^{\mathrm{TPTFM}}$ |
|---|---|---|---|---|
| MPa | K | kg/s | kg/s | kg/s |
| 6.63 | 3.2 | 4.30 | 4.08 | 4.15 |
| Massenstromabweichung in % | | | -5.1 | -3.5 |

Tabelle 4.1.: Vergleich gemessener und berechneter Massenströme, Versuch von Sozzi und Sutherland [124]

Wie **Abb. 4.1** zeigt, bewirkt die stetige Querschnittsabnahme im vorderen Düsenabschnitt eine Beschleunigung der Flüssigkeit, die von einem entsprechenden Druckabfall begleitet wird und zu einer Überhitzung der flüssigen Phase führt, vgl. **Abb. 4.2**.

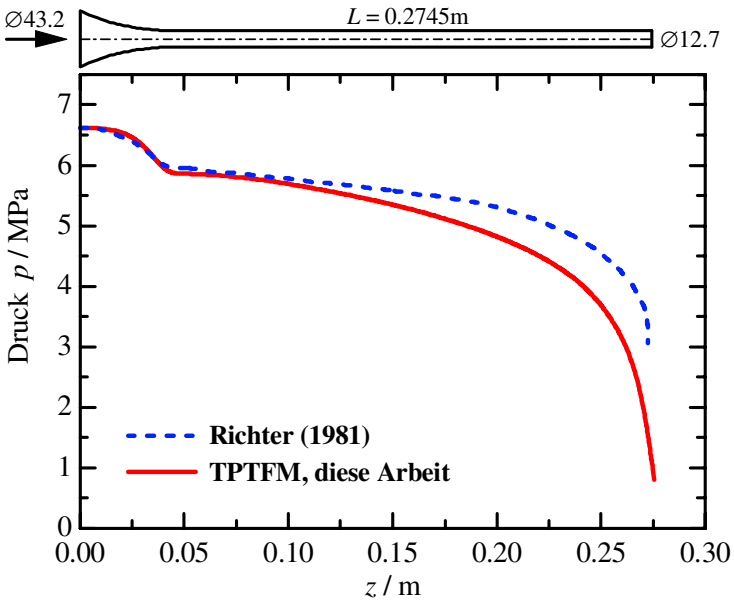



Abb. 4.1: Vergleich berechneter Druckverteilungen, Richter [110]

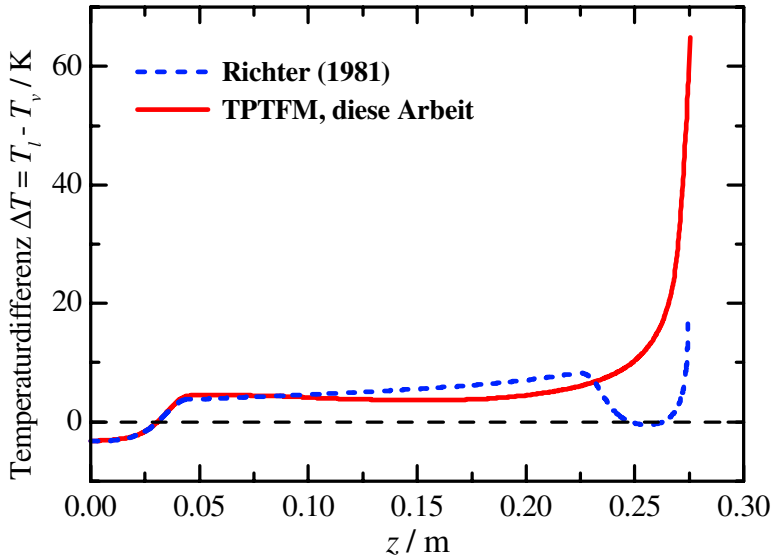



Abb. 4.2: Vergleich berechneter Temperaturdifferenzen zwischen dampfförmiger und flüssiger Phase, Richter [110]

Unmittelbar vor dem Übergang zur Rohrstrecke, bei einer Überhitzung von $\Delta T(z = 36\text{mm}) = 2.11\,\text{K}$ nach diesem Modell, setzt spontanes Sieden mit Blasenbildung ein, siehe **Abb. 4.3**. Nach Angaben von Richter beginnt die Verdampfung schon früher, genaue Zahlenwerte fehlen jedoch.

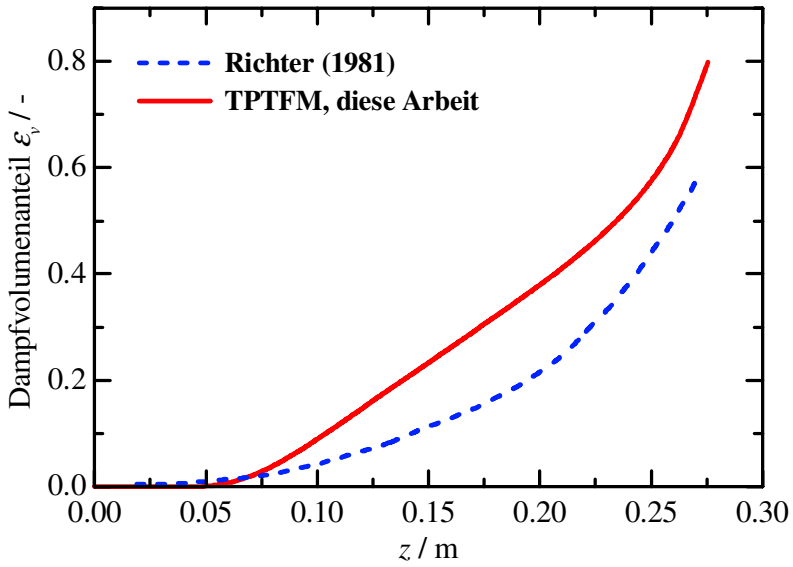



Abb. 4.3: Vergleich berechneter Verteilungen des Dampfvolumenanteils, Richter [110]

Das Richter-Modell prognostiziert im weiteren Verlauf der Rohrstrecke einen geringeren Druckabfall sowie eine geringere Zunahme des Dampfvolumenanteils als dieses Verfahren.

Die **Abb. 4.4** veranschaulicht die Entwicklung der Strömungsgeschwindigkeiten. Die unteren Zweige der Geschwindigkeitsverteilungen stellen dabei jeweils den Verlauf

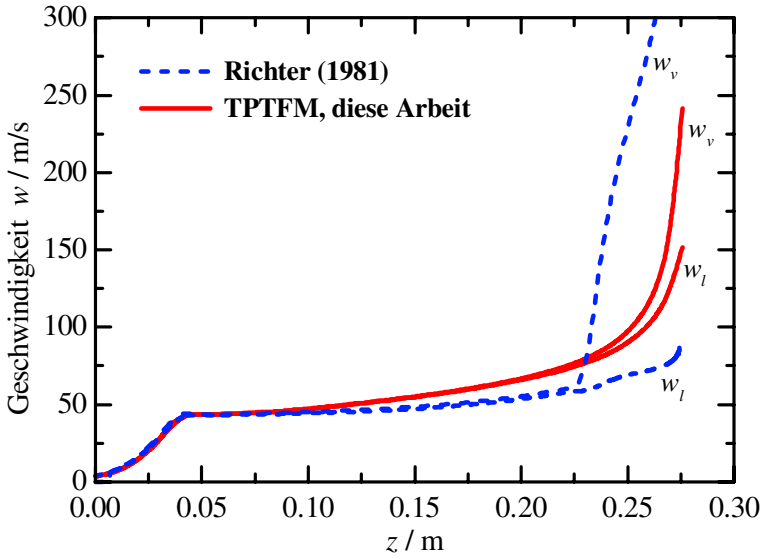



Abb. 4.4: Vergleich berechneter Geschwindigkeitsverteilungen, Richter [110]

der Flüssigkeitsgeschwindigkeit dar, die oberen Zweige zeigen die Geschwindigkeit der Dampfphase. Während mit beiden Modellen über einen weiten Bereich der Rohrstrecke eine nahezu schlupffreie Strömung ermittelt wird, divergieren Dampf- und Flüssigkeitsgeschwindigkeit nach Richter im Austrittsbereich plötzlich sehr stark. Demgegenüber verläuft der Übergang zu schlupfbehafteter Strömung nach dem eigenen Verfahren wesentlich "sanfter" und die sich einstellende Relativgeschwindigkeit zwischen den Phasen bleibt deutlich kleiner als die von Richter ermittelte Relativgeschwindigkeit. Am Austritt beträgt das Geschwindigkeitsverhältnis nach Richter $S_A = 5.9$ gegenüber $S_A = 1.6$ nach dem eigenen Verfahren.

Als Ursache für die im Austrittsbereich auffallend großen Abweichungen der ermittelten Strömungszustände ist die Annahme unterschiedlicher Strömungsformen im Bereich hoher Dampfvolumenanteile zu nennen. Da die mechanische Kopplung der Phasen bei Ringströmung (Richter-Modell) geringer ist als bei disperser Tropfenströmung (dieses Modell) und dieses Phänomen in den Rechenverfahren auch mittels der entsprechenden physikalischen Teilmodelle zur Impulsübertragung berücksichtigt wird, ergeben sich zwangsläufig unterschiedliche Schlupfwerte.

Für eine genauere Beurteilung beider Modelle im Hinblick auf eine korrekte Wiedergabe der realen Strömungsverhältnisse in der Düse wären detailliertere experimentelle Ergebnisse (z.B. in Form von Druckprofilen und Verteilungen des Dampfvolumenanteils) notwendig, die in diesem Fall jedoch nicht vorlagen.

## 4.2. Validierung des Rechenverfahrens

### 4.2.1. Entspannung von flüssigem Kältemittel im Kapillarrohr (Mikol)

Der Einfluß der Wandreibung auf das hier vorgestellte Strömungsmodell soll anhand zweier etablierter und in Abschnitt 2.3.2 vorgestellter Verfahren, dem Ansatz von Friedel [48] und dem von Beattie [14][1], gezeigt werden.

Dies geschieht zweckmäßig am Beispiel einer Rohrströmung mit kleinem Verhältnis von Durchmesser zu Länge, da hierbei die Druckverluste durch Wandreibung einen relativ großen Anteil am Gesamtdruckabfall haben und Auswirkungen unterschiedlicher Reibungsmodelle auf die Simulationsergebnisse deutlich hervortreten. In allen für diesen Anwendungsfall im Anschluß dargestellten Rechnungen wurde von Keimbildung an der Wand nach dem Modell von Shin und Jones [122] (Abschnitt 2.3.4.1, S.45) ausgegangen. Die Berücksichtigung einer Keimbildung im Strömungskern (Abschnitt 2.3.4.2, S.48) hatte hier im Gegensatz zu Simulationsrechnungen für Rohre großen Durchmessers keinen merklichen Einfluß auf die Ergebnisse.

Ergänzend zur Variation der Reibungsmodelle wurde eine Rechnung mit erzwungener homogener Gleichgewichtsströmung durchgeführt. Schlupffreie Strömungsverhältnisse ($w_v = w_l$) wurden dabei durch künstliche Verstärkung des Impulstransportes (Faktor 1000) über die Korrelationen zur Berechnung der Reibung zwischen den Phasen, Abschnitt 2.3.3.1, erzwungen. Um eine Annäherung an das thermische Gleichgewicht zwischen den Phasen ($T_l \rightarrow T_v = T^s(p)$) zu erreichen, wurde der Wärmeübergangskoeffizient an der Phasengrenze um das 100-fache gegenüber den in Abschnitt 2.3.6 aufgeführten Korrelationen erhöht.

Mikol [88][2] untersuchte stationäre, adiabate Expansionsströmungen des Kältemittels R22 durch ein Kapillarrohr mit einem Innendurchmesser von $D_h = 1.41\,\text{mm}$ und einer Länge von $L = 1.829\,\text{m}$. Kapillarrohre werden in Kleinkältegeräten eingesetzt und dienen hierin der Entspannung des Kältemittels vom Kondensatordruck auf den Verdampferdruck (vgl. Jungnickel et al. [70, Abschn. 4.2.1.] und Quack [104]). In **Tabelle 4.2** sind die für die Nachrechnung benötigten Randbedingungen sowie die gemessenen und berechneten Massenströme angegeben.

Die berechneten Massenströme sind geringfügig größer als die experimentellen Massenströme, wobei der Unterschied zwischen den Rechnungsvarianten "Beattie" und "Friedel" nur unwesentlich ist. Eine deutlich bessere Übereinstimmung mit dem gemessenen Massenstrom ergibt sich erwartungsgemäß bei Vorgabe homogener Gleichgewichtsbedingungen, da der Entspannungsvorgang mit vergleichsweise geringen Druckgradienten verläuft.

Die **Abb. 4.5** zeigt die zu den einzelnen Rechnungsvarianten gehörenden Druckverteilungen sowie die gemessenen Einzeldrücke. Bei horizontaler Strömung kann der örtliche

[1] Dabei wird für das folgende Beispiel angenommen, daß die Reibungskorrelationen von Friedel über den in **Tabelle 2.1** angegebenen Durchmesserbereich hinaus verwendet werden können.

[2] Die Experimentaldaten entstammen der Arbeit von Escanes et al. [45]. Angaben zu der Konzentration von Kälteöl im Kältemittel, das zu einer Dampfdruckverringerung führt, werden darin nicht gemacht. Es wird daher angenommen, daß bei den Versuchen reines R22 verwendet wurde.

| $p_E$ | $p_A$ | $T_E^s - T_{l,E}$ | $\dot{m}_{exp}$ | $\dot{m}_{ber}^{\text{Beattie}}$ | $\dot{m}_{ber}^{\text{Friedel}}$ | $\dot{m}_{ber}^{\text{Friedel}}$ (hom. Glgw.) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| MPa | MPa | K | kg/h | kg/h | kg/h | kg/h |
| 1.641 | 0.400 | 2.16 | 30.7 | 32.8 | 32.6 | 31.6 |
| Massenstromabweichung in % | | | | 6.8 | 6.2 | 2.9 |

Tabelle 4.2.: Vergleich gemessener und berechneter Massenströme, Reynolds-Zahl am Eintritt: $\text{Re}_{exp} = 5.58 \cdot 10^4$, Kapillarrohr-Experiment von Mikol [88]

Anteil des Reibungdruckverlustes $\Delta p_R$ am Gesamtdruckabfall $\Delta p$ unter Verwendung des Beschleunigungsdruckabfalls $\Delta p_B$ wie folgt abgeschätzt werden:

$$\left.\frac{\Delta p_R}{\Delta p}\right|_z^{z+\Delta z} = 1 - \left.\frac{\Delta p_B}{\Delta p}\right|_z^{z+\Delta z}, \tag{4.1}$$

wobei für den örtlichen Beschleunigungdruckabfall gilt (VDI-WA97 [132, Abschn. Lga]):

$$\Delta p_R|_z^{z+\Delta z} = G^2 \left[\frac{\dot{x}^2}{\epsilon_v\, \rho_v} + \frac{(1-\dot{x})^2}{\epsilon_l\, \rho_l}\right]_z^{z+\Delta z}. \tag{4.2}$$

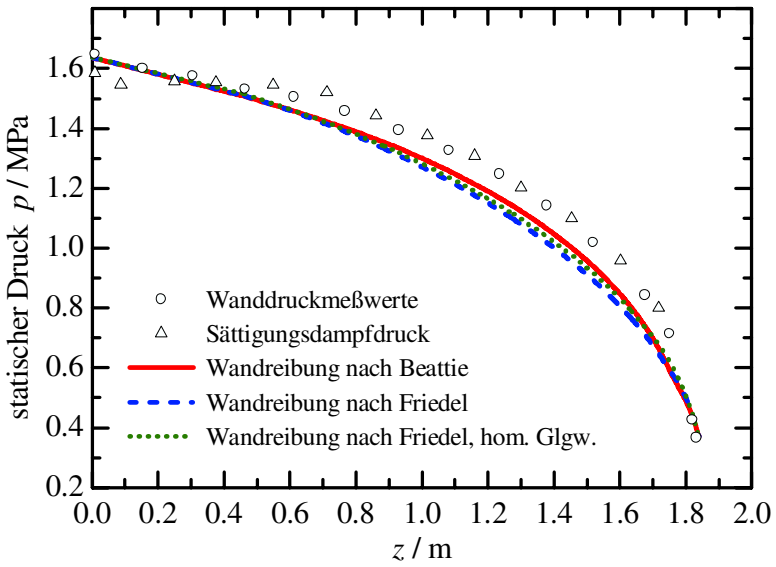



Abb. 4.5: Vergleich gemessener und berechneter Druckverteilungen, Mikol [88], Fall 2

In **Abb. 4.6** sind die Anteile des reibungsbedingten Druckverlustes am Gesamtdruckabfall dargestellt. Im Bereich der einphasigen Strömung sind Reibungsdruckverlust und Gesamtdruckabfall identisch. Erst mit Beginn der Dampfbildung gewinnt der Druckabfall durch Beschleunigung in zunehmenden Maß an Bedeutung, so daß er am Rohrende erwartungsgemäß dominiert.

Der hohe Anteil des Reibungsdruckverlustes begründet die Wichtigkeit einer "guten" Reibungskorrelation bei der Berechnung von Zweiphasenströmungen durch lange Rohre. Es wird daher erwartet, daß die Erfassung des Druckverlustes mit speziell für den

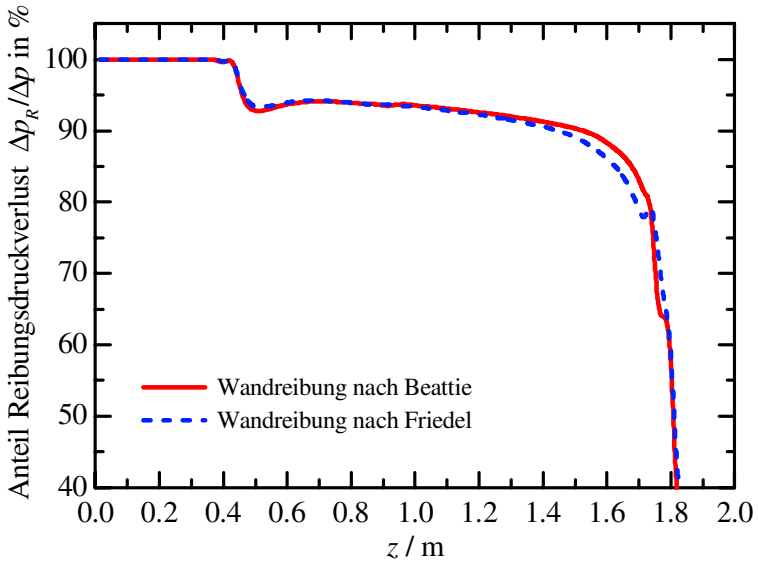



Abb. 4.6: Anteil des Reibungsdruckverlustes am Gesamtdruckabfall, Mikol [88], Fall 2

Einsatz bei Kältemittel-Kapillarrohrströmungen entwickelten Reibungsmodellen zu genaueren Simulationsergebnissen führt (Philipp [101]).

In den **Abbn. 4.7** und **4.8** sind die berechneten Dampfvolumenanteile $\epsilon_v$ und der Strömungsdampfgehalt $\dot{x}$ aufgetragen. Die Rechnungsvariante "Homogenes Gleichgewicht" zeigt eine deutlich stärkere Zunahme des Dampfvolumenanteils bzw. des Strömungsdampfgehaltes im anfänglichen Stadium der Verdampfung. Der Dampfvolumenanteil ist bei allen Rechnungen proportional zur Lauflänge $z$ des Kapillarrohres. Die berechneten Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilungen sind in den **Abbn. 4.9** und **4.10** dargestellt.

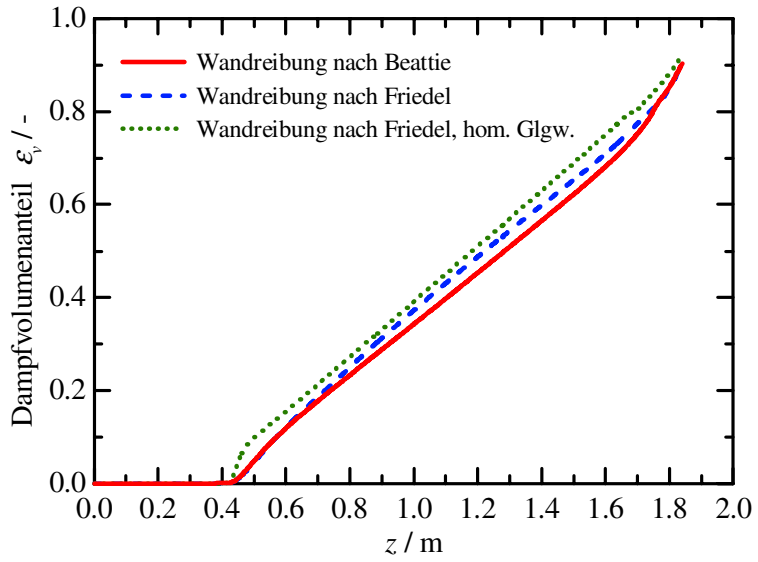



Abb. 4.7: Vergleich berechneter Verteilungen des Dampfvolumenanteils, Mikol [88], Fall 2

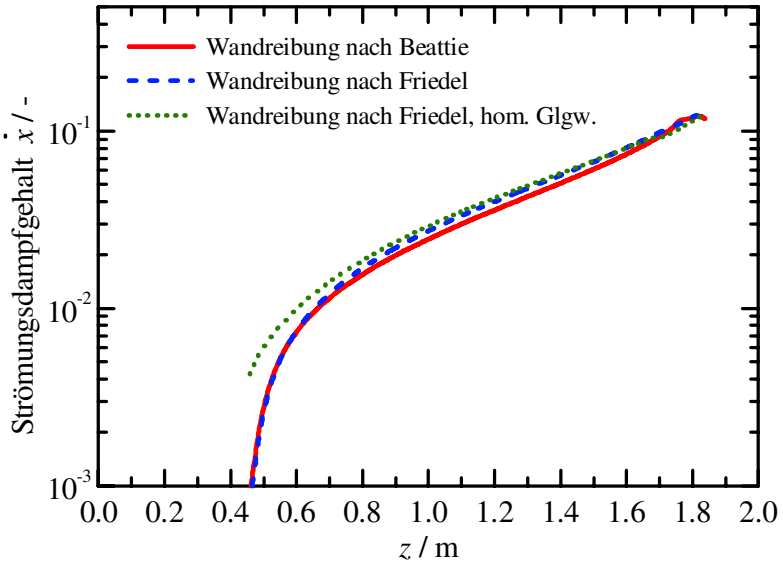



Abb. 4.8: Vergleich berechneter Verteilungen des Strömungsdampfgehaltes, Mikol [88], Fall 2

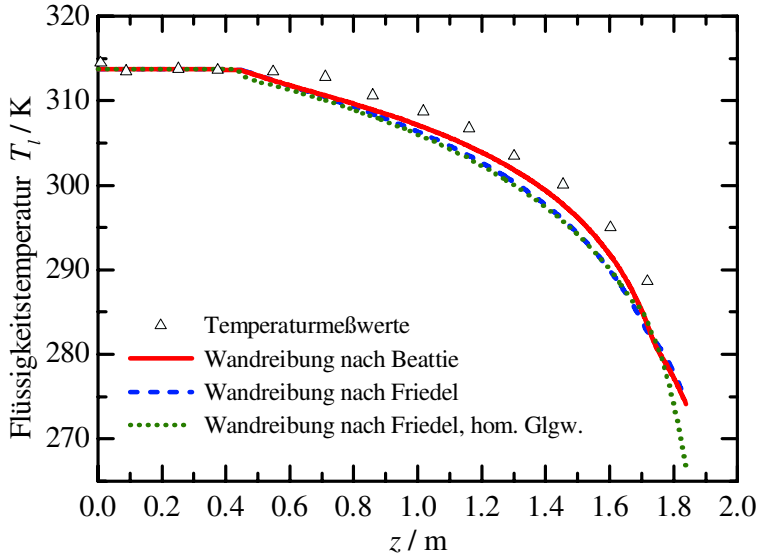



Abb. 4.9: Vergleich gemessener und berechneter Temperaturverteilungen, Mikol [88], Fall 2

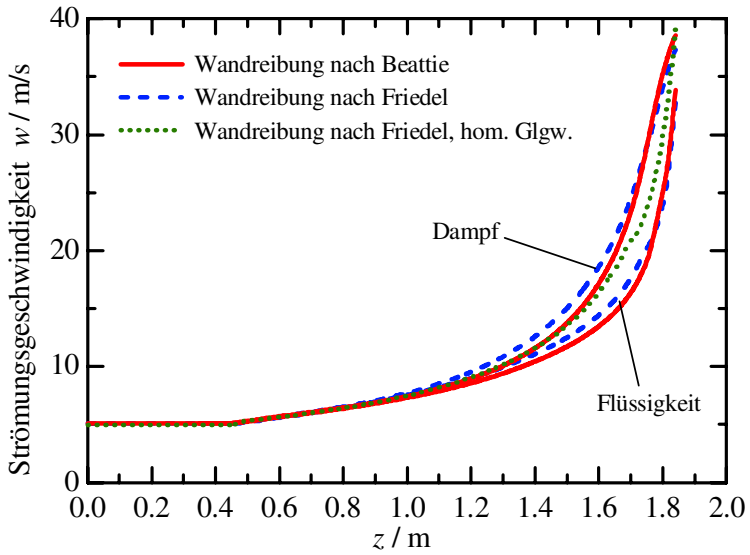



Abb. 4.10: Berechnete Geschwindigkeitsverteilungen, Mikol [88], Fall 2

## 4.2.2. Flashing-Experimente von Bolle et al.

Bolle et al. [18] führten Flashing-Experimente mit Wasser in einem Sicherheitsventil und in einer Modellausführung des Ventils, das eigens für Druckmessungen konstruiert wurde, durch. Die Ventilform der Modellausführung mit einem Eintrittsinnendurchmesser von 26.5 mm und einem Innendurchmesser von 10.4 mm im Bereich des zweiten Rohrabschnittes ist in **Abb. 4.11** aufgetragen. In dieser Abbildung werden gemessene und berechnete Druckverteilungen der Versuche 11/2 und 15/2 verglichen. Spontanes Sieden setzt in diesen Beispielen erst kurz vor dem Austritt, im Bereich des engsten Querschnittes im Anschluß an den zweiten konvergenten Ventilabschnitt, ein.

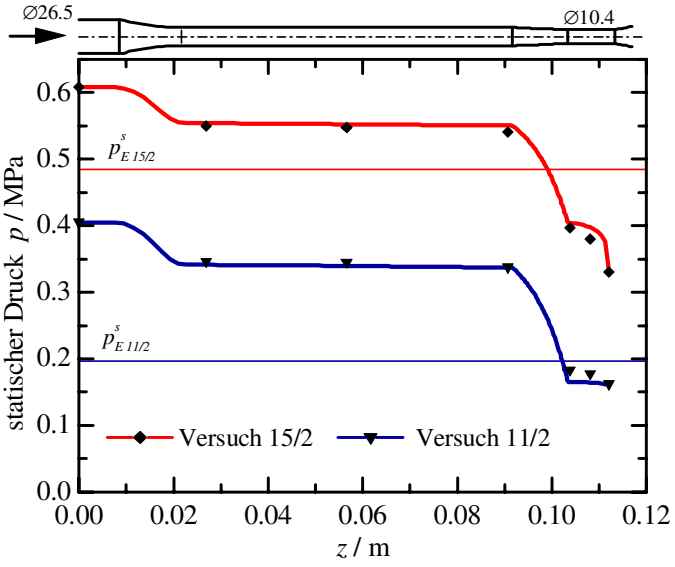



Abb. 4.11: Gemessene und berechnete Druckverteilungen, Bolle et al. [18]

In **Tabelle 4.3** sind weitere Experimentaldaten sowie berechnete Massenströme aufgelistet. Bei hohen Eintrittsunterkühlungen stimmen die berechneten Durchsätze gut mit den Meßwerten überein, wohingegen bei geringen Eintrittsunterkühlungen (Versuche 16/2 und 17/2) größere Abweichungen vorhanden sind. Die Dampfbildung wird in diesen Fällen vom Simulationsmodell überschätzt. Denkbar ist auch, daß sich bei diesen Experimenten bereits im Strang vor dem Sicherheitsventil Dampf ausbildet und die Angaben zum experimentell ermittelten Massenstrom damit unsicher macht.

| Versuch | $p_E$ | $T_E^s - T_{l,E}$ | $\dot{m}_{exp}$ | $\dot{m}_{ber}$ | $\Delta\dot{m}/\dot{m}_{exp}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | MPa | K | kg/s | kg/s | % |
| 1/2 | 0.600 | 141.64 | 2.70 | 2.56 | -5.2 |
| 7/2 | 0.556 | 35.70 | 2.21 | 2.30 | 4.1 |
| 8/2 | 0.610 | 39.49 | 2.35 | 2.46 | 4.7 |
| 11/2 | 0.405 | 24.37 | 1.75 | 1.80 | 2.9 |
| 12/2 | 0.512 | 33.64 | 2.12 | 2.16 | 1.9 |
| 14/2 | 0.572 | 37.88 | 2.27 | 2.36 | 4.0 |
| 15/2 | 0.608 | 8.66 | 1.65 | 1.61 | -2.4 |
| 16/2 | 0.502 | 2.10 | 1.31 | 1.16 | -11.5 |
| 17/2 | 0.560 | 6.47 | 1.61 | 1.48 | -8.1 |
| 18/2 | 0.614 | 10.05 | 1.77 | 1.70 | -4.0 |

Tabelle 4.3.: Gemessene und berechnete Daten der Experimente, Bolle et al. [18]

### 4.2.3. Untersuchungen von Zimmer et al. und Abuaf et al.

Zimmer et al. [145] und Abuaf et al. [1] berichten über die am Brookhaven National Laboratory (BNL) durchgeführten Experimente mit aufwärts gerichteten Zweiphasenströmungen von Wasser durch eine rotationssymmetrische konvergent-divergente Düse mit einer Länge von $L = 559\,\text{mm}$. Wie **Abb. 4.12** entnommen werden kann, ist die untersuchte Düse symmetrisch zur Ebene des Düsenhalses, der einen Innendurchmesser von 25 mm besitzt. Der Eintritts- bzw. Austrittsdurchmesser beträgt 51 mm. Neben der Messung von Wanddrücken wurden mit Hilfe eines Gammastrahl-Densitometers auch querschnittsgemittelte Dampfvolumenanteile erfaßt.

Ergänzend sind für die BNL-Versuche neben den Ergebnissen des Zweifluidmodelles Resultate der Vorgängerversionen aufgeführt, um die im Rahmen dieser Arbeit zurückgelegten Entwicklungsschritte bei der numerischen Modellierung von Zweiphasenströmungen zu dokumentieren:

HNEM : Homogenes Nichtgleichgewichtsmodell (**H**omogeneous **N**on-**E**quilibrium **M**odel), aus Wein und Huhn [139] mit $S = w_v/w_l = 1$,

DFM : Driftflußmodell (**D**rift-**F**lux **M**odel), aus Wein und Huhn [139] mit Schlupfkorrelation nach Huq und Loth [64], Gl. (1.63),

TPTFM: Zweiphasen-Zweifluidmodell (**T**wo-**P**hase **T**wo-**F**luid **M**odel, diese Arbeit).

Zusätzliche Daten berücksichtigter BNL-Versuche sind in **Tabelle 4.4** aufgeführt.

| Run | $p_E$ | $T_E^s - T_{l,E}$ | $\dot{m}_{exp}$ | $\dot{m}_{ber}^{\mathrm{HNEM}}$ | $\dot{m}_{ber}^{\mathrm{DFM}}$ | $\dot{m}_{ber}^{\mathrm{TPTFM}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | MPa | K | kg/s | kg/s | kg/s | kg/s |
| 148 | 0.305 | 12.8 | 7.50 | 7.95 | 8.26 | 7.83 |
| 273 | 0.573 | 8.4 | 8.86 | 9.21 | 9.45 | 9.05 |
| 288 | 0.530 | 4.8 | 7.25 | 7.65 | 7.83 | 7.52 |
| 309 | 0.556 | 6.8 | 8.94 | 8.56 | 8.79 | 8.45 |
| 780 | 0.138 | 9.6 | 5.13 | 5.05 | 5.33 | 4.98 |

Tabelle 4.4.: Meßwerte und Rechenergebnisse von BNL-Versuchen, Zimmer et al. [145] und Abuaf et al. [1]

In **Abb. 4.12** und **Abb. 4.13** werden die gemessenen axialen Verteilungen von Druck und Dampfvolumenanteil den berechneten Werten für den Versuchslauf 309 gegenübergestellt.

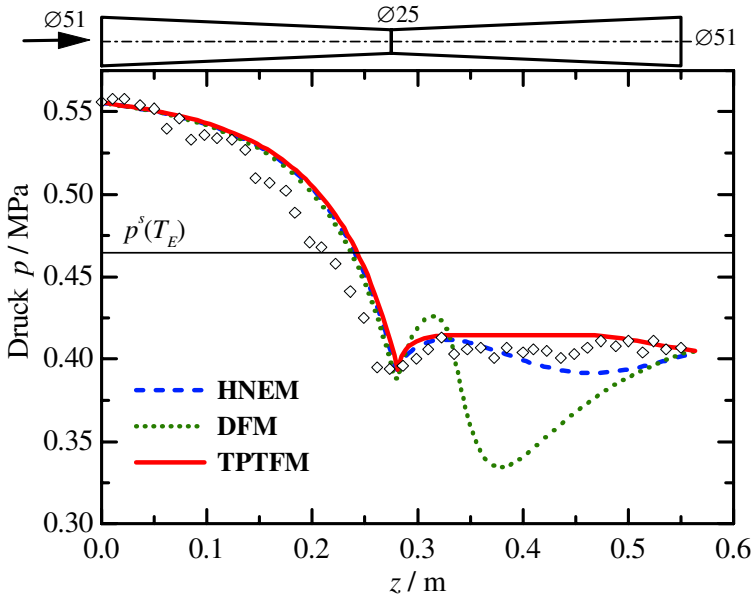



Abb. 4.12: Vergleich gemessener und berechneter Druckverteilungen, Run 309 Zimmer et al. [145]

Die mit dem Zweifluidmodell und dem Homogenen Nichtgleichgewichtsmodell berechneten Verläufe weisen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Profilen auf. Der nahezu konstant bleibende Druck im divergenten Teil der Düse, der von einem steilen Anstieg des Dampfvolumenanteils begleitet wird, kann nach Angaben von Zimmer et al. als typisches Verhalten für Experimente bei hohen Massenstromdichten angesehen werden. Die rasche Dampfbildung scheint hierbei die Zunahme des Strömungsquerschnitts im Diffusor vollständig auszugleichen und den Druckrückgewinn zu unterbinden.

Es fällt auf, daß die berechneten Profile des Dampfvolumenanteils im Vergleich zu den gemessenen Werten in Richtung des Düsenaustrittes verschoben sind. Dies könnte an

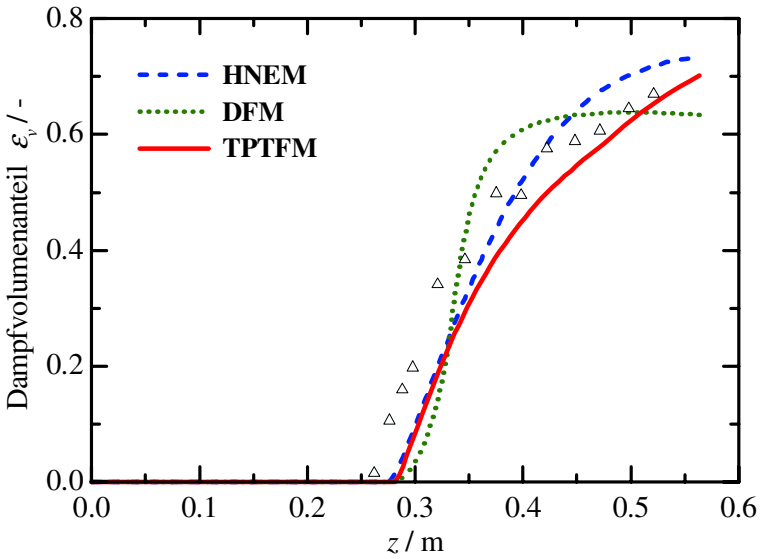



Abb. 4.13: Vergleich gemessener und berechneter Verteilungen des Dampfvolumenanteils, Run 309, Zimmer et al. [145]

der experimentell belegten, verstärkt ungleichförmigen Verteilung des Dampfvolumenanteils in radialer Richtung liegen, die von den verwendeten quasi-eindimensionalen Berechnungsmodellen nicht aufgelöst werden können.

Die Untersuchung der Dampfvolumengehaltsmessungen von Zimmer et al. [145] offenbarte, daß sich der Dampf vorwiegend in der Nähe der Düsenwand befindet. Dies deutet darauf hin, daß die an der Wand gebildeten Dampfblasen eher zur Koaleszenz neigen, um einen geschlossenen Dampfring auszubilden, als sich in den Kernbereich der Düse zu bewegen.

In **Abb. 4.14** sind die mit dem Programm "TPTFM" berechneten Phasengeschwindigkeiten für diesen Versuch dargestellt. Im Bereich der Blasenströmung sind die Strömungsgeschwindigkeiten von Dampf und Flüssigkeit nahezu gleich, da einerseits ein geringer axialer Druckgradient vorliegt und andererseits die bei dieser Strömungsform stark ausgeprägte mechanische Kopplung der Phasen schlupfmindernd wirkt. Abweichungen zwischen den Phasengeschwindigkeiten treten erst am Ende der Düse im Bereich der Blasen-/Pfropfenströmung auf, weil hier der Druck wieder stärker abfällt.

Bei kleineren Massenstromdichten, vgl. **Abb. 4.15**, nehmen die gemessenen und berechneten Drücke innerhalb des divergenten Düsenabschnittes zu und weisen damit eine qualitativ ähnlichen Verlauf wie bei einphasiger Strömung durch eine Venturi-Düse auf.

Wie **Abb. 4.16** exemplarisch zeigt, wird die Dampfbildung unmittelbar stromabwärts des Düsenhalses bei relativ kleinen Massenströmen von den Rechenmodellen überschätzt. In diesem Bereich wurde während der Versuche ein intermittierendes Erscheinen und anschließendes, plötzliches Kollabieren von Dampfblasen festgestellt. Die starke Streuung der Dampfvolumenmeßwerte stromab des Düsenhalses spiegelt dieses Phänomen wider. Der rasch verlaufende Kondensationsvorgang, der nach Überschreiten des Sättigungsdampfdruckes eintritt, wird von dem Zweifluidmodell recht gut wiedergegeben.

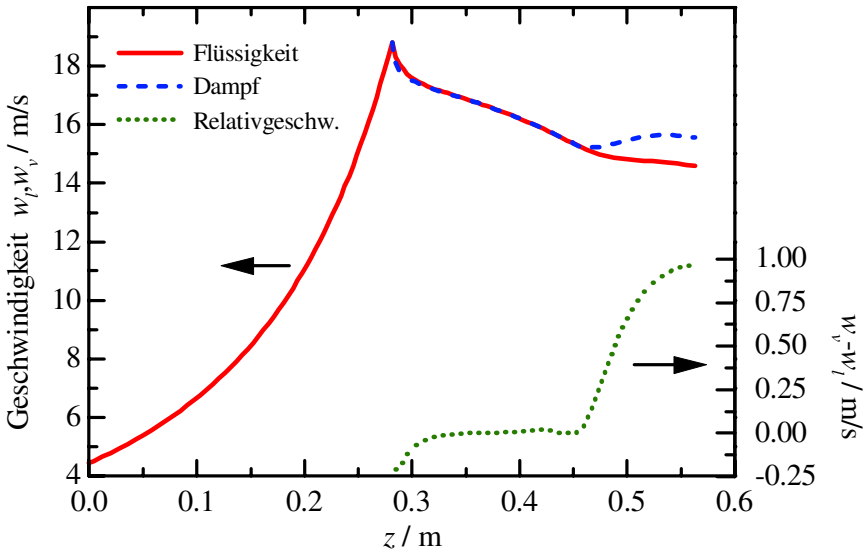



Abb. 4.14: Mit dem Programm "TPTFM" berechnete Verteilungen der Strömungsgeschwindigkeit von Dampf und Flüssigkeit, Run 309, Zimmer et al. [145]

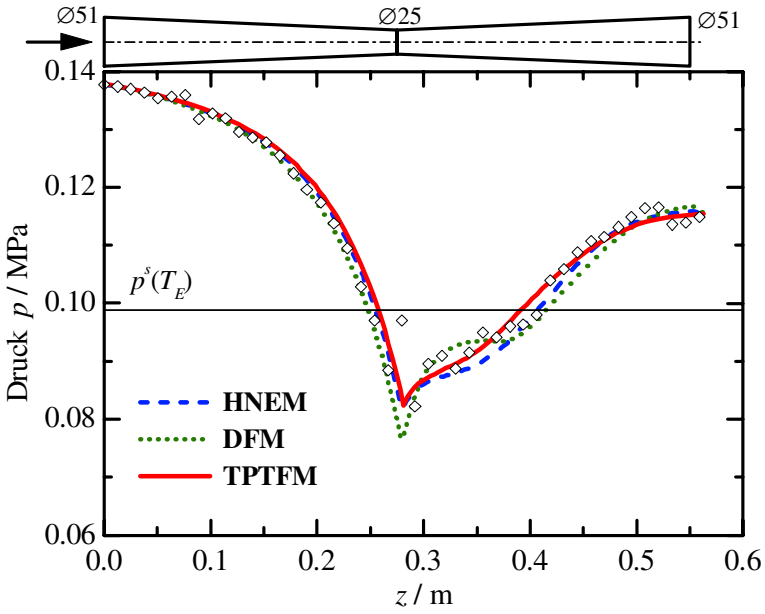



Abb. 4.15: Vergleich gemessener und berechneter Druckverteilungen, Run 780, Zimmer et al. [145]

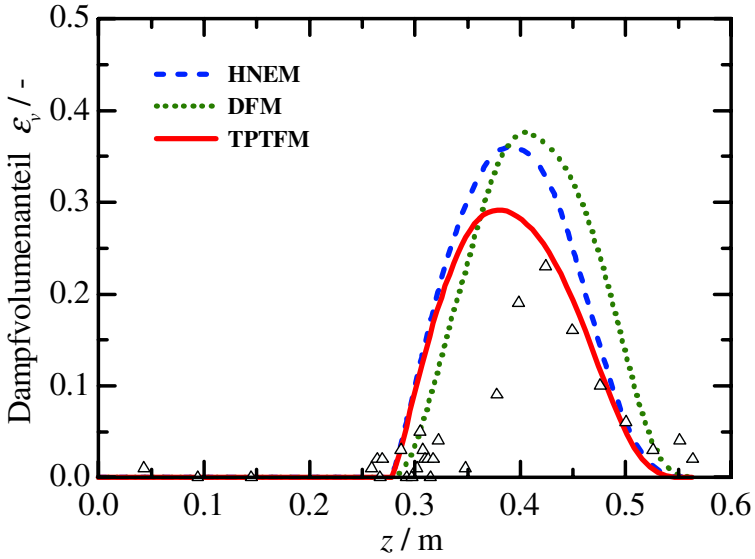



Abb. 4.16: Vergleich gemessener und berechneter Verteilungen des Dampfvolumenanteils, Run 780, Zimmer et al. [145]

### 4.2.4. Marviken-Experimente im Maßstab 1:1 (EPRI-Report)

Um zu überprüfen, ob das vorgestellte Zweifluidmodell auch bei der Anwendung auf Großversuche zuverlässige Vorhersagen liefert, wurden zwei am Marviken-Kraftwerk in Schweden durchgeführte Experimente (EPRI-Report [44][3], Strömungsmedium: Wasser) untersucht. Hierbei wurde der zeitliche Verlauf einer schnellen Druckentlastung eines Behälters (*Blowdown*) über ein 1.82 m langes, am Einlauf gerundetes Rohr mit einem Durchmesser von 0.51 m untersucht.

Zunächst wurde mit dem Zweifluidmodell eine Berechnung durchgeführt, bei der ausschließlich von heterogener Keimbildung an der Wand ("Wandsieden") nach Abschnitt 2.3.4.1, S.45, ausgegangen wurde. Wie die Ergebnisse in **Tabelle 4.5** für das erste Experiment zeigen, verbessert die zusätzliche Berücksichtigung der Keimbildung im Strömungskern ("Strömungssieden") nach Abschnitt 2.3.4.2, S.48, die Genauigkeit des berechneten Massenstromes in diesem Fall deutlich. Der Grund für den zunehmenden Einfluß der Keimbildung im Strömungskern bei größeren Strömungskanälen besteht darin, daß mit größer werdendem Durchmesser auch das Verhältnis von Volumen zu Wandoberfläche steigt.

| Experiment | | | nur Wandsieden | Strömungs- u. Wandsieden |
|---|---|---|---|---|
| $p_E$ | $\Delta T_E$ | $\dot{m}_{exp}$ | $\dot{m}_{ber}$ | $\dot{m}_{ber}$ |
| MPa | K | $10^3$ kg/s | $10^3$ kg/s | $10^3$ kg/s |
| 4.52 | 23.7 | 10.42 | 10.99 | 10.55 |
| Massenstromabweichung in % | | | 5.5 | 1.2 |

Tabelle 4.5.: Versuchsbedingungen und Resultate, Marviken-Experiment IV, EPRI-Report [44]

[3]Die experimentellen Daten stammen aus Blinkov et al. [17].

Die **Abb. 4.17** zeigt, daß die Berücksichtigung der Keimbildung im Strömungskern zu einer deutlichen Zunahme der Anzahl von Dampfblasen führt. Damit steigt auch die volumetrische Phasengrenzfläche, die für den Wärme- und Stoffaustausch zwischen den Phasen zu Verfügung steht. Das thermische Nichtgleichgewicht kann somit schneller durch Verdampfung abgebaut werden, wobei die Zunahme des Dampfvolumenanteils (**Abb. 4.18**) die beobachtete Herabsetzung des Durchsatzes bewirkt.

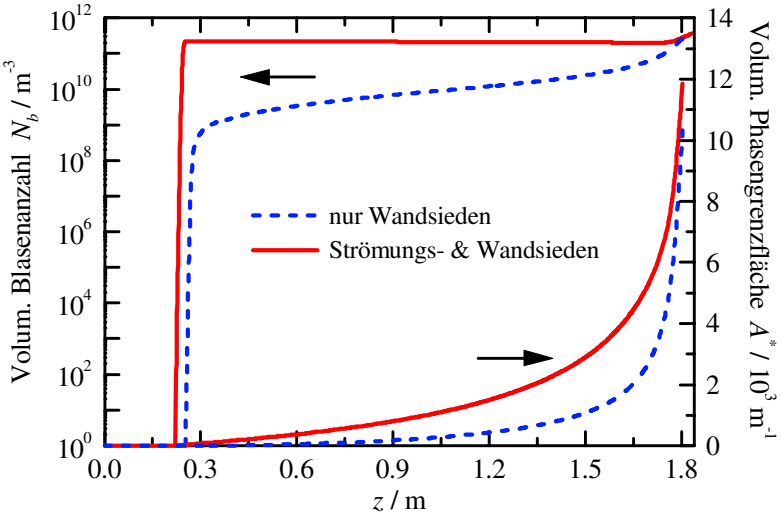



Abb. 4.17: Berechnete Verteilungen der volumetrischen Blasenanzahl und der Phasengrenzfläche, Marviken-Experiment, EPRI-Report [44]

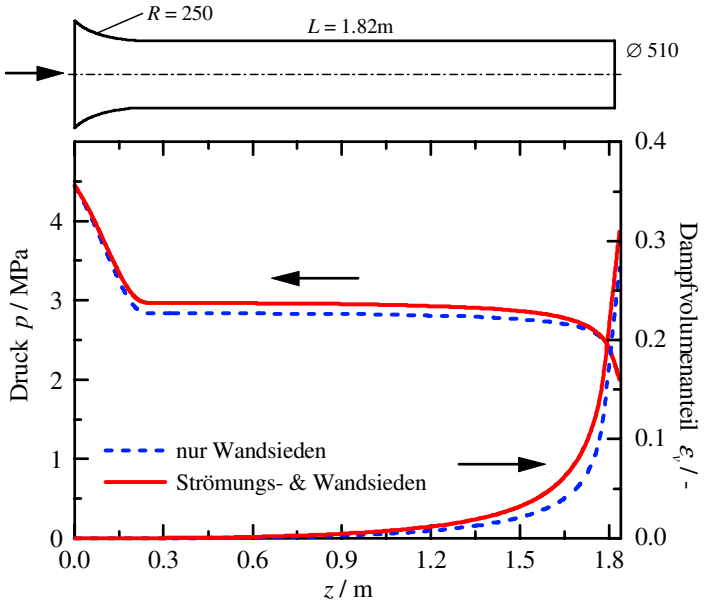



Abb. 4.18: Berechnete Druckprofile und Verteilungen des Dampfvolumenanteils, Marviken-Experiment, EPRI-Report [44]

Die **Abb. 4.19** gibt die Ergebnisse von Nachrechnungen bei transienten Druckrandbedingungen am Rohreintritt (*Blowdown*) wieder. Der experimentell ermittelte Ver-

lauf des Behälterdruckes wurde dabei stückweise linear bzw. mit einer Polynomfunktion in Abhängigkeit von der Zeit approximiert. Zu Beginn der Entlastung beträgt der Behälterdruck $p_{E,0} = 4.67\,\mathrm{MPa}$. Die im betrachteten Zeitbereich als konstant angenommene Eintrittstemperatur des Wassers beträgt $T_E = 507.15\,\mathrm{K}$. Damit ist die Flüssigkeitsunterkühlung im Anfangszustand $\Delta T_{E,0} = 25.7\,\mathrm{K}$. Die Eintrittsform des Strömungskanals entspricht der in **Abb. 4.18** skizzierten Geometrie, die Gesamtlänge ist jedoch wesentlich geringer ($L = 0.955\,\mathrm{m}$, $D = 0.5\,\mathrm{m}$). Daher sind starke Abweichungen vom Gleichgewichtszustand zu erwarten.

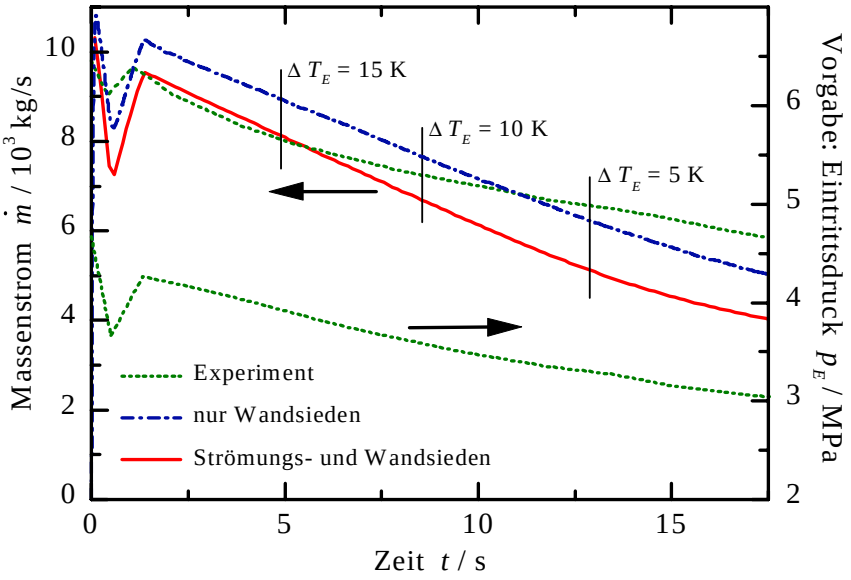



Abb. 4.19: Nachrechnung eines Marviken-Druckentlastungsexperimentes, $L = 0.955\,\mathrm{m}$, $D = 0.5\,\mathrm{m}$, EPRI-Report [44]

Innerhalb einer sehr kurzen Zeitspanne (ca. 0.5 s) nimmt der Eintrittsdruck zunächst drastisch um etwa 1 MPa ab und steigt dann aber in der zweiten Phase (ca. 0.8 s) wieder um 0.6 MPa an. Anschließend fällt der Druck kontinuierlich und weniger schnell als in der ersten Phase bis zum Erreichen des Umgebungsdruckes ab.

Der in **Abb. 4.19** dargestellte Zeitbereich der Nachrechnung[4] endet unmittelbar vor dem Zeitpunkt, an dem der Eintrittsdruck den Sättigungsdruck $p_E = p_E(t) = p^s(T_E)$ erreicht, und demnach rechnerisch gesättigtes Wasser ($\Delta T_E = 0$) aus dem Behälter in das Rohr eintritt.

Bis zu einer Überhitzung von $\Delta T_E \approx 10\,\mathrm{K}$ bei $t = 8.55\,\mathrm{s}$ liefert die gleichzeitige Berücksichtigung von Wand- und Strömungssieden eine bessere Übereinstimmung mit dem gemessenen Massenstrom als bei Vernachlässigung des Strömungssiedens. Mit weiter abnehmender Eintrittsunterkühlung verbessert sich jedoch die Vorhersage der Variante, die nur Wandkeimbildung enthält.

Eine mögliche Ursache dafür besteht darin, daß im Experiment möglicherweise zeitliche Änderungen der Eintrittstemperatur (z.B. durch inhomogene Verteilung der Flüssig-

[4]Die Rechenzeiten für das obige Beispiel betrugen je nach Rechnungsvariante zwei bis zweieinhalb Stunden auf einem 200 MHz Intel Pentium Pro Rechner.

keitstemperatur im Behälter) aufgetreten sind, die in der numerischen Simulation nicht berücksichtigt werden. Ferner besteht die Möglichkeit, daß zeitliche Änderungen der Heterogenität des Strömungsmediums, beispielsweise durch allmähliche Abscheidung nicht kondensierbarer Gase während der Druckabsenkung im Behälter, den Keimgehalt der einströmenden Flüssigkeit verringern und damit das Einsetzen von Verdampfung verzögern. Zur Klärung dieser Frage wäre eine genauere Betrachtung der Versuchsbedingungen notwendig. Die relevante Literaturstelle [44] stand jedoch nicht zur Verfügung.

### 4.2.5. Untersuchungen von Kedziur

In den folgenden Anwendungsbeispielen werden einige von Kedziur [73] durchgeführte Strömungsexperimente mit Wasser betrachtet (siehe **Tabelle 4.6**). Die untersuchte rotationssymmetrische Düse besteht aus einem kurzen konvergenten Abschnitt und einem langen zylindrischen Abschnitt. Geometrie und Hauptabmessungen sind im oberen Teil der **Abb. 4.20** dargestellt.

| Bedingungen am Eintritt | $p_E$ | $x_E$ | $T_E$ | $h_E$ | $\epsilon_{v,E}$ | $\dot{m}_{exp}$ | $\dot{m}_{ber}^{\mathrm{TPTFM}}$ | $\dot{m}_{ber}^{\mathrm{HGlgw}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | MPa | – | K | kJ/kg | – | kg/s | kg/s | kg/s |
| Kaltwasser | 0.972 | 0 | 288.15 | – | – | 6.58 | 6.44 | – |
| gesättigt | 5.220 | 0.166 | 539.80 | 1437.7 | 0.85 | 1.34 | 1.41 | * |
| gesättigt | 5.130 | 0.070 | 538.70 | 1276.6 | 0.69 | 3.07 | 3.08 | 3.04 |
| gesättigt | 5.240 | 0.060 | 540.04 | 1266.8 | 0.65 | 2.48 | 2.62 | 2.66 |

* keine Lösung, Rechnung nicht konvergiert

Tabelle 4.6.: Gemessene und berechnete Daten der Experimente von Kedziur [73]

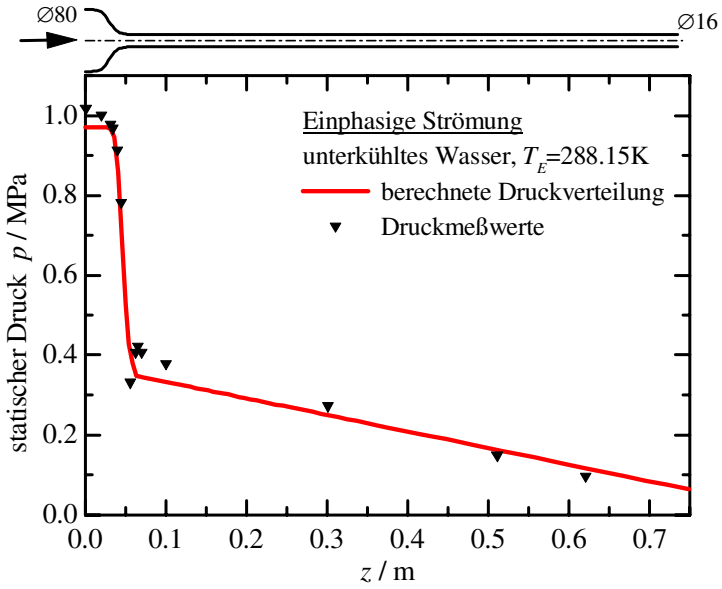



Abb. 4.20: Druckverteilung bei einphasiger Strömung, Kaltwasserversuch, Kedziur [73]

**Abb. 4.20** zeigt gemessene und berechnete Druckverteilungen für die Strömung stets unterkühlten Wassers (reine Flüssigkeitsströmung). Die gute Übereinstimmung des Druckverlaufes im zylindrischen Düsenabschnitt belegt, daß der Reibungsdruckabfall bei einphasiger Strömung gut wiedergegeben werden kann. Die Unterschiede zwischen den gemessenen Wanddrücken und den berechneten Druckverläufen unmittelbar vor und hinter der Querschnittsverengung können auf die Wirkung des radialen Druckungleichgewichtes (Umlenkungseffekt), der bei der eindimensionalen Betrachtung nicht berücksichtigt wird, zurückgeführt werden. Dabei bewirkt die Trägheit der Anströmung im Bereich der konkav nach innen, also zur Symmetrieachse der Düse, verlaufenden Berandung ein Ansteigen der Wanddrücke. Der daran anschließende Wechsel zu einem (nach innen) konvexen Wandprofil führt hingegen zu einer Abnahme des Druckes in Wandnähe.

Die Auswirkung der auf die Volumeneinheit bezogenen Zentrifugalkraft auf die Querverteilung des Druckes in einer krummlinigen inkompressiblen Strömung läßt sich nach Prandtl et al. [102] vereinfachend durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\frac{\rho\, w^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}. \tag{4.3}$$

Darin ist $r$ der Krümmungsradius der Bahnkurve eines Fluidteilchens und $w$ dessen Strömungsgeschwindigkeit. Gl. (4.3) veranschaulicht, daß der Druck in Richtung des Krümmungsmittelpunktes abfällt. Im Falle einer geradlinigen Strömung, $r \to \infty$, besteht hingegen kein Druckunterschied quer zur Strömungsrichtung.

Die Abweichung zwischen dem gemessenen und dem berechneten Dampfvolumenanteil am Düseneintritt in **Abb. 4.21** resultiert aus der Vernachlässigung des Phasenschlupfes am Einströmrand.

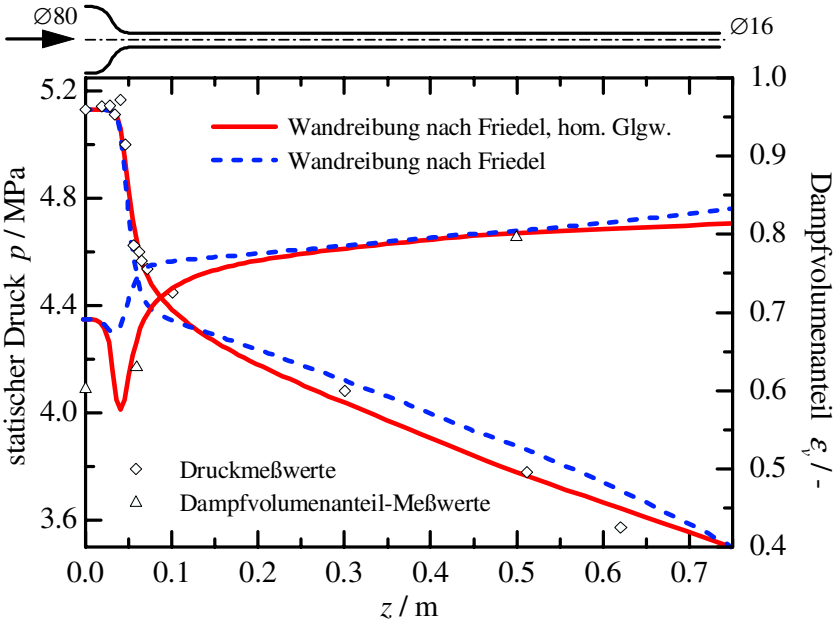



Abb. 4.21: Vergleich gemessener und berechnter Druckverteilungen bei gesättigtem Eintrittszustand, Kedziur [73]

Nach Angaben von Kedziur [73] beträgt der aus Meßwerten ermittelte Eintrittsschlupf $S_E = 1.45$. Aus Gl. (1.42) erhält man mit diesem Geschwindigkeitsverhältnis einen Dampfvolumenanteil von $\epsilon_v = 0.61$, der mit dem gemessenen Dampfvolumenanteil besser übereinstimmt. Eine entsprechende Randbedingung für schlupfbehaftete Eintrittsströmungen ist in der vorliegenden Programmversion jedoch nicht verfügbar.

Die Ausbildung des talförmigen Verlaufes des Dampfvolumenanteils im konvergenten Abschnitt der Düse ist im wesentlichen auf die Verdrängungswirkung der nahezu inkompressiblen Flüssigkeit auf die stark kompressible Dampfphase zurückzuführen. Die Abnahme des Strömungsquerschnittes bzw. der resultierende Druckgradient bewirkt in Verbindung mit den unterschiedlichen Trägheiten von Dampf und Flüssigkeit, daß die Dampfphase hier wesentlich stärker als die Flüssigkeit beschleunigt wird (vgl. **Abb. 4.22**). Die entgegenwirkende Zunahme des Dampfvolumenanteils durch Verdampfung kann diesen Effekt zunächst nicht ausgleichen, so daß der Dampfvolumenanteil erst beim Übergang in den Rohrabschnitt bei abnehmender Steilheit des Druckgradienten wieder ansteigt.

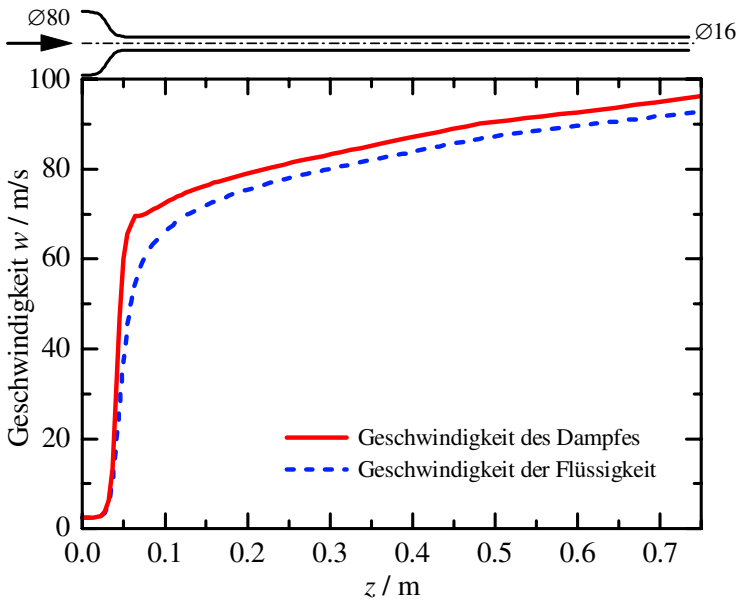



Abb. 4.22: Berechnete Strömungsgeschwindigkeiten von Dampf und Flüssigkeit

Hingegen ist die Ausprägung dieses Effektes bei Annahme homogener Gleichgewichtsströmung geringer, da zum einen beide Phasen die gleiche Beschleunigung erfahren (Zwangsbedingung schlupffreie Strömung), und zum anderen die Verdampfungsrate wesentlich größer ist (Voraussetzung thermischen Gleichgewichtes).

Die **Abb. 4.23** zeigt, daß der starke Druckabfall im konvergenten Kanalabschnitt zu großen Temperaturdifferenzen zwischen flüssiger und dampfförmiger Phase führt, die im Rohrabschnitt zunächst allmählich abgebaut werden. Beim Wechsel der Strömungsform zur Tropfenströmung bei $\epsilon_v = 0.8$ verstärkt sich das thermische Nichtgleichgewicht wieder und die Flüssigkeitstemperatur bleibt nahezu konstant.

Obwohl lokal große Abweichungen vom thermischen und fluiddynamischen Gleichgewicht vorhergesagt werden, ist dieser Effekt bei "integraler" Betrachtung der

hier untersuchten Zweiphasenströmungen offenbar vernachlässigbar klein, wie die Übereinstimmung der ermittelten Massenströme bei Nichtgleichgewichts- bzw. Gleichgewichtsrechnung zeigt. Daraus kann jedoch nicht gefolgert werden, daß bei Vorhandensein von Dampf am Eintritt stets vereinfachend von einer Gleichgewichtsströmung ausgegangen werden kann. Vielmehr wird durch die gezeigten Beispiele die Bedeutung der Kanalgeometrie bzw. der Kanallänge, die hier groß genug ist, um eine Annäherung an den Gleichgewichtszustand zu ermöglichen, offensichtlich.

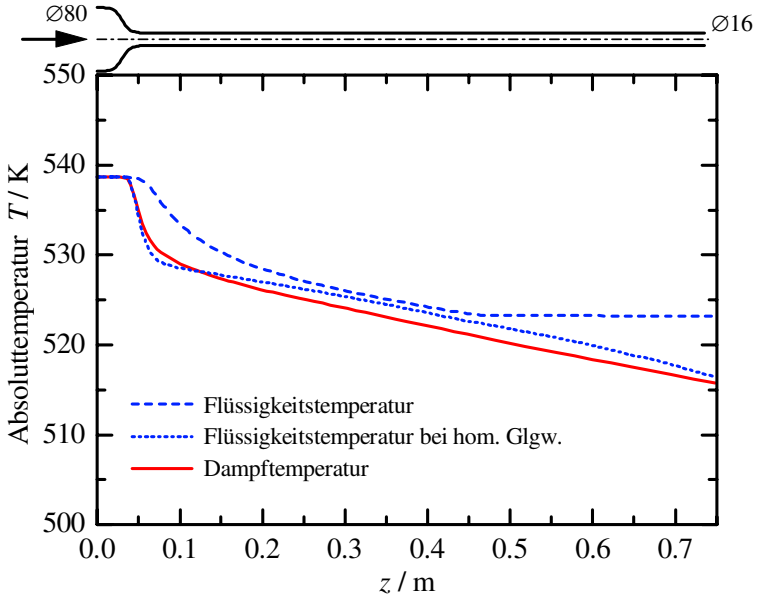



Abb. 4.23: Berechnete Temperaturprofile nach dem Zweifluidmodell und unter Voraussetzung von homogenem Gleichgewicht

## 4.2.6. Adiabate Expansion in einer Laval-Düse Karasev et al.

Gegenstand der experimentellen Untersuchungen von Karasev et al. [71] sind Expansionsströmungen von Heißwasser durch Laval-Düsen. Solche Düsen werden z.B. als Treibdüsen in Ejektorpumpen von Dampfstrahlkältemaschinen eingesetzt, um das Kältemittel aus dem Verdampfer anzusaugen (vgl. Jungnickel et al. [70, Abschn. 5.3]). In Menegay [87] wurde versucht, die Vorgänge im gesamten Dampfstrahlverdichter, bestehend aus Treibdüse, Mischkammer und Diffusor, zu simulieren. Dies gelang jedoch nur für den Mischraum, u.a. weil maßgebliche Phänomene wie das Vorliegen einer Überschallströmung im divergenten Teil der Treibdüse sowie auftretende Abweichungen vom thermo- und fluiddynamischen Gleichgewicht im Berechnungsprogramm nicht berücksichtigt wurden.

In **Tabelle 4.7** sind die Bedingungen der hier behandelten Experimente aus [71] zusammengestellt. Die Laval-Düse besteht aus einem 10 mm langen, gerundeten Einlauf, einem Abschnitt mit konstantem Querschnitt (Länge 18 mm) und einem divergenten Abschnitt (Länge 69 mm, Öffnungswinkel 3°). Im konvergenten Teil der Düse verjüngt sich der Durchmesser von 23 mm auf 3.84 mm. Der Austrittsdurchmesser beträgt 7.5 mm. Die

Form der Düse und die geometrischen Abmessungen sind in den folgenden Abbildungen angegeben.

| Nr. | $p_{A,exp}$ | $p_{A,ber}$ | $\dot{m}_{exp}$ | $\dot{m}_{ber}$ | ermitteltes Strömungsregime am Austritt |
|---|---|---|---|---|---|
| | MPa | MPa | kg/s | kg/s | |
| 1 | 8.00 | 8.00 | * | 0.44 | Blasenströmung mit Unterschallgeschwindigkeit |
| 2 | 6.20 | 6.20 | * | 0.46 | Blasen-/Pfropfenstr. mit Unterschallgeschwindigkeit |
| 3 | 4.50 | 4.50 | * | 0.46 | Tropfenströmung mit Unterschallgeschwindigkeit |
| 4 | 1.85 | 1.33 | 0.52 | 0.46 | Tropfenströmung mit Überschallgeschwindigkeit |
| Eintrittsrandbedingungen: $p_E = 8.70$MPa, $T_{l,E} = 571.4$K | | | | | * Wert nicht verfügbar |

Tabelle 4.7.: Meßwerte und Rechenergebnisse, Karasev et al. [71]

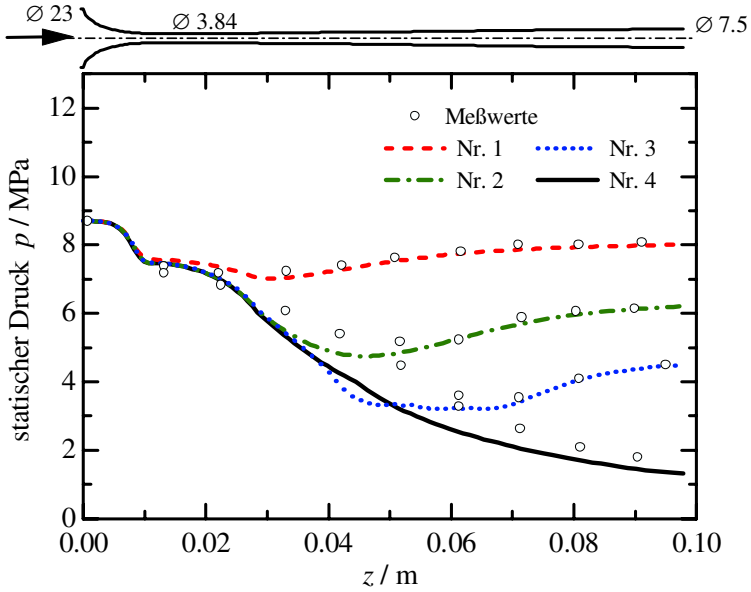



Abb. 4.24: Vergleich gemessener und berechneter Druckverteilungen in der Laval-Düse bei verschiedenen Gegendrücken, Karasev et al. [71]

Die **Abb. 4.24** zeigt den Verlauf von experimentellen und berechneten Druckverläufen bei verschiedenen Austritts- bzw. Gegendrücken.

Aufgrund der Querschnittsverengung sinkt der Druck im konvergenten Düsenabschnitt bei allen Versuchen stark ab (bis auf etwa 7.5 MPa). Mit Erreichen des Rohrabschnitts stellt sich ein deutlich geringerer Druckgradient ein. Durch die in diesem Bereich einsetzende Verdampfung, vgl. **Abb. 4.25**, und der damit verbundenen Beschleunigung des Zweiphasengemisches nimmt der Druckabfall allmählich wieder zu.

Im divergenten Anteil überlagern sich die Einflüsse von Verdampfung (Druckabfall) und Querschnittserweiterung auf den Druckverlauf (Druckzunahme und Verzögerung bei Unterschallströmung bzw. Druckabnahme und Beschleunigung bei Überschallströmung). Hier bzw. schon im Rohrabschnitt verzweigen sich die einzelnen Druckverläufe. Bei Versuch Nr.1 wirkt der gesamte divergente Düsenabschnitt

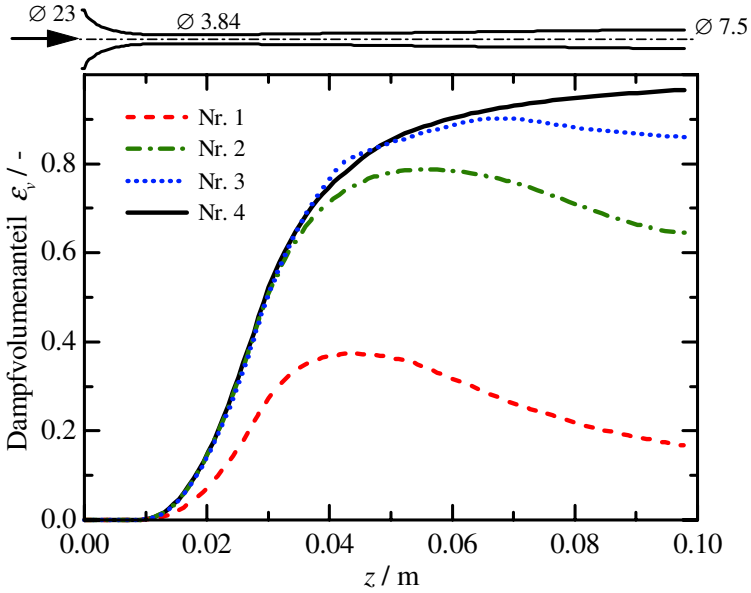



Abb. 4.25: Berechnete Verteilungen des Dampfvolumenanteils in der Laval-Düse bei verschiedenen Gegendrücken, Karasev et al. [71]

als Diffusor. Damit ergibt sich ein Druckprofil, das qualitativ dem Verlauf in einer einphasigen Strömung durch eine Venturi-Düse entspricht. Im Falle der Versuche Nr. 2 bis 4 expandiert das Zweiphasengemisch zunächst auch im divergenten Teil der Düse. Während die Expansion bei Versuch Nr. 4 über den Austrittsquerschnitt hinaus anhält, steigt der Druck bei den Versuchen Nr. 2 und 3 wieder an. Mit absinkendem Gegendruck verschiebt sich das Druckminimum immer weiter in Richtung Düsenaustritt. Die im vorderen Bereich des divergenten Düsenabschnittes vorhandenen Abweichungen zwischen gemessenen Drücken und berechnetem Druckverlauf für die Fälle Nr. 2 bis 4 resultieren vermutlich aus einer vom Berechnungsmodell im Bereich der Blasen-/Pfropfenströmung überschätzten Dampfbildung.

Beim Übergang von Versuch Nr. 1 auf Nr. 2 führt der verringerte Austrittsdruck einen höheren Massenstrom. Hingegen bleibt der Massenstrom bei den übrigen Varianten trotz weiterem Absenken des Gegendruckes unverändert. Somit liegen für die Versuche Nr. 2 bis 4 eindeutig kritische bzw. blockierte Strömungen vor. Die relative Abweichung zwischen berechnetem und gemessenem Massenstrom beträgt -11.5%.

In **Abb. 4.26** sind exemplarisch für die reine Unterschallströmung die berechneten Phasengeschwindigkeiten und die Schallgeschwindigkeit nach Gl. (2.103) entlang der Düse für Versuch Nr. 2 aufgetragen. Bemerkenswert ist der Wechsel im Vorzeichen der Relativgeschwindigkeit zwischen Dampf und Flüssigkeit (von $w_v - w_l > 0$ bzw. $S > 1$ auf $w_v - w_l < 0$ bzw. $S < 1$). Dies kann wieder damit begründet werden, daß sich die mit dem Druckgradienten verbundene Beschleunigung bzw. Verzögerung des Zweiphasengemisches wegen ihrer geringeren Trägheit stärker auf die Dampfphase auswirkt. Folglich steigt die Strömungsgeschwindigkeit des Dampfes im Bereich negativer Druckgradienten zunächst schneller an als die der Flüssigkeit, sinkt jedoch bei Druckanstieg auch wieder schneller ab und unterschreitet die Geschwindigkeit der Flüssigkeit.

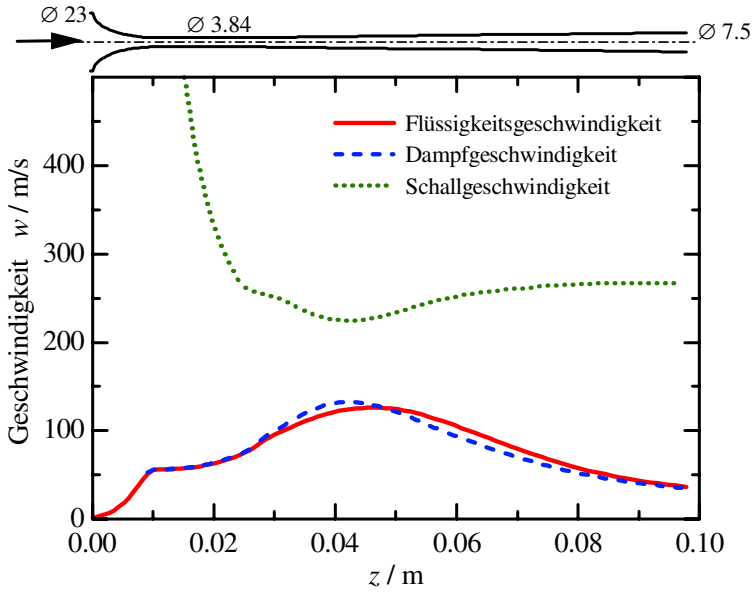



Abb. 4.26: Berechnete Geschwindigkeitsverteilungen von Dampf und Flüssigkeit bei Unterschallströmung, Versuch Nr. 2, Karasev et al. [71]

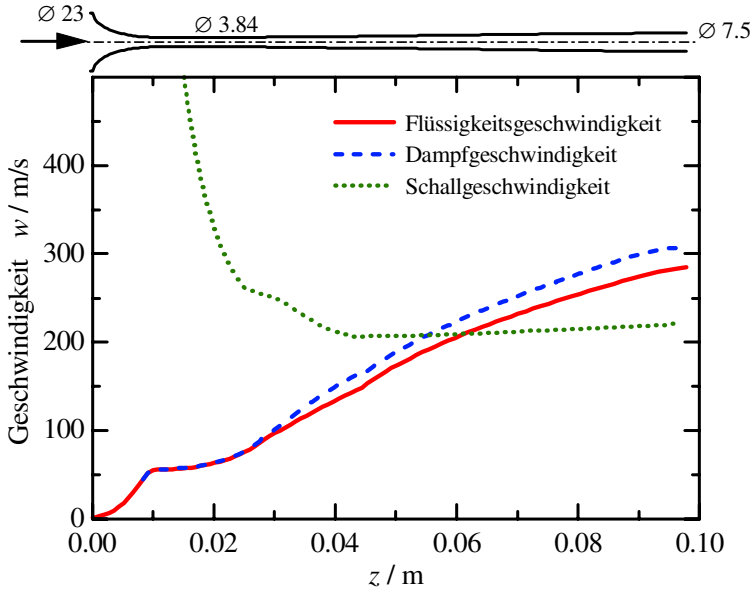



Abb. 4.27: Berechnete Geschwindigkeitsverteilungen von Dampf und Flüssigkeit bei Überschallströmung, Versuch Nr. 4, Karasev et al. [71]

Für den Fall der reinen Überschallströmung, Versuch Nr. 4, ergeben sich die in **Abb. 4.27** dargestellten Geschwindigkeitsverteilungen. Da sich die Expansion im divergenten Teil der Düse stetig fortsetzt und das Zweiphasengemisch auf Überschallgeschwindigkeit beschleunigt, wurde hier der Gegendruck auf numerische Weise ermittelt, wie in Abschnitt 3.3, Gl. (3.24), beschrieben.

Bei der Simulation der Düsenströmung Nr.3 ergaben sich numerische Probleme mit nicht-abklingenden, sich stromauf- und stromabwärts ausbreitenden Druckstörungen großer Amplitude, die als numerisch nicht korrekt erfaßte Verdichtungsstöße gedeutet werden können. Der wellige Verlauf des Druckes in **Abb. 4.24** zeugt von diesen Vorgängen. Die dargestellten Ergebnisse stellen für diesen Versuch daher keinen stationären Lösungszustand dar. Vielmehr handelt es sich hierbei um Resultate einer Simulationsrechnung, die nach einer gewissen Zeit, in der keine weitere Konvergenz der Lösung beobachtet werden konnte, abgebrochen wurde. Die numerischen Schwierigkeiten illustrieren für diesen Fall auf deutliche Weise die Notwendigkeit einer Einschränkung des vorgestellten Zweifluidmodelles auf Strömungen ohne Verdichtungsstoß[5].

Für den Versuch Nr. 4 lagen Meßwerte der Wandtemperatur vor. Diese sind zum Vergleich in **Abb. 4.28** mit den berechneten Dampf- und Flüssigkeitstemperaturen aufgetragen. Über Einzelheiten der Temperaturmessung hinsichtlich Meßgenauigkeit, geometrischer Anordnung und thermischer Isolierung lagen keine Informationen vor, so daß ein beurteilender Vergleich zwischen gemessenen und berechneten Werten nicht vorgenommen wird.

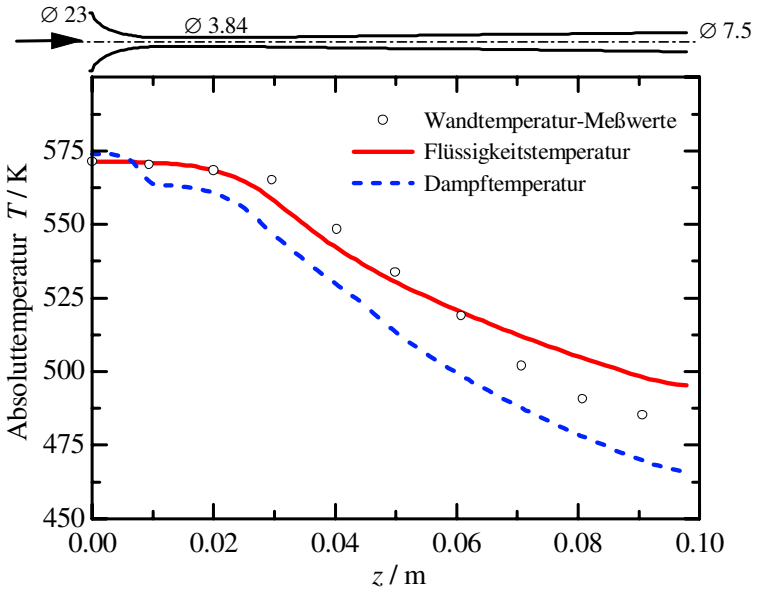



Abb. 4.28: Vergleich gemessener Wandtemperaturen mit berechneten Temperaturverteilungen von Flüssigkeit und Dampf in der Laval-Düse, Nr. 4, Karasev et al. [71]

## 4.3. Anwendung des Rechenverfahrens auf eigene Experimente

Im Rahmen der Forschungsarbeiten wurde eine Versuchsanlage (Huhn und Wein [61]) erstellt, um spontan siedende Strömungen in rotationssymmetrischen und ebenen Düsen experimentell untersuchen zu können.

[5] Man vergleiche hierzu die Anmerkungen zu den verwendeten Formen der Feldgleichungen des Zweifluidmodells in Abschnitt 2.1, S.26.

Die experimentellen Arbeiten wurden am Fernwärmeversuchsstand der TU Dresden durchgeführt. In **Abb. 4.29** ist ein vereinfachtes Schema des geschlossenen Versuchskreislaufs dargestellt. Ein zunächst dampfbeheizter, später ölgefeuerter Wärmeübertrager im Primärkreis der Versuchsanlage heizt das Wasser auf Temperaturen von bis zu 135°C bei einem Druck von bis zu 10 bar auf. Über das Absperrventil im Vorlauf der horizontal angeordneten Versuchsstrecke wird ein Teilstrom des Wassers durch Drosselorgane unterschiedlicher Geometrie auf ein Druckniveau nahe dem Umgebungsdruck entspannt und einem Trennbehälter zugeführt. Der bei der Entspannung entstehende Dampfanteil wird durch einen Kondensator geleitet und mit dem flüssigen Anteil in einem atmosphärischen Behälter gesammelt. Von hier erfolgt über ein Regelventil die Rückspeisung in den Kreislauf.

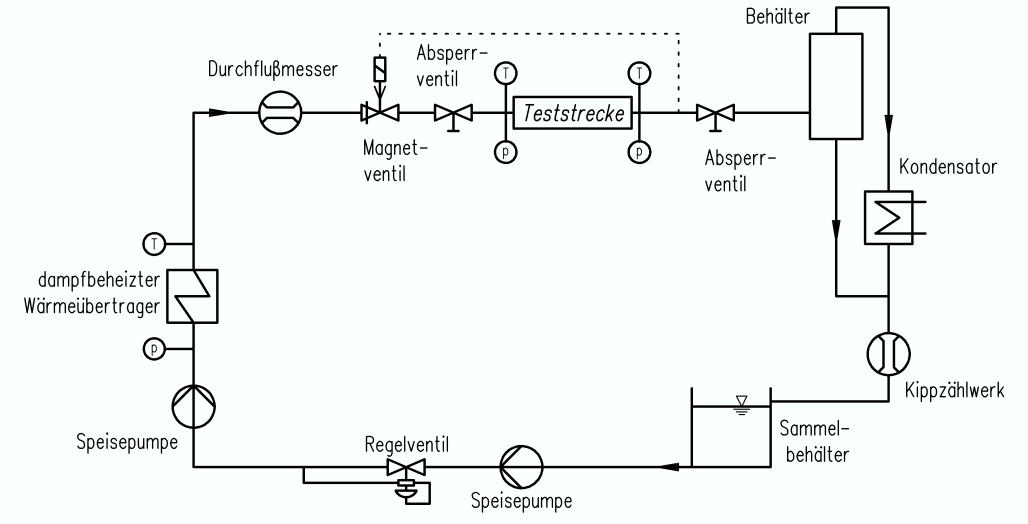



Abb. 4.29: Schema der Versuchsanlage mit Teststrecke

An der Versuchsanlage "Zweiphasenströmung", **Abb. 4.30**, werden im Vorlauf Durchfluß, Temperatur und Druck gemessen. Die Messung des Volumenstromes erfolgt mit Hilfe eines magnetisch-induktiven Durchflußmessers in einem ansteigenden Rohrabschnitt um die vollständige Füllung des Rohrquerschnittes mit Wasser zu gewährleisten. Hinter der Drosselstelle können nochmals Druck- und Temperaturmeßwerte erfaßt werden. Die Temperaturen werden mit Pt100-Widerstandsthermometern, die Absolutdrücke mit piezoresistiven Drucktransmittern gemessen. Wahlweise können rotationssymmetrische Düsen oder eine spezielle Schauglasarmatur mit ebenen Düsen in die Teststrecke eingesetzt werden. Die PC-gestützte Meßdatenerfassung und -verarbeitung erfolgt in Verbindung mit einer eigenen, an die speziellen Bedürfnisse angepaßten Software. Diese ermöglicht außerdem eine schnelle und flexible Visualisierung der eingehenden Meßdaten in Form von Linienschreibern, Diagrammen und numerischen Anzeigen. Eine ausführliche Programmdokumentation, in der technische Daten zu den verwendeten PC-Meßgeräten (Einsteckkarten) sowie zu der Instrumentierung (Meßwertgeber und -umformer) angegeben sind, findet man in Wein [138].

Als nachteilig hat sich bei den Versuchen die eingeschränkte Leistungsfähigkeit des Wärmeübertragers im Vorlauf der Teststrecke erwiesen: bei den gewünscht hohen

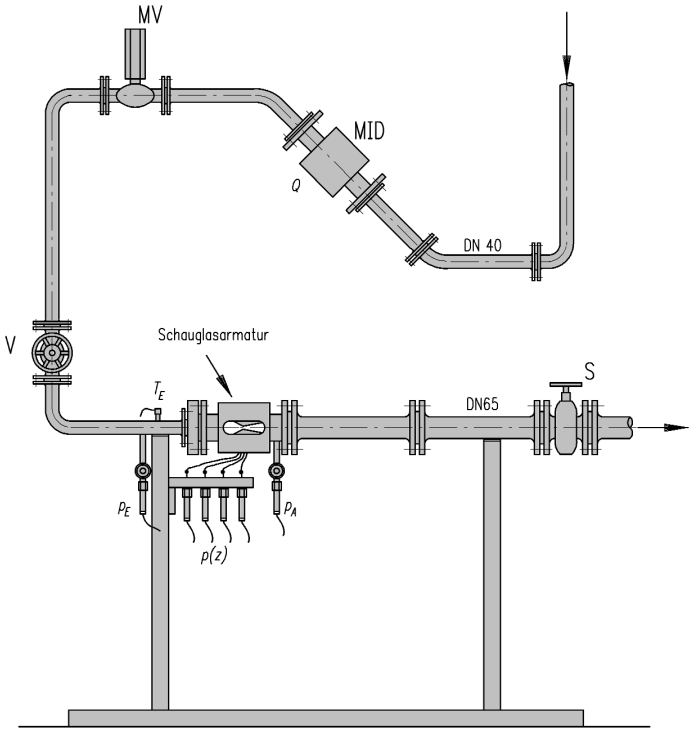



Abb. 4.30: Versuchsanlage "Zweiphasenströmung", MID: Magn.-ind. Durchflußmesser, MV: Magnetventil, V: Ventil, S: Schieber

Massenströmen war eine gleichzeitig hohe Vorlauftemperatur bzw. eine geringe Eintrittsunterkühlung nicht realisierbar. Um dennoch einen Verdampfungsvorgang durch Entspannung einzuleiten, mußten vergleichsweise kleine und mit starken Querschnittsänderungen versehene Kanalgeometrien eingesetzt werden. Damit mußten gleichzeitig schon vorab Einschränkungen hinsichtlich der Anwendbarkeit der quasi-eindimensionalen Berechnungsmodelle toleriert werden. Andererseits wurde erwartet, daß die Berechnungen zumindest den Anlagendurchsatz gut wiedergeben können. Ein weiterer Nachteil der Versuchsstandes bestand darin, daß eine Absenkung des Gegendruckes zum Zwecke eines experimentellen Nachweises für das Vorhandensein kritischer Strömungsverhältnisse aus anlagetechnischen Gründen nicht möglich war.

Die **Tabelle 4.8** faßt experimentelle und mit dem Zweifluidmodell berechnete Ergebnisse für Versuche mit der in **Abb. 4.31** dargestellten konvergenten Düse zusammen. Der Druckabfall durch die Querschnittsverengung am scharfkantig ausgeführten Düseneintritt (von Rohrquerschnitt DN 40 auf $d_E = 20\,\mathrm{mm}$) wurde nach Kays [72] in folgender Form berücksichtigt:

$$\Delta p_E = (1 + \zeta_E)\,\frac{\rho_{l,E}\, w_{l,E}^2}{2}\,, \tag{4.4}$$

wobei die Geschwindigkeit am Düseneintritt $w_{l,E}$ unter Verwendung des gemessenen Massenstromes berechnet wurde. Für den Widerstandsbeiwert des Rohreintritts wurde als Näherung $\zeta_E \approx 0.5$ angenommen. Da das verwendete Wasser stark verunreinigt war und Lufteinschlüsse aufwies, wurde in den Berechnungen sowohl das Modell für Strömungssieden als auch das für Wandsieden eingesetzt.

| # | $p_E$ | $T_{l,E}$ | $T_E^s - T_{l,E}$ | $\dot{m}_{exp}$ | $\dot{m}_{ber}$ | $\Delta\dot{m}/\dot{m}_{exp}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | MPa | K | K | kg/s | kg/s | % |
| 1 | 0.647 | 381.34 | 53.6 | 0.482 | 0.510 | 5.8 |
| 2 | 0.446 | 382.96 | 37.8 | 0.409 | 0.405 | -1.0 |
| 3 | 0.559 | 393.36 | 35.9 | 0.456 | 0.464 | 1.7 |
| 4 | 0.494 | 389.20 | 35.3 | 0.413 | 0.431 | 4.4 |
| 5 | 0.546 | 395.33 | 33.0 | 0.437 | 0.459 | 5.0 |
| 6 | 0.354 | 383.59 | 28.8 | 0.357 | 0.346 | -3.1 |
| 7 | 0.565 | 404.27 | 25.4 | 0.444 | 0.457 | 2.9 |
| 8 | 0.307 | 384.86 | 22.6 | 0.319 | 0.312 | -2.2 |

Tabelle 4.8.: Eintrittsbedingungen und Vergleich gemessener und berechneter Massenströme für die konvergente Düse

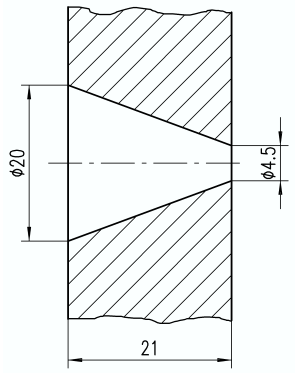



Abb. 4.31: Konvergente Düse

Die **Abb. 4.32** zeigt eine Funkenblitzaufnahme von dem aus der konvergenten Düse austretenden, überhitzten Freistrahl. Aus der mittleren Austrittsgeschwindigkeit von etwa 28 m/s und der Belichtungszeit von 1 bis 1.5 $\mu$s ergibt sich eine axiale Unschärfe der Aufnahme von 28 bis 42 $\mu$m. Die Dampfblasen scheinen überwiegend am Düsenrand bzw. am Freistrahlrand zu entstehen. Stromab des Austritts platzen sie an der freien Oberfläche des Strahlrands auf. Dies deutet darauf hin, daß die Keimbildung vor allem an der Düseninnenwand einsetzt.

Die Strömung durch Drosselorgane mit rechteckigem Querschnitt kann durch eine in den Versuchsstand integrierbare Schauglasarmatur beobachtet werden. **Abb. 4.33** zeigt den prinzipiellen Aufbau dieser Armatur. In den beiden sich gegenüberliegenden Seitenplatten sind Aussparungen für Langschaugläser vorhanden. Die Rechteckdüse ergibt sich durch Einspannung zweier sich gegenüberliegender, konturierter Messingplatten konstanter Breite (5 . . . 6 mm) und der Langschaugläser. Auf diese Weise können verschiedene Düsenkonturen durch Austausch der Messingplatten realisiert werden. Zur Messung der Druckverteilung wurden in die untere Messingplatte Kanülen mit einem lichten Durchmesser von 0.6 mm eingelötet und über PTFE-Schlauchleitungen mit Drucktransmittern verbunden (**Abb. 4.34**). Eine Abschätzung der Wärmeverluste der recht massiv ausgeführten Schauglasarmatur ergab, daß eine zusätzliche Isolierung nicht notwendig ist (vgl. Anhang D.2, S.126).

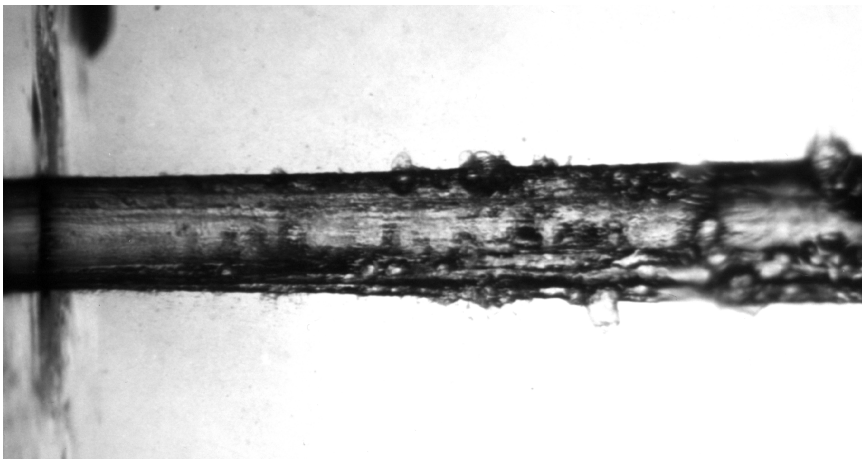


Abb. 4.32: Funkenblitzaufnahme von einem überhitzten Freistrahl, $p_E = 5.71\,\text{bar}$, $T_E = 404.4\,\text{K}$ (Eintrittsunterkühlung: $\Delta T_E = 32\,\text{K}$), $p_A = 1.04\,\text{bar}$, $\dot{m}_{exp} = 0.418\,\text{kg/s}$, Kamera: Nikon F2, Film: Agfa 100/21°ISO, Blende 11, Belichtungszeit: 1 bis 1.5 $\mu$s, Gegenlicht mit Diffusorscheibe

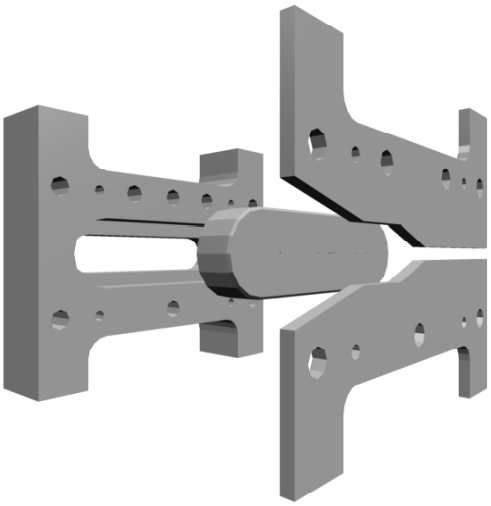


Abb. 4.33: Aufbau der Schauglasarmatur mit Düseneinsatz

Um die sich einstellenden Strömungsformen sowie die Verteilung und die geometrische Form des erzeugten Dampfes festhalten und untersuchen zu können, wurden auch bei diesen Experimenten Strömungsaufnahmen mit Hilfe eines Funkenblitzgerätes im Gegenlichtverfahren angefertigt. Die hierbei gemachten Originalbilder wurden anschließend mit Hilfe eines Programmes zur Bildverarbeitung (Umbaugh [131]) und Anwendung des sogenannten Wobel-Filters zur Lokalisierung von Phasengrenzen in Konturbilder gewandelt.

**Abb. 4.35** zeigt das Konturbild einer Funkenblitzaufnahme von einer Zweiphasenströmung durch eine ebene, konvergent-divergente Düse. Die Strömung verläuft von links nach rechts. Unterkühltes Wasser tritt in den konvergenten Teil der Düse ein und wird durch die Verringerung des Strömungsquerschnitts stark beschleunigt. Am scharfkantig ausgebildeten Düsenhals bildet sich in der Mitte des Kanals ein

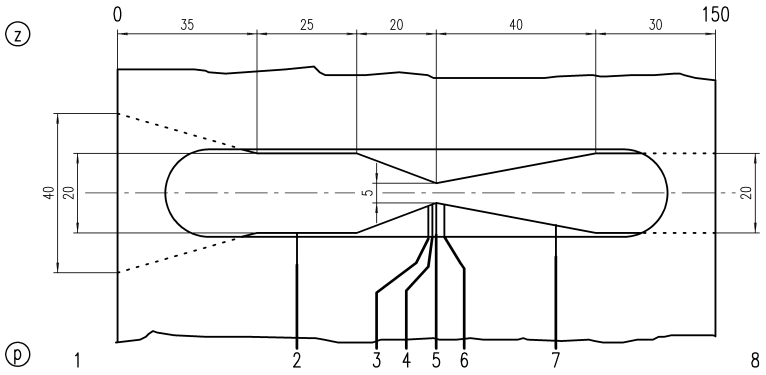



Abb. 4.34: Wanddruckmeßstellen in der Vertikalebene

Flüssigkeitsstrahl aus, der von Dampfzonen an der oberen und unteren Wand begrenzt wird. Der Flüssigkeitsstrahl erstreckt sich im divergenten Düsenabschnitt über ca. 20 mm in Strömungsrichtung bevor er instabil wird und aufbricht. In diesem Bereich kommt es zum Kollabieren der Dampfzonen und zur Ausbildung kleinerer Dampfvolumina bzw. Dampfblasen, die sich relativ gleichmäßig über den Querschnitt zu verteilen scheinen. Aufgrund der bisherigen Erkenntnisse im Hinblick auf die Schlupfverhältnisse bei Blasenströmungen kann hier wohl ebenfalls von näherungsweise homogener Zweiphasenströmung ausgegangen werden.

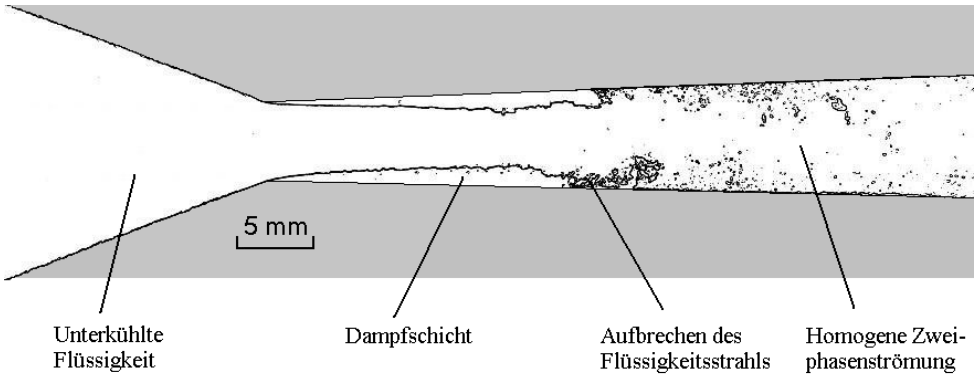



Abb. 4.35: Spontanes Sieden in einer ebenen, konvergent-divergenten Düse, Konturaufnahme Versuch RB02, $p_E = 3.66$bar, $\Delta T_E \approx 10$K, $\dot{m}_{exp} = 0.452$kg/s, $\dot{m}_{ber} = 0.453$kg/s

Abb. 4.36: Konturdarstellung Versuch RB03, $p_E = 3.12$bar, $\Delta T_E \approx 5$K, $\dot{m}_{exp} = 0.322$kg/s, $\dot{m}_{ber} = 0.310$kg/s

Bei geringeren Massenströmen und einer kleineren Eintrittsunterkühlung, **Abb. 4.36**, dehnt sich der Flüssigkeitsstrahl wesentlich weiter in Strömungsrichtung aus. Sphärisch geformte Blasen erscheinen hier schon unmittelbar vor dem engsten Querschnitt innerhalb des flüssigen Strömungskerns. Die beobachteten Phänomene gleichen den von Abuaf et al. [1] und Zimmer et al. [145] beschrieben Effekten (Abschnitt 4.2.3, S.78,).

Wie **Abb. 4.37** belegt, werden die Druckprofile im vorderen Düsenabschnitt und im Bereich unmittelbar hinter dem Düsenhals gut reproduziert. Obwohl auch die berechneten Massenströme recht gut mit den gemessenen Werten übereinstimmen, ist das quasi-eindimensionale Zweifluidmodell jedoch erwartungsgemäß nicht in der Lage, die steilen Anstiege des Dampfvolumenanteils (**Abb. 4.38**) sowie den Druckanstieg im divergenten Düsenabschnitt für den Versuch RB02 korrekt wiederzugeben.

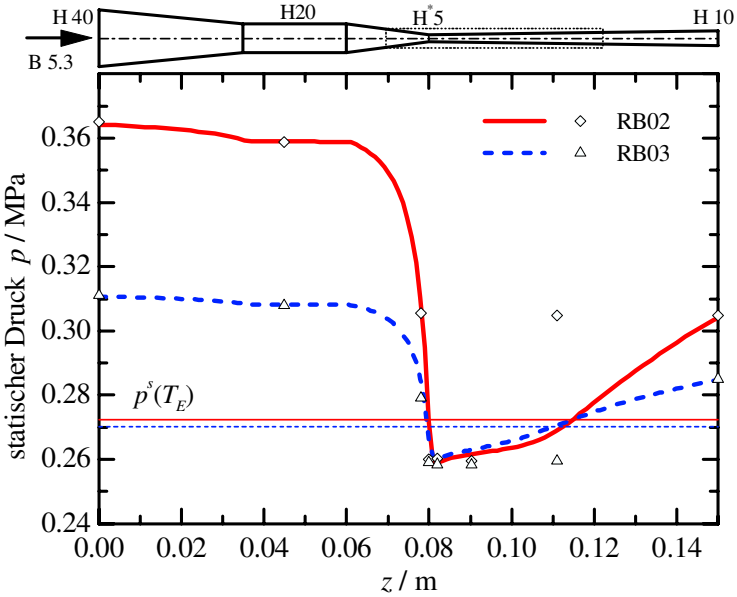



Abb. 4.37: Vergleich gemessener und berechneter Druckverteilungen, Versuche RB02 und RB03

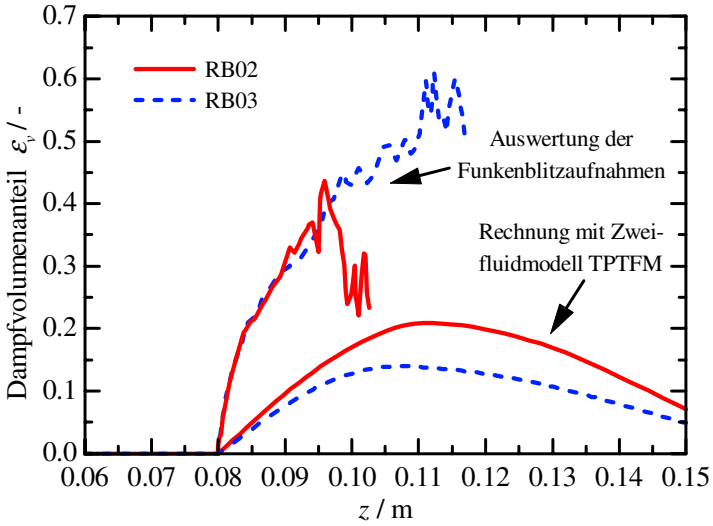



Abb. 4.38: Vergleich gemessener und berechneter Verteilungen des Dampfvolumenanteils, Versuche RB02 und RB03

# 5. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein Zweifluidmodell zur numerischen Simulation von Einkomponenten-Zweiphasenströmungen (dampfförmig/flüssig) mit Phasenwechsel bei hohen Massenstromdichten durch Drosselorgane unterschiedlicher Geometrie vorgestellt. Dabei werden sowohl gesättigte Eintrittszustände des Strömungsmediums als auch anfänglich unterkühlte Zustände, bei denen während der Entspannung spontanes Sieden (*Flashing*) auftritt, betrachtet.

Das wesentliche Ziel bestand darin, ein Berechnungsverfahren zu entwickeln, das eine möglichst genaue Vorhersage des Durchsatzes bei kritischen und nahkritischen Zweiphasenströmungen ermöglicht und eine durchgängige Ermittlung wichtiger Strömungs- und Zustandsgrößen entlang der betrachteten Geometrie erlaubt. Hierbei müssen insbesondere Abweichungen vom thermo- und fluiddynamischen Gleichgewichtszustand berücksichtigt werden.

Das hierzu entwickelte Zweifluidmodell basiert auf den zeitabhängigen, quasi-eindimensionalen Bilanzgleichungen für die Masse und den Impuls der flüssigen und der dampfförmigen Phase sowie der Energiegleichung für die flüssige Phase. Zusätzlich wurde hier eine Blasentransportgleichung in das Zweifluidmodell eingebunden. Diese Gleichung beschreibt die zeitlichen und konvektiven Änderungen der volumetrischen Blasenanzahl und beinhaltet verteilte Keimbildungsmechanismen, welche die Anzahl erzeugter Dampfblasen vorgeben.

Die Impuls-, Wärme- und Stofftransportvorgänge zwischen den Phasen werden mit Hilfe mechanistischer Ansätze und empirischer Korrelationen in das Modell einbezogen. Hier hat sich die Einbindung einer eigenen Formulierung für den virtuellen Massekoeffizienten, der bei Vorliegen einer Zweiphasenströmung mit unterschiedlich geformten Dampfvolumina (Blasen und Pfropfen) eingesetzt wird, bewährt. Ferner werden zur Berechnung der Wandreibung Ansätze verwendet, bei denen sich der Reibungsdruckverlust in zweiphasigen Strömungen über einen Zweiphasenmultiplikator ermitteln läßt.

Überhitzte Flüssigkeitszustände in spontan siedenden Strömungen werden hier als Folge des Energieüberschusses gedeutet, der für die Aktivierung von Keimstellen benötigt wird. Nach dem Übergang zur zweiphasigen Strömung behindern die begrenzte Phasengrenzfläche und der endliche Wärmeübergang zwischen den Phasen den Abbau des thermischen Nichtgleichgewichtes durch Verdampfung. Das Fortbestehen bzw. die Verstärkung solcher Effekte hängt stark von den örtlichen Druckgradienten ab. Bei sehr schnell verlaufenden Druckabsenkungen, z.B. bei der Entspannung durch kurze Rohre, verbleibt während der Durchströmung somit nicht genügend Zeit für einen Temperaturausgleichung zwischen den Phasen.

Die sich örtlich einstellende Strömungsform wird in Abhängigkeit vom Dampfvolumenanteil ermittelt. Dabei werden drei ineinander übergehende Strömungsformen berücksichtigt: Blasenströmung, Blasen-/Pfropfenströmung und disperse Tropfenströmung. Die Zuordnung der jeweils anzuwendenden Teilmodelle zur Beschreibung der Phasenwechselwirkungen erfolgt gemäß dieser Einteilung.

Die analytischen Feldgleichungen des Zweifluidmodelles werden mit einem semi-impliziten Zeitschrittverfahren auf der Basis einer finiten Differenzendiskretisierung gelöst. Dabei wird für jedes diskrete Zeitintervall der Strömungszustand unter Verwendung der linearisierten Form der Feldgleichungen mit Hilfe eines Newton-Iterationsverfahren für Gleichungssysteme approximiert. Auf diese Weise führt jede stabile bzw. konvergierende Rechnung über eine Folge von Zwischenzuständen zu einem stationären Strömungszustand als Lösung. Die Anwendung auf ein Druckentlastungsexperiment (*Blowdown*) belegt, daß das Berechnungsverfahren bei geeignet formulierten Randbedingungen auch zeitabhängige Strömungsvorgänge gut wiedergeben kann.

Zur Überprüfung der Funktionstüchtigkeit und Verifizierung des Zweifluidmodelles wurden Vergleichsrechnungen mit anderen Modellen durchgeführt. Die erzielten Ergebnisse bei der Nachrechnung von zahlreichen aus der Literatur bekannten experimentellen Resultaten sowie eigener Versuche zeigen, daß die wichtigsten im Rahmen einer eindimensionalen Betrachtung auflösbaren physikalischen Phänomene und Wechselwirkungen in geeigneter Weise nachgebildet werden konnten.

Die numerischen Ergebnisse für den Phasenschlupf bei Vorliegen von Blasenströmungen bestätigen getroffene Annahmen in anderen Arbeiten, nach denen bei dieser Strömungsform von homogener Strömung ausgegangen werden kann. Mit zunehmendem Dampfvolumenanteil und beginnender Separierung der Phasen, wie durch den Übergang von der Blasen- zur Blasen/Pfropfenströmung beschrieben, nimmt jedoch auch die Bedeutung des fluiddynamischen Nichtgleichgewichts infolge abnehmender mechanischer Kopplung der Phasen zu. Entscheidend für die Entstehung und Ausprägung des sich einstellenden Phasenschlupfes sind dabei vor allem die Größe und die Orientierung des lokalen Druckgradienten sowie die Trägheitseigenschaften der Phasen. So nimmt der Phasenschlupf in beschleunigten Zweiphasenströmungen durch konvergente Kanäle und Rohre konstanten Querschnitts stetig zu, während er in anschließenden divergenten Kanälen mit Druckanstieg teilweise wieder abgebaut werden kann.

Die wesentlichen Einschränkungen der Anwendbarkeit des Modells beziehen sich auf die Art der Geometrie des Strömungskanals und auf den Strömungszustand: Strömungen durch Kanäle mit starken Querschnittsänderungen, in denen mehrdimensionale Effekte nicht vernachlässigt werden dürfen, und weit unterkritische Strömungen, in denen Abweichungen vom Gleichgewicht eine untergeordnete Rolle spielen, lassen sich nur mit eingeschränkter Genauigkeit und teilweise nur nach entsprechender Anpassung der verwendeteten Korrelationen simulieren. Um eine physikalisch konsistente Beschreibung mehrdimensionaler Vorgänge wie die ablösungsinduzierte Kavitation in konvergent-divergenten Düsen zu ermöglichen, ist eine Ausdehnung des dargestellten Zweifluidmodells auf mindestens eine weitere Raumdimension notwendig. Mögliche Ansätze hierfür bieten die Arbeit von Carver und Salcudean [24], in der die dreidimensionale Modellierung der Phasenverteilung in Rohrkrümmern beschrieben wird, sowie die numerischen Studien von Schmidt et al. [120] und Sauer [118], in der kavitierende Strömungen durch Düsen und um Tragflügelprofile behandelt werden. Eine Verbesserung der Simulationsmöglichkeiten wird auch von einer genaueren Abbildung möglicher Strömungsformen erwartet. Hier empfiehlt sich die Einarbeitung einer dynamischen Strömungsformkarte, die sich an den örtlichen Kräfteverhältnisse zwischen den Phasen orientiert und eine Aufhebung der starren und ausschließlich am Dampfvolumenanteil festgemachten Grenzen zwischen den Strömungsformen ermöglicht.

# Literaturverzeichnis


[1] Abuaf, N., Jones, Jr., O. C. und Wu, B. J. C., 1981, "A Study of Nonequilibrium Flashing of Water in a Converging-Diverging Nozzle, Vol. 1 - Experimental," Tech. Rep. NUREG/CR-1864 and BNL-NUREG-51317, U.S. Nuclear Regulatory Commission.

[2] Ahmad, S. Y., 1970, "Axial distributrion of bulk temperature and void fraction in a heated channel with inlet subcooling," *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, S. 595–609.

[3] Alamgir, M. D. und Lienhard, J. H., 1981, "Correlation of pressure undershoot during hot-water depressurization," *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 103, S. 52–55.

[4] Anderson, Jr., J. D., 1990, *Modern compressible flow. With historical perspective*, McGraw-Hill, Inc., Singapore.

[5] Anderson, Jr., J. D., 1995, *Computational fluid dynamics: the basics with applications*, McGraw-Hill, Inc., Singapore.

[6] Ardron, K. H., 1978, "A Two-Fluid Model for Critical Vapour-Liquid Flow," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 4, S. 323–337.

[7] Ardron, K. H. und Ackerman, M. C., 1978, "Studies of the Critical Flow of Subcooled Water in a Pipe," Tech. Rep. RD/B/N4299, CEGB.

[8] Aris, R., 1989, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications Inc., Mineola, USA.

[9] Baehr, H. D., 1984, *Thermodynamik - Eine Einführung in die Grundlagen und ihre technischen Anwendungen*, Springer-Verlag, Berlin.

[10] Baehr, H. D. und Stephan, K., 1998, *Wärme- und Stoffübertragung*, 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[11] Baehr, H. D. und Tillner-Roth, R., 1995, *Thermodynamische Eigenschaften umweltverträglicher Kältemittel*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[12] Barnea, D., 1986, "Transition from Annular Flow and from Dispersed-Bubble Flow - Unified Models for the Whole Range of Pipe Inclination," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 5, S. 733–744.

[13] Basset, A. B., 1961, *A Treatise on Hydrodynamics*, Dover Edition, New York.

[14] Beattie, D. R. H., 1973, "A Note on the Calculation of Two-Phase Pressure Losses," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 25, S. 395–402.

[15] Bergles, A. E., Collier, J. G., Delhaye, J. M., Hewitt, G. F. und Mayinger, F., Hrsg., 1981, *Two-Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries*, Hemisphare Publishing Corporation, Washington, New York, London.

[16] Blasius, H., 1913, "Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten," *Forsch. Ingenieurwes.*, Vol. 134, S. 1–40.

[17] Blinkov, V. N., Jones, O. C. und Nigmatulin, B. I., 1993, "Nucleation and Flashing in Nozzles – 2, Comparison with Experiments Using a Five Equation Model for Vapour Void Development," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 19, No. 6, S. 965–986.

[18] Bolle, L., Downar-Zapolski, P., Franco, J. und Seynhaeve, J. M., 1995, "Flashing

Water Flow Through a Safety Valve," *J. Loss Prev. Process Ind.*, Vol. 8, No. 2, S. 111–126.

[19] Bolle, L., Downar-Zapolski, P., Franco, J. und Seynhaeve, J. M., 1996, "Experimental and Theoretical Analysis of Flashing Water Flow Through a Safety Valve," *Journal of Hazardous Materials*, Vol. 46, S. 105–116.

[20] Borkar, G. S., Trela, M. und Lienhard, J. H., 1977, "A Rapid Hot-Water Depressurization Experiment," Tech. Rep. EPRI NP-527, Electric Power Research Institute.

[21] Bronstein, I. N. und Semendjajew, K. A., 1984, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt(Main).

[22] Burnell, J., 1947, "Flow of Boiling Water Through Nozzles, Orifices and Pipes," *Engineering*, Vol. 164, S. 572–576.

[23] Burwell, M. J. und Ringer, F. J., 1983, *The calculation of critical discharge rates with a one-dimensional finite difference model with consideration of discharge geometry*, Springer.

[24] Carver, M. B. und Salcudean, M., 1986, "Three-Dimensional Numerical Modeling of Phase Distribution of Two-Fluid Flow in Elbows and Return Bends," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 10, S. 229–251.

[25] Celata, G. P., Cumo, M., Farello, G. E., Incalcaterra, P. C. und Naviglio, A., 1983, "Thermodynamic Disequilibrium in the Critical Flow of Subcooled Liquids," *Nuclear Technology*, Vol. 60.

[26] Chan, R. K. C. und Masiello, P. J., 1983, "Review and Application of the TRAC-PD2 Computer Code," Report EPRI-NP-2826, Electric Power Research Institute.

[27] Cheng, L., Lahey, Jr., R. T. und Drew, D. A., 1983, "The Effect of Virtual Mass on the Prediction of Critical Flow," in: *Transient Two-Phase Flow*, Springer, S. 323–340.

[28] Chisholm, D., 1967, "A Theoretical Basis for the Lockhart-Martinelli Correlation for Two-Phase Flow," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 10, S. 1767–1778.

[29] Colebrook, C. F., 1939, "Turbulent Flow in Pipes, With Particular Reference to the Transition Region Between the Smooth and Rough Pipe Laws," *J. Inst. Civ. Eng.*, Vol. 12, S. 133–156.

[30] Cook, T. L. und Harlow, F. H., 1984, "Virtual Mass in Multiphase Flow," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 10, No. 6, S. 691–696.

[31] Dagan, R., Elias, E., Wacholder, E. und Olek, S., 1993, "A Two-Fluid Model for Critical Flashing Flows in Pipes," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 19, No. 1, S. 15–25.

[32] Dobran, F., 1987, "Nonequilibrium Modeling of Two-Phase Critical Flows in Tubes," *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 109, S. 731–738.

[33] Domnick, J. und Durst, F., 1995, "Measurement of bubble size, velocity and concentration in flashing flow behind a sudden constriction," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 21, No. 6, S. 1047–1062.

[34] Downar-Zapolski, P., Bilicki, Z., Bolle, L. und Franco, J., 1996, "The non-equilibrium relaxation model for one-dimensional flashing liquid flow," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 22, No. 3, S. 473–483.

[35] Drew, D., Cheng, L. und Lahey, Jr., R. T., 1979, "The Analysis of Virtual Mass Effects in Two-Phase Flow," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 5, S. 233–242.

[36] Drew, D. A., 1983, "Mathematical modeling of two-phase flow," *Ann. Rev. Fluid*

*Mech.*, Vol. 15, S. 261–291.

[37] Elias, E. und Chambré, P. L., 1984, "A mechanistic non-equilibrium model for two-phase critical flow," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 10, No. 1, S. 21–40.

[38] Elias, E. und Chambré, P. L., 1993, "Flashing inception in water during rapid decompression," *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 115, S. 231–238.

[39] Elias, E. und Lellouche, G. S., 1994, "Two-Phase Critical Flow," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 20, S. 91–168.

[40] Elsner, N. und Dittmann, A., 1993, *Grundlagen der Technischen Thermodynamik – Energielehre und Stoffverhalten*, Vol. 1, Akademie Verlag, Berlin.

[41] Elsner, N., Fischer, S. und Huhn, J., 1993, *Grundlagen der Technischen Thermodynamik – Wärmeübertragung*, Vol. 2, 8. Aufl., Akademie Verlag, Berlin.

[42] Emendörfer, D. und Höcker, K.-H., 1993, *Theorie der Kernreaktoren*, Vol. 2. Der instationäre Reaktor, BI-Wissenschaftsverlag.

[43] Engeln-Müllges, G. und Reutter, F., 1993, *Numerik-Algorithmen mit Fortran 77-Programmen*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim.

[44] EPRI-Report, 1982, "The Marviken full scale critical flow tests," Final Report EPRI-NP-2370, Electric Power Research Institute.

[45] Escanes, F., Pérez-Segarra, C. D. und Oliva, A., 1995, "Numerical simulation of capillary-tube expansion devices," *Int. J. Refrig.*, Vol. 18, No. 2, S. 113–122.

[46] Fauske, H. K., 1962, "Contribution to the theory of two-phase, one-component critical flow," Tech. Rep. ANL 6633, Argonne National Laboratory.

[47] Fincke, J. R., 1981, "The Correlation of Nonequilibrium Effects in Choked Nozzle Flow with Subcooled Upstream Conditions," in: *ANS Small Break Specialists Mtg.*, California, S. 4–30.

[48] Friedel, L., 1979, "Improved Friction Pressure Drop Correlations for Horizontal and Vertical Two-Phase Pipe Flow," *3R international*, Vol. 18, No. 7, S. 485–491.

[49] Friedel, L., 1994, "Berechnungsverfahren bei Zweiphasenströmungen in Sicherheitsventilen und Zu- und Ableitungen," *3R international*, Vol. 33, No. 3, S. 132–143.

[50] Ganzer, U., 1988, *Gasdynamik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[51] Garg, S. K. und Pritchett, J. W., 1984, "Pressure transient analysis for two-phase geothermal wells: some numerical results," *Water Resources Research*, Vol. 20, No. 7, S. 963.

[52] Gersten, K., 1984, *Einführung in die Strömungsmechanik*, Verlag Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.

[53] Gmehling, J. und Kolbe, B., 1988, *Thermodynamik*, Thieme Verlag, Stuttgart.

[54] Hadamard, J. S., 1911, *C. R. Acad. Sci*, Vol. 152, S. 1735+.

[55] Harlow, F. H. und Welch, J. E., 1965, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," *Physics of Fluids*, Vol. 8, S. 2182+.

[56] Henry, R. E. und Fauske, H. K., 1970, "Two-phase critical flow at low qualities; Part I: Experimental," *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 41, S. 79–91.

[57] Henry, R. E. und Fauske, H. K., 1970, "Two-phase critical flow at low qualities; Part II: Analysis;," *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 41, S. 92–98.

[58] Henry, R. E. und Fauske, H. K., 1971, "The two-phase critical flow of one component mixtures in nozzles, orifices and short tubes," *J. Heat Transfer*, Vol. 93, S. 179–187.

[59] Hoffmann, M. A. und Wong, C. F., 1992, "Prediction of pressure drops in forced convection subcooled boiling water flows," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, No.12, S. 3291–3299.

[60] Houghton, G., 1976, "Final report on subcontract S-1101 for the investigation of particle-fluid forces in accelerative flows, Letter to V. Ransom (EG&G)," .

[61] Huhn, J. und Wein, M., 1994, "Experimental Investigations on Thermal Nonequilibrium Effects of Two-Phase Expansion Flows," in: *Proceedings of the German-Japanese Symposium on Multiphase Flow*, KfK 5389, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Karlsruhe, Germany, S. 379–388.

[62] Huhn, J. und Wolf, J., 1975, *Zweiphasenströmung gasförmig/flüssig*, Fachbuchverlag Leipzig.

[63] Huq, R. und Loth, J. L., 1990, "An Analytic Two-Phase Flow Void Prediction Method," in: *AIAA/ASME 5th Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, Seattle, WA, June 18-20, 1990.*

[64] Huq, R. und Loth, J. L., 1992, "Analytical Two-Phase Flow Void Prediction Method," *J. Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 6, No. 1, S. 139–144.

[65] Ishii, M., 1974, *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*, Eyrolles, Paris, France.

[66] Ishii, M., 1977, "One-Dimensional Drift-Flux Model and Constitutive Equations for Relative Motion Between Phases in Various Two-Phase Flow Regimes," Tech. Rep. ANL 77-47, Argonne National Laboratory.

[67] Ishii, M., 1990, "Two-fluid model for two-phase flow," *Multiphase Science and Technology*, Vol. 5, S. 1–63.

[68] Ishii, M. und Zuber, N., 1979, "Drag coefficient and relativ velocity in bubbly, droplet or particulate flows," *AIChE J.*, Vol. 25, S. 843–854.

[69] Jones, Jr., O. C., 1980, "Flashing Inception in Flowing Liquids," *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 102, S. 439–444.

[70] Jungnickel, H., Agsten, R. und Kraus, W. E., 1990, *Grundlagen der Kältetechnik*, 3. Aufl., Verlag Technik, Berlin.

[71] Karasev, E. K., Vazinger, V. V., Mingaleeva, G. S. und Trubkin, E. I., 1977, "Investigation of the adiabatic expansion of water vapor from the saturation line in Laval nozzles," *Atomnayia Énergiya*, Vol. 42, No. 7, S. 478–481.

[72] Kays, W. M., 1950, *Trans. ASME*, Vol. 72, S. 1067–1074.

[73] Kedziur, F., 1980, "Untersuchung einer Zweiphasen-Düsenströmung und Überprüfung verschiedner Rechenprogramme anhand experimenteller Ergebnisse," Dissertation, Universität Karlsruhe, Karlsruhe.

[74] Kocamustafaogullari, G. und Ishii, M., 1983, "Interfacial Area and Nucleation Site Density in Boiling Systems," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, No. 9, S. 1377–1387.

[75] Kolev, N. I., 1986, *Transiente Zweiphasenströmung*, Springer.

[76] Labuntzov, D. A., Kolchugin, B. A., Golovin, V. S., Zakharova, E. A. und Vladimirova, L. N., 1964, "High Speed Camera Investigation of Bubble Growth for Saturated Boiling in a Wide Range of Pressure Variations," *Thermophysics of High Temperature*, Vol. 2, No. 2, S. 446–453.

[77] Lee, K. und Ryley, D. J., 1968, "The Evaporation of Water Droplets in Superheated Steam," *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 90, S. 445–451.

[78] Leung, J. C., 1986, "A Generalized Correlation for One-Component Homogeneous

Equilibrium Flashing Choked Flow," *AIChE J.*, Vol. 32, No. 10, S. 1743–1746.

[79] Leung, J. C., 1995, "The omega method for discharge rate evolution," in: *Runaway Reactions and Pressure Relief Design, Int. Symp.*, Boston, USA.

[80] Leung, J. C. und Epstein, M., 1990, "The Discharge of Two-Phase Flashing Flow From an Inclined Duct," *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 112, S. 524–528.

[81] Leung, J. C. und Grolmes, M. A., 1987, "The Discharge of Two-Phase Flashing Flow in a Horizontal Duct," *AIChE J.*, Vol. 33, No. 3, S. 524–527.

[82] Levy, S., 1960, "Steam slip - theoretical prediction from momentum model," *Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer*, Vol. 82, S. 113–124.

[83] Levy, S. und Abdollahian, D., 1982, "Homogeneous non-equilibrium critical flow model," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, No. 6, S. 759–770.

[84] Liles, D. R. und Reed, W. H., 1978, "A Semi-Implicit Method for Two-Phase Fluid Dynamics," *J. Computational Physics*, Vol. 26, S. 390–407.

[85] Martinelli, R. C. und Nelson, D. B., 1948, "Prediction of Pressure Drop During Forced Circulation Boiling of Water," *Transactions of the ASME*, Vol. 70, S. 695–702.

[86] Mayinger, F., 1982, *Strömung und Wärmeübergang in Gas-Flüssigkeitsgemischen*, Springer-Verlag, Wien.

[87] Menegay, P., 1997, "A Computational Model for Two-Phase Ejector Flow," Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blackburg, Virginia, USA.

[88] Mikol, E. P., 1995, "Adiabatic single and two-phase flow in small bore tubes," *ASHRAE Journal*, S. 75–86.

[89] Moody, F. J., 1965, "Maximum flow rate of a single component, two-phase mixture," *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 86, S. 134–142.

[90] Moody, F. J., 1966, "Maximum Two-Phase Vessel Blowdown from Pipes," *Trans. ASME, Ser. C.*, Vol. 88, S. 285–293.

[91] Nabizadeh-Araghi, H., 1977, "Modellgesetze und Parameteruntersuchungen für den volumetrischen Dampfgehalt in einer Zweiphasenströmung," Dissertation, Technische Universität Hannover.

[92] Newton, I., 1701, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. 22, S. 824+.

[93] Nikuradse, J., 1934, "The Laws of Flow in Rough Pipes," *Mechanical World*, Vol. 95, S. 274+.

[94] Noll, B., 1993, *Numerische Strömungsmechanik*, Springer Verlag.

[95] Obermeier, E., 1981, "Thermodynamik kritischer Massenstromdichten, Einkomponenten-Zweiphasenströmungen," Habilitationsschrift, Universität Siegen Gesamthochschule.

[96] Olek, S., Zvirin, Y. und Elias, E., 1990, "Bubble growth predictions by the hyperbolic and parabolic heat conduction equations," *Wärme- und Stoffübertragung*, Vol. 25, S. 17–26.

[97] Pahl, T., 1990, "Thermohydraulische Aspekte von Kühlmittelverluststörungen mit kleinen Lecks in Druckwasserreaktoranlagen," Dissertation, Technische Universität Dresden, Dresden.

[98] Pana, P., 1976, "Berechnung der stationären Massenstromdichte von Wasserdampfgemischen und der auftretenden Rückstoßkräfte," Tech. Rep. IRS-W24, Institut für Reaktorsicherheit, Köln.

[99] Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Pu-

blishing Corporation.

[100] Patankar, S. V. und Spalding, D. B., 1972, "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, S. 1787–1806.

[101] Philipp, J., 1998, Mündliche Mitteilung, TU Dresden, Institut für Energiemaschinen und Maschinenlabor.

[102] Prandtl, L., Oswatitsch, K. und Wieghardt, K., 1990, *Führer durch die Strömungslehre*, 9. Aufl., Verlag Vieweg.

[103] Prins, C. A., 1974, "Aspects of two-phase, gas-liquid, separation related to nuclear steam supply systems," Tech. Rep. WTHD56, Delft University.

[104] Quack, H., 1998, *Skript zur Lehrveranstaltung "Grundlagen der Wärme- und Kältetechnik", Teil 2*, TU Dresden, Institut für Energiemaschinen und Maschinenlabor, Lehrstuhl Kälte- und Kryotechnik, Dresden.

[105] Ransom, V. H., Wagner, R. J. und Trapp, J. A., 1995, *RELAP5/MOD3 Code Manual, Volume I: Code Structure, System Models, and Solution Methods*, Idaho National Engineering Laboratory, Idaho Falls, Idaho 83415, USA.

[106] Ranz, W. E. und Marshall, W. R., 1952, "Evaporation from Drops, Part I," *Chem. Eng. Prog.*, Vol. 48, No. 3, S. 141–146.

[107] Ranz, W. E. und Marshall, W. R., 1952, "Evaporation from Drops, Part II," *Chem. Eng. Prog.*, Vol. 48, No. 4, S. 173–180.

[108] Reocreux, M., 1974, "Contribution à l'Étude des Debits Critiques en Ecoulement Diphasique Eau-Vapeur," Dissertation, L'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France.

[109] Reocreux, M., 1977, "Contribution to the Study of Critical Flow Rates in Two-Phase Water Vapor Flow," Tech. Rep. NUREG/TR-0002, U.S. Nuclear Regulatory Commission.

[110] Richter, H. J., 1981, "Separated two-phase flow model: Application to critical two-phase flow," Topical Report EPRI NP-1800, Electric Power Research Institute.

[111] Richter, H. J., 1983, "Separated Two-Phase Flow Model: Application to Critical Two-Phase Flow," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 9, No. 5, S. 511–530.

[112] Rivard, W. C. und Travis, J. R., 1990, "A Non-Equilibrium Vapor Production Model for Critical Flow," *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 74, S. 40–48.

[113] Rowe, P. N. und Henwood, C. A., 1961, "Drag Forces in a Hydraulic Model of a Fluidized Bed - I," *Trans. Inst. of Chem. Eng.*, Vol. 39, S. 43–54.

[114] Ruggles, A. E., 1987, "The propagation of pressure perturbations in bubbly air/water flows," Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, USA.

[115] Ryley, D. J., 1965, "Two-Phase Critical Mist Flow in Geothermal Steam Wells," in: *Proc. Symp. on Two-Phase Flow*, University of Exeter, S. G301–317.

[116] Ryley, D. J. und Parker, G. J., 1968, "Two-Phase Critical Flow Through Suction Slots in Low Pressure Steam Turbine Blades," *J. Mech. Engng. Sci.*, Vol. 10, No. 4, S. 337–345.

[117] Saha, P., 1984, "A Nonequilibrium Vapor Generation Model for Flashing Flows," *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 106, S. 198–203.

[118] Sauer, J., 2000, "Instationär kavitierende Strömungen – Ein neues Modell basierend auf Front Capturing (VoF) und Blasendynamik," Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe.

[119] Schlichting, H. und Gersten, K., 1997, *Grenzschicht-Theorie*, 9. Aufl., Springer-Verlag.

[120] Schmidt, D. P., Rutland, C. J. und Corradini, M. L., 1997, "A Numerical Study of Cavitating Flow Through Various Nozzle Shapes," Tech. Rep. 971597, Engine Research Center, University of Wisconsin, Madison.

[121] Schwellnus, C. F. und Shoukri, M., 1991, "A Two-Fluid Model for Non-Equilibrium Two-Phase Critical Discharge," *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 69, S. 188–197.

[122] Shin, T. S. und Jones, O. C., 1993, "Nucleation and Flashing in Nozzles – 1, A Distributed Nucleation Model," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 19, No. 6, S. 943–964.

[123] Soplenkov, K. I. und Blinkov, V. N., 1983, "Heterogeneous nucleation in the flow of superheated liquid," in: *Multiphase Systems: Transient Flows with Physical and Chemical Transformation*, Hrsg. B. I. Nigmatulin und A. I. Ivandayev, S. 105–109.

[124] Sozzi, G. L. und Sutherland, W. A., 1975, "Critical flow of saturated and subcooled water at high pressure," in: *ASME Meeting, Houston, Non-equilibrium two phase flows*, Hrsg. L. T. Lahey und G. B. Wallis.

[125] Starkman, E. S., Schrock, V. E., Neusen, K. F. und Maneely, D. J., 1964, "Expansion of a Very Low Quality Two-Phase Fluid Through a Convergent-Divergent Nozzle," *Trans. ASME, Journal of Basic Engineering*, Vol. 86, No. 2, S. 247–256.

[126] Stokes, G. G., 1856, "On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums," *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, Vol. 9, Part II, S. 8–106.

[127] Surbey, D. W., Kelkar, B. G. und Brill, J. P., 1985, "Study of Multiphase Critical Flow Through Wellhead Chokes," Tech. Rep. SPE 15140, Society of Petroleum Engineers.

[128] Techo, R., Tickner, R. R. und James, R. E., 1965, "An accurate equation for the computation of the friction factor for smooth pipes from the Reynolds number," *J. Appl. Mech.*, Vol. 6.

[129] Trapp, J. A. und Riemke, R. A., 1986, "A Nearly-Implicit Hydrodynamic Numerical Scheme for Two-Phase Flows," *J. Computational Physics*, Vol. 66, S. 62–82.

[130] Truckenbrodt, E., 1992, *Fluidmechanik*, Vol. Bd. 2. Elementare Strömungsvorgänge dichteveränderlicher Fluide sowie Potential- und Grenzschichtströmungen, 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[131] Umbaugh, S. E., 1998, *Computer Vision and Image Processing, A Practical Approach Using CVIPtools*, Prentice-Hall.

[132] VDI-WA97, 1997, *VDI-WÄRMEATLAS, Recherchieren-Berechnen-Konstruieren, Wärmeübergang und Strömung in Verfahrenstechnik und Chemie*, 8. Aufl., VDI Verlag, Düsseldorf.

[133] VdTÜV, 1973, "Merkblatt 100/2: Bemessungsvorschlag für Sicherheitsventile für Gase in flüssigem Zustand," Tech. rep., Vereinigung der Technischen Überwachungs-Vereine, Essen.

[134] Wagner, W., Cooper, J. R., Dittmann, A., Kijima, J., Kretzschmar, H.-J., Kruse, A., Mares, R., Oguchi, K., Sato, H., Stücker, I., Sifner, O., Takaishi, Y., Tanishita, I., Trübenbach, J. und Willkommen, T., 1998, "The IAPWS Industrial Formulation 1997 for the Thermodynamic Properties of Water and Steam," Zur Veröffentlichung eingereicht beim ASME Journal of Engineering for Gas Turbines

and Power.

[135] Wagner, W. und Kruse, A., 1998, *Zustandsgrößen von Wasser und Wasserdampf, Der Industrie-Standard IAPWS-IF97 für die thermodynamischen Zustandsgrößen und ergänzende Gleichungen für andere Eigenschaften, Europäische Ausgabe Deutsch/Englisch*, Springer-Verlag.

[136] Wallis, G. B., 1969, *One-Dimensional Two-Phase Flow*, McGraw Hill, New York.

[137] Wehnes, H., 1985, *FORTRAN 77 – Strukturierte Programmierung mit FORTRAN 77*, 4. Aufl., Carl Hanser Verlag, München, Wien.

[138] Wein, M., 1997, *Programmdokumentation ZPVSMESS*, TU Dresden, Institut für Thermodynamik und TGA, Dresden.

[139] Wein, M. und Huhn, J., 1997, "Numerical Simulation of Non-Equilibrium Hot-Water Two-Phase Flows," in: *Convective Flow and Pool Boiling Conference*, Kloster Irsee, Germany.

[140] Wein, M. und Huhn, J., 1999, "Numerical Simulation of Non-Equilibrium Hot-Water Two-Phase Flows," in: *Convective Flow and Pool Boiling*, Hrsg. M. Lehner und F. Mayinger, Taylor and Francis Inc., New York.

[141] Wendt, J. F., Hrsg., 1992, *Computational Fluid Dynamics - An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin.

[142] Wieghardt, K., 1965, *Theoretische Strömungslehre*, B. G. Teubner Verlag, Stuttgart.

[143] Wijngaarden, van, L., 1976, "Hydrodynamic Interaction Between Gas Bubbles in Liquid," *J. Fluid Mech.*, Vol. 77, No. 1, S. 27–44.

[144] Wolfert, U., Burwell, M. J. und Enix, D., 1978, "Non equilibrium mass transfer between liquid and vapor phases during depressurization processes," in: *OECD (NEA) CSNI 2nd Specialists Meeting on Transient Two-Phase Flow, Paris, June 12-14, 1978*, Paris.

[145] Zimmer, G. A., Wu, B. J. C., Leonhardt, W. J., Abuaf, N. und Jones, Jr., O. C., 1979, "Pressure and Void Distributions in a Converging-Diverging Nozzle With Nonequilibrium Water Vapor Generation," Tech. Rep. BNL-NUREG-26003, Brookhaven National Laboratory, Informal Report.

[146] Zuber, N., 1964, "On the Dispersed Two-Phase Flow in the Laminar Flow Regime," *Chemical Engineering Science*, Vol. 19, S. 897–917.

[147] Zuber, N. und Findlay, J. A., 1964, "The Effects of Non-Uniform Flow and Concentration Distributions and the Effect of the Local Relative Velocity on the Average Volumetric Concentration in Two-Phase Flow," Tech. rep., General Electric Company.

# A. Variablen im Gleichungssystem

| | | |
|---|---|---|
| **Geometrie** | Strömungsquerschnitt | $A$ |
| | Kanalneigung | $\theta$ |
| **Thermodynamische Variablen** | Dampfvolumenanteil | $\epsilon_v$ |
| | Volumenanteil der Flüssigkeit | $\epsilon_l$ |
| | Dampfdichte | $\rho_v$ |
| | Flüssigkeitsdichte | $\rho_l$ |
| | Druck | $p$ |
| | Temperatur des Dampfes | $T_v$ |
| | Temperatur der Flüssigkeit | $T_l$ |
| | Spez. innere Energie der Flüssigkeit | $u_l$ |
| | Volumetrische Blasenanzahl | $N_b$ |
| | Spez. Enth. der Fl. bei Phasenwechsel | $h_l^x$ |
| **Fluiddynamische Variablen** | Strömungsgeschwindigkeit des Dampfes | $w_v$ |
| | Geschwindigkeit der Flüssigkeit | $w_l$ |
| | Geschwindigkeit an der Phasengrenzfläche | $w^*$ |
| | Wandreibung (Dampf/Wand) | $f_{w,v}$ |
| | Wandreibung (Flüssigkeit/Wand) | $f_{w,l}$ |
| | Reibung zwischen den Phasen | $f^*$ |
| **Quellterme** | Verdampfungs-/Kondensationsrate | $\Gamma_v$ |
| | Wärmestromdichte zwischen den Phasen | $\dot{q}^*$ |
| | Volumetrische Phasengrenzfläche | $A^*$ |
| | Keimbildungsrate im Strömungskern | $\phi_{bn}$ |
| | Keimbildungsrate an der Wand | $\phi_{wn}$ |
| **23 Unbekannte** | | |

Tabelle A.1.: Zusammenstellung der Variablen des Zweifluidmodells (bezogen auf das Gleichungssystem (2.1)-(2.6), S.27) unabhängige Variablen: Zeit $t$, axiale Koordinate $z$

| Geometrie und Ausrichtung des Strömungskanals sind bekannt $\Rightarrow A = A(z)$ und $\theta$ | |
|---|---|
| Volumenanteile | $\epsilon_v + \epsilon_l = 1$ |
| Thermische Zustandsgleichungen:<br>Dichte der Dampfphase<br>Dichte der flüssigen Phase<br>Annahme: Dampf stets gesättigt | <br>$\rho_v = \rho_v(p, T_v)$<br>$\rho_l = \rho_l(p, T_l)$<br>$T_v = T^s(p)$ |
| Kalorische Zustandsgleichungen:<br>spez. innere Energie der Flüssigkeit<br>spez. Enthalpie der flüssigen<br>Phase bei Phasenwechsel | <br>$u_l = u_l(p, T_l)$<br>$h^x = h_l(p, T_l)$ bei Verdampfung<br>bzw. $h^x = h_l^{sat}(p)$ bei Kondensation |
| Fluiddynamische Korrelationen:<br>Geschwindigkeit der Phasengrenzfläche<br>Wandreibung für Flüssigphase<br>Wandreibung für Dampfphase<br>Reibung zwischen den Phasen | <br>$w^* = f(\eta = 0.5, w_v, w_l)$<br>$f_{w,l} = f$(PV, Reibungskorrelationen)<br>$f_{w,v} = 0$<br>$f^* = f$(PV, Widerstandsbeziehungen) |
| Quellterme:<br>Verdampfungs-/Kondensationsrate<br>Wärmestromdichte zw. den Phasen<br>Volum. Phasengrenzfläche<br>Keimbildungsrate im Strömungskern<br>Keimbildungsrate an der Wand | <br>$\Gamma_v = f(\dot{q}^*, A^*, \Delta h_{lv})$<br>$\dot{q}^* = f$(PV, Wärmeübergangsbez.)<br>$A^* = f$(PV, Strömungsform)<br>$\phi_{bn} = f$(PV, Geometrie)<br>$\phi_{wn} = f$(PV, Widerstandsbez.) |
| **17 Schließungsbeziehungen** | |

Tabelle A.2.: Überblick über die zur Schließung des Gleichungssystems benötigten Beziehungen, PV: Primärvariablen ($p$, $T_l$, $\epsilon_v$, $w_v$, $w_l$, $N_b$)

# B. Ergänzung zur numerischen Lösung

## B.1. Newton-Iteration für lineare Gleichungssysteme

Die Vorgehensweise zur iterativen Berechnung der Lösungen von Systemen zuvor linearisierter Gleichungen soll anhand eines allgemein formulierten Systems aus zwei Gleichungen, die von den Variablen $x$ und $y$ abhängen, gezeigt werden. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$f_1(x,y) = 0 \tag{B.1}$$
$$f_2(x,y) = 0. \tag{B.2}$$

Eine Taylor-Reihenentwicklung um die geschätzten Lösungen $x_0$ und $y_0$ ergibt:

$$f_1(x,y) = f_1(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\Delta x + \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\Delta y + \\ + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right|_{x_0,y_0}\Delta x^2 + \left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}\right|_{x_0,y_0}\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right|_{x_0,y_0}\Delta y^2 + \ldots, \tag{B.3}$$

$$f_2(x,y) = f_2(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\Delta x + \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\Delta y + \\ + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right|_{x_0,y_0}\Delta x^2 + \left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}\right|_{x_0,y_0}\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\right|_{x_0,y_0}\Delta y^2 + \ldots. \tag{B.4}$$

Die linearisierte Form des Gleichungsystems erhält man durch Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung:

$$f_1(x,y) \approx f_1(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\Delta x + \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\Delta y, \tag{B.5}$$

$$f_2(x,y) \approx f_2(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\Delta x + \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\Delta y. \tag{B.6}$$

In Matrixform ergibt sich mit $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$:

$$\mathbf{J}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}f_1(x_0,y_0)\\ f_2(x_0,y_0)\end{pmatrix}. \tag{B.7}$$

Darin ist $\mathbf{J}$ die Jacobi-Matrix des Gleichungssystems:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}. \tag{B.8}$$

Die Lösung der Gl. (B.7) ergibt die Lösungen $\Delta x$ und $\Delta y$. Neue Schätzwerte erhält man unter Verwendung der Korrekturen $\Delta x$ und $\Delta y$ aus:

$$x_0' = x_0 + \Delta x, \tag{B.9}$$

$$y_0' = y_0 + \Delta y. \tag{B.10}$$

Diese Lösungen werden nun als neue Schätzwerte in Gl. (B.7) eingesetzt. Der Iterationsprozeß wird solange fortgesetzt bis die Näherungswerte den Genauigkeitsanforderungen genügen.

## B.2. Diskretisierte Form des Gleichungssystems

Linearisierte Form der Impulsgleichungen (2.3) und (2.4), S. 27, in Matrix-Vektor-Schreibweise:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{w}_{i+1/2}^{n+1} = \mathbf{r}. \tag{B.11}$$

Darin ist $\mathbf{w}_{i+1/2}^{n+1}$ der Vektor der Phasengeschwindigkeiten zur Zeit $t = t^{n+1}$ am Ort $z = z_{i+1/2}$:

$$\mathbf{w}_{i+1/2}^{n+1} = \begin{pmatrix} w_v \\ w_l \end{pmatrix}_{i+1/2}^{n+1}.$$

Die Elemente der Matrix $\mathbf{A}$ sind wie folgt definiert[1]:

$$A_{1,1} = 1 + \left(\frac{C_{vm}\epsilon_l\rho_m}{\rho_v}\right)_{i+1/2}^{n}\left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\left(w_{l\,i+1/2}^{n} - w_{l\,i-1/2}^{n}\right)\right] + \\ + \frac{\Delta t}{(\epsilon_v\rho_v)_{i+1/2}^{n}}\left[\frac{f_{wv}}{|w_v|} + \frac{f_{lv}}{|w_v - w_l|}\right]_{i+1/2}^{n},$$

$$A_{1,2} = -\left(\frac{C_{vm}\epsilon_l\rho_m}{\rho_v}\right)_{i+1/2}^{n}\left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\left(w_{v\,i+1/2}^{n} - w_{v\,i-1/2}^{n}\right)\right] - \frac{\Delta t}{(\epsilon_v\rho_v)_{i+1/2}^{n}}\left[\frac{f_{lv}}{|w_v - w_l|}\right]_{i+1/2}^{n},$$

$$A_{2,1} = -\left(\frac{C_{vm}\epsilon_v\rho_m}{\rho_l}\right)_{i+1/2}^{n}\left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\left(w_{l\,i+1/2}^{n} - w_{l\,i-1/2}^{n}\right)\right] - \frac{\Delta t}{(\epsilon_l\rho_l)_{i+1/2}^{n}}\left[\frac{f_{lv}}{|w_v - w_l|}\right]_{i+1/2}^{n},$$

$$A_{2,2} = 1 + \left(\frac{C_{vm}\epsilon_v\rho_m}{\rho_l}\right)_{i+1/2}^{n}\left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\left(w_{v\,i+1/2}^{n} - w_{v\,i-1/2}^{n}\right)\right] + \\ + \frac{\Delta t}{(\epsilon_l\rho_l)_{i+1/2}^{n}}\left[\frac{f_{wl}}{|w_l|} + \frac{f_{lv}}{|w_v - w_l|}\right]_{i+1/2}^{n}.$$

[1] Die virtuelle Massekraft, vgl. Kapitel 2.3.3.2, wird hier in der linearisierten Form der Gl. (2.45) dargestellt und beinhaltet im Gegensatz zu üblichen Ansätzen (z.B. Ransom et al. [105]) sowohl die örtliche als auch die zeitliche Ableitung der Relativgeschwindigkeit zwischen den Phasen.

Die rechten Seiten der Matrix-Gl. (B.11) enthalten folgende Größen:

$$r_1 = -\beta^n_{v,i+1/2}\left(p^{n+1}_{i+1} - p^{n+1}_i\right) + \gamma^n_{v,i+1/2} + \delta^n_{v,i+1/2}$$

$$r_2 = -\beta^n_{l,i+1/2}\left(p^{n+1}_{i+1} - p^{n+1}_i\right) + \gamma^n_{l,i+1/2} + \delta^n_{l,i+1/2}$$

mit den Koeffizienten ($k = v, l$):

$$\beta^n_{k,i+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\,\frac{1}{\rho^n_{k,i+1/2}},$$

$$\gamma^n_{k,i+1/2} = w^n_{k,i+1/2}\left\{1 - \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\left(w^n_{k,i-1/2} - w^n_{k,i+1/2}\right)\right\},$$

$$\delta^n_{k,i+1/2} = \Delta t\left[g\sin\phi \pm \frac{\Gamma^n_{v,i+1/2}\left(w^{*n}_{i+1/2} - w^n_{k,i+1/2}\right)}{\epsilon^n_{k,i+1/2}\rho^n_{k,i+1/2}}\right].$$

Das System der Gleichungen (2.1), (2.2), (2.5) und (2.6) lautet in Matrixform:

$$-\mathbf{a}\,\Delta p^{n+1}_{i-1} + \mathbf{M}\,\mathbf{x}^{n+1}_i - \mathbf{b}\,\Delta p^{n+1}_{i+1} = \mathbf{c} \tag{B.12}$$

mit dem Vektor der Primärvariablen:

$$\mathbf{x}^{n+1}_i = \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta\epsilon_v \\ \Delta T_l \\ \Delta N_b \end{pmatrix}^{n+1}_i.$$

Linearisierte Form der Kontinuitätsgleichung für die dampfförmige Phase, Gl. (2.1):

$$\begin{aligned} &-\mathrm{a}_1\,(\Delta p)^{n+1}_{i-1} + \mathrm{M}_{1,1}\,(\Delta p)^{n+1}_i + \mathrm{M}_{1,2}\,(\Delta\epsilon_v)^{n+1}_i + \\ &+\mathrm{M}_{1,3}\,(\Delta T_l)^{n+1}_i + \mathrm{M}_{1,4}\,(\Delta N_b)^{n+1}_i - \mathrm{b}_1\,(\Delta p)^{n+1}_{i+1} = \mathrm{c}_1 \end{aligned} \tag{B.13}$$

mit:

$$\mathrm{a}_1 = \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{A_i}\left[\epsilon_v\rho_v\beta_v A\right]^n_{i-1/2},$$

$$\mathrm{M}_{1,1} = {\epsilon_v}^{n+1}_i\left(\frac{\mathrm{d}\rho_v}{\mathrm{d}p}\right)^{n+1}_i + \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{A_i}\left[(\epsilon_v\rho_v\beta_v A)^n_{i+1/2} + (\epsilon_v\rho_v\beta_v A)^n_{i-1/2}\right] - \Delta t\left(\frac{\partial\Gamma_v}{\partial p}\right)^{n+1}_i,$$

$$\mathrm{M}_{1,2} = {\rho_v}^{n+1}_i - \Delta t\left(\frac{\partial\Gamma_v}{\partial\epsilon_v}\right)^{n+1}_i,$$

$$\mathrm{M}_{1,3} = -\Delta t\left(\frac{\partial\Gamma_v}{\partial T_l}\right)^{n+1}_i,$$

$$\mathrm{M}_{1,4} = -\Delta t\left(\frac{\partial\Gamma_v}{\partial N_b}\right)^{n+1}_i,$$

$$\mathrm{b}_1 = \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{A_i}\left[\epsilon_v \rho_v \beta_v A\right]^n_{i+1/2},$$

$$\mathrm{c}_1 = -\left\{(\epsilon_v\rho_v)^{n+1}_i - (\epsilon_v\rho_v)^n_i + \frac{1}{A_i}\frac{\Delta t}{\Delta z_i}\left[(\epsilon^n_v \rho^n_v w^{n+1}_v A)_{i+1/2} - (\epsilon^n_v \rho^n_v w^{n+1}_v A)_{i-1/2}\right] - \Delta t\, \Gamma^{n+1}_{v,i}\right\}.$$

Linearisierte Form der Kontinuitätsgleichung für die flüssige Phase, Gl. (2.2):

$$\begin{aligned} -\mathrm{a}_2\,(\Delta p)^{n+1}_{i-1} + \mathrm{M}_{2,1}\,(\Delta p)^{n+1}_i + \mathrm{M}_{2,2}\,(\Delta\epsilon_v)^{n+1}_i + \\ +\mathrm{M}_{2,3}\,(\Delta T_l)^{n+1}_i + \mathrm{M}_{2,4}\,(\Delta N_b)^{n+1}_i - \mathrm{b}_2\,(\Delta p)^{n+1}_{i+1} = \mathrm{c}_2 \end{aligned} \tag{B.14}$$

mit:

$$\mathrm{a}_2 = \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{A_i}\left[\epsilon_l \rho_l \beta_l A\right]^n_{i-1/2},$$

$$\mathrm{M}_{2,1} = \epsilon_l{}^{n+1}_i \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial p}\right)^{n+1}_i + \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{A_i}\left[(\epsilon_l\rho_l\beta_l A)^n_{i+1/2} - (\epsilon_l\rho_l\beta_l A)^n_{i-1/2}\right] + \Delta t \left(\frac{\partial \Gamma_v}{\partial p}\right)^{n+1}_i,$$

$$\mathrm{M}_{2,2} = -\rho_l{}^{n+1}_i + \Delta t \left(\frac{\partial \Gamma_v}{\partial \epsilon_v}\right)^{n+1}_i$$

$$\mathrm{M}_{2,3} = \epsilon_l{}^{n+1}_i \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial T_l}\right)^{n+1}_i + \Delta t \left(\frac{\partial \Gamma_v}{\partial T_l}\right)^{n+1}_i$$

$$\mathrm{M}_{2,4} = \Delta t \left(\frac{\partial \Gamma_v}{\partial N_b}\right)^{n+1}_i$$

$$\mathrm{b}_2 = \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{A_i}\left[\epsilon_l \rho_l \beta_l A\right]^n_{i+1/2},$$

$$\mathrm{c}_2 = -\left\{(\epsilon_l\rho_l)^{n+1}_i - (\epsilon_l\rho_l)^n_i + \frac{1}{A_i}\frac{\Delta t}{\Delta z_i}\left[(\epsilon^n_l \rho^n_l w^{n+1}_l A)_{i+1/2} - (\epsilon^n_l \rho^n_l w^{n+1}_l A)_{i-1/2}\right] + \Delta t\, \Gamma^{n+1}_{v,i}\right\}.$$

Linearisierte Form der thermischen Energiegleichung für die flüssige Phase, Gl. (2.5):

$$\begin{aligned} -\mathrm{a}_3\,(\Delta p)^{n+1}_{i-1} + \mathrm{M}_{3,1}\,(\Delta p)^{n+1}_i + \mathrm{M}_{3,2}\,(\Delta\epsilon_v)^{n+1}_i + \\ +\mathrm{M}_{3,3}\,(\Delta T_l)^{n+1}_i + \mathrm{M}_{3,4}\,(\Delta N_b)^{n+1}_i - \mathrm{b}_3\,(\Delta p)^{n+1}_{i+1} = \mathrm{c}_3 \end{aligned} \tag{B.15}$$

mit:

$$\mathrm{a}_3 = \frac{\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{A_i}\left[(\epsilon_l\beta_l A)^n_{i-1/2}\left((\rho_l u_l)^n_{i-1/2} + p^{n+1}_i\right)\right]$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{3,1} = \epsilon_l{}^{n+1}_i - \epsilon_l{}^n_i + \\ +\frac{\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{A_i}\left[(\epsilon_l\beta_l A)^n_{i+1/2}\left((\rho_l u_l)^n_{i+1/2} + p^{n+1}_i\right) + (\epsilon_l\beta_l A)^n_{i-1/2}\left((\rho_l u_l)^n_{i-1/2} + p^{n+1}_i\right)\right] + \\ +\frac{\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{A_i}\left[(\epsilon_l w_l A)^n_{i+1/2} - (\epsilon_l w_l A)^n_{i-1/2}\right] + \Delta t\left[\Gamma_v \frac{\partial h^x_l}{\partial p} + h^x_l \frac{\partial \Gamma_v}{\partial p} + A^* \frac{\partial \dot{q}^*}{\partial p}\right]^{n+1}_i, \end{aligned}$$

$$\mathrm{M}_{3,2} = -\left(\rho_l\, u_l + p\right)_i^{n+1} + \Delta t \left[ h_l^x \frac{\partial \Gamma_v}{\partial \epsilon_v} + A^* \frac{\partial \dot{q}^*}{\partial \epsilon_v} + \dot{q}^* \frac{\partial A^*}{\partial \epsilon_v} \right]_i^{n+1},$$

$$\mathrm{M}_{3,3} = \epsilon_{v_i}^{n+1} \left[ \rho_l \frac{\partial u_l}{\partial T_l} + u_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T_l} \right]_i^{n+1} + \Delta t \left[ h_l^x \frac{\partial \Gamma_v}{\partial T_l} + \Gamma_v \frac{\partial h_l^x}{\partial T_l} + A^* \frac{\partial \dot{q}^*}{\partial T_l} \right]_i^{n+1},$$

$$\mathrm{M}_{3,4} = \Delta t \left[ h_l^x \frac{\partial \Gamma_v}{\partial N_b} + \dot{q}^* \frac{\partial A^*}{\partial N_b} \right]_i^{n+1},$$

$$\mathrm{b}_3 = \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \frac{1}{A_i} \left[ (\epsilon_l \beta_l A)_{i+1/2}^n \left( (\rho_l u_l)_{i+1/2}^n + p_i^{n+1} \right) \right],$$

$$\mathrm{c}_3 = -\Bigg\{ \left(\epsilon_l \rho_l u_l\right)_i^{n+1} - \left(\epsilon_l \rho_l u_l\right)_i^n + \frac{1}{A_i} \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \left[ \left(\epsilon_l^n \rho_l^n u_l^n w_l^{n+1} A\right)_{i+1/2} - \left(\epsilon_l^n \rho_l^n u_l^n w_l^{n+1} A\right)_{i-1/2} \right] +$$
$$+ p_i^{n+1} \frac{1}{A_i} \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \left[ \left(\epsilon_l^n w_l^{n+1} A\right)_{i+1/2} - \left(\epsilon_l^n w_l^{n+1} A\right)_{i-1/2} \right] + p_i^{n+1} \left(\epsilon_l^{n+1} - \epsilon_l^n\right)$$
$$+ \Delta t \left( \Gamma_{v,i}^{n+1} h_l^x + A_i^{*^{n+1}} q_i^{*^{n+1}} \right) \Bigg\}$$

Linearisierte Form der Blasentransportgleichung, Gl. (2.6):

$$-\mathrm{a}_4 \left(\Delta p\right)_{i-1}^{n+1} + \mathrm{M}_{4,1} \left(\Delta p\right)_i^{n+1} + \mathrm{M}_{4,2} \left(\Delta \epsilon_v\right)_i^{n+1} +$$
$$+ \mathrm{M}_{4,3} \left(\Delta T_l\right)_i^{n+1} + \mathrm{M}_{4,4} \left(\Delta N_b\right)_i^{n+1} - \mathrm{b}_4 \left(\Delta p\right)_{i+1}^{n+1} = \mathrm{c}_4 \tag{B.16}$$

mit:

$$\mathrm{a}_4 = \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \frac{1}{A_i} \left[ N_b \beta_v A \right]_{i-1/2}^n,$$

$$\mathrm{M}_{4,1} = \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \frac{1}{A_i} \left[ (N_b \beta_v A)_{i-1/2}^n + (N_b \beta_v A)_{i+1/2}^n \right] - \Delta t \left[ \frac{\partial \Phi_{wn}}{\partial p} + \frac{\partial \Phi_{bn}}{\partial p} \right]_i^{n+1},$$

$$\mathrm{M}_{4,2} = -\Delta t \left[ \frac{\partial \Phi_{wn}}{\partial \epsilon_v} + \frac{\partial \Phi_{bn}}{\partial \epsilon_v} \right]_i^{n+1},$$

$$\mathrm{M}_{4,3} = -\Delta t \left[ \frac{\partial \Phi_{wn}}{\partial T_l} + \frac{\partial \Phi_{bn}}{\partial T_l} \right]_i^{n+1},$$

$$\mathrm{M}_{4,4} = 1,$$

$$\mathrm{b}_4 = \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \frac{1}{A_i} \left[ N_b \beta_v A \right]_{i+1/2}^n,$$

$$\mathrm{c}_4 = -\Bigg\{ N_{b,i}^{n+1} - N_{b,i}^n + \frac{1}{A_i} \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \left[ \left(N_b^n w_v^{n+1} A\right)_{i+1/2} - \left(N_b^n w_v^{n+1} A\right)_{i-1/2} \right] -$$
$$- \Delta t (\Phi_{wn} + \Phi_{bn})_i^{n+1} \Bigg\}.$$

## B.3. Programmsystem 'TPTFM'

Das Programmsystem 'TPTFM'[2] beinhaltet die in Kapitel 2 dargestellten Teilmodelle bzw. Korrelationen und verwendet das in Kapitel 3 beschriebene semi-implizite Zeitschrittverfahren. Das in der Sprache *FORTRAN 77* (Wehnes [137]) verfaßte Programm wurde auf verschiedenen Rechnerplattformen (PC, IBM RS600, Cray Origin 2000) und Betriebsystemen (Windows NT, LINUX, AIX) erfolgreich getestet. Es besteht im wesentlichen aus den im folgenden zusammengestellten Komponenten bzw. Modulen:[3]

- Datei-Handling, Ein- & Ausgabe, textorientierte Ausgabe von Ergebnissen (`tpfio`),
- Geometrieaufbereitung und Gittergenerierung (`tpfgeo`),
- Bereitstellung von thermodynamischen und thermophysikalischen Daten (`nif1997` und `nifh2o` für Wasser bzw. `r22props` und `r22inter` für R22),
- Berechnung spezieller Größen für die Zweiphasenströmung (`tpfprops`),
- Erzeugung von Startlösungen bzw. Verwendung von Zwischenlösungen (in `tptfm`),
- Behandlung transienter Randbedingungen (in `tptfm`),
- Strömungsberechnung (in `tptfm` und `tpeqsys`),
  - ▷ Wandreibung (`friction`),
  - ▷ Impulsübertragung zwischen den Phasen (`ifdrag` und `virmass`),
  - ▷ Keimbildung (`nucleat`),
  - ▷ volumetrische Phasengrenzfläche (`ifarea`),
  - ▷ Wärmeübergang zwischen den Phasen (`ifheat`),
  - ▷ Stofftransport (`ifmass`),
- Lösung von Gleichungssystemen (`gauss` und `trdig`),[4]
- Visualisierung und graphische Aufbereitung von (Zwischen-) Ergebnissen mittels *GNUPLOT*[5] (`wgnuplot`).

Der modulare Aufbau des Programmsystems ermöglicht eine vergleichsweise einfach zu realisierende Einbindung weiterer Programmkomponenten bzw. das Anpassen vorhandener Routinen an die jeweilige Problemstellung.

[2] TPTFM = Two-Phase Two-Fluid-Model
[3] Die in Klammern aufgeführten Namen bezeichnen die entsprechenden Fortran-Quellcodes.
[4] Angepaßte Module aus Engeln-Müllges [43].
[5] Auf verschiedenen Rechnerplattformen frei verfügbares Plotprogramm.

Vom Programmanwender müssen die folgenden, ausführlich kommentierten Dateien angepaßt werden:

- Randbedingungen und Geometrieinformationen (`*.inp`, wobei der Dateiname `*` an den Anwendungsfall angepaßt wird, z.B. `bnlrn273.inp`),
- Steuerungsdatei, Job-Control (`control.inp`),
- Steuerungsdatei für transiente Randbedingungen (`bndcnds.inp`).

Beispiel-Eingabedatei mit Rand- und Anfangsbedingungen sowie Geometriedaten:

```
C-------------------------------------------------------------------------
C File: bnlrn273.inp (BNL Run 273, Zimmer et al. (1979), vert. upwards)
C Align input data flush right with 72nd column!
C
0        1         2         3         4         5         6         7
12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
Result file identifier                        char*4    rfid=        b273
Inlet pressure                                real   pin/MPa=    0.573000
Inlet liquid temperature                      real    Tlin/K=  421.850000
Inlet enthalpy (only valid for sat. cnds.)    real hin/kJ/kg=    0.000000
Exit pressure                                 real   pex/MPa=    0.442000
Flow angle measured from the horizontal       real   phi/deg=   90.000000
Wall roughness                                real     wrn/m=    0.000006
Consideration of bulk nucleation (0=N,1=Y)    int    bnucl/-=           0
Consideration of wall nucleation (0=N,1=Y)    int    wnucl/-=           1
Heat and mass transfer model                  int   hmtmod/-=           1
Friction model (0=no,1=Beatt,2=Chis,3=Fried) int   wfricm/-=           3
Total number of nodes (incl. boundary nodes) int   nmax+2/-=         112
Type of geometry (cf. source)                 int   geotyp/-=           3
Inlet length                                  real     lin/m=    0.279500
Exit length                                   real     lex/m=    0.279500
Inlet diameter                                real     din/m=    0.051000
Throat diameter                               real     dth/m=    0.025000
Exit diameter                                 real     dex/m=    0.051000
C-------------------------------------------------------------------------
```

Beispiel-Eingabedatei zur Programmsteuerung:

```
C-------------------------------------------------------------------------
C File: control.inp (job-control)
C Align input data flush right with 72nd column!
C
0        1         2         3         4         5         6         7
12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
Relaxation factor of pressure corrections    real  relaxp/-=    1.000000
Factor of material Courant criterion         real   mclim/-=    0.750000
Limit of iteration accuracy                  real     eps/-=    0.001000
```

```
Initial time-step size                          real     dti/s=    0.001000
Time of program ending                          real    tend/s=   10.000000
Maximum number of time-steps                    int    maxts/-=        5000
Use fixed time-step size (1=Yes, 0=No)          int    fixdt/-=           0
Maximum number of internal iterations           int    maxit/-=          50
Storage-step size                               int   strstp/-=         200
Screen output-step size                         int   scrstp/-=          50
Differential scheme (1=Upw,2=Weighted,3=MLU) int   diffsc/-=           2
Weighting parameter [-1:1], if diffsc=2         real   wtpar/-=    0.900000
Flow regime map (0=Blinkov, 1=Kaizerman)        int   flwmap/-=           0
Sonic vel. (0=hom,1=inh,2=force exit press.) int    csmod/-=           0
GNUPLOT-Output when storing? (1=Yes, 0=No)      int    gplot/-=           0
Operation system (0=DOS/Win/WinNT, 1=UNIX)      int   ossyst/-=           0
Calculation mode (0=regular,1=restart)          int   clcmod/-=           0
Input file (*without* extension)                char*8  infile=    bnlrn273
Restart file (*with* extension)                 char*12 rsfile=b2731500.dat
Specify the location (full path) of WGNUPLOT.EXE below (char*72):
d:\programme\wgnuplot
C--------------------------------------------------------------------------
```

Beispiel-Eingabedatei zur Steuerung transienter Randbedingungen:

```
C--------------------------------------------------------------------------
C File: bndcnds.inp (boundary conditions)
C Align input data flush right with 72nd column!
C
C Possible choices for boundary conditions (variable bcmain):
C 0: fixed inlet and exit pressures
C 1: fixed inlet pressure, prescribed linear exit pressure de-/increase
C 2: prescribed linear inlet flow rate de-/increase, fixed exit pressure
C 3: transient pressure profile at inlet pressure, fixed exit pressure
C bcmain = 1/2: time-dependent linear function of exit pressure or
C inlet mass flow rate has to be specified, where
C p(t)|exit or m(t)|inlet = mstrt+(mstop-mstrt)/mtime*t.
C bcmain = 3: time-dependent inlet pressure function must be specified
C within main source.
C
0        1         2         3         4         5         6         7
12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012
Boundary condition (0, 1, 2, 3)          int        bcmain/-=           0
Initial mass flow rate / exit pressure  real mstrt/kg/s|MPa=    0.000000
Final mass flow rate / exit pressure    real mstop/kg/s|MPa=    0.641000
Time interval                           real        mtime/s=    0.200000
C--------------------------------------------------------------------------
```

## B.4. Programmablaufpläne

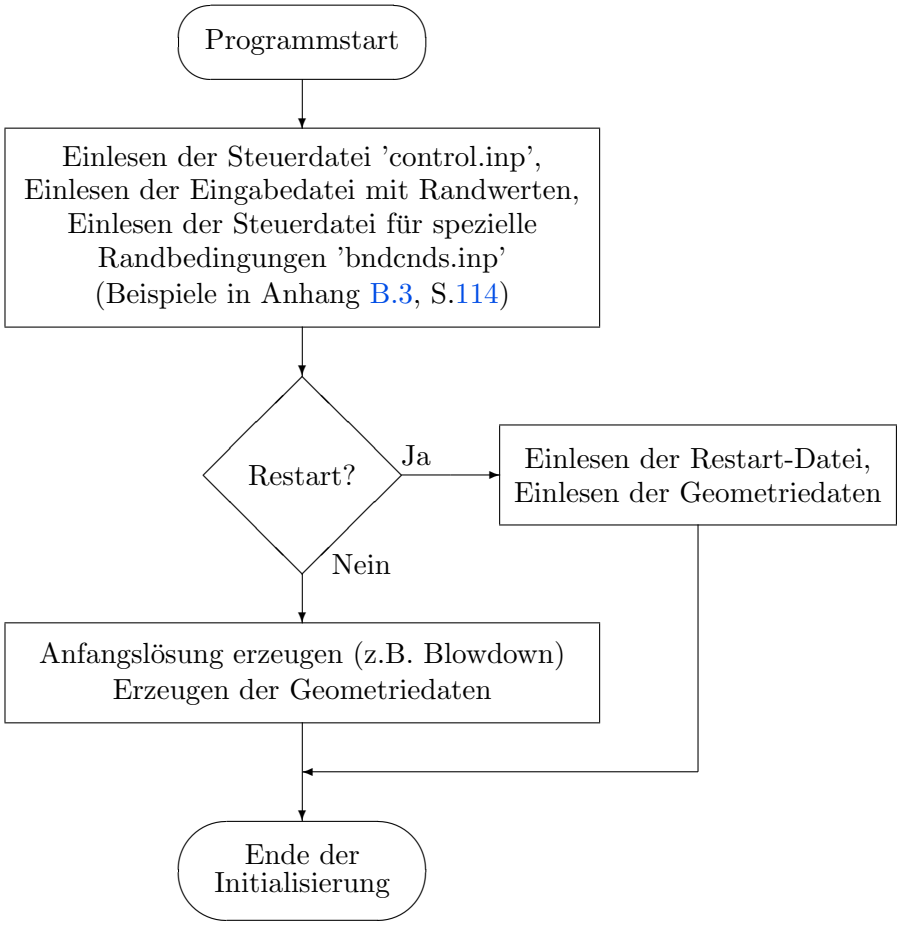



Abb. B.1: Programmstart und Initialisierung

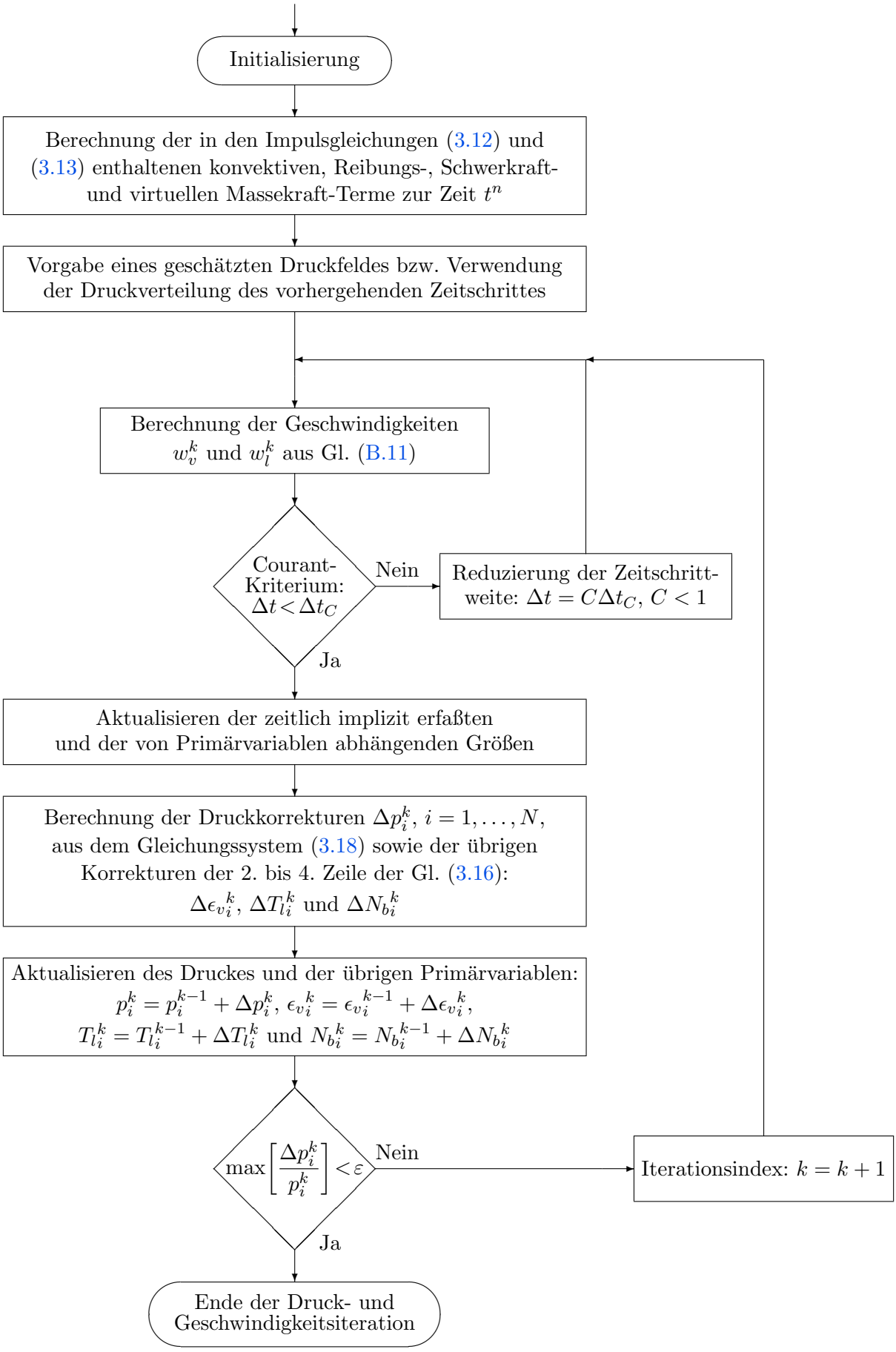



Abb. B.2: Berechnung der Druck- und Geschwindigkeitsfelder

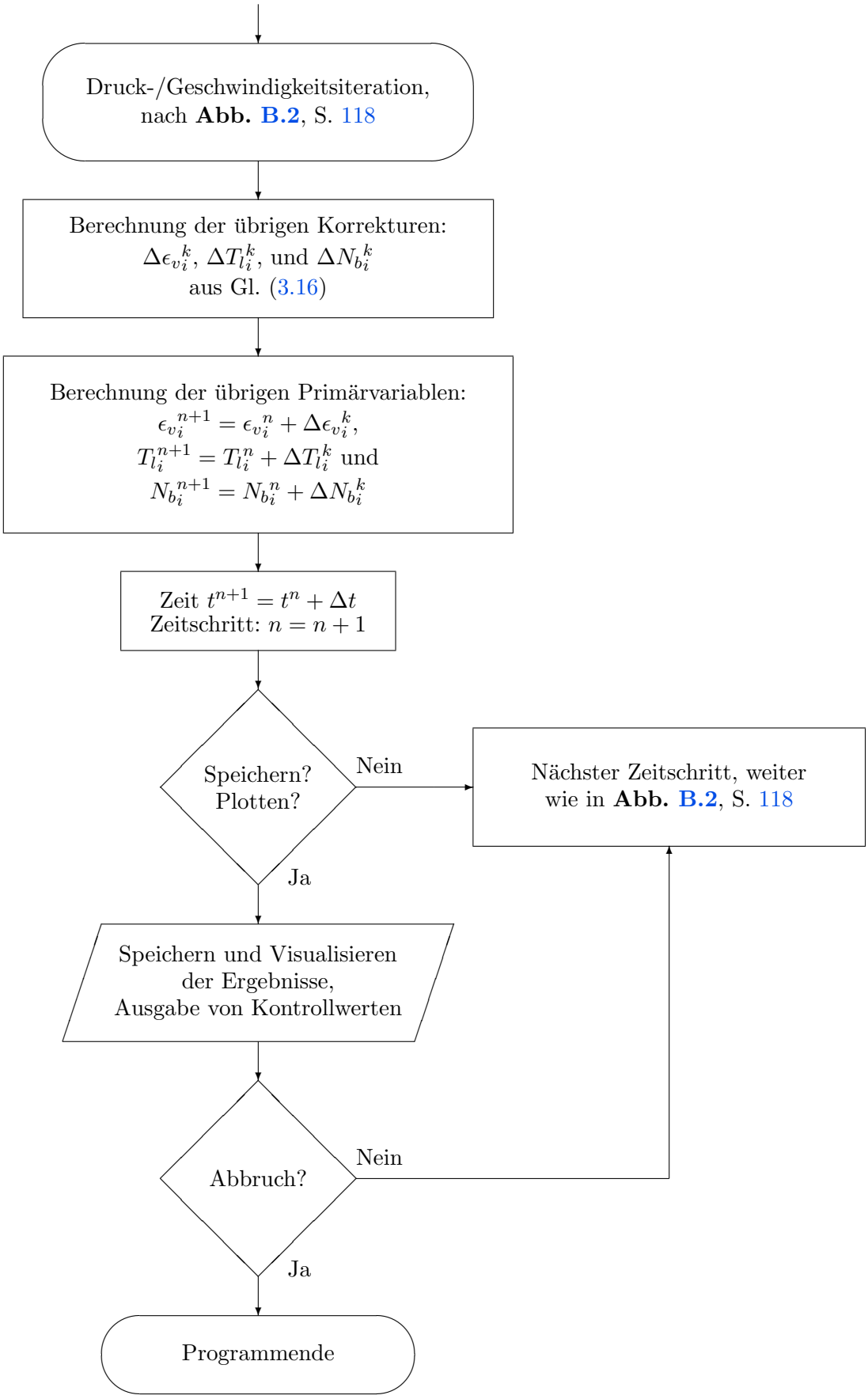
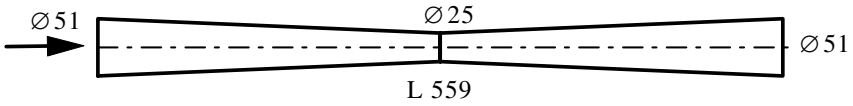



Abb. B.3: Berechnung der übrigen Variablen

# C. Transienter Simulationsverlauf

Die folgenden Abbildungen illustrieren den Gang einer transienten Rechnung bis zum Erreichen der stationären Lösung für eine Zweiphasenströmung durch eine rotationssymmetrische, konvergent-divergente Düse (BNL Run 309, Abuaf et al. [1], Zimmer et al. [145]). Die typische Anzahl von Iterationen pro Zeitschritt betrug bei dieser Rechnung zwei bis fünf Iterationen zu Beginn der Zeitintegration und ein bis zwei Schritte bei Annäherung an den quasi-stationären Strömungszustand. Insgesamt wurden 600 Zeitschritte mit Schrittweiten zwischen $1 \cdot 10^{-5}$ s und $8.6 \cdot 10^{-4}$ s benötigt. Der Strömungskanal wurde in 110 nicht-äquidistante Abschnitte, die im Bereich des Düsenhalses verdichtet wurden, aufgeteilt.




Öffnungswinkel $\approx 5.12°$, $p_E = 0.556$ MPa, $\Delta T_E = -6.8$ K,
$\dot{m}_{exp} = 8.94$ kg/s, $\dot{m}_{ber}^{\mathrm{TPTFM}} = 8.47$ kg/s

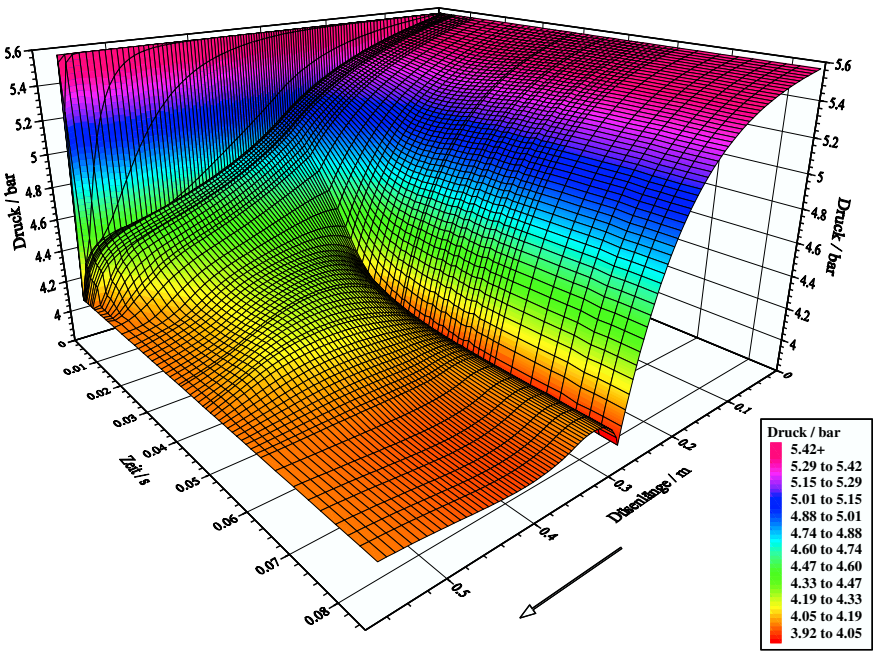



Abb. C.1: Entwicklung der Druckverteilung

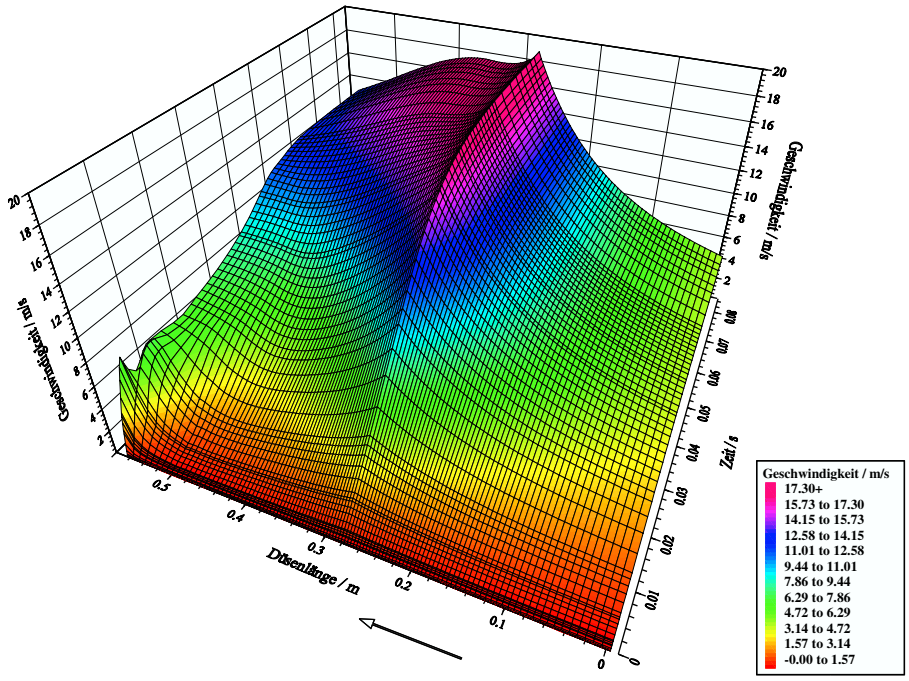



Abb. C.2: Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils der flüssigen Phase

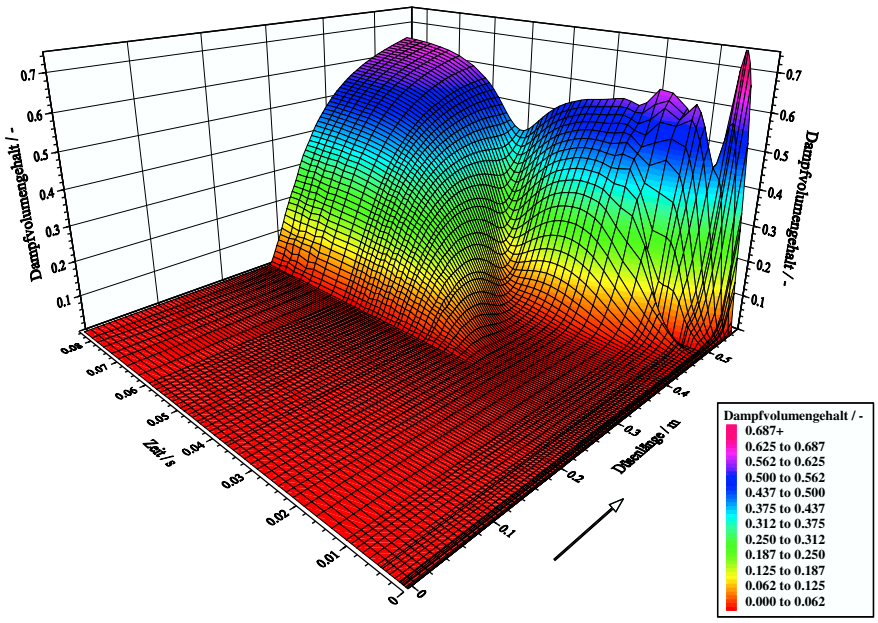



Abb. C.3: Entwicklung der Dampfvolumengehalt-Verteilung

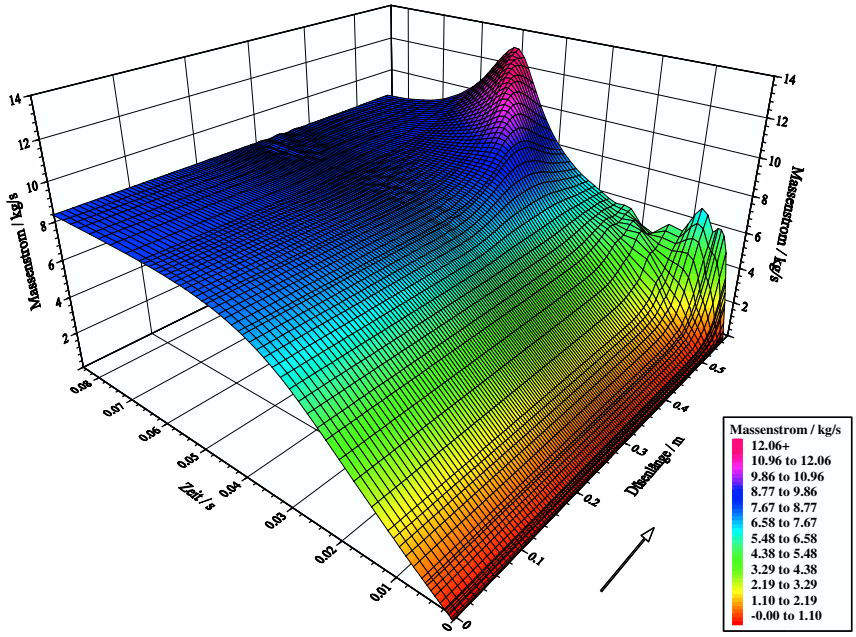



Abb. C.4: Entwicklung des Massenstromes

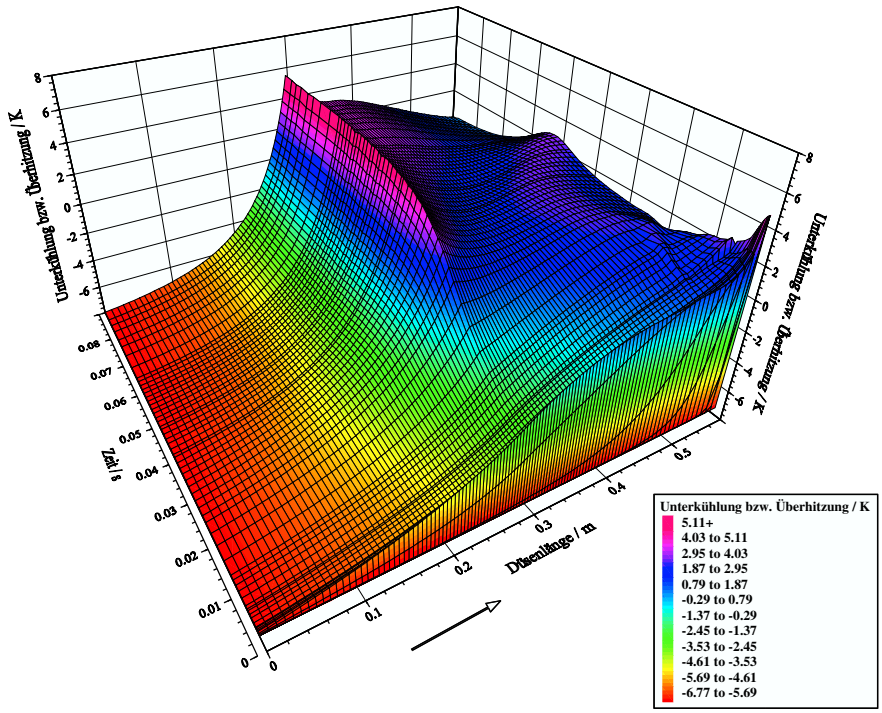



Abb. C.5: Entwicklung der Verteilungen von Unterkühlung bzw. Überhitzung

# D. Ergänzung zu den Experimenten

## D.1. Meßtechnische Austattung

### D.1.1. Druckmessung

| | |
|---|---|
| Hersteller | M. K. Juchheim & Co., Fulda |
| Typ | Typ JUMO 4AP-30 |
| Meßbereich | 0 bis 10 bar (abs) und 0 bis 2.5 bar (abs) |
| Signalausgang | 0 bis 20 mA bzw. 0 bis 10 V |
| Spannungsversorgung | DC 13 bis 30 V |
| Druckanschluß | G1/2A nach DIN 16288 |
| Mediumstemperatur | -30 bis 120°C |
| max. Stromaufnahme | $\leq$ 30 mA |

Tabelle D.1.: Technische Daten des Druckmeßumformers

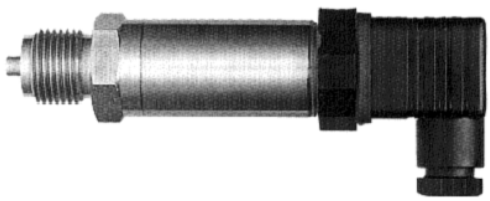


Abb. D.1: Drucktransmitter, Typ JUMO 4AP-30

### D.1.2. Temperaturmessung

| | |
|---|---|
| Hersteller | AHLBORN Mess- und Regelungstechnik, Holzkirchen |
| Typ | Pt100-Widerstandsthermometer T463 und P448-1 in 4-Leiterschaltung, Klasse B, DIN 43760, THERM 8690 (Umformer) |
| Meßbereich | 100 bis 200°C |
| Signalausgang | 0 bis 10 V |
| Spannungsversorgung | AC 220 V |
| Einstellzeit | ca. 200 ms |
| Linearisierungsgenauigkeit | $\pm$ 0.3% |

Tabelle D.2.: Technische Daten des Temperaturmeßumformers

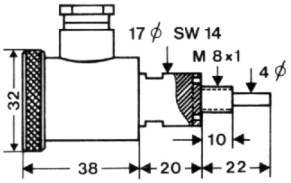



Abb. D.2: Pt100-Fühler, Typ T463

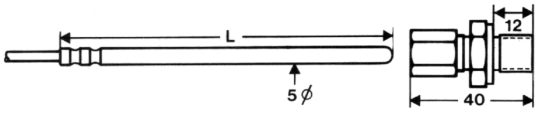



Abb. D.3: Pt100-Fühler, Typ P448-1

### D.1.3. Durchflußmessung

| | |
|---|---|
| Hersteller | TURBO-WERK Messtechnik GmbH, Köln |
| Typ | MG 711/E (Aufnehmer), ndf/LP (Umformer) |
| Meßbereich | 0 bis 11 $m^3/h \equiv 0$ bis 2.43 m/s |
| Signalausgang | 0 bis 10 V |
| Spannungsversorgung | AC 220 V |
| Rohranschluß | DN 40, PN 16 |
| Max. Medientemperatur | 180°C (bis 16 bar) |
| Medienleitfähigkeit | $> 1\,\mu$S/cm (gemessen: $40\,\mu$S/cm) |
| Meßtoleranz | $\pm 1\%$ vom Meßwert bei $v > 1$ m/s, $\pm 0.01$ m/s sonst |

Tabelle D.3.: Technische Daten des magn.-ind. Aufnehmers und Meßumformers

## D.2. Wärmeverlust an der Schauglasarmatur

Der Wärmeverlust an der Schauglasarmatur wird hier überschlägig nach VDI-WA97 [132, Abschnitt Fa] als Folge des Wärmeübergangs durch freie Konvektion an dem von Luft ($t_L = 18\,°C$) umströmten, horizontal angeordneten Kanal nach **Abb. D.5** ermittelt. Benötigte Stoffwerte wurden VDI-WA97 [132, Kapitel D] entnommen.

Innerhalb des Strömungskanals wird von einer gleichbleibenden Fluidtemperatur ($t_F = 150\,°C$) ausgegangen. Ferner wird angenommen, daß der Wärmeübergang an den Anschlußstellen der Armatur (Stirnflächen) über die PTFE-Flanschdichtungen aufgrund kleiner Temperaturdifferenzen und geringer Wärmeleitfähigkeit ($\lambda_{\mathrm{PTFE}} = 0.26\,$W/m K) vernachlässigt werden kann. Der Wärmeleitwiderstand der Kanalwände wird hingegen wegen der vergleichsweise hohen Wärmeleitfähigkeit der Materialien ($\lambda_{\mathrm{Stahl}} = 57\,$W/m K, $\lambda_{\mathrm{Messing}} = 115\,$W/m K) nicht berücksichtigt.

Abb. D.4: Magnetisch-induktiver Aufnehmer, Typ MG 711/E

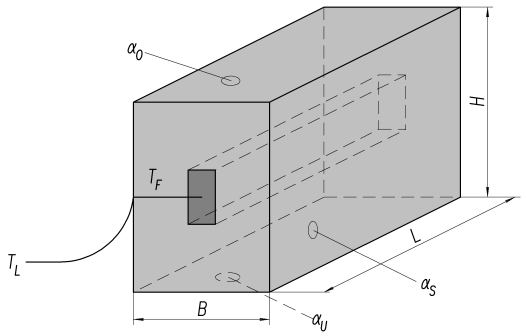



Abb. D.5: Schauglasarmatur, $L = 0.15\,\mathrm{m}$, $B = 0.1\,\mathrm{m}$, $H = 0.12\,\mathrm{m}$

Bei der Berechnung des Wärmeverlustes an die Umgebung werden die folgenden Fälle unterschieden:

1. Wärmeabgabe an den vertikalen Flächen (Seitenflächen),
2. Wärmeabgabe an der Oberseite und
3. Wärmeabgabe an der Unterseite.

zu 1.) Der Wärmeübergangskoeffizient an den Seitenflächen $\alpha_S$ wird mit der folgenden Korrelation berechnet (für laminare und turbulente Strömung: $10^{-1} < \mathrm{Ra} < 10^{12}$):

$$\mathrm{Nu}_S = \frac{\alpha_S\, H}{\lambda_L} = \left[0.825 + 0.387\,(\mathrm{Ra}\, f_1\,(\mathrm{Pr}))^{1/6}\right]^2 \tag{D.1}$$

mit

$$f_1(\mathrm{Pr}) = \left\{1 + \left[\frac{0.492}{\mathrm{Pr}}\right]^{9/16}\right\}^{-16/9}. \tag{D.2}$$

Die Grashof-Zahl ist hier wie folgt definiert:

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\, H^3\, \beta(T_F - T_L)}{\nu_L^2} \tag{D.3}$$

Darin ist $\beta = 1/T_L$ der thermische Ausdehungskoeffizient. Die Wärmeleitfähigkeit $\lambda_L = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W/m\,K}$, die kinematische Viskosität $\nu_L = 2.1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$ und die Prandtl-Zahl $\mathrm{Pr} = 0.707$ der Umgebungsluft werden bei der arithmetisch gemittelten Temperatur von 84 °C bestimmt. Damit ergibt sich für die Grashof-Zahl $\mathrm{Gr} = 1.743 \cdot 10^7$ und für

die Rayleigh-Zahl $\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} = 1.232 \cdot 10^7$. Nach Auswertung der Gl. (D.1) erhält man mit $f_1(\mathrm{Pr}) = 0.346$ und $\mathrm{Nu}_S = 33.11$ für den Wärmeübergangskoeffizienten: $\alpha_S = 8.277\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. Der Anteil des Wärmeverlustes über die Seitenflächen der Armatur beträgt somit:

$$\dot{Q}_{VS} = 2\,\alpha_S L\,H\,(T_F - T_L) = 39.33\,\mathrm{W}. \tag{D.4}$$

zu 2.) Bei der Berechnung der Wärmeabgabe an der Oberseite gilt für die Nußelt-Zahl:

$$\mathrm{Nu}_O = \frac{\alpha_O\,l}{\lambda_L} = 0.766\,\left(\mathrm{Ra}\,f_2(\mathrm{Pr})\right)^{1/5} \tag{D.5}$$

mit

$$f_2(\mathrm{Pr}) = \left\{1 + \left[\frac{0.322}{\mathrm{Pr}}\right]^{11/20}\right\}^{-20/11}. \tag{D.6}$$

Für die Anströmlänge $l$ ist hier einzusetzen:

$$l = \frac{L\,B}{2\,(L+B)}. \tag{D.7}$$

Damit ergibt sich:

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\,l^3\,\beta(T_F - T_L)}{\nu_L^2} = 2.723 \cdot 10^5 \tag{D.8}$$

und $\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} = 1.925 \cdot 10^5$. Nach Gl. (D.5) beträgt der Wärmeübergangskoeffizient an der Oberseite mit $f_2(\mathrm{Pr}) = 0.403$ und $\mathrm{Nu}_O = 7.28$: $\alpha_O = 7.288\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. Für den Wärmeverlust über die Oberseite der Armatur erhält man:

$$\dot{Q}_{VO} = \alpha_O L\,B\,(T_F - T_L) = 28.83\,\mathrm{W}. \tag{D.9}$$

zu 3.) Die Berechnung des Wärmeverlustes über die Unterseite der Schauglasarmatur erfolgt analog zu 2., jedoch mit folgender Nußelt-Korrelation für laminare Strömung:

$$\mathrm{Nu}_U = \frac{\alpha_U\,l}{\lambda_L} = 0.6\,\left(\mathrm{Ra}\,f_1(\mathrm{Pr})\right)^{1/5} \tag{D.10}$$

mit $f_1(\mathrm{Pr}) = 0.346$ nach Gl. (D.2). Mit $\alpha_U = 5.53\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ aus Gl. (D.10) errechnet man für den Wärmeverlust über die Unterseite:

$$\dot{Q}_{VU} = \alpha_U L\,B\,(T_F - T_L) = 21.91\,\mathrm{W}. \tag{D.11}$$

Der Gesamtwärmeverlust an der Schauglasarmatur setzt sich aus den Wärmeverlusten über die berücksichtigten Wandflächen zusammen: $\dot{Q}_V = \dot{Q}_{VS} + \dot{Q}_{VO} + \dot{Q}_{VU} = 90.07\,\mathrm{W}$. Bezieht man den Gesamtwärmeverlust auf den Enthalpiestrom im Kanal $\dot{Q}_F = \dot{m}_F\,h_F$, hier z.B. mit $h_F = h_F(5\,\mathrm{bar}, 150°\mathrm{C}) = 632\,\mathrm{kJ/kg}$ und $\dot{m}_F = 0.4\mathrm{kg/s}$, so erhält man: $\dot{Q}_V/\dot{Q}_F \approx 0.04\%$.

Die vorgenommene Abschätzung des Wärmeverlustes an der nicht isolierten Schauglasarmatur zeigt, daß selbst bei pessimistischen Vorgaben, nach denen der Wärmeverlust eher überschätzt wird, die Annahme wandadiabater Strömung gerechtfertigt ist.

# Lebenslauf

### Zur Person

| | |
|---|---|
| Name: | Michael Jürgen Wein |
| Geburtsdatum: | 7. Mai 1965 |
| Geburtsort: | Koblenz-Rübenach |

### Ausbildung

| | | |
|---|---|---|
| 1971 – 1975 | Grundschule Koblenz-Rübenach | |
| 1975 – 1981 | Cl.-Brentano-Realschule Koblenz | Mittlere Reife |
| 1981 – 1984 | Staatl. Hilda-Gymnasium Koblenz | Abitur |
| 1984 – 1992 | Ruhr-Universität Bochum | Dipl.-Ing. Maschinenbau, Wärme- und Strömungstechnik |

### Beruf

| | |
|---|---|
| 02/1993 – 07/1999 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Thermodynamik und Technische Gebäudeausrüstung der Technischen Universität Dresden, Fakultät Maschinenwesen |
| 08/1999 – 09/2001 | Transsolar Energietechnik GmbH, Stuttgart |
| seit 10/2001 | Filterwerk MANN+HUMMEL GmbH, Ludwigsburg |