

# Kontaktprobleme in der nichtlinearen Elastizitätstheorie

## Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften  
der Technischen Universität Dresden

von

Dipl. Math. Daniel Habeck

geboren am 05.09.1974 in Remagen

Gutachter: Prof. Friedemann Schuricht  
*Technische Universität Dresden*

Prof. Bernd Kawohl  
*Universität zu Köln*

Prof. Alexander Mielke  
*Humboldt-Universität zu Berlin*

Eingereicht am: 15.04.2008

Tag der Disputation: 21.07.2008



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modellierung von Kontaktproblemen</b>	<b>9</b>
2.1	Deformationen . . . . .	9
2.2	Kräfte und Spannungen . . . . .	10
2.3	Kontakt zwischen zwei Körpern . . . . .	12
2.4	Selbstkontakt eines elastischen Körpers . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Existenzresultate</b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Der verallgemeinerte Gradient</b>	<b>53</b>
4.1	Einführung . . . . .	54
4.2	Resultate zum verallgemeinerten Gradienten . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Die Euler-Lagrange Gleichung</b>	<b>75</b>
5.1	Resultate . . . . .	76
5.2	Zweikörperkontakt . . . . .	81
5.3	Beweise . . . . .	86
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>109</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Im Alltag begegnet man vielen Situationen, in denen die Deformation eines elastischen Körpers durch weitere starre oder elastische Körper eingeschränkt ist, wie etwa bei der Verformung eines Gummiballs beim Aufprall auf eine Mauer. Derartige Probleme bezeichnet man als Kontaktprobleme. Da sich darüber hinaus Materie nicht selbst durchdringen kann, ist besonders die Untersuchung des Selbstkontakts eines elastischen Körpers, der beispielsweise bei der sogenannten Superspiralisierung von DNA-Molekülen auftritt, von Interesse. Während bisher meist die Untersuchung von Kontaktproblemen mit einem starren Hindernis (vgl. Ciarlet und Nečas [10], [11], Schuricht [21], [22]) sowie für zwei elastische Körper (vgl. Habek und Schuricht [15]) behandelt worden ist, beschäftigt sich die vorliegende Arbeit in erster Linie mit dem Selbstkontakt nichtlinear elastischer Körper.

Zur Beschreibung des Selbstkontakts eines nichtlinear elastischen Körpers wird das Variationsproblem

$$(1.1) \quad E(u) \rightarrow \text{Min!}, \quad u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3),$$

$$(1.2) \quad u = u_D \quad \text{auf } \Gamma_D \subset \partial\Omega,$$

$$(1.3) \quad |u(\Omega)| \geq \int_{\Omega} \det Du(x) dx$$

betrachtet. Die Energie  $E(u)$  einer Deformation  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  setzt sich aus einem elastischen Teil  $E_s(u)$  sowie einem potentiellen Teil  $E_p(u)$  zusam-

men, d. h. es gilt

$$E(u) = E_s(u) + E_p(u) = \int_{\Omega} W(x, Du(x)) dx - \int_{\bar{\Omega}} u(x) df(x)$$

mit einer Energiedichte  $W : \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  und einem vektorwertigen Radonmaß  $f \in \mathcal{R}[\bar{\Omega}]$ . Dabei setzen wir voraus, dass  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand ist und die Dirichletrandbedingung auf einer nichtleeren abgeschlossenen Teilmenge  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  durch eine Funktion  $u_D \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  gegeben ist. Bei der Untersuchung beschränken wir uns auf den statischen Fall, ebenso werden Reibungseffekte nicht in der Formulierung des Problems berücksichtigt. Weiterhin wird  $p > 3$  vorausgesetzt, so dass jede Deformation  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  nach dem Sobolevschen Einbettungssatz einen stetigen Repräsentanten besitzt. Bei der Herleitung der Euler Lagrange-Gleichung betrachten wir lokale Minimierer  $u$  von (1.1)–(1.3), die auf  $\Omega$  injektiv sind. Unter dieser Injektivitätsannahme wird eine Euler-Lagrange Gleichung als notwendige Bedingung abgeleitet, falls  $u(\partial\Omega)$  eine geeignete Lipschitz-Bedingung erfüllt,  $u|_{\partial\Omega}$  lokal injektiv ist und in einer Umgebung des deformierten Dirichletrandes  $u(\Gamma_D)$  kein Kontakt auftritt. Außerdem benötigen wir dabei eine gewisse Wachstums- bzw. Differenzierbarkeitsbedingung für die Energiedichte  $W$ . Diese Voraussetzungen stellen eine Abschwächung der Voraussetzungen in [10] bzw. [11] von Ciarlet und Nečas dar, da diese Ergebnisse auf starken Regularitätsannahmen für den lokalen Minimierer basieren. Weiterhin zeigen wir, dass sich die Kontaktkräfte, die in einer Umgebung eines Kontaktpunktes wirken, gegenseitig aufheben.

In Kapitel 2 wird zunächst das betrachtete Variationsproblem (1.1)–(1.3) motiviert, indem kurz auf die Grundzüge der nichtlinearen Elastizitätstheorie, die in dieser Arbeit benötigt werden, eingegangen wird. Insbesondere wird in diesem Kapitel die Formulierung der Nebenbedingung, die die Durchdringung eines oder mehrerer (elastischer) Körper ausschließt, diskutiert. Dabei sind zwei Methoden zu unterscheiden, zum einen die Charakterisierung mittels einer signierten Abstandsfunktion (vgl. [22] oder [15]), zum anderen durch die Ungleichungsnebenbedingung (1.3), die von Ciarlet und Nečas in [11] zur Vermeidung von Selbstdurchdringung eingeführt wurde. Denn erfüllt

eine Funktion  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  diese Bedingung sowie  $\det Du(x) > 0$  für fast alle  $x \in \Omega$ , so ist sie fast überall injektiv in  $\Omega$ .

Zunächst stellen wir die signierte Abstandsfunktion für Kontaktprobleme, bei denen zwei (elastische) Körper beteiligt sind, vor. Dabei ist es für diese Art von Kontaktproblemen möglich, eine signierte Abstandsfunktion zu einem festen Hindernis zu definieren. Diese Methode ist auf die Untersuchung von Selbstkontakt nicht direkt übertragbar. Um die Integralgleichung (1.3) ersetzen zu können, betrachten wir für einen injektiven Minimierer  $u$  von (1.1)–(1.3) Störungen, die auf dem Bild  $u(\Omega)$  definiert sind. Durch Konstruktion einer geeigneten Überdeckung von  $u(\bar{\Omega})$  ist man in der Lage, eine Abstandsfunktion zu konstruieren, deren Bezugsmenge vom betrachteten Bildpunkt abhängt und die lokal Lipschitz-stetig ist. Analog zur Vorgehensweise in Habeck und Schuricht in [15] kann mit dieser Abstandsfunktion eine ebenfalls lokal Lipschitz-stetige Funktion  $g$  eingeführt werden, so dass die Ciarlet-Nečas Bedingung für Konfigurationen, die durch „kleine“ Störungen entstehen, erfüllt ist, falls die Störung  $\varphi$  zusätzlich  $g(\varphi) \leq 0$  genügt.

Da durch die Nebenbedingung (1.3) für  $p > 3$  eine schwach abgeschlossene Menge definiert wird (vgl. [10]), können die in [15] von Habeck und Schuricht bewiesenen Existenzresultate auf das Variationsproblem (1.1)–(1.3) übertragen werden. Sie werden in Kapitel 3 formuliert. Diese Ergebnisse beruhen auf Quasikonvexität (vgl. Morrey [18]) oder Polykonvexität (vgl. Ball [6]) der Energiedichte  $W$ . Vergleichbare Existenzresultate finden sich unter anderem in Baiocchi et al. [5], Ciarlet und Nečas [10], [11] und Schuricht [22].

Beim Studium von Kontaktproblemen wurde in der Vergangenheit in der linearen Elastizitätstheorie häufig durch geometrische Vereinfachungen erreicht, dass die Menge der Funktionen, die für das jeweils betrachtete Variationsproblem zulässig sind, konvex ist. Dies machte es möglich, Variationsprobleme mit den Methoden der konvexen Analysis zu untersuchen. Tatsächlich ist aber diese Konvexität bei Kontaktproblemen in der nicht-linearen Theorie nicht gegeben, so dass die Methoden der konvexen Analysis nicht benutzt werden können. Stattdessen verwendet man die Theorie des verallgemeinerten Gradienten, die von Clarke [12] in den 70er Jahren entwickelt wurde. Mittels dieses Ableitungsbegriffs ist man in der Lage, lokal

Lipschitz-stetige Funktionen, die bei Kontaktproblemen auftreten, zu differenzieren. Insbesondere existiert in dieser Theorie eine Multiplikatorenregel für lokal Lipschitz-stetige Funktionen. Da der verallgemeinerte Gradient ein entscheidendes Hilfsmittel bei der Ableitung einer Euler-Lagrange Gleichung darstellt, wird in Kapitel 4 zunächst eine kurze Einführung in dieses Gebiet der nichtglatten Analysis gegeben. Darüber hinaus werden Resultate aus [15] für die vorliegende Situation verallgemeinert, um den verallgemeinerten Gradienten des Funktionals, mit dem die Nichtdurchdringung gesichert wird, charakterisieren zu können.

Kapitel 5 beinhaltet neben den Hauptresultaten dieser Arbeit auch die Ergebnisse aus Habeck und Schuricht [15]. In dieser Arbeit wird eine notwendige Bedingung für den Kontakt zweier nichtlinear elastischer Körper hergeleitet. Weiterhin wird gezeigt, dass die konvexe Menge, welche die Richtung der Kontaktkräfte beschreibt, bei „Einfrierung“ eines Teilkörpers stets in der entsprechenden Menge, die bei Variation beider elastischer Teilkörper die Kontaktkraftrichtungen charakterisiert, enthalten ist. Dieses Ergebnis motiviert, auch bei der Untersuchung von Selbstkontakt das ursprüngliche Problem auf ein Kontaktproblem mit einem Hindernis zurückzuführen, d. h. eine geeignete Abstandsfunktion zu definieren. Um eine Euler-Lagrange Gleichung für injektive Minimierer von (1.1)–(1.3) abzuleiten, wird auf dem Bild  $u(\Omega)$  ein Ersatzproblem definiert. Dabei erfolgt die Konstruktion dieses neuen Problems derart, dass  $\varphi = 0$  ein lokaler Minimierer ist. Durch geeignete Wahl der Testfunktionen ist es möglich, in diesem Ersatzproblem die analytisch schwer handhabbare Bedingung (1.3) durch eine Ungleichungsbedingung, die analog zum Fall eines starren Hindernisses gebildet wird, zu ersetzen. Dabei werden die Konstruktionen aus Kapitel 2 verwendet. Für dieses Ersatzproblem kann, analog zur Vorgehensweise in Schuricht [22] bzw. Habeck und Schuricht [15], mittels einer Multiplikatorenregel von Clarke eine Euler-Lagrange Gleichung für den lokalen Minimierer  $\varphi = 0$  berechnet werden. Da aber nach Konstruktion  $\varphi = 0$  zum lokalen Minimierer des Ausgangsproblems korrespondiert, gewinnt man insgesamt eine notwendige Bedingung für den lokalen Minimierer von (1.1)–(1.3). Diese Euler-Lagrange Gleichung enthält einen Term, der die an den Kontaktflächen wirkenden Kräfte charakterisiert. Dabei han-



delt es sich um ein Integral über die Urbildmenge der Kontaktpunkte, das zugehörige Maß beschreibt die Verteilung der Kontaktkräfte. Wie bei Kontaktproblemen mit zwei Körpern ist auch bei Selbstkontakt die Richtung der Kontaktkraft in jedem Kontaktpunkt in einer konvexen Menge, die durch den verallgemeinerten Gradienten der Abstandsfunktion bestimmt ist, enthalten.

Die Betrachtung eines zweiten Ersatzproblems, bei dem man den deformierten Körper als an den Kontaktflächen „verklebt“ auffasst, liefert eine weitere notwendige Bedingung für den lokalen Minimierer des Ausgangsproblems. Diese Vorgehensweise entspricht der von Ball in [8]. Mittels dieser Gleichung ist es möglich, in der Umgebung eines jeden Kontaktpunktes eine Kräftebilanz aufzustellen. Es zeigt sich, dass sich die wirkenden Kontaktkräfte gegenseitig aufheben.

Insgesamt erhalten wir eine qualitativ neue Beschreibung für die Kontaktkräfte bei Selbstkontakt eines elastischen Körpers, für den auf dem deformierten Dirichletrand kein Kontakt auftritt. Dabei wird der verformte Körper durch eine auf  $\Omega$  global und auf  $\partial\Omega$  lokal injektive Deformation  $u$  beschrieben und der deformierte Rand  $u(\partial\Omega)$  muss eine geeignete Lipschitz-Bedingung erfüllen.

Abschließend sei an dieser Stelle erwähnt, dass bei den Beweisen der aus Habeck und Schuricht [15] übernommenen Ergebnisse (vgl. Lemma 2.2, Theorem 3.1, Theorem 3.2, Proposition 4.8, Theorem 5.4 sowie Lemma 5.6) wesentliche Bestandteile durch den Autor ausgearbeitet worden sind.

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Schuricht bedanken. Während der Anfertigung dieser Arbeit, sowohl an der Universität zu Köln als auch an der Technischen Universität Dresden, fand er stets Zeit, auf die mathematischen Probleme einzugehen und Fragen zu diskutieren.

Meinen Kolleginnen und Kollegen an der Technischen Universität Dresden und insbesondere auch denen an der Universität zu Köln danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre. Ebenso danke ich all meinen Freunden und Bekannten, die mich auf vielfältige Weise bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Schließlich gebührt der größte Dank meinen Eltern für ihre Unterstützung, nicht nur während meines Studiums.

Bedanken möchte ich mich auch für die Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die ich im Rahmen des Forschungsprojekts „Kontaktprobleme in der nichtlinearen Elastizitätstheorie“ erhalten habe.

## Notationen

In dieser Arbeit bezeichnen  $A^c$ ,  $\text{cl}A$  oder  $\bar{A}$ ,  $\text{int}A$  oder  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\partial A$ ,  $\overline{\text{conv}}A$ ,  $\overline{\text{conv}}^*A$ ,  $\overline{\text{cone}}A$  und  $|A|$  das Komplement, den Abschluss, das Innere, den Rand, die abgeschlossene konvexe Hülle, die schwach\* abgeschlossene konvexe Hülle, die konvexe Kegelhülle und das Lebesgue-Maß einer Menge  $A$ .

Die Funktion  $\text{card}A$  gibt die Anzahl der Elemente der Menge  $A$  an, wobei für eine Menge mit unendlich vielen Elementen  $\text{card}A = \infty$  gesetzt wird. Der Abstand eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$  zu einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist gegeben durch  $\text{dist}_A(x)$ . Die Ausdrücke  $(x, y)$  bzw.  $[x, y]$  stehen für das offene bzw. abgeschlossene Liniensegment zweier Punkte  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Für die gewöhnliche Vorzeichenfunktion einer reellen Zahl  $\alpha$  schreiben wir  $\text{sign}\alpha$ .

Für eine Matrix  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definiert man mit  $|F|$ ,  $\det F$ ,  $F^T$  und  $\text{adj}F$  eine beliebige, aber fixierte Matrixnorm, die Determinante, die transponierte sowie die adjungierte Matrix (d. h.  $F \text{adj}F = \det F \text{id}$ ). Darüber hinaus wird mit  $A : B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$  für  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  und  $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  ein Skalarprodukt auf dem Raum der  $n \times n$ -Matrizen eingeführt.

Für einen Banachraum  $X$  ist  $X^*$  der Dualraum und für die Normen auf

diesen beiden Räumen werden die Notationen  $\|\cdot\|$  bzw.  $\|\cdot\|_*$  benutzt. Mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnen wir neben dem Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  auch die Dualitätspaarung auf  $X^* \times X$ . Durch  $u_i \rightarrow u$  wird die starke, durch  $u_i \rightharpoonup u$  die schwache und durch  $u_i \xrightarrow{*} u$  die schwach\* Konvergenz ausgedrückt.

Der offene Ball um  $x$  mit Radius  $\varepsilon$  ist durch  $B_\varepsilon(x)$  gegeben. Für eine Menge  $A$  ist  $B_\varepsilon(A)$  die offene  $\varepsilon$ -Umgebung von  $A$ . Mit  $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$  bzw.  $\mathcal{C}_0^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$  wird der Raum der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  bzw. der Unterraum aller Funktionen mit kompaktem Träger in  $\Omega$  bezeichnet. Für Lipschitz-stetige Funktionen  $f$  schreiben wir  $l_f$  für die Lipschitzkonstante von  $f$ . Die Notationen  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$  stehen für die üblichen Räume der  $p$ -integrierbaren Funktionen bzw. der Sobolevfunktionen auf  $\Omega$ . Für die Normen benutzen wir die Schreibweise  $\|\cdot\|_p$  bzw.  $\|\cdot\|_{1,p}$ . Zur Vereinfachung der Notation wird gelegentlich auf den jeweiligen Index verzichtet, falls sich aus dem Zusammenhang ergibt, welche Norm gemeint ist.

Der Raum der Radonmaße auf  $\Omega$  wird mit  $R[\Omega]$  gekennzeichnet, während  $R_1[\Omega]$  und  $R_{\leq 1}[\Omega]$  für die Teilmengen der Wahrscheinlichkeitsmaße sowie der Maße mit Gesamtmasse kleiner gleich 1 verwendet werden. Desweiteren steht  $R[\tilde{\Omega}]$  für die Maße auf einer Menge  $\Omega$ , deren Träger in  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  enthalten ist.

Für eine lokal Lipschitz-stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet  $\partial f(u)$  den verallgemeinerten Gradienten von  $f$  an der Stelle  $u \in X$  sowie  $f^\circ(u; v)$  die verallgemeinerte Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $u \in X$  in Richtung  $v \in X$ . Für das Subdifferential einer konvexen Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  an der Stelle  $u \in X$  schreibt man  $\partial_S f(u)$ . Weiterhin wird in Anlehnung an die englische Notation  $\text{clust}^*(f_i^*) \subset X^*$  für die Menge aller schwach\* Häufungspunkte  $f^*$  einer Folge  $\{f_i^*\} \subset X^*$  gebraucht.



# Kapitel 2

## Modellierung von Kontaktproblemen

In diesem Kapitel wird die Modellierung von Kontaktproblemen in der nichtlinearen Elastizitätstheorie vorgestellt. Zunächst werden in den ersten beiden Abschnitten Grundzüge der nichtlinearen Elastizitätstheorie, die zur Beschreibung von Kontaktproblemen benötigt werden, dargelegt. Für eine detaillierte Einführung in die Elastizitätstheorie wird auf Antman [4], Ciarlet [9], Marsden [16] und Truesdell [23] verwiesen.

Anschließend wird der Kontakt mehrerer (elastischer) Körper beschrieben. Dabei werden die Methoden aus Schuricht [22] (für den Kontakt eines elastischen Körpers mit einem starren Hindernis) und aus Habek und Schuricht [15] (für zwei elastische Körper) erläutert. Danach verallgemeinern wir diese Methoden für den Fall des Selbstkontakts eines elastischen Körpers. Insbesondere wird in diesem Kapitel das Variationsproblem, welches den Selbstkontakt eines nichtlinear elastischen Körpers beschreibt, formuliert.

### 2.1 Deformationen

Ein Körper wird durch ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit Lipschitzrand beschrieben. Dabei ist  $\Omega$  die sogenannte *Referenzkonfiguration*, die den natürlichen Zustand des Körpers, d. h. ohne dass dieser dem Einfluss von Kräften

und Spannungen ausgesetzt ist, charakterisiert. Ist man an der Beschreibung von Kontakt zwischen  $k \in \mathbb{N}$  Körpern interessiert, so ist die Referenzkonfiguration die disjunkte Vereinigung von  $k$  Teilkörpern  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , wobei die Teilkörper wiederum beschränkte Gebiete im  $\mathbb{R}^3$  mit Lipschitzrand sind.

In dieser Arbeit wird Selbstkontakt sowie der Kontakt zweier Körper studiert. Weiterhin beschränken wir uns auf statische Probleme. Somit identifiziert man die Deformation eines Körpers  $\Omega$  mit Funktionen  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Dabei setzen wir im weiteren Verlauf stets  $p > 3$  voraus, da in dieser Arbeit nur stetige Deformationen elastischer Körper untersucht werden.

Des Weiteren fordert man für die Menge der zulässigen Deformationen noch, orientierungserhaltend und lokal invertierbar zu sein, d. h. es wird

$$(2.1) \quad \det Du(x) > 0 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega$$

als Bedingung auferlegt. Diese Eigenschaft sichert man durch Einschränkungen an die Energie einer deformierten Konfiguration, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

Doch bevor wir die Energie einer Deformation definieren, muss erwähnt werden, dass neben der Beschreibung bezüglich der Referenzkonfiguration, in der die betrachteten Größen Funktionen der Lagrangevariablen  $x$  sind, auch eine Charakterisierung bezüglich der Eulervariablen  $x^u = u(x)$  möglich ist. Dabei korrespondieren die entsprechenden Größen wie Volumen, Oberfläche und auch Tensor, auf die in der Folge eingegangen wird, zueinander. Auf eine ausführliche Beschreibung wird an dieser Stelle verzichtet und auf die zu Beginn des Kapitels angesprochenen Referenzen verwiesen.

## 2.2 Kräfte und Spannungen

Zwischen Körpern oder Teilkörpern treten an gemeinsamen Oberflächen Spannungen und somit Kräfte auf. Dabei unterscheidet man zwischen Kräften, die durch die Reaktion des elastischen Materials entstehen, und allen übrigen (externen) Kräften.

Die Oberflächenspannungen  $\tau(x)$  beschreiben die Kräfte  $\tau(\mathcal{S})$ , die durch

das Material auf die Oberfläche  $\mathcal{S}$  ausgeübt werden. Mit der Charakterisierung von Cauchy sind diese Kräfte von der Form

$$\tau(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \tau(x) \nu^{\mathcal{S}} da(x).$$

Dabei ist die lineare Funktion  $\tau(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  der *1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor* und  $\nu^{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Normalenfeld, welches  $\mathcal{S}$  orientiert.

Für elastische Materialien hängt dieser Tensor  $\tau(x)$  nicht explizit von der Deformation  $u$ , sondern nur vom Deformationsgradienten  $Du$  sowie dem Materialpunkt  $x$  ab. Damit können wir den Spannungstensor in der Form  $\tau(x) = \tilde{\tau}(x, Du(x))$  schreiben.

In dieser Arbeit werden die Materialien als *hyperelastisch* angenommen. Für solche Stoffe existiert eine skalarwertige Energiedichte

$$(2.2) \quad W : \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R},$$

so dass

$$(2.3) \quad \tilde{\tau}(x, F) = D_F W(x, F) \quad \text{für } (x, F) \in \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Für die Energiedichte  $W$  setzt man gewöhnlicherweise die Eigenschaften

- (E1)  $W(x, \cdot)$  ist Rang-1-konvex auf  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  für alle  $x \in \Omega$ ,
- (E2)  $W(x, \cdot)$  ist stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  für alle  $x \in \Omega$ ,
- (E3)  $W(\cdot, F)$  ist messbar auf  $\Omega$  für alle  $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

voraus.

Damit ist die elastische Energie  $E_s : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$(2.4) \quad E_s(u) := \int_{\Omega} W(x, Du(x)) dx.$$

Die externen Kräfte, die auf einen Körper einwirken, können nicht mit Hilfe einer integrierbaren Volumendichte beschrieben werden, denn bei einer solchen Annahme wären konzentrierte Kräfte, wie sie beispielsweise beim Druck einer starren Nadel auf einen elastischen Gummiball entstehen, aus-

geschlossen. Daher ist es üblich, die äußeren Kräfte durch ein vektorwertiges Radonmaß  $f \in \mathcal{R}[\bar{\Omega}]$  mit Träger auf dem Abschluss des Gebietes  $\Omega$  zu beschreiben. Damit ist man in der Lage, die potentielle Energie eines deformierten elastischen Körpers zu definieren, wir setzen

$$(2.5) \quad E_p(u) := - \int_{\bar{\Omega}} u(x) df(x)$$

für  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Die Gesamtenergie des deformierten Körpers  $u$  ist damit durch

$$(2.6) \quad E(u) := E_s(u) + E_p(u) = \int_{\Omega} W(x, Du(x)) dx - \int_{\bar{\Omega}} u(x) df(x)$$

gegeben.

Um Eigenschaft (2.1) zu erhalten, wird häufig

$$(2.7) \quad W(x, F) = \infty \iff \det F \leq 0$$

gefordert. Es wurde gezeigt (vgl. Ball [6]), dass für Energien mit Bedingung (2.7) Minimierer der Energie (2.6) existieren. Die Ableitung der zugehörigen Euler-Lagrange Gleichung ist allerdings nur unter starken Regularitätsvoraussetzungen an den Minimierer der Energie möglich.

Genauso wie die Bedingung (2.7) die Ableitung einer Euler-Lagrange Gleichung erschwert, ist auch die Beschreibung der Nichtdurchdringung eines Körpers schwierig. Mit dieser Nebenbedingung der globalen Injektivität (im Inneren) befasst sich das folgende Unterkapitel.

## 2.3 Kontakt zwischen zwei Körpern

Die wichtigste und analytisch am schwierigsten handhabbare Nebenbedingung besteht darin, dass sich elastische Körper unter der Deformation nicht durchdringen dürfen. Bei Untersuchungen mehrerer elastischer Körper oder eines Hindernisproblems, d. h. die Deformation des Körpers ist durch ein starres Hindernis eingeschränkt, kann mit signierten Abstandsfunktionen gearbei-



tet werden. Diese Methode ist bei der Charakterisierung von Selbstkontakt zunächst nicht verwendbar. Da aber im weiteren Verlauf diese Methoden für das Studium des Selbstkontakts verallgemeinert werden, stellen wir an dieser Stelle auch die Nebenbedingungen für diese Art von Problemen vor.

Bei einem Kontaktproblem mit einem deformierten elastischen Körper, beschrieben durch eine Funktion  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , und einem starren Hindernis  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$  ist die Menge der zulässigen Deformationen durch die Nebenbedingung

$$(2.8) \quad u(x) \in \overline{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}} \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega}$$

eingeschränkt. Diese Bedingung sichert, dass sich die beteiligten Körper  $u(\bar{\Omega})$  und  $\mathcal{O}$  nicht gegenseitig durchdringen. Es hat sich herausgestellt, dass mit (2.8) als Nebenbedingung Existenzresultate erzielt werden können (vgl. Ciarlet und Nečas [11] und Schuricht [22]). Um aber eine Euler-Lagrange-Gleichung ableiten zu können, ist im Vergleich zu (2.8) eine analytisch brauchbarere Formulierung erforderlich.

Als ein entscheidendes Hilfsmittel hat sich dabei die signierte Abstandsfunktion

$$(2.9) \quad d_{\mathcal{O}}(x) = \text{dist}_{\mathcal{O}^c}(x) - \text{dist}_{\mathcal{O}}(x)$$

erwiesen. Nach dem folgenden Lemma ist  $d_{\mathcal{O}}$  Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}^3$ .

**Lemma 2.1** *Sei  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$  der Abschluss einer offenen Menge. Dann ist die in (2.9) definierte Funktion global Lipschitz-stetig in  $\mathbb{R}^3$  mit Lipschitzkonstante 1.*

BEWEIS von Lemma 2.1.

Seien  $x, y \in \mathbb{R}^3$  beliebig. Dann sind - bis auf Symmetrie - folgende Fälle möglich :

- (a)  $x, y \in \mathcal{O}$ ,
- (b)  $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$ ,
- (c)  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$ ,  $y \in \mathcal{O}$ .

Die Lipschitz-Stetigkeit von  $d_{\mathcal{O}}$  folgt in den ersten beiden Fällen unmittelbar aus der Lipschitz-Stetigkeit der gewöhnlichen Abstandsfunktion eines Punktes zu einer Menge.

Seien nun  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$  und  $y \in \mathcal{O}$ . Dann schneidet die Verbindungsstrecke von  $x$  und  $y$  den Rand von  $\mathcal{O}$  und die Menge

$$\mathcal{M} := \partial\mathcal{O} \cap [x, y]$$

ist nichtleer. Mit der Bezeichnung

$$b_w := \inf_{z \in \mathcal{M}} |w - z|$$

liefert dann die Abschätzung

$$|d_{\mathcal{O}}(x) - d_{\mathcal{O}}(y)| = \text{dist}_{\mathcal{O}}(x) + \text{dist}_{\mathcal{O}^c}(y) \leq b_x + b_y \leq |x - y|$$

die Behauptung. ◇

Nun kann (2.8) äquivalent formuliert werden in der Form

$$(2.10) \quad g_{\mathcal{O}}(u) := \max_{x \in \bar{\Omega}} d_{\mathcal{O}}(u(x)) \leq 0.$$

Das Funktional  $\hat{g}_{\mathcal{O}} : \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\hat{g}_{\mathcal{O}}(a) = g(u(x) + a(x))$  ist lokal Lipschitz-stetig. Mit dem Kalkül des verallgemeinerten Gradienten von Clarke (siehe Kapitel 4) ist es daher möglich, eine Euler-Lagrange-Gleichung für lokale Minimierer  $u$  der Energie  $E$  (unter der Nebenbedingung (2.8)) abzuleiten (vgl. Schuricht [22]).

Die Beschreibung von Kontakt für zwei oder mehr elastische Körper verlangt eine Modifizierung der verwendeten Abstandsfunktion. In Anlehnung an den "starren Fall" liegt bei zwei elastischen Körpern  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , die Definition

$$(2.11) \quad \hat{d}(q, u) := \begin{cases} \text{dist}_{\partial u(\Omega_2)}(q), & \text{falls } q \in \text{int } u(\Omega_2), \\ -\text{dist}_{\partial u(\Omega_2)}(q), & \text{falls } q \notin \text{int } u(\Omega_2) \end{cases}$$

nahe, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Teilkörper  $u(\Omega_2)$  als Bezugsmenge die Rolle des starren Hindernisses  $\mathcal{O}$  übernimmt. Die Nichtdurchdringung der beiden Teilkörper wird dann analog zu (2.10) mit der Funktion  $\hat{g}(u) := \max_{x \in \bar{\Omega}_1} \hat{d}(u(x), u)$  beschrieben.

Diese Wahl der Abstandsfunktion führt aber dazu, dass  $\hat{d}(q, u)$  nicht Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  ist, wenn  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  die disjunkte Vereinigung der beiden Teilkörper bezeichnet. Selbst eine Einschränkung auf offene Deformationen liefert noch nicht einmal die Stetigkeit der so gewählten Abstandsfunktion.

Betrachte dazu gemäß Abbildung 2.1 eine offene Deformation  $u_2 := u|_{\Omega_2}$  mit Selbstkontakt, d. h. es gibt zwei disjunkte Mengen  $\Gamma_i \subset \partial\Omega_2$ ,  $i = 1, 2$ , von  $\partial\Omega_2$  mit  $u_2(\Gamma_1) = u_2(\Gamma_2)$ .

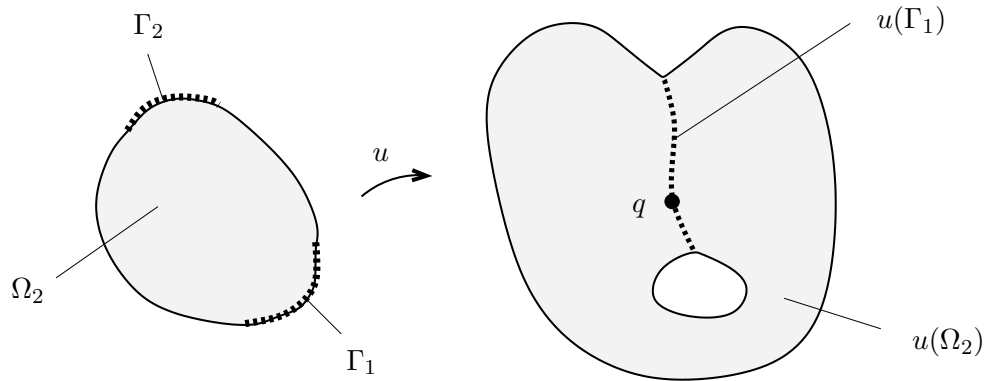


Abbildung 2.1: Deformation mit gemeinsamer Kontaktfläche

Für einen relativen inneren Punkt  $q$  dieser Kontaktfläche, der gleichzeitig innerer Punkt von  $u(\Omega_2)$  ist, ergibt sich einerseits  $\hat{d}(q, u) > 0$  (vgl. Abb. 2.1). Andererseits liefern kleine offene Störungen  $\tilde{u}$  von  $u$  sofort  $\hat{d}(q, \tilde{u}) \leq 0$ , wenn die Kontaktflächen  $u_2(\Gamma_1)$  und  $u_2(\Gamma_2)$ , wie in Abbildung 2.2 gezeigt, unter dieser Störung getrennt werden (vgl. Habeck und Schuricht [15]).

Daher muss die Konstruktion der Abstandsfunktion gegenüber (2.11) modifiziert werden. Wir definieren die Abstandsfunktion  $\hat{d} : \mathbb{R}^3 \times \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  durch

$$(2.12) \quad \hat{d}(q, u) := \begin{cases} \text{dist}_{u(\partial\Omega_2)}(x), & \text{falls } x \in \text{int } u(\Omega_2), \\ -\text{dist}_{u(\partial\Omega_2)}(x), & \text{falls } x \notin \text{int } u(\Omega_2). \end{cases}$$

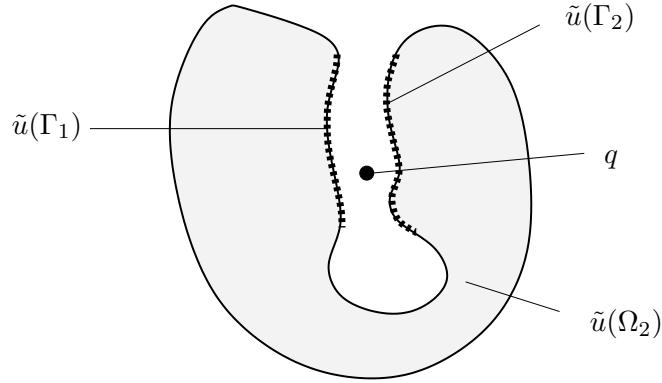


Abbildung 2.2: Störung  $\tilde{u}$  der Deformation  $u$ , die Kontakt "öffnet"

Diese Konstruktion trägt durch die Bezugnahme zu  $u(\partial\Omega_2)$  statt zu  $\partial u(\Omega_2)$  der Tatsache Rechnung, dass innerhalb eines jeden Teilkörpers Selbstkontakt auftreten kann und somit Randpunkte durch Deformation zu inneren Punkten werden können.

Bei dieser Wahl der Abstandsfunktion erhält man — bei Beschränkung auf offene Teilabbildungen  $u|_{\Omega_2}$  — wiederum die Lipschitz-Stetigkeit des Funktionals  $\tilde{d}(q, a) = \hat{d}(q, u + a)$  auf  $\mathbb{R}^3 \times B_\varepsilon(0)$ ,  $B_\varepsilon(0) \subset \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  mit  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein. Wir benötigen somit eine Bedingung, die sichert, dass sowohl  $u_2 = u|_{\Omega_2}$  als auch kleine  $W^{1,\infty}$ -Störungen von  $u_2$  offene Abbildungen sind. Dazu verwenden wir den Begriff der integrierbaren Verformung. Eine Funktion  $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega_2, \mathbb{R}^3)$  ist offen, falls sie integrierbare Verformung besitzt, d. h. falls

$$(2.13) \quad \gamma(x) := \frac{|Du_2(x)|^3}{\det Du_2(x)} \in \mathcal{L}^{\tilde{p}}(\Omega_2) \quad \text{für ein } \tilde{p} > 2$$

(vgl. Villamor und Manfredi [24]). Mit der Forderung  $\det u|_{\Omega_2} \geq k > 0$  fast überall in  $\Omega_2$  kann die Lipschitz-Stetigkeit von  $\tilde{d}(q, a)$  auf  $\mathbb{R}^3 \times B_\varepsilon(0)$  gezeigt werden.

**Lemma 2.2** *Sei  $u_2 = u|_{\Omega_2} \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega_2, \mathbb{R}^3)$  mit  $\det Du_2(x) \geq k$  für fast alle  $x \in \Omega_2$  und einer positiven Konstanten  $k$ . Dann existiert eine Konstante  $\varepsilon > 0$ , so dass die Abstandsfunktion  $\tilde{d}(q, a) := \hat{d}(q, u + a)$  Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}^3 \times B_\varepsilon(0)$ ,  $B_\varepsilon(0) \subset \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , ist.*

Dieses Lemma findet sich bereits in Habeck und Schuricht [15, Lemma 4.4] und wird an dieser Stelle nochmals geführt.

BEWEIS von Lemma 2.2.

Nach Voraussetzung besitzt die Funktion  $u$  beschränkte Verformung auf  $\Omega_2$ . Weiterhin existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\det Dw \geq k/2$  fast überall in  $\Omega_2$  für alle Störungen  $w = u + v$ ,  $v \in B_\varepsilon(0) \subset \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Damit hat jede Abbildung  $w$  dieser Form beschränkte Verformung, d. h. (2.13) ist mit  $\tilde{p} = \infty$  erfüllt, und ist eine offene Abbildung auf  $\Omega_2$  (s. [20] oder [14]). Insbesondere erhalten wir  $\partial w(\bar{\Omega}_2) \subset w(\partial\Omega_2)$  für alle  $w = u + v$ ,  $v \in B_\varepsilon(0)$ .

Es reicht aus, die Lipschitz-Stetigkeit von  $\tilde{d}$  in jeder Variablen getrennt zu zeigen, denn es gilt

$$|\tilde{d}(q, v) - \tilde{d}(q', v')| \leq |\tilde{d}(q, v) - \tilde{d}(q', v)| + |\tilde{d}(q', v) - \tilde{d}(q', v')|.$$

Nach Lemma 2.1 ist  $\tilde{d}(\cdot, v)$  als signierte Abstandsfunktion auf  $\mathbb{R}^3$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1, d. h. es gilt

$$|\tilde{d}(q, v) - \tilde{d}(q', v)| \leq |q - q'| \quad \text{für alle } q, q' \in \mathbb{R}^3$$

mit einem beliebigen, aber festen  $v \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .

Somit ist nur die Lipschitz-Stetigkeit von  $\tilde{d}(q, \cdot)$  für festes  $q \in \mathbb{R}^3$  zu zeigen. Setze dazu  $w = u + v$ ,  $w' = u + v'$  für  $v, v' \in B_\varepsilon(0)$ . Bis auf Symmetrie sind die folgenden Fälle zu untersuchen:

- (a)  $q \in w(\bar{\Omega}_2) \cap w'(\bar{\Omega}_2)$ ,
- (b)  $q \notin w(\bar{\Omega}_2) \cup w'(\bar{\Omega}_2)$ ,
- (c)  $q \in w(\bar{\Omega}_2) \cap w'(\bar{\Omega}_2)^c$ .

Zu (a):

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass Punkte  $x, x' \in \partial\Omega_2$  existieren mit

$$\hat{d}(q, w) = |q - w(x)| \geq |q' - w'(x')| = \hat{d}(q, w').$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} |\tilde{d}(q, v) - \tilde{d}(q, v')| &= |\hat{d}(q, w) - \hat{d}(q, w')| = |q - w(x)| - |q - w'(x')| \\ &\leq \left| |q - w(x)| - |q - w'(x')| \right| \leq |w(x) - w'(x')| \\ &= |v(x) - v'(x')| \leq \|v - v'\|_{1, \infty}. \end{aligned}$$

Durch analoge Argumentation kann Fall (b) bewiesen werden.

Zu (c):

Sei also  $q \notin w'(\bar{\Omega}_2)$  und  $q = w(\tilde{x})$  mit  $\tilde{x} \in \bar{\Omega}_2$ . Unter diesen Voraussetzungen folgt

$$|\hat{d}(q, w) - \hat{d}(q, w')| = \text{dist}_{w(\partial\Omega_2)}(q) + \text{dist}_{w'(\partial\Omega_2)}(q) = |q - w(x)| + |q - w'(x')|$$

mit geeignet gewählten  $x, x' \in \partial\Omega_2$ .

Angenommen,  $\varrho := \text{dist}_{w'(\partial\Omega_2)}(q) > \|w - w'\|_\infty$ . Diese Annahme liefert  $w(\bar{\Omega}_2) \subset B_\varrho(w'(\bar{\Omega}_2))$ . Da die Abbildung  $w'$  offen ist, gilt  $\partial w'(\bar{\Omega}_2) \subset w'(\partial\Omega_2)$ , im Widerspruch zu  $q = w(\tilde{x}) \notin B_\varrho(w'(\bar{\Omega}_2))$ . Damit ergibt sich

$$\text{dist}_{w'(\partial\Omega_2)}(q) \leq \|w - w'\|_\infty.$$

Weiterhin können wir  $\text{dist}_{w(\partial\Omega_2)}(q)$  mittels

$$\begin{aligned} \text{dist}_{w(\partial\Omega_2)}(q) = |q - w(x)| &\leq |q - w(x')| \\ &\leq |q - w'(x')| + |w'(x') - w(x')| \leq 2\|w - w'\|_\infty \end{aligned}$$

abschätzen. Insgesamt erhalten wir

$$|\tilde{d}(q, v) - \tilde{d}(q, v')| = |\hat{d}(q, w) - \hat{d}(q, w')| \leq 3\|w - w'\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq 3\|v - v'\|_{1, \infty},$$

womit das Lemma bewiesen ist.  $\diamond$

Somit kann man auch den Kontakt zweier elastischer Körper mit den Methoden von Clarke untersuchen und beschreiben. Die Ergebnisse werden in 5.2 vorgestellt. Dagegen muss für das Studium des Selbstkontakts die Konstruktion der Abstandsfunktion modifiziert werden, um die Selbstdurchdrin-

gung des deformierten Körpers auszuschließen. Im folgenden Abschnitt wird diese Konstruktion durchgeführt.

## 2.4 Selbstkontakt eines elastischen Körpers

In diesem Abschnitt wird zunächst das Variationsproblem formuliert, das zur Beschreibung von Selbstkontakt eines elastischen Körpers verwendet wird. Um im weiteren Verlauf notwendige Bedingungen für Minimierer dieses Problems zu gewinnen, ist eine Verallgemeinerung der Methoden des letzten Abschnitts erforderlich.

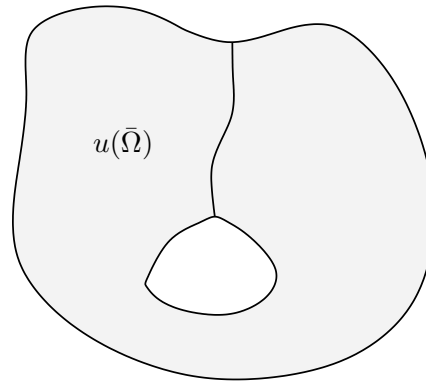


Abbildung 2.3: Selbstkontakt eines deformierten elastischen Körpers, aber keine Selbstdurchdringung

Die Einschränkung, dass sich der deformierte Körper nicht selbst durchdringen darf (vgl. Abb. 2.3), ist gleichbedeutend mit der Injektivität der Deformation  $u$  im Inneren. Da mit Elementen aus dem Sobolevraum  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  gearbeitet wird, beschränkt man sich auch häufig auf die Forderung der *Injektivität fast überall* in  $\Omega$ , d. h. man erlaubt die Existenz einer Nullmenge  $N \subset \Omega$ , so dass  $u$  eingeschränkt auf  $\Omega \setminus N$  injektiv ist.

Eine Bedingung, die diese Eigenschaft sichert, wurde von Ciarlet und Nečas in [11] formuliert. Sie fordern für die Deformationen  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  die Ungleichung

$$(2.14) \quad \int_{\Omega} \det Du(x) \, dx \leq \int_{u(\Omega)} dx = |u(\Omega)|,$$

um Selbstdurchdringung auszuschließen. Die Ungleichung (2.14) charakterisiert in der Tat die Injektivität auf einem Gebiet  $\Omega$ , wie das nächste Lemma zeigt (vgl.[11]).

**Lemma 2.3** *Sei  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand. Dann gilt:*

- (i) *Genügt  $u$  der Bedingung (2.14) und gilt  $\det Du(x) > 0$  für fast alle  $x \in \Omega$ , so ist  $u$  auf  $\Omega$  fast überall injektiv.*
- (ii) *Ist andererseits  $u$  auf  $\Omega$  fast überall injektiv, so erfüllt  $u$  die Bedingung (2.14).*

BEWEIS von Lemma 2.3. (vgl. [11])

Zunächst genüge die Funktion  $u$  der Bedingung von Ciarlet-Nečas und die Jacobideterminante  $\det Du(x)$  sei fast überall auf  $\Omega$  strikt positiv. In diesem Fall sind nach einem Resultat von Marcus und Mizel (s. [17, Th. 1]) die Bilder messbarer Mengen bzw. Nullmengen unter  $u$  wieder messbar bzw. eine Nullmenge.

Für ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , eine Funktion  $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $p > 3$ , sowie eine messbare Funktion  $h : v(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  kann eine Transformationsregel

$$(2.15) \quad \int_{v(\Omega)} h(y) N(v|\Omega, y) d(y) = \int_{\Omega} h(v(x)) |\det Dv(x)| dx$$

von Marcus und Mizel ([17, Th. 2]) verwendet werden, sofern eines der beiden Integrale wohldefiniert ist. Dabei ist die Funktion  $N : v(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  gegeben durch  $N(v|\Omega, y) := \text{card}(v^{-1}(y) \cap \Omega)$ .

Mit der Hölderungleichung erhalten wir  $\det Du \in \mathcal{L}^{p/3}(\Omega)$  und somit ist die rechte Seite von (2.15) für  $v = u$  und  $h \equiv 1$  wohldefiniert. Die Transformationsregel liefert dann

$$(2.16) \quad \int_{u(\Omega)} \text{card}\{u^{-1}(y)\} dy = \int_{\Omega} |\det Du(x)| dx.$$



Zusammen mit der Ungleichung (2.14) von Ciarlet und Nečas hat man daher

$$(2.17) \quad \int_{u(\Omega)} \text{card} \{u^{-1}(y)\} dy \leq \int_{u(\Omega)} dy = |u(\Omega)|.$$

Für fast alle  $y \in u(\Omega)$  gilt daher  $\text{card} u^{-1}(y) = 1$ . Mit der Voraussetzung  $\det Du > 0$  fast überall in  $\Omega$  folgt, dass  $u$  in  $\Omega$  fast überall injektiv ist.

Sei nun andererseits  $u$  in  $\Omega$  fast überall injektiv. Dann gilt auch  $\text{card} \{u^{-1}(y)\} = 1$  für fast alle  $y \in u(\Omega)$ . Aus (2.16) folgt dann die Bedingung von Ciarlet-Nečas, da  $\det Du(x) \leq |\det Du(x)|$ .

◇

Ferner kann die Bedingung (2.14) für den Nachweis der Existenz lokaler Minimierer eines Kontaktproblems verwendet werden, wird doch durch diese Bedingung eine schwach abgeschlossene Menge definiert (vgl. [11]).

**Lemma 2.4** *Sei  $p > 3$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand. Dann ist die Menge*

$$\mathcal{M} := \{v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid v \text{ genügt (2.14)}\}$$

*schwach abgeschlossen in  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .*

BEWEIS von Lemma 2.4. (vgl. [11])

Sei  $\{v_n\}$  eine Folge in  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , die die Ciarlet-Nečas Bedingung erfüllt und schwach gegen ein Element  $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  konvergiert. Für jedes  $\varepsilon > 0$  lässt sich eine offene Menge  $V_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$  finden mit  $v(\bar{\Omega}) \subset V_\varepsilon$  und  $|V_\varepsilon \setminus v(\bar{\Omega})| < \varepsilon$ .

Die kompakte Einbettung  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  liefert die Konvergenz der Folge  $\{v_n\}$  gegen  $v$  auch in der  $\mathcal{C}$ -Norm. Da die Menge  $v(\bar{\Omega})$  kompakt ist, existieren zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Folgenindex  $n_\varepsilon$  sowie ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , so dass

$$v_n(\bar{\Omega}) \subset B_\delta(v(\bar{\Omega})) \subset V_\varepsilon$$

für alle  $n \geq n_\varepsilon$ . Weiterhin erhalten wir mit (2.14) die Relation

$$(2.18) \quad \int_{\Omega} \det Dv_n(x) dx \leq |v_n(\Omega)| = |v_n(\bar{\Omega})|,$$

denn mit  $\partial\Omega$  ist auch das Bild  $v(\partial\Omega)$  eine Nullmenge (vgl. Beweis von Lemma 2.3).

Insgesamt findet man also zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Folgenindex  $n_\varepsilon$  derart, dass

$$(2.19) \quad \int_{\Omega} \det Dv_n(x) dx \leq |V_\varepsilon| \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon.$$

Mit  $\det Dv_n, \det Dv \in \mathcal{L}^{p/3}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und Müller [19] folgt  $\det Dv_n \rightharpoonup \det Dv$  in  $\mathcal{W}^{1,p/n}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Nacheinander Ausführung der Grenzübergänge  $n \rightarrow \infty$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  liefert schließlich

$$\int_{\Omega} \det Dv(x) dx \leq |v(\bar{\Omega})|.$$

Wegen  $|v(\Omega)| = |v(\bar{\Omega})|$  ist damit die Behauptung bewiesen.

◇

Im weiteren Verlauf der Arbeit steht nun die Untersuchung des Variationsproblems

$$\begin{cases} E(u) \rightarrow \text{Min!}, & u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ u = u_D & \text{auf } \Gamma_D, \\ |u(\Omega)| \geq \int_{\Omega} \det Du(x) dx \end{cases}$$

im Vordergrund. Dabei werden mittels einer beliebigen, aber festen Sobolev-funktion  $u_D \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  auf einer nichtleeren Teilmenge  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  des Randes Dirichlet-Randdaten vorgeschrieben. Da aber die Nebenbedingung (2.14) für eine Ableitung einer Euler-Lagrange Gleichung für lokale Minimierer des obigen Variationsproblems mit den Methoden dieser Arbeit nicht verwendet werden kann, wird, wie zu Beginn des Kapitels schon erwähnt, im Folgenden eine alternative Charakterisierung entwickelt. Dazu definieren wir zunächst den Begriff des *Lipschitz-Flächenstücks*, um die Voraussetzungen formulieren zu können.

**Definition 2.5** Sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  eine offene Menge. Eine Menge  $\Lambda \subset \partial U$  heißt *Lipschitz-Flächenstück von  $U$* , falls es eine Funktion  $h \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  und eine

Zylindermenge

$$Z := \{w \in \mathbb{R}^3 \mid (w_1, w_2) \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^2, w_3 \in (k_1, k_2)\}$$

(mit Konstanten  $r, k_1, k_2 > 0$ ) gibt, so dass nach eventueller Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems gilt (vgl. Abb. 2.4):

- (1)  $\Lambda = \{(w_1, w_2, h(w_1, w_2)) \in \mathbb{R}^3 \mid (w_1, w_2) \in B_r(0)\}$ ,
- (2)  $(Z \cap \{w \in \mathbb{R}^3 \mid (w_1, w_2) \in B_r(0), w_3 - h(w_1, w_2) < 0\}) = U \cap Z$ .

Somit wird ein Lipschitzrand  $\partial\Omega$  durch endlich viele Lipschitz-Flächenstücke überdeckt.

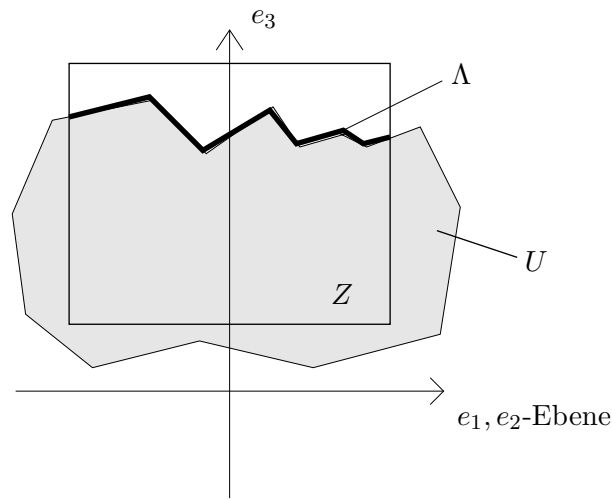


Abbildung 2.4: Lipschitz-Flächenstück  $\Lambda$  einer Menge  $U$

Für eine Funktion  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  formulieren wir nun die Voraussetzungen (vgl. Abb. 2.5):

- (A1)  $u$  ist global injektiv auf  $\Omega$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand ist. Ferner gilt  $\det Du(x) > 0$  für fast alle  $x \in \Omega$ .
- (A2)  $\forall x \in \partial\Omega \exists \sigma = \sigma(x) > 0$  :
  - (a) Die Menge  $\Lambda_\sigma := u(\bar{B}_\sigma(x) \cap \partial\Omega)$  ist Teilmenge eines Lipschitz-Flächenstücks von  $u(B_{\sigma'}(x) \cap \Omega)$  für ein  $\sigma' > \sigma$ .
  - (b)  $u|_{\partial\Omega \cap \bar{B}_\sigma(x)}$  ist injektiv.

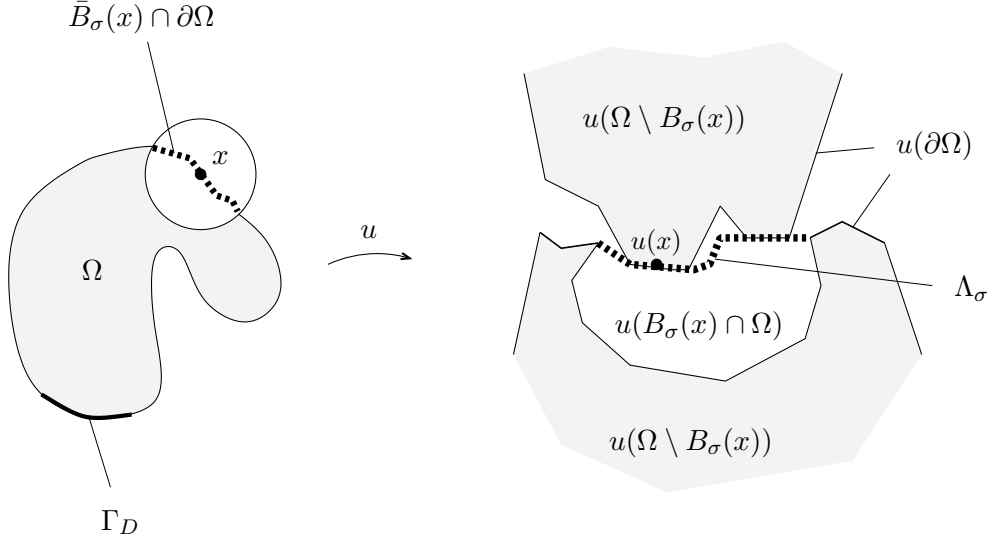


Abbildung 2.5: Situation nahe  $x$  bzw.  $u(x)$  für Funktion  $u$  mit (A1) und (A2)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir in Bedingung (A2) für alle  $x \in \partial\Omega$  zusätzlich an, dass  $\bar{B}_\sigma(x) \cap \partial\Omega$  Teilmenge eines Lipschitz-Flächenstücks von  $\Omega$  ist. Dies ist möglich, da  $\Omega$  Lipschitzrand besitzt. Man beachte, dass diese Forderung keine weitere Einschränkung an eine Funktion  $u$ , die die Voraussetzungen (A1) und (A2) erfüllt, darstellt. Mit dieser Forderung schließen wir aus, dass  $u(\bar{B}_\sigma(x) \cap \partial\Omega)$  aus mehreren Komponenten besteht (vgl. Abbildung 2.6).

Die Bedingung (a) in (A2) ermöglicht die Anwendung der Methoden von Clarke aus Kapitel 4, durch die Injektivitätsannahme auf dem Randstück  $\partial\Omega \cap \bar{B}_\sigma(x)$  können verschiedene Bildpunkte auch im Urbild unterschieden werden. Auf diese Weise werden Funktionen ausgeschlossen, die relativ offene Mengen  $\Gamma' \subset \partial\Omega$  auf einen Punkt abbilden.

Bevor wir mit der Konstruktion einer geeigneten Abstandsfunktion beginnen, definieren wir für eine Funktion  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  die Menge der Kontaktargumente

$$(2.20) \quad \Omega_c(u) := \{x \in \bar{\Omega} \mid \exists y \in \bar{\Omega} \setminus \{x\} : u(x) = u(y)\}.$$

Weiterhin bezeichnen wir einen Punkt  $w = u(x)$  mit  $x \in \Omega_c(u)$  als Kontaktpunkt (der Deformation  $u$ ).

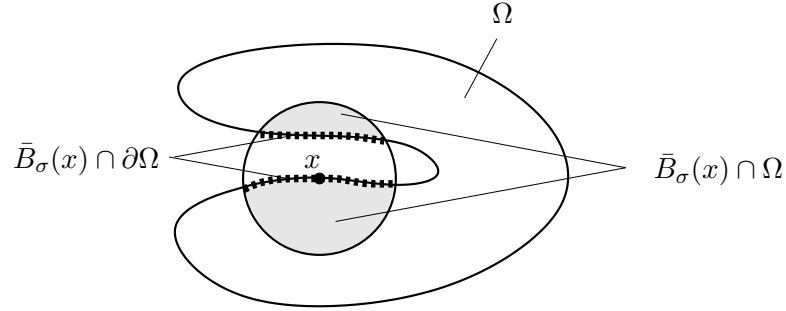


Abbildung 2.6: Beispiel einer Menge  $\bar{B}_\sigma(x) \cap \partial\Omega$ , die keine Teilmenge eines Lipschitz-Flächenstücks von  $\Omega$  ist

Eine Funktion  $v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ , die auf  $\Omega$  injektiv ist, erfüllt für jede offene Teilmenge  $\Omega' \subset \Omega$  nach Ciarlet [9, Th. 1.2-7] die Relationen

$$(2.21) \quad v(\Omega') \subset \text{int } v(\bar{\Omega}'), \quad v(\bar{\Omega}') = \text{cl } v(\Omega'), \quad \partial v(\bar{\Omega}') \subset v(\partial\Omega').$$

Insbesondere gilt

$$(2.22) \quad v(\Omega') = \text{int } v(\bar{\Omega}'), \quad \partial v(\bar{\Omega}') = v(\partial\Omega'),$$

falls  $\bar{\Omega}' \subset \Omega$  und  $\Omega' = \text{int } \bar{\Omega}'$  (vgl. [9, Th. 1.2-8]). Daher kann für eine auf  $\Omega$  injektive Funktion  $v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  Kontakt nur zwischen Punkten  $u(x)$  mit  $x \in \partial\Omega$  auftreten, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 2.6** *Sei  $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $p > 3$ , auf einer beschränkten offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit Lipschitzrand. Ist  $v$  auf  $\Omega$  injektiv, so folgt*

$$\Omega_c(v) \subset \partial\Omega.$$

*Insbesondere ist  $v$  eine offene Abbildung und erfüllt*

$$\partial v(\Omega) = v(\partial\Omega).$$

BEWEIS von Lemma 2.6.

Sei  $w \in v(\bar{\Omega})$  ein beliebiger Kontaktpunkt mit Urbild  $x \in \Omega$ . Dann existiert ein weiterer Punkt  $y \in \bar{\Omega}$  mit  $v(y) = w$ . Da  $x$  ein innerer Punkt von  $\Omega$

ist, liefert die Injektivität von  $v$  auf  $\Omega$  unmittelbar  $y \in \partial\Omega$ .

Offenbar gilt  $\bar{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$  mit geeignet klein gewähltem  $\varepsilon > 0$ . Mit (2.22) folgt wegen der Injektivität auf  $\bar{B}_\varepsilon(x)$ , dass  $v(B_\varepsilon(x))$  eine Umgebung von  $v(x)$  ist. Wähle nun eine Folge  $\{y_n\}$  mit  $y_n \in \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Dann konvergiert  $v(y_n)$  gegen  $v(y) = w = v(x)$ . Demnach gibt es einen Folgenindex  $n'$ , so dass  $v(y_{n'}) \in v(B_\varepsilon(x))$ . Es folgt  $v(x') = v(y_{n'})$  für ein  $x' \in B_\varepsilon(x)$  im Widerspruch zur Injektivität von  $v$  auf  $\Omega$  und die erste Behauptung ist bewiesen.

Ist nun  $w \in v(\Omega)$ , d. h.  $w = v(x)$  für ein  $x \in \Omega$ , folgt wie zuvor, dass  $v(B_\varepsilon(x)) \subset v(\Omega)$  für kleines  $\varepsilon > 0$ . Somit ist  $v$  eine offene Abbildung und es gilt  $\partial v(\Omega) \subset v(\partial\Omega)$ . Ist andererseits  $x \in \partial\Omega$  mit  $w = v(x) \in v(\Omega)$ , ergibt sich  $x \in \Omega_c(v)$  im Widerspruch zu  $\Omega_c(v) \subset \partial\Omega$ . Folglich erhält man  $\partial v(\Omega) = v(\partial\Omega)$ .  $\diamond$

Weiterhin lassen sich für die Urbildmengen beliebiger Bildpunkte sowie die Menge der Kontaktargumente  $\Omega_c(u)$  von Funktionen  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , die den Voraussetzungen (A1) und (A2) genügen, Eigenschaften ableiten. Dies geschieht im folgenden Lemma.

**Lemma 2.7** *Die Funktion  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $p > 3$ , erfülle die Bedingungen (A1) und (A2). Dann gilt:*

- (i) *Für alle  $w \in u(\bar{\Omega})$  ist die Urbildmenge*

$$u^{-1}(w) := \{x \in \bar{\Omega} \mid u(x) = w\}$$

*endlich.*

- (ii) *Die Menge der Kontaktargumente  $\Omega_c$  ist kompakt.*
- (iii) *Für alle  $x \in \partial\Omega$  ist  $u$  auf  $\bar{B}_{\sigma(x)}(x) \cap \bar{\Omega}$  injektiv. Ferner existiert auch für alle  $x \in \Omega$  eine Konstante  $\sigma = \sigma(x)$ , so dass  $u$  auf  $\bar{B}_{\sigma(x)}(x) \subset \Omega$  injektiv ist. Für alle  $x \in \bar{B}_{\sigma(x)}(x) \cap \bar{\Omega}$  ist  $u^{-1}$  stetig auf  $u(\bar{B}_{\sigma(x)}(x) \cap \bar{\Omega})$ .*

BEWEIS von Lemma 2.7.

Zu (i):

Angenommen, es existiert ein Bildpunkt  $w = u(x)$ , dessen Urbildmenge

unendlich viele Elemente besitzt. Dann gibt es eine Folge  $\{x_n\}$ ,  $x_n \in u^{-1}(w)$ , mit  $x_n \neq x_{n'}$  für alle  $n, n' \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq n'$ . Nach Lemma 2.6 gilt  $x_n \in \Omega_c \subset \partial\Omega$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aufgrund der Kompaktheit von  $\partial\Omega$  kann diese Folge ohne Beschränkung der Allgemeinheit als konvergent gegen  $\bar{x} \in \partial\Omega$  vorausgesetzt werden. Da  $u \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  ist, folgt  $\bar{x} \in u^{-1}(w)$ . Somit existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Folgenglied  $x_{n_0}$  mit  $x_{n_0} \in B_\varepsilon(\bar{x}) \cap \partial\Omega$ ,  $x_{n_0} \neq \bar{x}$  und  $u(x_{n_0}) = u(\bar{x})$ . Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung (A2).

Zu (ii):

Offensichtlich ist  $\Omega_c$  beschränkt und es bleibt zu zeigen, dass  $\Omega_c$  abgeschlossen ist. Sei  $\{x_n\}$  eine Folge mit  $x_n \in \Omega_c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Da die  $x_n$  Kontaktargumente sind, existiert eine Folge  $\{y_n\}$ ,  $y_n \in \bar{\Omega}$ , mit  $u(x_n) = u(y_n)$  und  $x_n \neq y_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass  $y_n \rightarrow y$  für  $n \rightarrow \infty$ . Damit folgt

$$u(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = u(x).$$

Angenommen, es gilt  $x = y$ . Dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Folgenindex  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_{n_0}, y_{n_0} \in B_\varepsilon(x) \cap \partial\Omega$ ,  $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ . Dies ist aber ein Widerspruch zur Injektivität von  $u$  auf  $\partial\Omega \cap \bar{B}_\sigma(x)$  nach (A2). Daher gilt  $x \neq y$  und somit  $x \in \Omega_c$ .

Zu (iii):

Offenbar ist  $u$  in  $\Omega \cap \bar{B}_{\sigma(x)}(x)$  bzw.  $\partial\Omega \cap \bar{B}_{\sigma(x)}(x)$  injektiv, da die Bedingungen (A1) und (A2) erfüllt sind. Weiterhin gilt nach Lemma 2.6, dass  $u(x) \neq u(y)$  für alle  $x \in \Omega \cap \bar{B}_{\sigma(x)}(x)$  und alle  $y \in \partial\Omega \cap \bar{B}_{\sigma(x)}(x)$ . Damit folgt die Behauptung für  $x \in \partial\Omega$ . Ist nun  $x \in \Omega$  beliebig, so findet man eine Konstante  $\sigma = \sigma(x)$  mit  $\bar{B}_{\sigma(x)}(x) \subset \Omega$ . Nach Voraussetzung (A1) ist damit  $u$  injektiv auf  $\bar{B}_{\sigma(x)}(x)$ . Da die Menge  $\bar{B}_{\sigma(x)}(x) \cap \bar{\Omega}$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$  kompakt ist, folgt mit der Injektivität und Stetigkeit von  $u$  auf  $\bar{B}_{\sigma(x)}(x) \cap \bar{\Omega}$  die Stetigkeit von  $u^{-1}$  auf  $u(\bar{B}_{\sigma(x)}(x) \cap \bar{\Omega})$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$ .

◇

Nun konstruieren wir die Abstandsfunktion, mit der in Kapitel 5 die Nebenbedingung, die die Nichtdurchdringung "kleiner"  $\mathcal{W}^{1,\infty}$ -Störungen eines injektiven lokalen Minimierers von (1.1)–(1.3) sichert, formuliert wird. Die

vorherigen Ausführungen wurden für Funktionen  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , die die Eigenschaften (A1) und (A2) besitzen, durchgeführt. Wir formulieren nun zusätzlich für die Menge der Kontaktargumente  $\Omega_c = \Omega_c(u)$  einer solchen Funktion  $u$  eine weitere Voraussetzung durch

$$(A3) \quad \Omega_c \cap \Gamma_D = \emptyset.$$

Diese Voraussetzung besagt, dass in der Nähe des deformierten Dirichletrandes  $u(\Gamma_D)$  kein Kontakt auftritt. Insbesondere müssen damit die Funktion  $u_D$ , die die Dirichletdaten auf  $\Gamma_D$  definiert, sowie  $u$  injektiv auf  $\Gamma_D$  sein.

Da die Urbildmenge eines jeden Randpunktes  $u(x) \in u(\partial\Omega)$  nach Lemma 2.7 endlich ist, können wir nach eventueller Verkleinerung der Konstante  $\sigma_x = \sigma(x)$  aus Voraussetzung (A2) annehmen, dass die Mengen

$$(2.23) \quad \Omega_x := B_{\sigma_x}(x) \cap \Omega$$

die Eigenschaften

$$(2.24) \quad \Omega_x \cap \Omega_y = \emptyset \quad \forall x \in \partial\Omega, y \in u^{-1}(u(x)), y \neq x$$

und

$$(2.25) \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_x \cap \Gamma_D = \emptyset & \text{für } x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_D, \\ \bar{\Omega}_x \cap \Omega_c = \emptyset & \text{für } x \in \Gamma_D \end{cases}$$

besitzen.

Für jeden Randpunkt  $x \in \partial\Omega$  gilt dann mit der Konstante  $\sigma_x$  :

- (i) Die Menge  $\partial\Omega_x \cap \partial\Omega$  ist Teilmenge eines Lipschitz-Flächenstücks von  $\Omega$ .
- (ii)  $\Omega_x \cap \Omega_y = \emptyset$  für alle  $y \in u^{-1}(u(x)), y \neq x$ .
- (iii) Die Menge  $u(\partial\Omega_x \cap \partial\Omega)$  ist Teilmenge eines Lipschitz-Flächenstücks von  $u(B_{\sigma'}(x) \cap \Omega)$  mit  $\sigma' > \sigma_x$ .

Dann existieren für jedes  $x \in \partial\Omega$  Konstanten  $r_x > 0, k_x^1, k_x^2$  mit  $k_x^1 < 0 < k_x^2$ ,



eine Funktion  $h_x \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  mit

$$(2.26) \quad k_x^1 < h_x(w_1, w_2) < k_x^2 \quad \text{für alle } (w_1, w_2) \in \bar{B}_{r_x}(0)$$

sowie ein Zylinder  $Z_x$  mit Mittelpunkt  $u(x)$ , der nach Drehung des Standardkoordinatensystems und Verschiebung des Ursprungs in  $u(x)$  in einem Koordinatensystems  $(e_x^1, e_x^2, e_x^3)$  durch

$$(2.27) \quad Z_x := \{w \in \mathbb{R}^3 \mid (w_1, w_2) \in B_{r_x}(0) \subset \mathbb{R}^2, w_3 \in (k_x^1, k_x^2)\},$$

gegeben ist, so dass gilt:

$$(2.28) \quad u(\Omega_x) \cap Z_x = (Z_x \cap \{w \in \mathbb{R}^3 \mid (w_1, w_2) \in B_{r_x}(0), w_3 < h_x(w_1, w_2)\}),$$

$$(2.29) \quad \partial V_x \in \mathcal{C}^{0,1} \quad \text{für } V_x := Z_x \cap u(\Omega_x),$$

$$(2.30) \quad Z_x \subset \hat{Z}_x.$$

Dabei bezeichne  $\hat{Z}_x$  den Zylinder, der gemäß Voraussetzung (A2) zum Lipschitz-Flächenstück bzgl.  $x$  gehört, in den Koordinaten des Systems  $(\hat{e}_x^1, \hat{e}_x^2, \hat{e}_x^3)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir  $u(\Omega_x) \subset \hat{Z}_x$  an (vgl. Abb. 2.7).

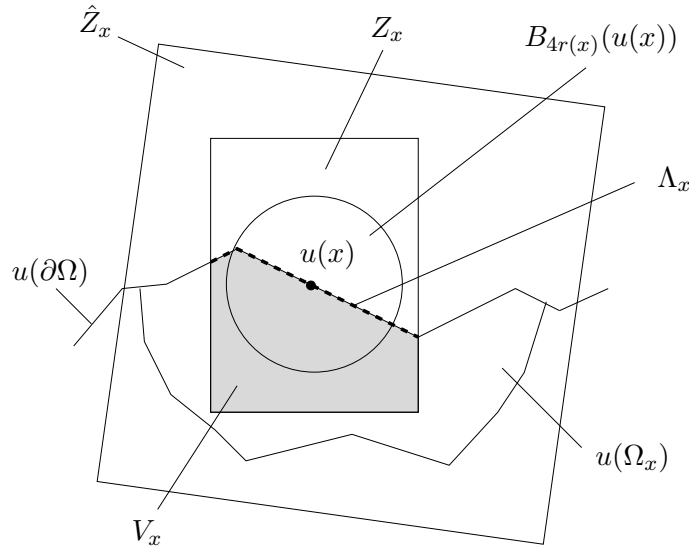


Abbildung 2.7: Umgebung von  $u(x)$  für  $x \in \partial\Omega$

Definiere nun die positive Konstante

$$(2.31) \quad k_x := \min_{\bar{B}_{r_x}(0)} \{|h_x(w_1, w_2) - k_x^1|, |h_x(w_1, w_2) - k_x^2|\}$$

und die Menge

$$(2.32) \quad \Lambda_x := Z_x \cap u(\partial\Omega_x \cap \partial\Omega).$$

Mit dieser Menge sind wir in der Lage, die benötigte Abstandsfunktion einzuführen. Für einen beliebigen Randpunkt  $x \in \partial\Omega$  setzen wir

$$(2.33) \quad d(q, x) := \begin{cases} -\text{dist}_{\Lambda_x}(q), & \text{falls } q \in Z_x \cap u(\Omega_x), \\ \text{dist}_{\Lambda_x}(q), & \text{falls } q \in Z_x \cap u(\Omega_x)^c \end{cases}$$

auf  $Z_x$ . Ferner existiert eine positive Konstante  $r(x)$ , so dass

$$(2.34) \quad B_{4r(x)}(u(x)) \subset Z_x.$$

Damit ist  $d(\cdot, x)$  insbesondere auf  $B_{4r(x)}(u(x))$  definiert (s. Abb. 2.7). Das folgende Lemma liefert Eigenschaften der durch (2.33) definierten Funktion.

**Lemma 2.8** *Die Funktion  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $p > 3$ , erfülle die Bedingungen (A1)–(A3). Dann besitzt die in (2.33) definierte Funktion  $d(q, x)$  die folgenden beiden Eigenschaften:*

- (D1) *Die Funktion  $d(\cdot, x)$  ist für alle  $x \in \partial\Omega$  Lipschitz-stetig auf  $Z_x$  mit Lipschitzkonstante 1.*
- (D2) *Für alle  $x \in \partial\Omega$  existiert eine positive Konstante  $s = s(x)$ , so dass die Mengen  $Q(y) := B_{r(y)}(u(y)) \cap B_{r(x)}(u(x))$  für alle  $y \in B_{s(x)}(x) \cap \partial\Omega$  nichtleer sind und es gilt*

$$d(q, y) = d(q, x) \quad \forall y \in B_{s(x)}(x) \cap \partial\Omega, q \in Q(y).$$

BEWEIS von Lemma 2.8.

Offenbar ist für jedes  $x \in \partial\Omega$  die Funktion  $d(\cdot, x)$  auf  $Z_x$  Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 1 (Beweis erfolgt analog zu dem von Lemma 2.1).

Damit ist Eigenschaft (D1) gezeigt. Zum Nachweis von (D2) fixieren wir ein  $x \in \partial\Omega$ . Da  $u$  auf der kompakten Menge  $\bar{\Omega}$  stetig ist, existiert eine Konstante  $s = s(x) \in (0, \sigma_x)$  derart, dass  $u(y) \in B_{r(x)}(u(x))$  für alle  $y \in B_{s(x)}(x) \cap \bar{\Omega}$ . Nach Konstruktion erhält man

$$Q(y) = B_{r(y)}(u(y)) \cap B_{r(x)}(u(x)) \neq \emptyset$$

für alle  $y \in B_{s(x)}(x) \cap \partial\Omega$ .

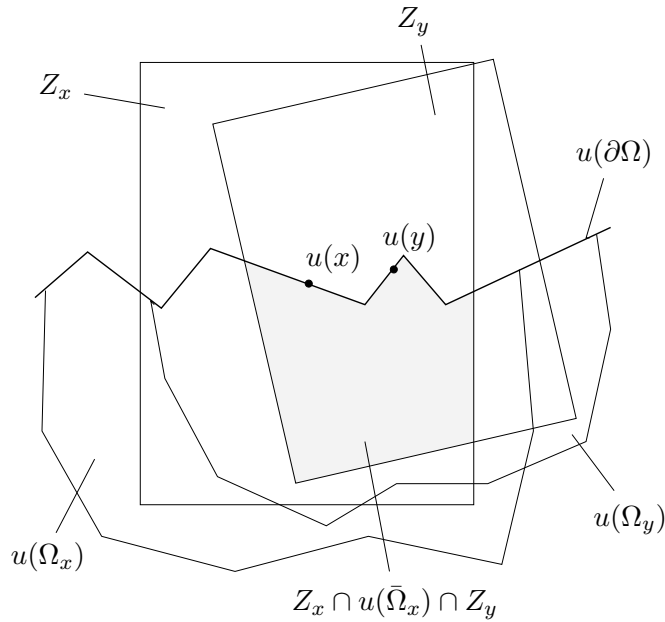


Abbildung 2.8: Die Situation für ein  $y \in B_{s(x)}(x) \cap \partial\Omega$

Sei nun  $y \in B_{s(x)}(x) \cap \partial\Omega$  beliebig, aber fest. Mit  $y \in \partial\Omega_x \cap \partial\Omega$  folgt nun

$$(2.35) \quad Z_x \cap \overline{u(\Omega_x)} \cap Z_y = Z_y \cap \overline{u(\Omega_y)} \cap Z_x$$

(vgl. Abb. 2.8). Nach Konstruktion der Mengen  $\Omega_z$ ,  $z \in \partial\Omega$ , in (2.23)–(2.25) gilt

$$\overline{u(\Omega_x)} \cap u(\partial\Omega) = u(\partial\Omega_x \cap \partial\Omega)$$

(analog für den Punkt  $y$ ) und somit auch

$$Z_x \cap u(\partial\Omega_x \cap \partial\Omega) \cap Z_y = Z_x \cap u(\partial\Omega_y \cap \partial\Omega) \cap Z_y.$$

Mit (2.32) folgt

$$(2.36) \quad \Lambda_x \cap Z_y = \Lambda_y \cap Z_x.$$

Sei nun  $q \in Q(y)$  beliebig. Offenbar gilt dann  $q \in B_{2\tilde{r}}(u(y))$  für

$$(2.37) \quad \tilde{r} := \min\{r(x), r(y)\}.$$

Die Relation (2.35) liefert nun, dass  $d(q, x)$  und  $d(q, y)$  gleiches Vorzeichen haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nur den Fall  $d(q, x), d(q, y) \geq 0$ . Wegen der Kompaktheit der Mengen  $\Lambda_x$  und  $\Lambda_y$  existieren Punkte  $q_x \in \Lambda_x$  und  $q_y \in \Lambda_y$  mit

$$d(q, x) = |q - q_x|, \quad d(q, y) = |q - q_y|.$$

Aus  $u(y) \in \Lambda_x \cap \Lambda_y$  ergibt sich

$$(2.38) \quad |u(x) - q_y| \leq |u(x) - q| + |q - q_y|$$

$$(2.39) \quad \leq r(x) + |q - u(y)| \leq r(x) + 2\tilde{r} \leq 3r(x).$$

Damit hat man  $q_y \in Z_x \cap \Lambda_y$  nach Konstruktion der Konstante  $r(x)$  in (2.34). Mit der Relation (2.36) folgt dann  $q_y \in \Lambda_x$  und nach Wahl der Punkte  $q_x, q_y$  auch

$$(2.40) \quad d(q, x) \leq |q - q_y| = d(q, y).$$

Analog zu (2.37) erreicht man  $q_x \in B_{2r(y)}(u(y))$ . Wie zuvor erhalten wir mit (2.34) und (2.36) daraus  $q_x \in \Lambda_y$ . Es folgt  $d(q, y) \leq |q - q_x| = d(q, x)$  und zusammen mit (2.40) folgt die Behauptung.  $\diamond$

**Bemerkung 2.9** Im Beweis von Proposition 2.10 wird gezeigt, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $r(x) \geq r_0$  für eine geeignete positive Konstante  $r_0$  annehmen können. Denn für die Auswertung der Abstandsfunktion werden nur endlich viele Bezugspunkte  $x_i, i = 1, \dots, \tilde{k}$ , (die zu einer Überdeckung von  $\partial\Omega$  korrespondieren) benötigt, d. h. wir zeigen  $d(q, x) = d(q, x_i)$

für alle  $q \in B_{r_0}(u(x)) \cap B_{r_0}(u(x_i))$ , falls  $x \in B_{\sigma(x_i)}(x_i) \cap \partial\Omega$ . Daher sei von nun an  $r(x) \geq r_0 > 0$ .

Nun führen wir für ein festes  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $\varphi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  die Konfiguration

$$(2.41) \quad u_\varphi(x) := u(x) + \varphi(u(x))$$

ein. Diese Funktionen  $u_\varphi$  sind Elemente von  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  (vgl. Beweis von Theorem 5.1, Schritt 2). Für eine abgeschlossene Teilmenge  $\tilde{\Gamma}$  von  $\partial\Omega$  mit  $\tilde{\Gamma} \cap \Gamma_D = \emptyset$  definieren wir die Funktion

$$(2.42) \quad g_{\tilde{\Gamma}}(\varphi) := \max_{x \in \tilde{\Gamma}} d(u_\varphi(x), x).$$

Nach Bemerkung 2.9 ist  $g_{\tilde{\Gamma}}$  für alle  $\varphi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  mit  $\|\varphi\|_{1,\infty} \leq r_0$  wohldefiniert. Die folgende Proposition zeigt, dass bei geeigneter Wahl der Menge  $\tilde{\Gamma}$  mit Hilfe der Funktion  $g_{\tilde{\Gamma}}$  die Ciarlet-Nečas Bedingung (2.14) für die Funktionen  $u_\varphi$  ersetzt werden kann durch die Nebenbedingung  $g_{\tilde{\Gamma}}(\varphi) \leq 0$ , falls die  $\mathcal{W}^{1,\infty}$ -Norm von  $\varphi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  hinreichend klein gewählt wird.

**Proposition 2.10** *Sei  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  eine Funktion, die den Bedingungen (A1)–(A3) genügt. Dann existieren eine kompakte Menge  $\Gamma \subset \partial\Omega$  mit*

$$(2.43) \quad \Gamma \cap \Gamma_D = \emptyset \quad \text{und} \quad \Omega_c \subset \Gamma$$

*sowie eine positive Konstante  $r$ , so dass für alle  $\varphi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  mit  $\|\varphi\|_{1,\infty} \leq r$  und*

$$(2.44) \quad g(\varphi) (= g_\Gamma(\varphi)) := \max_{x \in \Gamma} d(u_\varphi(x), x) \leq 0$$

*die Funktion  $u_\varphi(x)$  die Ciarlet-Nečas Bedingung*

$$\int_{\Omega} \det Du_\varphi(x) dx \leq \int_{u_\varphi(\Omega)} dw.$$

*erfüllt.*

BEWEIS von Proposition 2.10.

Sei dazu  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  eine Funktion, die die Bedingungen (A1)–(A3) erfüllt. Weiterhin seien die Funktionen  $d(q, x)$  gemäß (2.33) definiert, wobei die zu  $x \in \partial\Omega$  (und  $u$ ) in (2.27)–(2.32) gehörenden Größen verwendet werden.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst konstruieren wir eine geeignete endliche Überdeckung des Randes  $\partial\Omega$  aus Teilmengen der in (2.23)–(2.25) eingeführten Mengen  $\bar{\Omega}_x$ ,  $x \in \partial\Omega$ . Mit Hilfe dieser Überdeckung wählen wir dann eine Überdeckung der kompakten Menge  $u(\bar{\Omega})$ . Insbesondere wird in diesem Schritt die Menge  $\Gamma$  bestimmt. Im zweiten Schritt zeigen wir, dass jede Funktion  $\varphi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  auf den Teilmengen dieser Überdeckung Lipschitz-stetig mit einer Lipschitzkonstanten kleiner als 1 ist, falls die  $\mathcal{W}^{1,\infty}$ -Norm von  $\varphi$  hinreichend klein ist. Anschließend weisen wir unter Verwendung der konstruierten Überdeckungen nach, dass Bemerkung 2.9 für die in (2.33) definierte Abstandsfunktion gerechtfertigt ist. Mittels einer Fallunterscheidung wird im letzten Schritt bewiesen, dass die Konfiguration  $u_\varphi$  die Ciarlet-Nečas Bedingung erfüllt, falls die Störung  $\varphi$  den Relationen  $\|\varphi\|_{1,\infty} \leq r$  und  $g(\varphi) \leq 0$  genügt.

SCHRITT 1 (Konstruktion einer geeigneten Überdeckung von  $u(\bar{\Omega})$ )

Sei  $x \in \partial\Omega$  ein beliebiger Punkt. Dann haben wir in (2.24), (2.27), (2.29) und (2.32) die positive Konstante  $\sigma_x$ , den Zylinder  $Z_x$ , die Menge  $V_x$  sowie die Randteilmenge  $\Lambda_x$  definiert. Bezeichne nun mit  $\tilde{Z}_x$  denjenigen Zylinder, der im Koordinatensystem  $(e_x^1, e_x^2, e_x^3)$  gegeben ist durch

$$(2.45) \quad \tilde{Z}_x = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid (w_1, w_2) \in B_{\tilde{r}_x}(0) \subset \mathbb{R}^2, w_3 \in (k_x^1 + k_x/2, k_x^2 - k_x/2)\},$$

wobei die Konstante  $\tilde{r}_x \in (0, r_x/2)$  so klein gewählt sei, dass

$$(2.46) \quad B_{3\tilde{r}_x}(\tilde{Z}_x) \subset Z_x$$

erfüllt ist. Mit Hilfe dieses Zylinders  $\tilde{Z}_x$  definieren wir in Analogie zu den Mengen  $V_x$  die Mengen

$$(2.47) \quad \tilde{V}_x := \tilde{Z}_x \cap u(\Omega_x)$$

für alle  $x \in \partial\Omega$ . Auch diese Mengen  $\tilde{V}_x$  haben für alle  $x \in \partial\Omega$  Lipschitzrand.

Da  $u$  auf  $\bar{\Omega}$  stetig ist, existiert zu jedem  $x \in \partial\Omega$  eine Konstante

$$(2.48) \quad \tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}(x) \in (0, \sigma(x)) ,$$

so dass die Menge

$$(2.49) \quad \tilde{\Omega}_x := B_{\tilde{\sigma}_x}(x) \cap \Omega$$

die Eigenschaft

$$(2.50) \quad u(\tilde{\Omega}_x) \subset\subset \tilde{Z}_x$$

besitzt.

Auf diese Weise haben wir für jeden Punkt  $x \in \partial\Omega$  Mengen  $Z_x$ ,  $\tilde{Z}_x$ ,  $V_x$ ,  $\tilde{V}_x$ ,  $\Lambda_x$ ,  $\Omega_x$  und  $\tilde{\Omega}_x$  konstruiert und erhalten in einer Umgebung von  $u(x)$  die in Abbildung 2.9 dargestellte Situation.

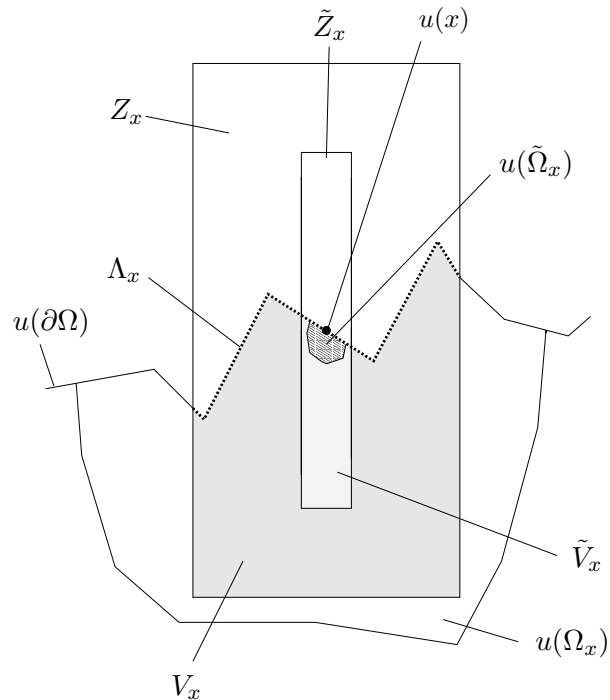


Abbildung 2.9: Die eingeführten Mengen für ein  $x \in \partial\Omega$

Da der Rand  $\partial\Omega$  kompakt ist, existieren zwei natürliche Zahlen  $k_D, \tilde{k}$  mit  $\tilde{k} > k_D$  sowie paarweise verschiedene Randpunkte  $x_i, i = 1, \dots, \tilde{k}$ , so dass gilt

$$(2.51) \quad x_i \in \Gamma_D \iff i \in \{1, \dots, k_D\},$$

$$(2.52) \quad \Gamma_D \subset U_D, \Omega_c \cap U_D = \emptyset \quad \text{für } U_D := \bigcup_{i=1}^{k_D} B_{\tilde{\sigma}_i}(x_i),$$

$$(2.53) \quad \partial\Omega \subset \tilde{U} \quad \text{für } \tilde{U} := \bigcup_{i=1}^{\tilde{k}} B_{\tilde{\sigma}_i}(x_i).$$

Dabei bezeichnen wir für  $i = 1, \dots, \tilde{k}$  mit  $\sigma_i, \tilde{\sigma}_i, Z_i, \tilde{Z}_i, V_i, \tilde{V}_i, \Lambda_i, \Omega_i$  und  $\tilde{\Omega}_i$  die zum Randpunkt  $x_i$  gehörenden Größen  $\sigma_{x_i}, \tilde{\sigma}_{x_i}$  usw..

Nun setzen wir

$$(2.54) \quad a := \min \left\{ \tilde{r}_{x_i} \mid i = 1, \dots, \tilde{k} \right\}$$

Durch diese Wahl sichern wir, dass die  $3a$ -Umgebung von  $\tilde{V}_i$  für alle Indizes  $i = 1, \dots, \tilde{k}$  stets der Relation

$$(2.55) \quad B_{3a}(\tilde{V}_i) \subset B_{3a}(\tilde{Z}_i) \subset Z_i$$

genügt (vgl. (2.46)).

Weiterhin gilt nach Wahl der Konstanten  $\sigma_x$  in (2.25) auch

$$\text{cl } \tilde{\Omega}_i \cap \overline{\Omega \setminus \Omega_i} = \emptyset, \quad \text{cl } \tilde{\Omega}_i \cap \Omega_c = \emptyset$$

für alle  $i = 1, \dots, k_D$ . Daher sind die Konstanten

$$(2.56) \quad m_i := \frac{1}{3} \text{dist}(u(\text{cl } \tilde{\Omega}_i), u(\overline{\Omega \setminus \Omega_i})) \quad (\text{für } i = 1, \dots, k_D),$$

$$(2.57) \quad m := \min \{m_i \mid i = 1, \dots, k_D\}$$

positiv. Damit erhalten wir insbesondere

$$(2.58) \quad B_{2m}(\tilde{V}_i) \subset (V_i \cup u(\Omega)^c)$$



für alle  $i = 1, \dots, k_D$ . Die Relation (2.58) besagt, dass  $u_\varphi$  ein  $x \in \Omega$  mit  $u(x) \in \tilde{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, k_D$ , entweder nach  $V_i$  oder  $u(\Omega)^c$  abbildet, falls die  $\mathcal{L}^\infty$ -Norm von  $\varphi$  durch  $2m$  beschränkt ist (vgl. Abb. 2.10).

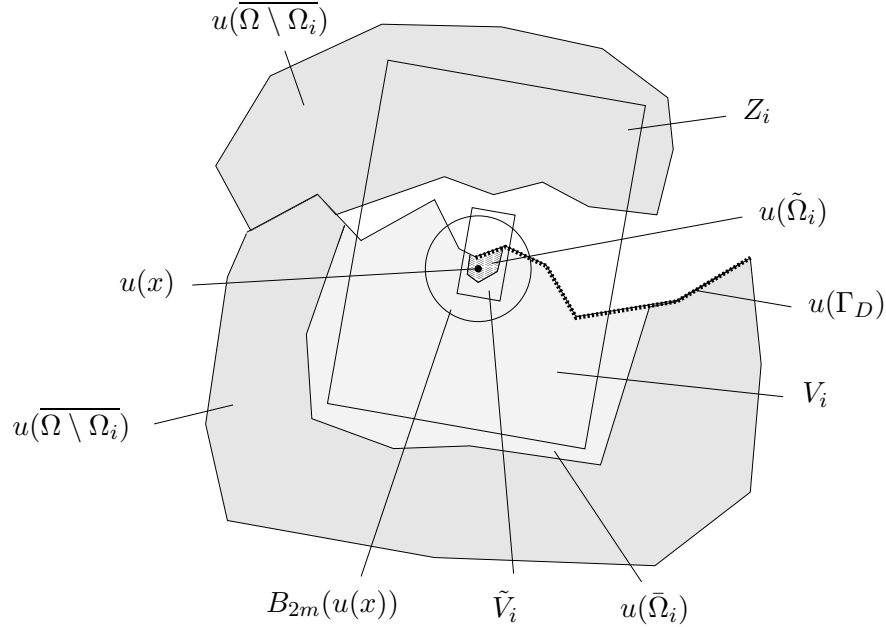


Abbildung 2.10: Umgebung eines Punktes  $u(x) \in u(\tilde{\Omega}_i)$  für  $i \leq k_D$

Nun definieren wir die Randteilmenge  $\Gamma \subset \partial\Omega$ , die in der Definition der Funktion  $g$  verwendet wird. Nach Konstruktion der Überdeckung gilt

$$u^{-1}(\Lambda_i) \cap \Gamma_D = \emptyset$$

für alle  $i \in \{k_D + 1, \dots, \tilde{k}\}$  (vgl. (2.25) und (2.32)). Damit ist auch

$$(2.59) \quad \Gamma := \bigcup_{i=k_D+1}^{\tilde{k}} u^{-1}(\Lambda_i) \cap \bar{\Omega}_i$$

eine zu  $\Gamma_D$  disjunkte, kompakte Teilmenge von  $\partial\Omega$  mit  $\Omega_c \subset \Gamma$ . Aus (2.55) folgt insbesondere

$$(2.60) \quad B_{3a}(u(\text{cl } \tilde{\Omega}_i)) \cap u(\partial\Omega) \subset u(\Gamma)$$

für alle  $i = k_D + 1, \dots, \tilde{k}$ . Mit dieser Bedingung wird in Beweisschritt 4 zusammen mit der Nebenbedingung  $g(\varphi) \leq 0$  gesichert, dass für alle Indizes  $i = k_D + 1, \dots, \tilde{k}$  die Bilder von  $\tilde{\Omega}_i$  unter  $u_\varphi$  in  $\bar{V}_i$  enthalten sind, falls die  $\mathcal{W}^{1,\infty}$ -Norm von  $\varphi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  hinreichend klein ist..

Nun wählen wir eine offene Menge  $\tilde{\Omega}_0$  mit  $\partial\tilde{\Omega}_0 \in \mathcal{C}^{0,1}$  und

$$(2.61) \quad \left( \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\tilde{k}} \tilde{\Omega}_i \right) \subset \tilde{\Omega}_0 \subset\subset \Omega.$$

Zu dieser Menge existieren offene Mengen  $M_0, \tilde{M}_0$ , die die Bedingungen

$$(2.62) \quad \begin{cases} u(\tilde{\Omega}_0) \subset \tilde{M}_0 \subset\subset M_0 \subset\subset u(\Omega), \\ \partial M_0, \partial\tilde{M}_0 \in \mathcal{C}^{0,1} \end{cases}$$

erfüllen. Mit diesen Mengen führen wir schließlich die positiven Konstanten

$$(2.63) \quad \delta_0 := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(M_0, u(\partial\Omega)),$$

$$(2.64) \quad \tilde{\delta}_0 := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\tilde{M}_0, M_0^c)$$

und

$$(2.65) \quad \delta_1 := \min \{a, m, \delta_0, \tilde{\delta}_0\}$$

ein.

SCHRITT 2 (Die Lipschitz-Stetigkeit von  $\varphi$ )

Sei  $\psi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(U, \mathbb{R}^3)$ , wobei  $U \subset \mathbb{R}^3$  eine beschränkte offene Menge mit Lipschitzrand  $\partial U \in \mathcal{C}^{0,1}$ . Ferner sei  $R > 0$  so gross, dass  $U \subset\subset B_R(0)$ . Dann existiert eine Fortsetzung  $\tilde{\psi} \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  von  $\psi$  mit den Eigenschaften

$$\|\tilde{\psi}\|_{1,\infty} \leq c(U, R) \cdot \|\psi\|_{1,\infty}, \quad \operatorname{supp} \tilde{\psi} \subset B_R(0),$$

wobei  $c(U, R)$  eine von  $U$  und  $R$  abhängige positive Konstante bezeichnet (vgl. [2, A 6.12]). Insbesondere ist damit  $\tilde{\psi}$  Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}^3$  und für

die Lipschitzkonstante  $l_{\tilde{\psi}}$  gilt die Abschätzung

$$(2.66) \quad l_{\tilde{\psi}} = \|D\tilde{\psi}\|_{\infty} \leq c(U, R) \|\psi\|_{1, \infty} .$$

Diese Abschätzung überträgt sich auf die Lipschitzkonstante der Funktion  $\psi$ , d. h. es folgt

$$(2.67) \quad l_{\psi} \leq c(U, R) \|\psi\|_{1, \infty} .$$

Damit erhält man für alle  $\psi \in \mathcal{W}^{1, \infty}(U, \mathbb{R}^3)$  mit  $\|\psi\|_{1, \infty} \leq 1/c(U, R)$  nun

$$(2.68) \quad \psi \in \mathcal{C}^{0,1}(U, \mathbb{R}^3), l_{\psi} < 1 .$$

Offenbar sind die offenen Mengen  $V_0 := M_0$  sowie  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, \tilde{k}$ , beschränkt, genügen  $V_i \subset\subset B_R(0)$  für ein geeignetes  $R > 0$  (unabhängig von  $i$ ) und haben Lipschitzrand. Somit existieren positive Konstanten  $c_i = c_i(V_i)$ ,  $i = 0, \dots, \tilde{k}$ , so dass  $\varphi \in \mathcal{C}^{0,1}(V_i, \mathbb{R}^3)$  mit Lipschitzkonstante  $l_{\varphi} < 1$ , falls  $\varphi \in \mathcal{W}^{1, \infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  die Relation  $\|\varphi\|_{1, \infty} \leq c_i$  erfüllt. Bezeichnet man das Minimum dieser Konstanten  $c_i$  mit  $\delta_2$ , d. h. man setzt

$$(2.69) \quad \delta_2 := \min \{c_i \mid i = 0, \dots, \tilde{k}\} ,$$

so gilt die Aussage (2.68) gleichzeitig für alle Mengen  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, \tilde{k}$ , falls die Funktion  $\varphi \in \mathcal{W}^{1, \infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  der Relation  $\|\varphi\|_{1, \infty} \leq \delta_2$  genügt. Dabei ist die Konstante  $\delta_2$  in (2.69) unabhängig von der speziell betrachteten Funktion  $\varphi \in \mathcal{W}^{1, \infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$ , sondern hängt lediglich von den fest gewählten Mengen  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, \tilde{k}$ , ab.

Nun können wir die Konstante  $r$  definieren, die die Schranke für die  $\mathcal{W}^{1, \infty}$ -Norm der Störungen  $\varphi \in \mathcal{W}^{1, \infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  darstellt. Wir setzen

$$(2.70) \quad r := \min \{\delta_1, \delta_2\} .$$

SCHRITT 3 (Die Abstandsfunktion  $d(q, x)$  auf  $B_r(u(\tilde{\Omega}_i))$ )

Sei  $x \in \partial\Omega$ . Damit existiert ein  $j \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$  mit  $x \in B_{\tilde{\sigma}_j}(x_j) \cap \partial\Omega_j$ . Mit

der positiven Konstante  $r' := \min(r(x), r)$  erhalten wir  $|d(q, x)| \leq r'$  für alle  $q \in B_{r(x)}(u(x)) \cap B_r(u(\tilde{\Omega}_j))$ . Wie im Beweis von Lemma 2.8 folgt

$$(2.71) \quad d(q, x) = d(q, x_j) \quad \text{für alle } q \in B_{r'}(u(x)) \subset B_r(u(\tilde{\Omega}_i)).$$

Insbesondere gilt (2.71) für alle  $j \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$  mit  $x \in \partial\tilde{\Omega}_j$ .

Ist nun  $r(x) < r$ , so setzen wir  $d(\cdot, x)$  auf  $B_r(u(x)) \setminus B_{r(x)}(u(x))$  durch  $d(q, x) = d(q, x_i)$  für alle  $q \in B_r(u(x)) \setminus B_{r(x)}(u(x))$  fort. Dadurch bleiben die Eigenschaften (D1) und (D2) (mit  $r(x) = r$  für alle  $x \in \partial\Omega$ ) erhalten, wobei die Konstante  $s = s(x)$  so verkleinert werden muss, dass  $B_r(u(x)) \cap B_r(u(x_j)) \neq \emptyset$  erfüllt ist. Damit wird die in Bemerkung 2.9 gemachte Annahme  $r(x) \geq r_0 > 0$  mit  $r_0 = r$  gerechtfertigt.

SCHRITT 4 (Die Ciarlet-Nečas Bedingung für die Funktionen  $u_\varphi$ )

Mit den Überdeckungen aus Schritt 1 sowie der in (2.70) definierten Konstante  $r$  aus Schritt 2 können wir nun die Ciarlet-Nečas Bedingung

$$\int_{\Omega} \det Du_\varphi(x) dx \leq \int_{u_\varphi(\Omega)} dw.$$

für die Konfigurationen  $u_\varphi$  mit  $\|\varphi\|_{1,\infty} \leq r$  und  $g(\varphi) \leq 0$  beweisen.

Die Transformationsregel von Marcus und Mizel ([17]) liefert für die Funktionen  $u_\varphi \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  die Gleichung

$$(2.72) \quad \int_{\Omega} |\det Du_\varphi(x)| dx = \int_{u_\varphi(\Omega)} \text{card} \{u_\varphi^{-1}(w)\} dw.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt, falls  $\text{card} \{u_\varphi^{-1}(w)\} = 1$  fast überall in  $u_\varphi(\Omega)$  gilt. Da  $u(\partial\Omega)$  eine Nullmenge ist (vgl. Lemma 2.3), reicht es aus,

$$(2.73) \quad \text{card} \{u_\varphi^{-1}(w)\} = 1 \quad \forall w \in (u_\varphi(\Omega) \setminus u(\partial\Omega))$$

zu zeigen.

Angenommen, (2.73) ist falsch. Dann existiert ein  $w \in u_\varphi(\Omega) \setminus u(\partial\Omega)$  mit  $\text{card} \{u_\varphi^{-1}(w)\} \geq 2$ . Dabei sind folgende Fälle für  $w \in u_\varphi(\Omega) \setminus u(\partial\Omega)$  möglich:

- (A)  $w \in \tilde{M}_0$ ,
- (B)  $w \in M_0 \setminus \tilde{M}_0$ ,
- (C)  $w \in M_0^c$ .

Zu (A):

Sei  $\Omega(w) := \{x \in \Omega \mid u_\varphi(x) = w\}$  die Urbildmenge von  $w$  unter  $u_\varphi$ . Die Voraussetzung  $\|\varphi\|_{1,\infty} \leq r$  liefert unmittelbar

$$(2.74) \quad u(x) \in B_r(w) \quad \forall x \in \Omega(w).$$

Mit (2.64) und der Wahl von  $r$  gemäß (2.70) folgt  $B_r(w) \subset B_{\tilde{\delta}_0}(w) \subset M_0$ . Nach Schritt 2 ist die Funktion  $\varphi$  auf  $M_0$  Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante  $l_\varphi < 1$ . Damit ergibt sich für beliebige  $x, y \in \Omega(w)$ ,  $x \neq y$ , aus der Annahme  $u_\varphi(x) = u_\varphi(y)$  nun

$$(2.75) \quad |u(x) - u(y)| = |\varphi(u(x)) - \varphi(u(y))| < |u(x) - u(y)|.$$

Daraus folgt  $u(x) = u(y)$  für  $x \neq y$ . Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von  $u$  und somit ist dieser Fall ausgeschlossen.

Zu (B):

Sei  $w \in M_0 \setminus \tilde{M}_0$  ein Punkt mit  $\text{card } \Omega(w) \geq 2$ . Offenbar gilt  $w \in \tilde{V}_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$ . Wie in Fall (A) folgt  $u(x) \in B_r(w)$  für alle  $x \in \Omega(w)$ . Weiterhin gilt  $B_r(w) \cap u(\partial\Omega) = \emptyset$ , da  $r \leq \text{dist}(M_0, u(\partial\Omega))/2$  (vgl. (2.63)). Daher erhalten wir

$$u(x) \in B_r(w) \subset V_i$$

für alle  $x \in \Omega(w)$ . Nach Schritt 2 ist  $\varphi$  Lipschitz-stetig auf  $V_i$  mit Lipschitzkonstante  $l_\varphi < 1$ . Analog zu (2.75) ergibt sich nun ein Widerspruch.

Zu (C):

Sei  $w \in M_0^c$  mit  $\text{card } u_\varphi^{-1}(w) \geq 2$ . Nach Voraussetzung existieren mindestens zwei verschiedene Urbilder  $x, y \in \Omega$  mit  $u_\varphi(x) = u_\varphi(y) = w$ . Mit  $w \in M_0^c$  liefern (2.61) und (2.62) auch  $x, y \in \Omega \cap \tilde{\Omega}_0^c$ . Damit existieren zwei Indizes  $i = i(x), j = j(y) \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$  mit  $x \in \tilde{\Omega}_i$  und  $y \in \tilde{\Omega}_j$ .

Angenommen, einer der beiden Indizes ist kleiner als  $k_D + 1$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $i(x) = 1$ . Die Beschränktheit der  $\mathcal{W}^{1,\infty}$ -Norm von  $\varphi$  liefert

$$(2.76) \quad |u(x) - u(y)| \leq |u(x) - w| + |w - u(y)| \leq 2r.$$

Weiterhin folgt aus (2.58) die Inklusion

$$B_{2r}(u(x)) \subset B_{2m}(u(\tilde{\Omega}_1)) \subset B_{2m}(\tilde{Z}_1) \subset (V_1 \cup u(\Omega)^c)$$

und somit  $u(y) \in V_1$  (der Fall  $u(y) \in \bar{V}_1 \cap u(\partial\Omega)$  ist wegen  $y \in \Omega$  und der Injektivität von  $u$  ausgeschlossen). Analog zu den vorherigen Fällen liefert die Lipschitz-Stetigkeit von  $\varphi$  auf  $V_1$  einen Widerspruch.

Damit können wir uns auf den Fall  $i(x), j(y) \in \{k_D + 1, \dots, \tilde{k}\}$  beschränken. Für solche Indizes charakterisieren wir die Bilder der Mengen  $\tilde{\Omega}_i \cap \tilde{\Omega}_0^c$  unter der Abbildung  $u_\varphi$ . Dies geschieht im folgenden Lemma.

**Lemma 2.11** *Sei  $\varphi \in X$  eine Störung, die die Bedingungen  $\|\varphi\|_{1,\infty} \leq r$  und  $g(\varphi) \leq 0$  erfüllt. Dann gilt*

$$(2.77) \quad u_\varphi(y) \in \overline{B_r(u(y))} \cap \bar{V}_i$$

für alle  $y \in \tilde{\Omega}_i \cap \tilde{\Omega}_0^c$ ,  $i = k_D + 1, \dots, \tilde{k}$ .

BEWEIS von Lemma 2.11.

Angenommen, die Behauptung (2.77) ist falsch. Dann existiert ein Punkt  $y \in \tilde{\Omega}_i \cap \tilde{\Omega}_0^c$  mit  $i \in \{k_D + 1, \dots, \tilde{k}\}$  und  $w = u_\varphi(y) \notin \overline{B_r(u(y))} \cap \bar{V}_i$ . Nach Konstruktion ist  $r \leq a$  (vgl. (2.65) und (2.70)) gegeben. Daher folgt aus (2.55) sowie der Beschränktheit von  $\|\varphi\|_{1,\infty}$  die Relation  $w \in \overline{B_r(u(y))} \subset Z_i$ . Die Widerspruchsannahme liefert dann  $w \in (\bar{V}_i)^c$ , da  $|u_\varphi(y) - u(y)| \leq r$ .

Wir definieren nun für  $t \geq 0$  die Vektoren

$$(2.78) \quad v_t := w + t \cdot e_{x_i}^3,$$

wobei  $e_{x_i}^3$  der zu den Zylindern  $Z_i$  und  $\tilde{Z}_i$  korrespondierende Einheitsvektor

aus den Darstellungen (2.27) bzw. (2.45) ist. Weiter setzen wir

$$(2.79) \quad G := \{v_t \in \mathbb{R}^3 \mid t \geq 0\},$$

$$(2.80) \quad G_\varphi := G \cap f_\varphi(V_i) \quad \text{mit} \quad f_\varphi(w') := w' + \varphi(w').$$

Aus der Voraussetzung  $\|\varphi\|_{1,\infty} \leq r$  folgt

$$(2.81) \quad s := \sup \{t > 0 \mid v_t \in G_\varphi\} < \infty.$$

Eine zu (2.75) analoge Abschätzung liefert mit  $l_\varphi < 1$  die Injektivität der Funktion  $f_\varphi$  auf  $V_i$ . Da  $u(y)$  ein innerer Punkt der Menge  $\tilde{V}_i$  ist (vgl. Abb. 2.11), erhalten wir  $w = u_\varphi(y) = f_\varphi(u(y)) \in \text{int } u_\varphi(V_i)$ . Daher gilt  $s > 0$ .

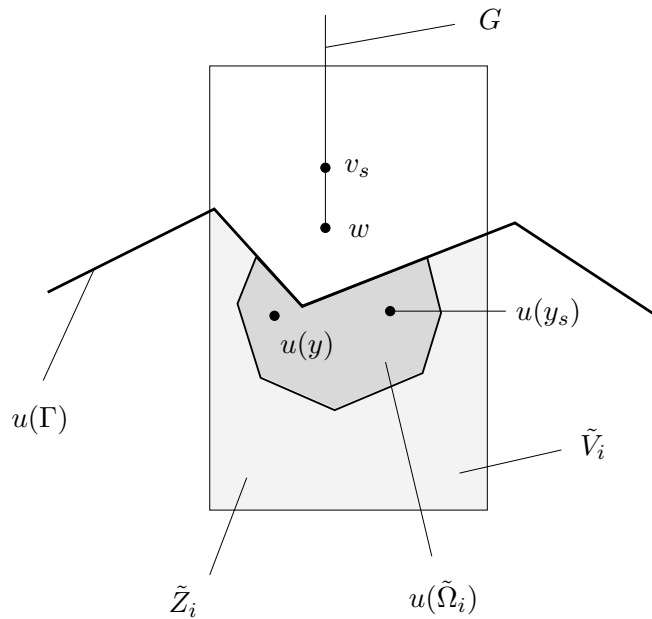


Abbildung 2.11: Situation in Umgebung von  $w = u_\varphi(x)$

Wir wählen nun eine Folge  $\{t_n\}$  mit  $t_n \nearrow s$  und  $v_{t_n} \in G_\varphi$  für alle Indizes  $n \in \mathbb{N}$ . Somit existiert eine Folge  $\{y_n\}$  mit

$$(2.82) \quad y_n \in \Omega_i, v_{t_n} = u_\varphi(y_n), u(y_n) \in B_{2r}(\tilde{Z}_i) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und  $v_{t_n} \rightarrow v_s$ . Da  $\bar{\Omega}_i$  kompakt ist, können wir nach eventuellem Über-

gang zu einer (wiederum mit  $\{y_n\}$  bezeichneten) Teilfolge annehmen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_s \in \bar{\Omega}_i$ . Die Stetigkeit der Funktion  $u_\varphi$  liefert  $u_\varphi(y_s) = v_s$ .

Mit (2.82) hat man  $u(y_s) \in \text{cl } B_{2r}(\tilde{Z}_i)$ . Nach Konstruktion des Zylinders  $\tilde{Z}_i$  (vgl. (2.46) in Schritt 1) gilt  $\text{cl } B_{2r}(\tilde{Z}_i) \subset Z_i$  sowie

$$u(\partial\Omega_i \cap \Omega) \cap \text{cl } B_{2r}(\tilde{Z}_i) = \emptyset.$$

Damit folgt mit der Injektivität von  $u$  auf  $\bar{\Omega}_i$  nun

$$y_s \in (\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) \cup \Omega_i.$$

Wegen der Voraussetzung  $g(\varphi) \leq 0$  ist der Fall  $y_s \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_i$  ausgeschlossen. Folglich ist  $y_s$  ein innerer Punkt von  $\Omega_i$ . Die Injektivität von  $u_\varphi$  liefert nun  $v_s = u_\varphi(y_s) \in \text{int } u_\varphi(V_i)$ . Dies ist ein Widerspruch zu (2.81).

◇

Nun führen wir die Fallunterscheidung weiter. Seien also  $x, y \in \Omega(w)$  mit  $u(x) \in u(\tilde{\Omega}_i)$  und  $u(y) \in u(\tilde{\Omega}_j)$  für  $i, j \in \{k_D + 1, \dots, \tilde{k}\}$  zwei verschiedene Urbilder von  $w \in M_0^c$ . Dann gibt es für die Lage von  $u(y)$  die folgenden Möglichkeiten:

- (i)  $u(y) \in V_i$ ,
- (ii)  $u(y) \in Z_i \setminus V_i$ ,
- (iii)  $u(y) \notin Z_i$ .

Fall (i) kann abermals analog zu (2.75) ausgeschlossen werden. Gilt wie in (iii) aber  $u(y) \notin Z_i$  so folgt aus  $u(x) \in u(\tilde{\Omega}_i)$  zusammen mit  $B_{3r}(u(\tilde{\Omega}_i)) \subset Z_i$  (vgl. (2.55)) nun

$$|u(x) - u(y)| \geq 3r.$$

Dies steht im Widerspruch zur Abschätzung  $|u(x) - u(y)| \leq 2r$  (vgl. (2.76)), die aus der Voraussetzung  $\|\varphi\|_{1,\infty} \leq r$  mit der Dreiecksungleichung folgt.

Dadurch verbleibt einzig Fall (ii). Sei also  $u(y) \in Z_i \setminus V_i$  mit einem Index  $i \in \{k_D + 1, \dots, \tilde{k}\}$ . Mit Lemma 2.11 folgt  $w \in \bar{V}_i$ . Da nach Voraussetzung  $w \notin u(\partial\Omega)$  gilt, erhalten wir mit  $B_r(u(x)) \cap \partial V_i \cap u(\Omega_i) = \emptyset$  (vgl. (2.55) mit



$r \leq a$ ) ferner

$$(2.83) \quad w \in V_i \cap B_r(u(x)).$$

Das Vertauschen der Rollen von  $x$  und  $y$  liefert analog

$$(2.84) \quad u(x) \in Z_j \setminus V_j \quad \text{und} \quad w \in V_j \cap B_r(u(y)).$$

Weiterhin gilt

$$V_i \cap u(\partial\Omega) = \emptyset \quad \text{sowie} \quad V_j \cap u(\partial\Omega) = \emptyset,$$

da nach Lemma 2.6 die Relation  $u(\partial\Omega) = \partial u(\Omega)$  erfüllt ist. Damit ergibt sich nun  $V_i \cap (V_j \cap Z_i) = \emptyset$ . Andererseits gilt aber mit (2.83) und (2.84) auch

$$w \in V_i \cap V_j \cap Z_i.$$

Somit erhalten wir auch in diesem Fall einen Widerspruch und die Proposition ist damit bewiesen.

◇

Damit haben wir die Modellierung von Kontaktproblemen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, abgeschlossen. Im nun folgenden Kapitel befassen wir uns mit der Frage der Existenz von Lösungen des Variationsproblems (1.1)–(1.3).



# Kapitel 3

## Existenzresultate

In diesem Kapitel wird die Existenz von Lösungen des Variationsproblems

$$(3.1) \quad E(u) \rightarrow \text{Min!}, \quad u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3),$$

$$(3.2) \quad u = u_D \quad \text{auf } \Gamma_D \subset \partial\Omega,$$

$$(3.3) \quad |u(\Omega)| \geq \int_{\Omega} \det Du(x) dx.$$

betrachtet. Dabei sei die Energie einer Deformation wie in (2.6) definiert und die Dirichletdaten durch eine Sobolevfunktion  $u_D \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  auf einer Menge  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$ , vorgeschrieben.

Für ein solches Variationsproblem unterscheidet man die Resultate nach der Art der Konvexitätsvoraussetzung, die an die Energiedichte  $W$  gestellt wird. Zum einen beruhen die Ergebnisse auf Quasikonvexität (vgl. Morrey [18]), zum anderen auf Polykonvexität (siehe Ball [6]) von  $W$ . Obwohl solche Existenzresultate in Ciarlet und Nečas [10], [11], Baiocchi et al. [5], Schuricht [22] und Habek und Schuricht [15] gefunden werden können, formulieren wir an dieser Stelle zur Vollständigkeit zwei Existenzresultate und führen auch die Beweise, zumindest skizziert, aus.

Für das erste Existenzresultat werden die folgenden Voraussetzungen gemacht:

(B0)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sei ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand.

(B1) *Polykonvexität:*

Es existiert eine Funktion  $h : \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  mit

- (a)  $h(x, \cdot, \cdot, \cdot)$  ist stetig und konvex für alle  $x \in \Omega$ ,
- (b)  $h(\cdot, F, \text{adj } F, \det F)$  ist messbar für alle  $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,
- (c)  $W(x, F) = h(x, F, \text{adj } F, \det F)$  für alle  $(x, F) \in \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

(B2) *Koerzitivität:*

Es gibt Konstanten  $\alpha > 0$ ,  $2 \leq p < \infty$ ,  $q \geq \frac{p}{p-1}$  derart, dass

- (a)  $W(x, F) \geq \alpha (|F|^p + |\text{adj } F|^q)$  für alle  $(x, F) \in \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,
- (b)  $W(x, F) = \infty \iff \det F \leq 0$ .

(B3)  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$  und  $u_D \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  gegeben.

**Theorem 3.1** *Sei  $p > 3$  und die Voraussetzungen (B0)–(B3) erfüllt. Es existiere ferner eine Funktion  $\tilde{u} \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , die den Bedingungen (3.2), (3.3) und  $E(\tilde{u}) < \infty$  genügt. Dann hat das Variationsproblem (3.1)–(3.3) eine Lösung  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  mit  $\det Du > 0$  fast überall in  $\Omega$ .*

Der Beweis dieses Theorems erfolgt mit Standardargumenten, soll der Vollständigkeit halber dennoch nach einem weiteren Existenzresultat skizziert werden. Verzichtet man auf Bedingung (b) in (B2), so bleibt das Theorem gültig, allerdings gilt in diesem Fall nicht mehr  $\det Du > 0$  fast überall in  $\Omega$ .

Verzichtet man andererseits auf die Ciarlet-Nečas Bedingung (3.3), so gilt Theorem (3.1) auch für den Fall  $p \leq 3$ , falls man zusätzlich die beiden folgenden Bedingungen voraussetzt.

(B4) Die Energie  $E_p$  ist auf  $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$  mit

$$p^* = \begin{cases} \frac{3p}{3-p} & \text{falls } p < 3, \\ \infty & \text{falls } p = 3 \end{cases}$$

stetig. Dabei sei im Fall  $p \leq 3$  das Maß  $f$  so gegeben, dass  $E_p$  auf  $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  wohl definiert ist.

(B5)  $\mathcal{H}(\Gamma) > 0$ , wobei  $\mathcal{H}$  das zweidimensionale Hausdorffmaß bezeichnet.

Auf diese Weise erhalten wir insbesondere ein erstes Existenzresultat für

das Variationsproblem zur Beschreibung des Kontakts zweier nichtlinear elastischer Körper, welches in Kapitel 5.2 untersucht wird (vgl. [15, Th. 3.1]).

Die Eigenschaft der Polykonvexität wurde von Ball [6] eingeführt, um Energien, die die Bedingung

$$(3.4) \quad W(x, F) = \infty \quad \text{falls} \quad \det F \leq 0$$

erfüllen, behandeln zu können. Durch diese Konvexitätsforderung ist es gelungen, Existenz von Lösungen nachzuweisen, allerdings konnte eine Euler-Lagrange-Gleichung für diese Klasse von Energien, selbst ohne Kontakt- oder Invertierbarkeitsnebenbedingungen, bisher nicht abgeleitet werden. Daher betrachtet man auch eine weniger restriktive Konvexitätsbedingung, nämlich die sogenannte *Quasikonvexität*. In diesem Fall sind jedoch Energien mit der Eigenschaft (3.4) ausgeschlossen. Für die Formulierung eines Existenzresultates, das auf Quasikonvexität beruht, werden die Voraussetzungen (B1) und (B2) durch die folgenden beiden Bedingungen ersetzt.

(B1') *Quasikonvexität:*

Für die Funktion  $W : \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  gelte

- (a)  $W(x, \cdot)$  ist stetig für alle  $x \in \Omega$ ,
- (b)  $W(\cdot, F)$  ist messbar für alle  $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,
- (c) für alle offenen  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ ,  $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ , f.a.  $\tilde{x} \in \Omega$

$$\int_{\tilde{\Omega}} W(\tilde{x}, F) \, dx \leq \int_{\tilde{\Omega}} W(\tilde{x}, F + D\varphi) \, dx.$$

(B2') *Koerzitivität:*

Es gibt Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ,  $1 < p < \infty$  derart, dass

$$\alpha|F|^p \leq W(x, F) \leq \beta + \gamma|F|^p \quad \text{für alle} \quad (x, F) \in \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

**Theorem 3.2** *Sei  $p > 3$ . Ferner seien die Voraussetzungen (B0), (B1'), (B2'), (B3) erfüllt und die Funktion  $\tilde{u} \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  genüge den Nebenbedingungen (3.2) sowie (3.3). Dann besitzt das Variationsproblem (3.1)–(3.3) eine Lösung in  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .*

Auch dieses Resultat bleibt unter den zusätzlichen Voraussetzungen ohne die Nebenbedingung (3.3) gültig. Somit erhalten wir auch unter der gegenüber der Polykonvexität schwächeren Forderung der Quasikonvexität ein Existenzresultat für das Variationproblem (5.15) zur Beschreibung des Zweikörperkontakts (vgl. [15, Th. 3.2]).

BEWEIS von Theorem 3.1.

Nach Lemma 2.4 bleibt die Ciarlet-Nečas Bedingung (3.3) unter schwacher Konvergenz erhalten. Ohne die Nebenbedingung (3.3) verfährt man für den Beweis wie in Ball [6] (vgl. auch Dacorogna [13], Müller [19] für detailliertere Ausführungen).

Sei also  $\{u_n\}$  eine Minimalfolge des Variationsproblems. Wegen der Voraussetzungen (B0) und (B3) ist die Poincaré-Ungleichung anwendbar, und somit ist  $\|Dv\|_{\mathcal{L}^p}$  auf dem Raum  $\{v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid v = u_D \text{ auf } \Gamma\}$  zur  $\mathcal{W}^{1,p}$ -Norm äquivalent. Mit der Koerzitivitätsbedingung (B2) läßt sich eine (wiederum mit  $\{u_n\}$  bezeichnete) Teilfolge mit den Eigenschaften

$$(3.5) \quad u_n \rightharpoonup u \text{ in } \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad \text{adj } Du_n \rightharpoonup A \text{ in } \mathcal{L}^q(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})$$

auswählen. Mit Dacorogna ([13, Ch. 4, Th. 2.6]) erhalten wir  $A = \text{adj } Du$  und  $\det Du_n \rightharpoonup \det Du$  im Distributionssinn. Weiterhin folgt  $u_n \rightarrow u$  in  $\mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ .

Die Hölder-Ungleichung liefert  $\det Du_n, \det Du \in \mathcal{L}^{p/3}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Somit konvergiert  $\det Du_n$  schwach gegen  $\det Du$  in  $\mathcal{L}^{p/3}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , da  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$  dicht in  $\mathcal{L}^q(\Omega, \mathbb{R}^3)$  ist für

$$q = (p/n)^* = \frac{p}{p-n} < \infty.$$

Wir können nun Resultate für konvexe Integranden (s.[13, Ch. 3, Th. 3.4]) verwenden, um die schwache Unterhalbstetigkeit von  $E_s$  zu erhalten. Da  $u_n \rightarrow u$  in  $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , gilt zudem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_p(u_n) = E_p(u).$$

Insgesamt hat man daher

$$E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n)$$

gezeigt, d. h.  $u$  ist eine Lösung des Variationsproblems, da nach Lemma 2.4 die Ciarlet-Nečas Nebenbedingung unter schwacher Konvergenz erhalten bleibt.

◇

BEWEIS von Theorem 3.2.

Sei  $\{u_n\}$  wiederum eine Minimalfolge des Variationsproblems. Analog zum Beweis von Theorem 3.1 erhält man unter Verwendung von (B0), (B2') und (B3) eine Teilfolge  $\{u_{n'}\}$  mit  $u_{n'} \rightharpoonup u$  in  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ . Mit Hilfe von (B1') and (B2') sowie eines Resultates von Acerbi und Fusco [1] folgt die schwache Unterhalbstetigkeit von  $E_s$ . Zusammen mit der Stetigkeit von  $E_p$  auf  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  ergibt sich, dass  $u$  ein Minimierer von  $E$  ist. ◇

Aus dem Existenzresultat 3.1 folgt, dass der lokale Minimierer des Variationsproblems (3.1)–(3.3) fast überall in  $\Omega$  injektiv ist (vgl. Lemma 2.3 in Kapitel 2). Für die Herleitung der Euler-Lagrange Gleichung in Kapitel 5 betrachten wir lokale Minimierer des Variationsproblems (3.1)–(3.3), die auf  $\Omega$  global injektiv sind. Ball hat in [7, Th. 3] ein Existenzresultat bewiesen, welches für Minimierer der Energie

$$\bar{E}(u) = \int_{\Omega} W(x, Du(x)) dx + \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx$$

globale Injektivität liefert. Dabei ist die Funktion  $F : \Omega \times \mathbb{R}^3$  eine Carathéodoryfunktion, die auf allen  $\Omega \times G$  mit beschränktem  $G \subset \mathbb{R}^3$  nach unten beschränkt ist. Für die Energiedichte werden die Eigenschaft (B1) sowie eine Koerzitivitätsbedingung, die gegenüber (B2) verstärkt ist, gefordert. Unter diesen Voraussetzungen ist ein Minimierer der Energie  $\bar{E}$  unter der Nebenbedingung  $u = u_0$  auf  $\partial\Omega$  injektiv auf  $\Omega$ , falls  $u_0 \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  eine injektive Funktion mit endlicher Energie  $\bar{E}(u_0)$  ist,  $\det Du_0 > 0$  fast überall in  $\Omega$  und  $u_0(\Omega)$  eine Kegelbedingung erfüllt.





# Kapitel 4

## Der verallgemeinerte Gradient

Dieses Kapitel befasst sich mit der Theorie des verallgemeinerten Gradienten, die von F.H. Clarke formuliert worden ist. Dabei werden im ersten Teil dieses Kapitels neben den grundlegenden Definitionen und Eigenschaften auch einige Resultate vorgestellt. Darüber diskutieren wir zu Beginn ein Beispiel, um die Anschauung des verallgemeinerten Gradienten zu verdeutlichen. Für eine ausführliche Einführung wird auf Clarke [12, Kap. 2] verwiesen. In diesem Buch finden sich auch die Resultate aus 4.1.

Der zweite Abschnitt beinhaltet Resultate, die für das nachfolgende Kapitel benötigt werden. Zunächst wird der verallgemeinerte Gradient der signierten Abstandsfunktion  $d_{\mathcal{O}}$  aus Kapitel 2 charakterisiert, falls die Menge  $\mathcal{O}$  als Abschluss einer offenen Menge mit Lipschitzrand vorausgesetzt ist. Dieses Resultat übertragen wir anschließend auf die Funktion  $d(q, x)$ , die in (2.33) eingeführt worden ist. In der letzten Proposition dieses Kapitels wird der verallgemeinerte Gradient eines Funktionals der Gestalt

$$G(\varphi) = \max_{x \in K} f(x, \varphi)$$

berechnet. Dieses Ergebnis ermöglicht es, den verallgemeinerten Gradienten der Funktion  $g$  (vgl. (2.44) in Kapitel 2), die für Nebenbedingung der Nichtdurchdringung verwendet wird, mit Hilfe des verallgemeinerten Gradienten der Abstandsfunktion  $d(q, x)$  zu beschreiben. Diese Proposition verallgemeinert ein Resultat von Habeck und Schuricht (vgl. [15, Prop. 5.2]).

Clarke hat diesen neuen Ableitungsbegriff ursprünglich für die Optimierung entwickelt, aber in den letzten Jahren hat sich diese neue Theorie auch für die Variationsrechnung als hilfreich erwiesen, da sie die Möglichkeit bietet, nichtglatte Funktionen, z.B. durch Lipschitz-stetige Funktionen beschriebene Nebenbedingungen, zu differenzieren.

## 4.1 Einführung

Sei  $X$  ein Banachraum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Die *verallgemeinerte Richtungsableitung*  $f^\circ(u; v)$  von  $f$  an der Stelle  $u \in X$  in Richtung  $v \in X$  ist definiert als

$$f^\circ(u; v) := \limsup_{w \rightarrow u, t \searrow 0} \frac{f(w + tv) - f(w)}{t}.$$

Es gilt nun (vgl. Clarke [12, Prop. 2.1.1])

**Proposition 4.1** *Sei  $X$  ein Banachraum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  lokal Lipschitz-stetig. Dann ist die Abbildung  $v \rightarrow f^\circ(u; v)$  positiv homogen, subadditiv und es gilt  $|f^\circ(u; v)| \leq l_f \|v\|$  auf  $X$ , wenn  $l_f$  die Lipschitzkonstante von  $f$  nahe  $u$  bezeichnet.*

Der *verallgemeinerte Gradient*  $\partial f(u)$  von  $f$  an der Stelle  $u$  ist gegeben durch

$$(4.1) \quad \partial f(u) := \{f^* \in X^* \mid \langle f^*, v \rangle \leq f^\circ(u; v) \text{ für alle } v \in X\}.$$

Bevor wir einige elementare Eigenschaften des verallgemeinerten Gradienten formulieren, berechnen wir  $\partial f$  für eine nichtglatte, nicht konvexe Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Beispiel.** Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -2x + 7/2 & \text{für } x > 1, \\ 3/2 & \text{für } x \leq 1. \end{cases}$$

Offenbar ist diese Funktion weder konvex noch an der Stelle  $x = 1$  differenzierbar im klassischen Sinn, wohl aber Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante  $l_f = 2$ . Die verallgemeinerte Richtungsableitung für  $x < 1$  ist null, während man

$$f^\circ(x; v) = \lim_{w \rightarrow x, t \rightarrow 0} \frac{-2(w + tv) + 7/2 + 2w - 7/2}{t} = -2v$$

für  $x > 1$  erhält. Für die verallgemeinerten Richtungsableitungen in  $x = 1$  berechnet man

$$f^\circ(1; v) = \begin{cases} -2v & \text{für } v < 0, \\ 0 & \text{für } v \geq 0. \end{cases}$$

Somit ergibt sich für  $\partial f(1)$  dann

$$\begin{aligned} \partial f(1) &= \{y \in \mathbb{R} \mid yv \leq f^\circ(1; v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0 \text{ und } yv \leq -2v \text{ für alle } v \in \mathbb{R}, v < 0\} \\ &= [-2, 0]. \end{aligned}$$

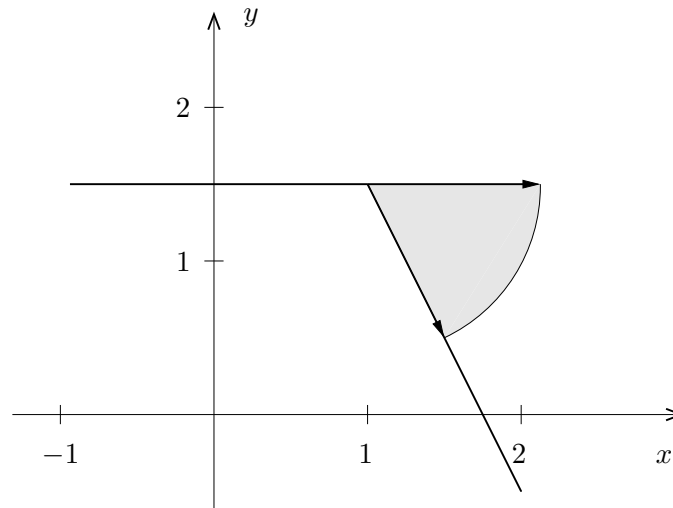


Abbildung 4.1: Der Graph von  $f$  sowie mögliche Tangentenvektoren

Dieses Beispiel verdeutlicht die geometrische Anschauung für den verallgemeinerten Gradienten. So kann man  $\partial f(1) = [-2, 0]$  als die Menge der Steigungen aller “denkbaren” Tangenten an den Graph der Funktion  $f$  im Punkt  $x = 1$  interpretieren (vgl. Abb. 4.1).

Die folgende Proposition fasst einige Eigenschaften des verallgemeinerten Gradienten zusammen und ordnet diesen in andere Differenzierbarkeitsbegriffe ein.

**Proposition 4.2** *Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine in einer Umgebung von  $u \in X$  Lipschitz-stetige Funktion und  $X$  ein Banachraum. Dann gilt:*

- (i)  $\partial f(u)$  ist eine nichtleere, konvexe und schwach\* kompakte Teilmenge des Dualraums  $X^*$ . Ferner ist  $\partial f(u)$  beschränkt durch die Lipschitzkonstante  $l_f$  der Funktion  $f$ .
- (ii) Ist  $f$  stetig Gâteaux-differenzierbar, so ist der verallgemeinerte Gradient die einelementige Menge  $\partial f(u) = \{f'(u)\}$ .
- (iii) Ist  $f$  konvex, so stimmen der verallgemeinerte Gradient  $\partial f(u)$  und das Subdifferential  $\partial_S f(u)$  der konvexen Analysis überein.

Die nächste Propostion listet Rechenregeln für den verallgemeinerten Gradienten auf, die für das nächste Kapitel benötigt werden. Für den Beweis verweisen wir, wie auch bei der vorherigen Proposition, wiederum auf das Buch von F. H. Clarke (s.[12, Kap. 2]).

**Proposition 4.3** *Seien  $f, g, g_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ , Lipschitz-stetige Funktionen in einer Umgebung von  $u \in X, X$  ein Banachraum. Dann gilt:*

- (i)  $\partial(\alpha f)(u) = \alpha \partial f(u)$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\partial(\sum_{i=1}^n g_i(u)) \subset \sum_{i=1}^n \partial g_i(u)$ .
- (iii) Sind  $\{u_i\} \subset X, \{f_i^*\} \subset X^*$  Folgen mit  $f_i^* \in \partial f(u_i), u_i \rightarrow u$  und  $f^* \in \text{clust}^*(f_i^*)$ , dann folgt  $f^* \in \partial f(u)$ .
- (iv) (Kettenregel) Sei  $Y$  ein Banachraum,  $F : X \rightarrow Y$  stetig Gâteaux-differenzierbar in  $u \in X$  und  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig in einer Umgebung von  $F(u)$ . Dann ist  $f := g \circ F$  Lipschitz-stetig in einer Umgebung von  $u$  und es gilt

$$\partial f(u) \subset \partial g(F(u)) \circ F'(u),$$

d. h. für  $f^* \in \partial f(u)$  existiert  $g^* \in \partial g(F(u))$ , so dass

$$\langle f^*, v \rangle = \langle g^* \circ F'(u), v \rangle = \langle g^*, F'(u)v \rangle_{Y^* \times Y} \quad \text{für alle } v \in X.$$

(v) (*Mittelwertsatz von Lebourg*) Sei  $f$  Lipschitz-stetig in einer offenen Umgebung des Liniensegments  $[u, v]$  für  $u, v \in X$ . Dann gibt es ein  $w \in (u, v)$  und ein  $f^* \in \partial f(w)$  mit

$$f(v) - f(u) = \langle f^*, w \rangle.$$

(vi) (*Lagrangesche Multiplikatorenregel*) Falls  $u$  ein lokaler Minimierer von  $f$  unter den Nebenbedingungen  $g(v) \leq 0$ ,  $g_i(v) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und  $u \in C$  für eine abgeschlossene Teilmenge  $C \subset X$  ist, so existieren Konstanten  $\lambda_f$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , nicht alle Null, so dass

$$0 \in \lambda_f \partial f(u) + \lambda \partial g(u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial g_i(u) + N_C(u) \quad \text{und} \quad \lambda g(u) = 0,$$

wobei

$$N_C(u) := \{v^* \in X^* \mid \langle v^*, v \rangle \leq 0 \text{ für alle } v \text{ mit } \text{dist}_C^\circ(u; v) = 0\}$$

der Normalenkegel von  $C$  in  $u$  ist. (Dieser Kegel ist identisch mit dem Normalenkegel der konvexen Analysis, falls die Menge  $C$  konvex ist.)

Ein Vorteil der Theorie des verallgemeinerten Gradienten gegenüber dem klassischen Differenzierbarkeitsbegriff besteht darin, Funktionen des Typs

$$f(u) := \max \{f_i(u) \mid i = 1, \dots, n\}$$

eine Ableitung zuordnen zu können. Dabei werden für  $i = 1, \dots, n$  die Funktionen  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung von  $u \in X$ ,  $X$  ein Banachraum, als Lipschitz-stetig vorausgesetzt. Dann ist auch die Funktion  $f$  in einer Umgebung von  $u$  Lipschitz-stetig und man kann zeigen (s. [12, Prop. 2.3.12]),

dass

$$\partial f(u) \subset \text{conv} \{ \partial f_i(u) \mid i \in I(u) \}$$

mit  $I(u) := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid f_i(u) = f(u)\}$ . Offenbar besitzt diese Regel kein Analogon in der "glatten" Analysis, denn für glatte Funktionen  $f_i$  ist die Funktion  $f$  im Allgemeinen nicht differenzierbar.

Eine Verallgemeinerung auf Funktionen der Form

$$f(u) := \max_{t \in T} f_t(u),$$

wobei das Maximum nicht über eine Menge mit endlich vielen Elementen, sondern über einen topologischen Raum  $T$  gebildet wird, leistet das folgende Resultat von Clarke (vgl. [12, Th. 2.8.2]).

**Proposition 4.4** *Es sei  $f_t : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Familie von Funktionen auf einem Banachraum  $X$ . Dabei sei die Familie parametrisiert durch  $t \in T$ ,  $T$  ein metrisierbarer, folgenkompakter topologischer Raum. Desweiteren existiere eine Umgebung  $U = U(u)$  eines Punktes  $u \in X$  mit den Eigenschaften:*

- (i) *Die Abbildung  $t \mapsto f_t(v)$  ist oberhalbstetig für jedes  $v \in U$ .*
- (ii) *Jede Funktion  $f_t$ ,  $t \in T$ , ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante  $k$  auf  $U$ , und die Menge  $\{f_t(u) \mid t \in T\}$  ist beschränkt.*

Dann ist die Funktion

$$f(v) := \max_{t \in T} f_t(v)$$

Lipschitz-stetig auf  $U$  und die Menge  $M(v) := \{t \in T \mid f_t(v) = f(v)\}$  für alle  $v \in U$  nichtleer und abgeschlossen. Ferner gilt

$$(4.2) \quad \partial f(u) \subset \left\{ \int_T \partial_{[T]} f_t(u) \mu(dt) \mid \mu \in R_1[M(u)] \right\},$$

wobei die Menge  $\partial_{[T]} f_t(u)$  definiert ist durch

$$\begin{aligned} \partial_{[T]} f_t(u) = \overline{\text{conv}}^* \{ \xi \in X^* \mid \xi_i \in \partial f_{t_i}(u_i), u_i \rightarrow u, \\ t_i \rightarrow t, t_i \in T, \xi \in \text{clust}^*(\xi_i) \}. \end{aligned}$$

Dabei besteht die Menge auf der rechten Seite von (4.2) aus allen Elementen  $\xi \in X^*$ , für die eine Abbildung  $t \mapsto \xi_t \in \partial_{[T]} f_t(u)$  von  $T$  nach  $X^*$  sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in R_1[M(u)]$  existieren, so dass für alle  $v \in X$  die Abbildung  $t \mapsto \langle \xi_t, v \rangle$   $\mu$ -integrierbar ist und es gilt

$$\langle \xi, v \rangle = \int_T \langle \xi_t, v \rangle \mu(dt).$$

## 4.2 Resultate zum verallgemeinerten Gradienten

Im folgenden Teil werden die verallgemeinerten Gradienten der signierten Abstandsfunktion  $d_{\mathcal{O}}(q)$  bzw.  $d(q, x)$  aus Kapitel 2 sowie von Funktionalen des Typs

$$G(\varphi) = \max_{x \in K} f(x, \varphi)$$

berechnet. Die Beweise werden im Anschluss an Proposition 4.8 geführt.

**Proposition 4.5** *Sei  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$  der Abschluss einer nichtleeren offenen Menge mit Lipschitzrand und die Funktion  $d_{\mathcal{O}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch*

$$d_{\mathcal{O}}(x) := \text{dist}_{\mathcal{O}^c}(x) - \text{dist}_{\mathcal{O}}(x).$$

Dann existieren für jeden Punkt  $x_0 \in \partial \mathcal{O}$  eine Umgebung  $U(x_0)$ , ein Vektor  $z_0 \in \mathbb{R}^3$  sowie eine von der Parametrisierung des Randes abhängige positive Konstante  $c$ , so dass

$$(4.3) \quad \langle \xi, z_0 \rangle \geq c$$

für alle  $\xi \in \partial d_{\mathcal{O}}(x')$  und  $x' \in U(x_0)$ . Insbesondere gilt

$$(4.4) \quad 0 \notin \partial d_{\mathcal{O}}(x) \quad \forall x \in U(x_0).$$

Da ein Beweis der gelegentlich in der Literatur verwendeten Eigenschaft (4.4) nicht gefunden werden konnte, wird ein eigener Beweis vorgestellt.

**Bemerkung 4.6**

1) Die entsprechenden Aussagen übertragen sich auf den Fall, dass die Menge  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n > 3$ , der Abschluss einer offenen Menge mit Lipschitzrand ist. Dass  $\mathcal{O}$  als Abschluss einer offenen Menge vorausgesetzt wird, ist erforderlich, um Hindernisse wie Punkte und Kurven auszuschließen, die mit diesen Methoden nicht behandelt werden können.

2) Ist bei einem Hindernis  $\mathcal{O}$  nur die Charaktarisierung von  $\partial d_{\mathcal{O}}$  auf einem Teil des Randes von Interesse, so reicht es aus, Lipschitzstetigkeit von  $\partial \mathcal{O}$  in einer (Rand-)Umgebung dieses Teils zu fordern, da in die Berechnung von  $\partial d_{\mathcal{O}}(x)$ ,  $x \in \partial \mathcal{O}$ , lediglich das Verhalten von  $d_{\mathcal{O}}$  und somit von  $\partial \mathcal{O}$  in einer Umgebung des Randpunktes  $x$  eingeht.

Ein analoges Resultat zu Proposition 4.5 erhalten wir auch für die signierte Abstandsfunktion  $d(q, x)$  aus Kapitel 2.

**Proposition 4.7** *Die Funktion  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  habe die Eigenschaften (A1) und (A2). Dann erfüllt die in (2.33) definierte Funktion*

$$d(q, x) = \begin{cases} -\text{dist}_{\Lambda_x}(q), & \text{falls } q \in Z_x \cap u(\Omega_x), \\ \text{dist}_{\Lambda_x}(q), & \text{falls } q \in Z_x \cap u(\Omega_x)^c \end{cases}$$

die Relation

$$(4.5) \quad 0 \notin \partial_q d(u(x), x)$$

für alle  $x \in \partial \Omega$ , wobei  $\partial_q d(w, x)$  den verallgemeinerten Gradienten von  $d(\cdot, x)$  an der Stelle  $w$  bezeichnet. Insbesondere existieren für jedes  $w \in \partial u(\Omega)$ ,  $w = u(x)$ , eine Umgebung  $U = U(w)$ , ein Vektor  $w_0 \in \mathbb{R}^3$  sowie eine positive Konstante  $c = c(w)$ , so dass

$$(4.6) \quad \langle \xi, w_0 \rangle > c \quad \forall \xi \in \partial d_q(w', x), w' \in U.$$



Nun berechnen wir den verallgemeinerten Gradienten einer Funktion des Typs

$$(4.7) \quad g(\varphi) := \max_{x \in K} d(p(x, \varphi), x).$$

Dadurch gewinnen wir eine im folgenden Kapitel 5 verwendete Charakterisierung der verallgemeinerten Ableitung der Funktion, welche die Nebenbedingung der Nichtdurchdringung sichert.

Dazu formulieren wir die folgenden Voraussetzungen:

- (C1)  $X, Y$  seien Banachräume,  $K$  ein metrisierbarer folgenkompakter Raum,  $U \subset X, V \subset Y$  offene Teilmengen.
- (C2)  $q_0 \in \mathcal{C}(K, V)$ ,  $r : K \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $r(x) > 0$  für alle  $x \in K$ .
- (C3)  $d(\cdot, x) \in \mathcal{C}^{0,1}(M(x), \mathbb{R})$  mit  $M(x) := B_{r(x)}(q_0(x)) \subset V$  für alle  $x \in K$  sowie einer gleichmäßigen Lipschitzkonstante  $l$ .
- (C4)  $p \in \mathcal{C}(K \times U, V)$  erfüllt  $p(x, \varphi) \in B_{r_0}(q_0(x)) \subset M(x)$  für alle  $\varphi \in U$ ,  $x \in K$  und  $\varphi \rightarrow p(x, \varphi)$  ist Gâteaux-differenzierbar für alle  $x \in K$  mit stetiger Ableitung  $p_\varphi(\cdot, \cdot)$  auf  $K \times U$ .
- (C5) Für alle  $x \in K$  existiert eine positive Konstante  $t = t(x)$ , so dass die Mengen  $Q(y) := B_{r(y)}(q_0(y)) \cap B_{r(x)}(q_0(x))$  für alle  $y \in B_{t(x)}(x) \cap K$  nichtleer sind und

$$d(q, y) = d(q, x) \quad \forall y \in B_{t(x)}(x) \cap K, q \in Q(y)$$

erfüllt ist.

Wegen der Folgenkompaktheit von  $K$  ist unter diesen Annahmen die Funktion  $g$  und damit auch die nichtleere abgeschlossene Menge

$$K(\varphi) := \{x \in K \mid g(\varphi) = d(p(x, \varphi), x)\}$$

wohldefiniert.

**Proposition 4.8** *Seien die Voraussetzungen (C1)–(C5) erfüllt. Dann ist die durch (4.7) definierte Funktion lokal Lipschitz-stetig auf  $U$ . Ferner gilt*

$$(4.8) \quad \partial g(\varphi) \subset \left\{ \int_K \partial_q d(p(x, \varphi), x) \circ p_\varphi(x, \varphi) d\mu(x) \mid \rho \in R_1[K(\varphi)] \right\}$$

für alle  $\varphi \in U$ , wobei  $\partial_q d(w, x)$  wiederum den verallgemeinerten Gradienten der Funktion  $d(\cdot, x)$  an der Stelle  $w$  bezeichnet.

Die Menge auf der rechten Seite von (4.8) besteht aus allen Elementen  $g^* \in X^*$ , für die es eine Abbildung  $d^* : K \rightarrow Y^*$  mit  $d^*(x) \in \partial_q d(p(x, \varphi), x)$  sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in R_1[K]$  mit Träger auf  $K(\varphi)$  gibt, so dass für alle  $\psi \in X$  die Abbildung

$$x \rightarrow \langle d^*(x) \circ p_\varphi(x, \varphi), \psi \rangle = \langle d^*(x), p_\varphi(x, \varphi)\psi \rangle$$

$\mu$ -integrierbar ist und

$$\langle g^*, \psi \rangle = \int_K \langle d^*(x), p_\varphi(x, \varphi)\psi \rangle d\mu(x)$$

erfüllt ist.

Diese Proposition verallgemeinert ein Resultat von Habeck und Schuricht (vgl. [15, Prop. 5.2]). In diesem Artikel war die Funktion  $d$  nicht explizit von  $x$  abhängig, so dass lediglich eine Verkettung des Typs

$$g(\varphi) = \max_{x \in K} d(p(x, \varphi))$$

untersucht worden ist. Daher tritt in (4.8) der verallgemeinerte Gradient der Abstandsfunktion bezüglich der Variablen  $q$  und nicht, wie in [15], der "volle" verallgemeinerte Gradient auf. Der Nachweis dieser Proposition wird nach den Beweisen der Propositionen 4.5 und 4.7 geführt. Zunächst beweisen wir Proposition 4.5.

**BEWEIS** von Proposition 4.5.

Um die Übersichtlichkeit zu wahren, unterteilen wir den Beweis in einzelne Schritte und schreiben für die Funktion  $d_\mathcal{O}(x)$  lediglich  $d(x)$ .

## SCHRITT 1

Wir beweisen die Aussage für einen beliebigen Punkt  $x_0 \in \partial\mathcal{O}$ . Nach eventueller Drehung des Koordinatensystems ist dann  $\partial\mathcal{O}$  in einer Umgebung  $V = V(x_0)$  von  $x_0$  gegeben als Graph einer auf  $\mathbb{R}^2$  Lipschitz-stetigen Funktion  $h$ , d. h. mit positiven Konstanten  $\alpha, \tilde{\alpha} > 0$  gilt :

$$(a) \quad \forall x' \in V \cap \partial\mathcal{O} : \quad x' = (y', h(y')), y' \in B_\alpha(0) \subset \mathbb{R}^2,$$

$$(b) \quad \forall y_1, y_2 \in B_\alpha(0) : \quad |h(y_1) - h(y_2)| \leq l_h |y_1 - y_2|,$$

$$(c) \quad \forall y' \in B_\alpha(0) :$$

$$0 < x_3 - h(y') < \tilde{\alpha} \implies (y', x_3) \in \mathcal{O}^c,$$

$$-\tilde{\alpha} < x_3 - h(y') < 0 \implies (y', x_3) \in \text{int } \mathcal{O}.$$

Definiere nun für  $l = l_h$  die Konstante  $b(l) = l(1 + l^2)^{-1/2} \in (0, 1)$ . Weiterhin existiert ein Radius  $\hat{\alpha} \in (0, \tilde{\alpha}/4)$  mit  $B_{2\hat{\alpha}}(x_0) \subset V$ . Für alle Punkte  $x', x'' \in B_\alpha(0)$  ergibt sich aus (b) die Abschätzung

$$|x' - x''| \geq \frac{1}{l} |h(x') - h(x'')|.$$

Für ein beliebiges  $x' \in B_{\hat{\alpha}}(x_0) \cap \partial\mathcal{O}$  folgt daraus

$$(4.9) \quad \left| \left\langle \frac{x'' - x'}{\|x'' - x'\|}, e_3 \right\rangle \right| \leq \frac{l}{(1 + l^2)^{1/2}} \quad \forall x'' \in B_{\hat{\alpha}}(x') \cap \partial\mathcal{O}.$$

Damit genügt  $\partial\mathcal{O}$  sowohl einer inneren als auch einer äußeren Kegelbedingung in alle Randpunkten  $x \in V \cap \partial\mathcal{O}$ . Die Relation (4.9) bedeutet, dass der Rand der Menge  $\mathcal{O}$  nahe eines jeden Punkts  $x \in V \cap \partial\mathcal{O}$  nicht das Innere der beiden Kegel

$$K_x^+ := \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + t \cdot z \text{ mit } t > 0, |z| = 1, z_3 \geq b(l) \right\},$$

$$K_x^- := \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + t \cdot z \text{ mit } t > 0, |z| = 1, z_3 \leq -b(l) \right\}$$

mit Spitze  $x$  schneiden darf (vgl. Abb. 4.2). Dabei ist die Konstante  $b(l)$  durch

$$b(l) := l(1 + l^2)^{-1/2}$$

definiert und erfüllt  $b(l) \in (0, 1)$ .

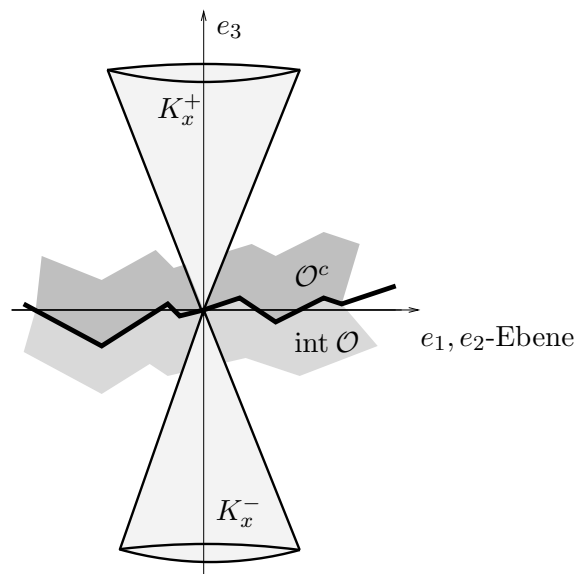


Abbildung 4.2: Der Rand  $\partial\mathcal{O}$  für das Hindernis  $\mathcal{O}$  nahe  $x$

## SCHRITT 2

Die Funktion  $d$  ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 1 nach Lemma 2.1. Ferner ist  $\partial\mathcal{O}$  nach Voraussetzung eine Nullmenge. Bezeichnet man mit  $\Omega_d$  die Menge aller Punkte, in denen  $d$  nicht differenzierbar ist, so lässt sich nach Clarke [12, Th. 2.5.1] der verallgemeinerte Gradient berechnen durch

$$(4.10) \quad \partial d(x) = \text{conv} \{ \xi \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \rightarrow x, x_i \notin (\Omega_d \cup \partial\mathcal{O}), \nabla d(x_i) \rightarrow \xi \} .$$

Daher müssen wir nun die Ableitungen  $\nabla d(x)$  an den Differenzierbarkeitsstellen  $x \notin \partial\mathcal{O}$  untersuchen. Ist aber  $x \in \text{int } \mathcal{O}$  eine Differenzierbarkeitsstelle der Funktion  $d$ , so ist die Projektion auf  $\mathcal{O}^c$  eindeutig und es gilt

$$(4.11) \quad \nabla d(x) = \frac{x - y}{|x - y|} ,$$

wobei  $\{y\} = \text{proj}_{\mathcal{O}^c}(x)$ . Ist umgekehrt  $d$  in  $x \notin \mathcal{O}$  differenzierbar, so ist die Projektion auf  $\mathcal{O}$  eindeutig und mit  $\{y\} = \text{proj}_{\mathcal{O}^c}(x)$  erhält man die Relation

$$(4.12) \quad \nabla d(x) = -\frac{x-y}{|x-y|}.$$

Um (4.11) zu zeigen, nehmen wir an, dass für eine Differenzierbarkeitsstelle  $x \in \text{int } \mathcal{O}$  von  $d$  die Projektion auf  $\mathcal{O}^c$  nicht eindeutig ist. Dann existieren  $y_1, y_2 \in \partial\mathcal{O}$  mit  $y_1 \neq y_2$  und  $y_i \in \text{proj}_{\mathcal{O}^c}(x)$  für  $i = 1, 2$ . Mit den Bezeichnungen  $d := d(x) = |y_i - x|$  sowie

$$z_i(t) := y_i + t \cdot b_i \quad \text{mit } b_i := \frac{1}{d}(x - y_i)$$

folgt für alle  $t \in [0, d]$  nun  $y_i \in \text{proj}_{\mathcal{O}^c}(z_i(t))$  für  $i = 1, 2$ . Dies liefert wiederum

$$d(z_i(t)) = |z_i(t) - y_i| = t$$

für alle  $t \in [0, d]$  und  $i = 1, 2$ . Damit erhalten wir insbesondere

$$\langle \nabla d(x), b_i \rangle = 1$$

für  $i = 1, 2$ . Nach Annahme gilt  $b_1 \neq b_2$  und mit  $|\nabla d(x)| \leq 1$  ergibt sich ein Widerspruch. Damit folgt (4.11) für eine Differenzierbarkeitsstelle  $x \in \text{int } \mathcal{O}$ . Analoge Vorgehensweise für  $x \notin \mathcal{O}$  liefert (4.12), da  $d(y) = -\text{dist}_{\mathcal{O}}(y)$  auf einer geeignet kleinen Kugel  $B_\varepsilon(x)$  gilt.

### SCHRITT 3

Sei nun  $x_0 \in \partial\mathcal{O}$  beliebig, aber fest. Nach Schritt 2 existiert zu jeder Differenzierbarkeitsstelle  $x \in B_{\hat{\alpha}}(x_0) \cap \text{int } \mathcal{O}$  genau ein Punkt  $y = y(x)$  mit  $y \in \partial\mathcal{O} \cap B_{\hat{\alpha}}(x)$ , so dass

$$\nabla d(x) = \frac{x-y}{|x-y|}.$$

Mit  $d = d(x)$  gilt

$$B_d(x) \cap \mathcal{O}^c = \emptyset.$$

Aus (4.9) folgt  $x \in D_y^+$ , falls  $D_y^+$  den zu  $K_y^+$  dualen Kegel (mit Spitze in  $y$ ) bezeichnet (andernfalls würde  $\partial\mathcal{O}$  in der Nähe von  $y$  einen der beiden Kegel  $K_y^+$  oder  $K_y^-$  schneiden). Damit gilt insbesondere  $x_3 < 0$ . Wir bestimmen nun eine obere Schranke für die  $e_3$ -Komponente der Einheitsvektoren, die in  $D_y^+$  liegen. Dabei betrachten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit lediglich den Fall  $y = 0$ , für die übrigen Fälle unterscheidet sich die Argumentation nicht, nur die Spitzen der betrachteten Kegel liegen nicht im Ursprung.

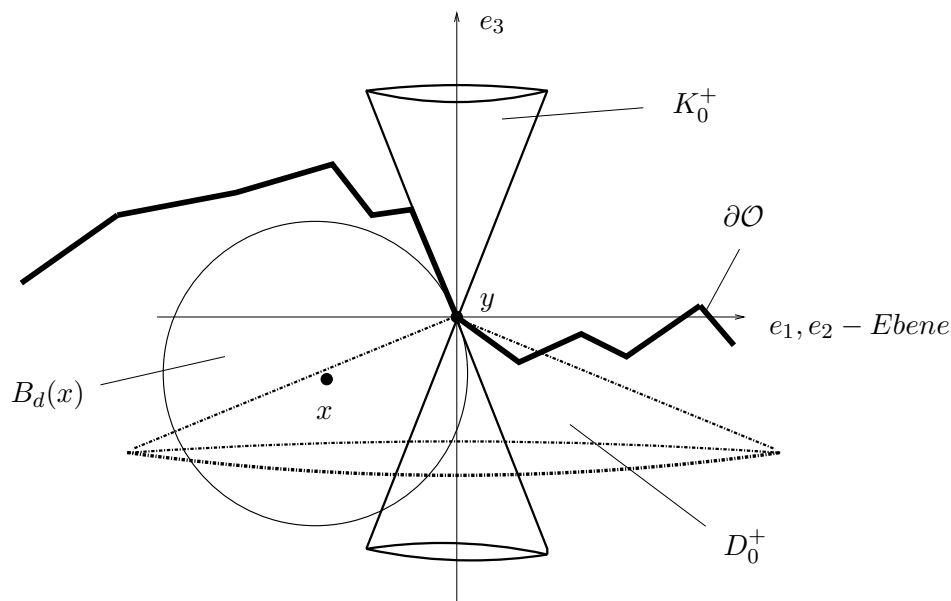


Abbildung 4.3: Situation in Umgebung von  $y = 0$

Sei also  $0 \in B_{\hat{\alpha}}(x_0) \cap \partial\mathcal{O}$  und  $w \in D_0^+ \cap B_{\hat{\alpha}}(0)$  mit  $|w| = 1$  und  $|w_3| \neq 1$ . Nach der Konstruktion in Schritt 1 sind die Vektoren

$$w^e = (1 - b(l)^2)(e, 0) + (0, 0, b(l))$$

mit einem beliebigen Einheitsvektor  $e \in \mathbb{R}^2$  Elemente von  $K_0^+$ . Somit gilt  $\langle w^e, w \rangle \leq 0$ . Wählt man nun

$$e = \frac{1}{1 - w_3^2} (w_1, w_2),$$

so ergibt sich die Relation

$$(1 - b(l)^2)(1 - w_3^2)^{-1} + b(l)w_3 \leq 0.$$

Unter der Beachtung von  $w_3 < 0$  gewinnt man dadurch die Abschätzung

$$(4.13) \quad \frac{|w_3|}{(1 - w_3^2)^{1/2}} \geq \frac{1 - b(l)}{b(l)}.$$

Mit den positiven Konstanten

$$\tilde{b}(l) := \left( \frac{1 - b(l)}{b(l)} \right)^2 = \frac{1}{l^4 + l^2}$$

und

$$k(l) := (l^4 + l^2 + 1)^{-1/2}$$

ergibt sich schließlich

$$(4.14) \quad |w_3| \geq \frac{\tilde{b}(l)}{1 + \tilde{b}(l)} = k(l).$$

Die Relation (4.14) liefert somit für alle  $x \in B_{\hat{\alpha}}(x_0) \cap \text{int } \mathcal{O}$ , in denen  $d$  differenzierbar ist, die Abschätzung

$$(4.15) \quad (\nabla d(x))_3 \leq -k(l).$$

Durch analoge Argumentation erhalten wir für alle Differenzierbarkeitsstellen  $x \in B_{\hat{\alpha}}(x_0) \cap \mathcal{O}^c$  die Relation

$$(4.16) \quad (-\nabla d(x))_3 \geq |k(l)|.$$

Insgesamt ist damit (4.15) für alle  $x \notin \Omega_d$  mit  $x \in B_{\hat{\alpha}}(x_0) \cap \partial \mathcal{O}^c$  gezeigt.

#### SCHRITT 4

Setze nun  $U(x_0) = B_{\hat{\alpha}/2}(x_0)$ . Betrachte einen beliebigen Punkt  $x \in U(x_0)$ . Für jede Folge  $x_i \rightarrow x$  mit  $x_i \notin \Omega_d \cup \partial \mathcal{O}$  (für alle  $i \in \mathbb{N}$ ) gilt  $x_i \in B_{\hat{\alpha}}(x_0)$

für ein geeignetes  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Nach Schritt 3 gilt daher für alle Elemente  $\xi$  der Menge

$$K := \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \nabla d(x_i) \mid x_i \rightarrow x, x_i \notin (\Omega_d \cup \partial\mathcal{O}) \right\}.$$

die Abschätzung  $\xi_3 \leq -k(l)$ . Diese Ungleichung überträgt sich auch auf beliebige Konvexkombinationen von Elementen aus  $K$ . Daher folgt

$$\xi_3 \leq -k(l) < 0$$

für alle  $\xi \in \partial d(x)$ ,  $x \in U(x_0)$ . Mit  $c = -k(l)$  und  $z_0 = -e_3$  ist dies gerade die Behauptung (4.3). ◇

BEWEIS von Proposition 4.7.

Sei  $x \in \partial\Omega$  ein beliebiger, aber fest gewählter Punkt. Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 2 definieren wir die Menge

$$(4.17) \quad \mathcal{O} := \text{cl} \left( Z_x \cap u(\bar{\Omega}_x)^c \right).$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$(4.18) \quad \begin{cases} \mathcal{O} &= \text{cl}(\text{int } \mathcal{O}), \\ \partial\mathcal{O} &\subset \mathcal{C}^{0,1}, \\ \Lambda_x &\subset \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

Wegen der Inklusion

$$(B_{4r(x)}(u(x)) \cap u(\partial\mathcal{O})) \subset \Lambda_x$$

(vgl. Ausführungen vor Lemma 2.8) existiert eine Umgebung  $U = U(u(x))$ , so dass

$$d_{\mathcal{O}}(q) = d(q, x)$$

für alle  $q \in U$ . Da der verallgemeinerte Gradient einer Funktion an einer Stelle  $q$  durch das Verhalten in einer Umgebung des betrachteten Punktes  $q$



festgelegt ist, folgt

$$\partial d_{\mathcal{O}}(w) = \partial_q d(w, x) \quad \text{für alle } w \in U.$$

Mit Proposition 4.5 folgt die Behauptung. ◇

BEWEIS von Proposition 4.8.

Bevor wir die Formel (4.8) für den verallgemeinerten Gradienten beweisen, zeigen wir, dass  $g$  lokal Lipschitz-stetig auf  $U$  ist.

Sei dazu  $\varphi_0 \in U \subset X$  beliebig gewählt. Setze

$$(4.19) \quad l_1 := \max_{x \in K} \|p_{\varphi}(x, \varphi_0)\| + 1.$$

Wegen der Stetigkeit von  $p_{\varphi}(\cdot, \cdot)$  (vgl. (C4)) sowie der Kompaktheit von  $K$  existiert eine Umgebung  $U_0$  von  $\varphi_0$  derart, dass

$$(4.20) \quad \|p_{\varphi}(x, \varphi)\| \leq l_1 \quad \forall \varphi \in U_0, x \in K.$$

Für  $\varphi_1, \varphi_2 \in U_0$  ist die Funktion  $d(p(x, \varphi_i), x)$ ,  $i = 1, 2$ , nach (C3)–(C5) auf  $K$  stetig und mit Hilfe von (C3) sowie (4.20) schätzt man nun ab :

$$\begin{aligned} |g(\varphi_1) - g(\varphi_2)| &= \left| \max_{x \in K} d(p(x, \varphi_1), x) - \max_{x \in K} d(p(x, \varphi_2), x) \right| \\ &\leq \max_{x \in K} |d(p(x, \varphi_1), x) - d(p(x, \varphi_2), x)| \\ &= |d(p(\tilde{x}, \varphi_1), \tilde{x}) - d(p(\tilde{x}, \varphi_2), \tilde{x})| \\ &\leq l \|(p(\tilde{x}, \varphi_1), \tilde{x}) - (p(\tilde{x}, \varphi_2), \tilde{x})\| \\ &\leq l l_1 \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion  $g$  lokal Lipschitz-stetig auf  $U$ .

Zum Beweis der Behauptung (4.8) wird Proposition 4.4 verwendet. Dazu definieren wir die Funktionale

$$f_x : U \subset X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_x(\varphi) := d(p(x, \varphi), x),$$

parametrisiert durch  $x \in K$ . Abermals benutzt man, wie auch schon in Proposition 4.4, einen verallgemeinerten Gradienten

$$(4.21) \quad \partial_{[K]} f_x(\varphi) := \overline{\text{conv}}^* \{ f^* \in X^* \mid f^* \in \text{clust}^*(f_i^*), \\ f_i^* \in \partial f_{x_i}(\varphi_i), \varphi_i \rightarrow \varphi, x_i \rightarrow x, x_i \in K \},$$

der die Parameterabhängigkeit (durch  $x$ ) berücksichtigt. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen  $p_\varphi(x, \cdot)$  sind die Funktionale  $f_x(\cdot)$  lokal Lipschitz-stetig auf  $U$  für alle  $x \in K$  (vgl.(i)). Daher ist die in (4.21) eingeführte Größe wohl definiert.

Sei  $\xi \in \partial f_x(\varphi)$  mit  $\varphi \in U$  und  $x \in K$ . Wählt man  $\varphi_i = \varphi$ ,  $x_i = x$  und  $f_i^* = f^* = \xi$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , so folgt mit den in Proposition 4.3 formulierten Eigenschaften des verallgemeinerten Gradienten einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion  $\xi \in \partial_{[K]} f_x(\varphi)$ . Somit gilt

$$\partial f_x(\varphi) \subset \partial_{[\Omega]} f_x(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in U, x \in K.$$

Nun wählen wir abermals ein beliebiges  $\varphi_0 \in U$ . Wie in (i) konstruieren wir eine Umgebung  $U_0 = U(\varphi_0)$  derart, dass für alle  $x \in K$  die Abbildung  $f_x(\cdot)$  auf  $U_0$  Lipschitz-stetig ist. Darüber hinaus ist die Lipschitzkonstante wegen (C3) unabhängig von  $x \in K$  wählbar. Um Proposition 4.4 anwenden zu können, müssen wir die folgenden Voraussetzungen überprüfen:

- (1) Die Abbildung  $x \mapsto f_x(\varphi)$  ist oberhalbstetig für jedes  $\varphi \in U_0$ .
- (2) Jede Funktion  $f_x(\cdot)$ ,  $x \in K$ , ist Lipschitz-stetig auf  $U_0$  mit Lipschitzkonstante  $k$ .
- (3) Die Menge  $\{f_x(\varphi_0) \mid x \in K\}$  ist beschränkt.

Offenbar ist die Funktion  $d(\cdot, \cdot)$  wegen der Voraussetzungen (C3) und (C5) stetig. Die Stetigkeit von  $p(\cdot, \cdot)$  liefert dann die Stetigkeit von  $x \mapsto f_x(\cdot)$  für alle  $\varphi \in U_0$ . Die Lipschitz-Stetigkeit der Funktionen  $f_x(\varphi)$  folgt, wie oben beschrieben, aus den Voraussetzungen (C3)–(C5). Ferner ist die Menge  $\{f_x(\varphi_0) \mid x \in K\}$  beschränkt, da die stetige Funktion  $x \mapsto f_x(\varphi_0)$  auf der kompakten Menge  $K$  ihr Maximum annimmt. Damit können wir Proposition

4.4 anwenden und erhalten

$$(4.22) \quad \partial g(\varphi_0) \subset \left\{ \int_K \partial_{[K]} f_x(\varphi_0) d\rho(x) \mid \rho \in R_1[K(\varphi_0)] \right\}.$$

Da  $\varphi_0$  beliebig gewählt ist, folgt (4.22) für alle  $\varphi \in U$ .

Um die gewünschte Charakterisierung für  $\partial g(\varphi)$  zu erhalten, ist noch

$$(4.23) \quad \partial_{[K]} f_x(\varphi) \subset \partial_q d(p(x, \varphi)) \circ p_\varphi(x, \varphi)$$

zu zeigen.

Nach Konstruktion ist  $\partial_{[K]} f_x(\varphi)$  die schwach\* abgeschlossene konvexe Hülle der Menge  $F^*$ , definiert durch

$$(4.24) \quad F^* := \{f^* \in X^* \mid f^* \in \text{clust}^*(f_n^*), \\ f_n^* \in \partial f_{x_n}(\varphi_n), \varphi_n \rightarrow \varphi, x_n \rightarrow x, x_n \in K\}.$$

Der verallgemeinerte Gradient  $\partial_q d(p(x, \varphi), x) \subset Y^*$  ist nach Proposition 4.2 eine konvexe und schwach\* kompakte Menge. Daher ist die Menge  $\partial_q d(p(x, \varphi), x) \circ p_\varphi(x, \varphi) \subset X^*$  ebenfalls konvex and schwach\* abgeschlossen. Somit ist (4.23) verifiziert, falls

$$(4.25) \quad F^* \subset \partial_q d(p(x, \varphi), x) \circ p_\varphi(x, \varphi)$$

bewiesen ist.

Angenommen, (4.25) ist falsch. Dann existiert ein Element  $f^* \in F^*$  mit  $f^* \notin \partial_q d(p(x, \varphi), x) \circ p_\varphi(x, \varphi)$ . Durch Trennungsargumente für konvexe Mengen findet man ein  $w \in X$  derart, dass

$$(4.26) \quad \langle f^*, w \rangle < \langle d^* \circ p_\varphi(x, \varphi), w \rangle \quad \text{für alle } d^* \in \partial_q d(p(x, \varphi), x).$$

Da  $f^*$  ein schwach\* Häufungspunkt einer Folge  $\{f_n^*\}$  ist, der mittels (4.24) Folgen  $\{\varphi_n\}$  und  $\{x_n\}$  zugeordnet sind, folgt nach eventuellem Übergang zu

einer Teilfolge (die wiederum mit  $\{f_n^*\}$  bezeichnet wird)

$$(4.27) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_n^*, w \rangle = \langle f^*, w \rangle.$$

Die Kettenregel aus Proposition 4.3 liefert

$$\partial f_x(\varphi) \subset \partial_q d(p(x, \varphi), x) \circ p_\varphi(x, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in U, x \in K.$$

Daher existieren  $d_n^* \in \partial_q d(p(x_n, \varphi_n), x_n)$  mit

$$(4.28) \quad f_n^* = d_n^* \circ p_\varphi(x_n, \varphi_n), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Mengen  $\partial_q d(p(x_n, \varphi_n), x_n) \subset Y^*$  sind gleichmäßig (d. h. unabhängig von  $x$ ) beschränkt, da  $d(\cdot, x)$  nach Voraussetzung (C3) Lipschitz-stetig mit einer von  $x$  unabhängigen Lipschitzkonstanten ist. Folglich ist  $\{d_n^*\}$  beschränkt in  $Y^*$  und besitzt somit einen schwach\* Häufungspunkt  $d^* \in Y^*$ . Daher existiert eine Teilfolge (abermals mit gleicher Bezeichnung) mit

$$(4.29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle d_n^*, p_\varphi(x, \varphi)w \rangle = \langle d^*, p_\varphi(x, \varphi)w \rangle.$$

Mit (4.28), der Stetigkeit der Funktion  $p_\varphi(\cdot, \cdot)$  sowie der gleichmäßigen Beschränktheit der Folge  $\{d_n^*\}$  folgert man aus (4.27) nun

$$(4.30) \quad \begin{aligned} \langle f^*, w \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n^*, w \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle d_n^*, p_\varphi(x_n, \varphi_n)w \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \langle d_n^*, p_\varphi(x, \varphi)w \rangle + \langle d_n^*, [p_\varphi(x_n, \varphi_n) - p_\varphi(x, \varphi)]w \rangle \right). \end{aligned}$$

Da aber die Folgenglieder  $d_n^*$  durch eine von  $n$  unabhängige Konstante beschränkt sind und die Funktion  $p_\varphi(\cdot, \cdot)$  stetig ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle d_n^*, [p_\varphi(x_n, \varphi_n) - p_\varphi(x, \varphi)]w \rangle = 0.$$

Somit erhalten wir aus (4.30) die Relation

$$(4.31) \quad \langle f^*, w \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle d_n^*, p_\varphi(x, \varphi)w \rangle = \langle d^*, p_\varphi(x, \varphi)w \rangle.$$

Nun wollen wir Proposition 4.3, (iii) anwenden. Dazu benötigen wir, dass für alle  $n \geq n_0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ , das Folgenglied  $d_n^*$  im verallgemeinerten Gradienten  $\partial_q d(p(x_n, \varphi_n), x)$  enthalten ist. Dies zeigt das folgende Lemma, das wir im Anschluss an diesen Beweis verifizieren.

**Lemma 4.9** *Es existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass*

$$(4.32) \quad d_n^* \in \partial_q d(p(x_n, \varphi_n), x) \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Mit Proposition 4.3, (iii) sowie der Konstruktion des Häufungspunktes  $d^*$  (vgl.(4.29) ergibt sich aus (4.32) schließlich  $d^* \in \partial_q d(p(x, \varphi), x)$ . Mit (4.31) entsteht ein Widerspruch zu (4.26). Somit ist (4.25) gezeigt und die Proposition bewiesen.

◇

BEWEIS von Lemma 4.9.

Die Behauptung des Lemmas ist gezeigt, falls es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  und positive Zahlen  $s_n$  (für alle  $n \geq n_0$ ) gibt mit

$$d(w, x_n) = d(w, x) \quad \text{für alle } w \in B_{s_n}(p(x_n, \varphi_n)).$$

Nach Voraussetzung (C4) gilt  $p(x, \varphi) \in B_{r(x)}(q_0(x))$ . Daher ist die Konstante  $\varepsilon := r(x) - |p(x, \varphi) - q_0(x)|$  positiv. Analog existieren für alle  $n \in \mathbb{N}$  positive Konstanten  $\tilde{r}_n$  mit

$$(4.33) \quad B_{\tilde{r}_n}(p(x_n, \varphi_n)) \subset B_{r(x_n)}(q_0(x)).$$

Da  $(x_n, \varphi_n) \rightarrow (x, \varphi)$  und  $p$  nach Voraussetzung (C4) stetig ist, können wir einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$  wählen, so dass

$$(4.34) \quad p(x_n, \varphi_n) \in B_{\varepsilon/3}(p(x, \varphi)) \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Nach eventueller Vergrößerung von  $n_0$  können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(4.35) \quad x_n \in B_{t(x)} \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

annehmen. Mit der positiven Konstante

$$(4.36) \quad s_n := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3}, \tilde{r}_n \right\}$$

folgt aus (4.33) und (4.34) für alle  $n \geq n_0$  die Relation

$$(4.37) \quad B_{s_n}(p(x_n, \varphi_n)) \subset B_{r(x)}(q_0(x)) \cap B_{r(x_n)}(q_0(x_n)).$$

Unter Beachtung von (4.35) gilt somit  $B_{s_n}(p(x_n, \varphi_n)) \subset Q(x_n)$  für alle  $n \geq n_0$  und Voraussetzung (C5) liefert

$$d(w, x_n) = d(w, x) \quad \text{für alle } w \in B_{s_n}(p(x_n, \varphi_n)) \text{ und alle } n \geq n_0.$$

◇

# Kapitel 5

## Die Euler-Lagrange Gleichung

In diesem Kapitel werden Euler-Lagrange Gleichungen in schwacher Form für lokale Minimierer des Variationsproblems

$$(5.1) \quad E(u) \rightarrow \text{Min!}, \quad u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3),$$

$$(5.2) \quad u = u_D \quad \text{auf } \Gamma_D \subset \partial\Omega,$$

$$(5.3) \quad |u(\Omega)| \geq \int_{\Omega} \det Du(x) dx$$

abgeleitet, die in  $\Omega$  injektiv sind.

Dabei ist die Energie  $E(u)$  wie in (2.6) definiert, d. h. es gilt

$$E(u) = E_s(u) + E_p(u) = \int_{\Omega} W(x, Du(x)) dx - \int_{\bar{\Omega}} u(x) df(x)$$

mit einer Energiedichte  $W : \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  sowie einem vektorwertigen Radonmaß  $f \in \mathcal{R}[\bar{\Omega}]$ . Für den weiteren Verlauf sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  wieder ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand, die Menge  $\Gamma_D$  in (5.2) nichtleer und abgeschlossen sowie  $u_D \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  eine vorgegebene Funktion. Desweiteren bezeichne  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $p > 3$ , einen lokalen Minimierer von (5.1)–(5.3), der die Eigenschaft  $u(\bar{\Omega}) \subset B_R(0)$  mit  $R > 0$  besitzt.

Um Euler-Lagrange Gleichungen für  $u$  als notwendige Bedingungen zu gewinnen, wird im Bild  $u(\Omega)$  ein neues Variationsproblem formuliert. Dieses neue Problem wird über geeigneten Störungen von  $u$  definiert, so dass  $\varphi = 0$

stets lokaler Minimierer ist. Den Raum der Störungen konstruieren wir so, dass „kleine“ Störungen, die für das Ersatzproblem zulässig sind, Konfigurationen auf  $\Omega$  entsprechen, die die Bedingung (5.3) erfüllen. Dazu ist in dem neuen Problem eine geeignete Nebenbedingung, die mit Hilfe der Lipschitzstetigen signierten Abstandsfunktion  $d(\cdot, x)$  aus Abschnitt 2.4 gemäß (2.42) gebildet wird, zu formulieren. Dabei verwenden wir Proposition 2.10 aus Kapitel 2. Durch diese Wahl der Störungen und die neue Nebenbedingung kann im Ersatzproblem auf die analytisch schwer handhabbare Ciarlet-Nečas Bedingung (5.3) verzichtet werden. Damit sind die Methoden von Clarke aus Kapitel 4 (vgl. Proposition 4.3,(iv)) auf das neue Problem anwendbar. Analog zur Vorgehensweise in Schuricht [22] sowie Habeck und Schuricht [15] kann eine notwendige Bedingung für den lokalen Minimierer  $\varphi = 0$  des Ersatzproblems abgeleitet werden. Da dieser zur Konfiguration  $u$  korrespondiert, erhält man insgesamt eine Euler-Lagrange Gleichung für den Minimierer  $u$  von (5.1)–(5.3).

Anschließend kann diese Euler-Lagrange Gleichung für den lokalen Minimierer  $u$  von (5.1)–(5.3) weiter ausgewertet werden. Dazu formuliert man ein weiteres Variationsproblem auf dem deformierten Körper  $u(\Omega)$ , in dem man sich diesen als an den Kontaktpunkten bzw. -flächen „verklebt“ vorstellt. Diese Vorgehensweise entspricht der von Ball in [8]. Dadurch erhalten wir eine weitere notwendige Bedingung für  $u$ . Durch Kombination der beiden Gleichungen gewinnt man eine Information über die Summe der Kontaktkräfte in der Umgebung eines Kontaktpunktes.

Zunächst werden die Resultate formuliert. In Abschnitt 5.2 werden die Ergebnisse zum Kontakt zweier nichtlinear elastischer Körper aus Habeck und Schuricht [15] vorgestellt. Die Beweise der Resultate aus 5.1 bilden den letzten Abschnitt dieses Kapitels.

## 5.1 Resultate

In diesem Abschnitt werden die Euler-Lagrange Gleichungen für lokale Minimierer  $u$  von (5.1)–(5.3) formuliert, die den in Kapitel 2.4 eingeführten Bedingungen genügen. Da wir den Beweis durch Betrachtung eines geeigne-



ten Ersatzproblems führen, definieren wir vorab den Raum der Störungen durch

$$(5.4) \quad X(= X_u) := \{\varphi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3) \mid \varphi = 0 \text{ auf } u(\Gamma_D)\}.$$

Offenbar hängt dieser Raum von der Wahl des betrachteten lokalen Minimierers  $u$  ab. Da wir uns im weiteren Verlauf auf einen fest gewählten Minimierer beschränken, verzichten wir in der Folge auf den Index  $u$ . Insbesondere sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass Funktionen  $\varphi \in X$  im Allgemeinen nicht stetig auf  $\partial u(\Omega) = u(\partial\Omega)$  fortgesetzt werden können, da der elastische Körper  $u(\Omega)$  keinen Lipschitzrand besitzt, sondern  $u(\partial\Omega)$  lediglich durch Lipschitz-Flächenstücke überdeckt werden kann (vgl. (A2) in 2.4).

Auf den in Kapitel 2 konstruierten Mengen  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, \tilde{k}$ , sind die Funktionen  $\varphi \in X$  sogar Lipschitz-stetig, da diese Mengen nach Konstruktion Lipschitzrand besitzen (vgl. Schritte 1 und 2 im Beweis von Proposition 2.10). Damit ist jede Funktion  $\varphi \in X$  in jedem  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, \tilde{k}$ , stetig bis zum Rand fortsetzbar. Formal nimmt damit  $\varphi$  auf  $u(\partial\Omega)$  verschiedene Werte an.

Zunächst erinnern wir an die in Kapitel 2 formulierten Voraussetzungen, die wir für einen lokalen Minimierer  $u$  von (5.1)–(5.3) fordern (vgl. auch Abb. 2.5 und 5.1):

(A1)  $u$  ist global injektiv auf  $\Omega$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand ist. Ferner gilt  $\det Du(x) > 0$  für fast alle  $x \in \Omega$ .

(A2)  $\forall x \in \partial\Omega \exists \sigma = \sigma(x) > 0$  :

(a) Die Menge  $\Lambda_\sigma := u(\bar{B}_\sigma(x) \cap \partial\Omega)$  ist Teilmenge eines Lipschitz-Flächenstücks von  $u(B_{\sigma'}(x) \cap \Omega)$  für ein  $\sigma' > \sigma$ .

(b)  $u|_{\partial\Omega \cap \bar{B}_\sigma(x)}$  ist injektiv.

(A3)  $\Omega_c \cap \Gamma_D = \emptyset$ .

Nun formulieren wir die Voraussetzungen für die Energiedichte  $W$ , die die elastische Energie einer Deformation beschreibt. Wir fordern:

(W1)  $W(x, \cdot)$  ist stetig differenzierbar in  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  für alle  $x \in \Omega$ ,

$W(\cdot, F)$  ist messbar in  $\Omega$  für alle  $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

(W2) Es existieren  $\gamma \in \mathcal{L}^{p/(p-1)}(\Omega, \mathbb{R})$  und eine Konstante  $c > 0$ , so dass

$$(5.5) \quad |D_F W(x, F)| \leq c|F|^{p-1} + \gamma(x) \quad \text{für alle } (x, F) \in \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

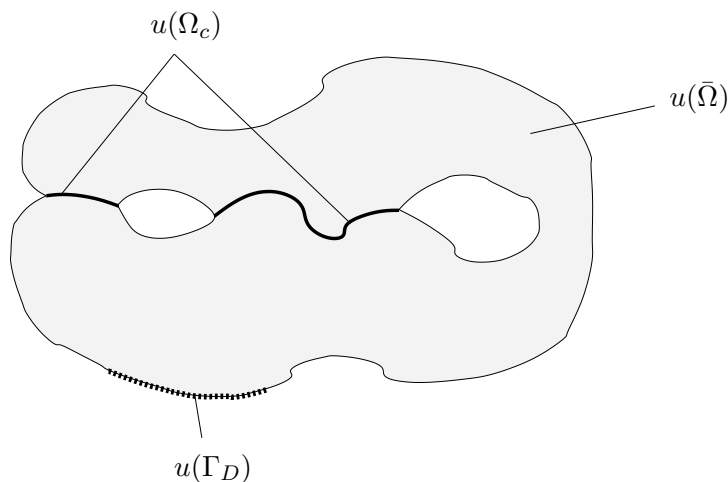


Abbildung 5.1: Der deformierte Körper für  $u$  mit Eig. (A1)–(A3)

Alternativ zu (W2) kann auch die folgende Wachstumsbedingung verwendet werden.

(W2') Es existieren Konstanten  $c > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , so dass für alle  $3 \times 3$  Matrizen  $F, C$  mit positiver Determinante und  $|C - Id| < \varepsilon_0$  sowie für alle  $x \in \Omega$  die Abschätzung

$$|D_F W(x, CF)F^T| \leq c(W(x, F) + 1)$$

erfüllt ist.

Die Wachstumsbedingungen (W2) bzw. (W2') liefern zusammen mit (W1) die Gâteaux-Differenzierbarkeit der zur elastischen Energie  $E_s$  korrespondierenden Energie im Ersatzproblem. Die Wachstumsbedingung (W2') wurde von Ball in [8] benutzt und erlaubt insbesondere Energiedichten mit der Eigenschaft

$$W(x, F) \rightarrow \infty \quad \text{für } \det F \rightarrow 0.$$

**Theorem 5.1** *Sei  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $p > 3$ , ein lokaler Minimierer des Variationsproblems (5.1)–(5.3), der die Eigenschaften (A1)–(A3) besitzt. Ferner seien (W1) und wahlweise (W2) oder (W2') erfüllt.*

*Dann existieren eine kompakte Menge  $\Gamma \subset \partial\Omega$  mit  $\Gamma \cap \Gamma_D = \emptyset$  und  $\Omega_c \subset \Gamma$ , ein Radonmaß  $\mu_c \in R[\Gamma]$  mit Träger auf  $\Omega_c$  und eine  $\mu_c$ -integrierbare Abbildung  $d_c : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit*

$$(5.6) \quad d_c(x) \in \partial_q d(u(x), x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma,$$

*so dass für alle  $\varphi \in X$  die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung*

$$(5.7) \quad 0 = \int_{\Omega} D_F W(x, Du(x)) Du(x)^T : (D_w \varphi)(u(x)) dx \\ - \int_{\bar{\Omega}} \varphi(u(x)) df(x) + \int_{\Omega_c} \langle d_c(x), \varphi(u(x)) \rangle d\mu_c(x)$$

*gilt, wobei alle auftretenden Integrale existieren.*

*(Hinweis: Mit  $\partial_q d(q, x)$  wird der verallgemeinerte Gradient der aus Kapitel 2 bekannten Abstandsfunktion  $d(\cdot, x)$  an der Stelle  $q$  und mit  $(D_w \varphi)(z)$  die Ableitung von  $\varphi(\cdot)$  an der Stelle  $z$  bezeichnet.)*

Wie schon zu Beginn des Kapitels angesprochen, kann man für einen lokalen Minimierer  $u$  von (5.1)–(5.3) ein Variationsproblem auf einer Kugel  $B_R(0)$  mit  $u(\bar{\Omega}) \subset B_R(0)$  definieren. Dabei verfahren wir wie Ball in [8] und wählen als Raum der Störungen in diesem Fall den Raum

$$(5.8) \quad \tilde{X} := \{\varphi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(B_R(0), \mathbb{R}^3) \mid \varphi(w) = 0 \text{ für } w \in u(\Gamma_D)\}.$$

Dieser Raum ist ein Teilraum von  $X$ . Während Störungen aus  $X$  wie erwähnt auf  $u(\partial\Omega)$  nicht stetig fortgesetzt werden können, sind Funktionen aus  $\tilde{X}$  insbesondere auf  $u(\bar{\Omega})$  stetig. Die Verkettung  $h(x) := \varphi(u(x))$  einer Störung aus  $\varphi \in \tilde{X}$  mit  $u$  ist somit auf der Urbildmenge eines beliebigen Kontaktpunktes  $u(x_0) \in u(\Omega_c)$  konstant. Man fasst daher den deformierten Körper  $u(\Omega)$  an den Kontaktflächen bzw. -punkten als „verklebt“ auf.

Dadurch erfüllen die Konfigurationen, die zu Störungen  $\varphi \in \tilde{X}$  korre-

spondieren, die Bedingung von Ciarlet-Nečas ohne weitere Nebenbedingung, falls die Norm der Störung ausreichend klein gewählt wird. Dies führt dazu, dass in der zugehörigen Euler-Lagrange Gleichung kein Kontaktterm auftritt. Durch Kombination beider Verfahren erhält man eine zusätzliche Information über das Randintegral in Gleichung (5.1).

**Korollar 5.2** *Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.1 gilt:*

(a) *Für alle  $\varphi \in \tilde{X}$  gilt die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung*

$$(5.9) \quad 0 = \int_{\Omega} D_F W(x, Du(x)) Du(x)^T : (D_w \varphi)(u(x)) dx \\ - \int_{\bar{\Omega}} \varphi(u(x)) df(x).$$

*Insbesondere existieren für jedes  $y_0 \in \bar{\Omega} \setminus \Gamma_D$  mit Urbildmenge  $u^{-1}(u(y_0)) = \{y_0, \dots, y_{k_0}\}$  positive Konstanten  $\rho_0$  und  $\vartheta_0$ , so dass*

$$(5.10) \quad 0 = \sum_{i=0}^{k_0} \int_{\hat{\Omega}_i} D_F W(x, Du(x)) Du(x)^T : (D_w \varphi)(u(x)) dx \\ - \int_{\text{cl } \hat{\Omega}_i} \varphi(u(x)) df(x)$$

*für alle  $\varphi \in \tilde{X}$  mit  $\text{supp } \varphi \subset B_{\rho_0}(u(y_0))$  erfüllt ist. Dabei sind in (5.10) die Mengen  $\hat{\Omega}_i$  durch*

$$(5.11) \quad \hat{\Omega}_i := \Omega \cap B_{\vartheta_0}(y_i)$$

*für  $i = 0, \dots, k_0$  definiert.*

(b) *Für alle  $\varphi \in \tilde{X}$  gilt*

$$(5.12) \quad 0 = \int_{\Omega_c} \langle d_c(x), \varphi(u(x)) \rangle d\mu_c(x).$$

*Ferner erhält man mit den Notationen aus Teil (a) für alle  $y_0 \in \Omega_c$*

und alle  $\varphi \in \tilde{X}$  mit  $\text{supp } \varphi \subset B_{\rho_0}(u(y_0))$  die Relation

$$(5.13) \quad 0 = \sum_{i=0}^{k_0} \int_{\Omega_c \cap \text{cl } \hat{\Omega}_i} \langle d_c(x), \varphi(u(x)) \rangle d\mu_c(x).$$

### Bemerkung 5.3

(1) Der Unterschied der beiden Euler-Lagrange Gleichungen (5.7) und (5.9) besteht im Kontaktterm, dem letzten Integral in (5.7). Dieser Term ist der Lagrange-Multiplikator, der den Selbstkontakt des durch die Deformation  $u$  beschriebenen Körpers charakterisiert. Dadurch werden die Kontaktkräfte beschrieben, die über die Kontaktflächen bzw. -punkte ausgeübt werden. Die Richtung dieser Kräfte ist durch die Abbildung  $d_c$  bestimmt. Diese liegt in jedem Kontaktpunkt  $u(x)$ ,  $x \in \Omega_c$ , in einem Kegel, der durch (5.6) gegeben ist. Das Maß  $\mu_c$  gibt die Verteilung der Kontaktkräfte auf die Menge der Kontaktargumente  $\Omega_c$  an. Insbesondere liegt in einem Kontaktpunkt  $u(x)$  mit  $x \notin \text{supp } \mu_c$  zwar Kontakt vor, aber es wirken keine mechanischen Kräfte. Dieser Kontaktterm tritt in Korollar 5.2,(a) nicht auf, da in dieser Situation der Körper an den Kontaktflächen als verklebt aufgefasst wird.

(2) Die Gleichung in (a) von Korollar (5.2) entspricht der Euler-Lagrange Gleichung, die Ball in [8] abgeleitet hat. Da die Anzahl der Urbilder eines Kontaktpunktes endlich ist, führt die Lokalisierung um jeden Kontaktpunkt dazu, dass nur über endlich viele Teilmengen  $\hat{\Omega}_i$  bzw.  $\text{cl } \hat{\Omega}_i$  statt über  $\Omega$  bzw.  $\bar{\Omega}$  integriert wird. Die in (b) formulierte Gleichung entspricht der Anschauung, dass sich die in der Umgebung eines Kontaktpunktes wirkenden Kräfte, die über die Kontaktflächen ausgeübt werden, gegenseitig aufheben.

## 5.2 Kontakt zweier nichtlinear elastischer Körper

An dieser Stelle werden die Ergebnisse aus der Arbeit [15] von Habek und Schuricht vorgestellt. Darin wird zur Untersuchung des Kontakts zwei-

er nichtlinear elastischer Körper ein Variationsproblem betrachtet, welches (5.1)–(5.3) ähnlich ist. Die Energie einer Deformation  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $p > 3$ , sei wie in (2.6) durch

$$E(u) := E_s(u) + E_p(u) = \int_{\Omega} W(x, Du(x)) \, dx - \int_{\bar{\Omega}} u(x) \, df(x)$$

definiert, allerdings ist nun  $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$  die disjunkte Vereinigung von Teilkörpern mit Referenzkonfiguration  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Die Nichtdurchdringung der beiden Teilkörper  $u_i := u|_{\Omega_i}$  wird mittels der signierten Abstandsfunktion (vgl. (2.12))

$$\hat{d}(q, v) \left( = \hat{d}(q, v_2) \right) := \begin{cases} \text{dist}_{v(\partial\Omega_2)}(q), & \text{falls } q \in \text{int } v(\Omega_2), \\ -\text{dist}_{v(\partial\Omega_2)}(q), & \text{falls } q \notin \text{int } v(\Omega_2) \end{cases}$$

durch die Forderung

$$(5.14) \quad \hat{g}(u) := \max_{x \in \Omega_1} \hat{d}(u_1(x), u_2) \leq 0$$

gesichert. Schließlich fixiert man die beiden elastischen Körper auf Mengen  $\Gamma_D^i \subset \partial\Omega_i$ ,  $\Gamma_D^i \neq \emptyset$ ,  $i = 1, 2$ , d. h. mit einer Funktion  $u_D \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  fordert man die Dirichletbedingung

$$u = u_D \quad \text{auf} \quad \hat{\Gamma}_D := \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2.$$

Wie bei der Untersuchung von Selbstkontakt fordert man, dass auf  $\hat{\Gamma}_D$  kein Kontakt auftritt (vgl. Voraussetzung (A3') auf der nächsten Seite). Damit ergibt sich das Variationsproblem zur Charakterisierung des Kontakts zweier nichtlinear elastischer Körper zu

$$(5.15) \quad \begin{cases} E(u) \rightarrow \text{Min!}, & u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega), \\ u = u_D & \text{auf } \hat{\Gamma}_D, \\ \hat{g}(u) \leq 0. \end{cases}$$

In [15, Th. 3.1 und Th. 3.2] sind Existenzaussagen bewiesen. Im Gegensatz zum Variationsproblem (5.1)–(5.3), für das wir in Kapitel 3 nur Existenz

für  $p > 3$  untersucht haben, wird in diesen beiden Resultaten auch der Fall  $p \leq 3$  behandelt. Dabei ist Dirichletrandbedingung für  $p \leq 3$  im Spursinn zu verstehen, da  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  keinen stetigen Repräsentanten besitzen muss. Ebenso ist auch in (5.14) das wesentliche Supremum statt des Maximums zu nehmen.

Um für dieses Variationsproblem eine Euler-Lagrange Gleichung zu bestimmen, werden die folgenden Voraussetzungen formuliert:

(A1')  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2$ , sind beschränkte Gebiete mit disjunktem Abschluss und Lipschitzrand.

(W2'') Es gibt eine Konstante  $c > 0$  sowie eine Funktion  $\gamma \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ , so dass

$$(5.16) \quad |D_F W(x, F)| \leq c|F|^p + \gamma(x) \quad \text{für alle } (x, F) \in \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

(A3') Für die Dirichlet-Randdaten gilt  $u_D(\Gamma_D^1) \cap u_D(\Gamma_D^2) = \emptyset$ .

Als Raum der Störungen wird für dieses Variationsproblem der Unterraum

$$(5.17) \quad \hat{X} := \{ \varphi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma_D \}$$

des Banachraums  $\mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  gewählt.

Wie schon in Kapitel 2 angedeutet, lassen sich die Methoden nur auf solche Minimierer, für die der Minimierer und kleine Störungen eines Teilkörpers offene Abbildungen sind, anwenden. Aus diesem Grund fordern wir für den Minimierer  $u$  von (5.15) noch

$$(5.18) \quad u_2 \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega_2, \mathbb{R}^3), \det Du_2(x) \geq \tilde{\beta} > 0 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega_2.$$

Unter diesen zusätzlichen Bedingungen folgt mit Hilfe des Begriffs der integrierbaren Verformung (vgl. (2.13)), dass die Einschränkung von  $u$  auf  $\Omega_2$  sowie kleine  $\mathcal{W}^{1,\infty}$ -Störungen dieser Funktion offene Abbildungen sind.

Auch für das Variationsproblem (5.15) sind die Methoden von Clarke aus dem vorherigen Kapitel ein wesentliches Hilfsmittel bei der Beschreibung der

Kontaktkräfte. Insbesondere ist dabei der verallgemeinerte Gradient der in (5.14) definierten Funktion  $\hat{g}$  zu charakterisieren.

Für die Berechnung von  $\partial\hat{g}$  ist es hilfreich, die folgenden Mengen einzuführen. Für eine Funktion  $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned}\Omega_c^1(v) &:= \left\{ x \in \bar{\Omega}_1 \mid \hat{d}(v_1(x), v_2) = 0 \right\}, \\ \Omega_c^2(v) &:= \left\{ y \in \partial\Omega_2 \mid v_2(y) = v_1(x) \text{ für ein } x \in \bar{\Omega}_1 \right\}\end{aligned}$$

sowie

$$\Gamma(q, v) := \left\{ y \in \partial\Omega_2 \mid |v_2(y) - q| = \hat{d}(q, v_2) \text{ oder } |v_2(y) - q| = -\hat{d}(q, v_2) \right\}$$

für  $q \in \mathbb{R}^3$ .

Für  $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  mit  $q \notin v_2(\partial\Omega_2)$  (d. h.  $\hat{d}(q, v) \neq 0$ ) setzt man

$$d^*(q, y, v) := \text{sign } \hat{d}(q, v) \frac{v(y) - q}{|v(y) - q|} \quad \text{für } y \in \Gamma(q, v).$$

Ferner definieren wir für  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  sowie  $q \in u_2(\partial\Omega_2)$  eine Menge  $\mathcal{D}^*(q, u) \in \mathbb{R}^3$  durch

$$\mathcal{D}^*(q, u) := \bigcap_{\sigma > 0} \overline{\text{conv}} \left( \bigcup_{\substack{\|\varphi\|_{1,\infty} \leq \sigma \\ \hat{d}(q, u+\varphi) \neq 0}} \bigcup_{y \in \Gamma(q, u+\varphi)} d^*(q, y, u+\varphi) \right).$$

Dabei wird  $d^*(q, y, u + \varphi)$  mit der Menge, die aus diesem einen Element besteht, identifiziert. Der Vollständigkeit halber setzen wir schließlich  $\mathcal{D}^*(q, u) := \emptyset$  für  $q \notin u_2(\partial\Omega_2)$ .

Bei der Definition des Vektors  $d^*(q, y, v)$  sowie der Mengen  $\Gamma(q, v)$  und  $\mathcal{D}^*(q, u)$  ist der Teilkörper  $\Omega_2$  als Bezugsmenge verwendet worden. Somit sind diese Größen tatsächlich nur vom Verhalten der Funktionen auf  $\Omega_2$  abhängig.

Damit können wir nun die Euler-Lagrange Gleichung für das Variationsproblem (5.15) formulieren (vgl. [15, Th. 4.1]).

**Theorem 5.4** *Seien die Voraussetzungen (A1'), (A3'), (W1) und (W2'') erfüllt und  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ ,  $p > 3$ , ein lokaler Minimierer des Variationspro-*



blems (5.15) mit Eigenschaft (5.18) für eine Konstante  $\tilde{\beta} > 0$ .

Dann existieren eine Konstante  $\lambda \geq 0$ , ein Radonmaß  $\hat{\mu}_c \in R[\bar{\Omega}_1]$  mit Träger in  $\Omega_c^1(u)$ , nicht beide Null, Radonmaße  $\mu_x \in R[\bar{\Omega}_2]$  mit Träger in  $\Gamma(u_1(x), u)$ ,  $x \in \bar{\Omega}_1$ , sowie eine Abbildung

$$(5.19) \quad (x, y) \rightarrow d_c^*(x, y) \in \mathcal{D}^*(u_1(x), u) \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{auf} \quad \bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_2,$$

so dass für alle  $\varphi \in \hat{X}$  die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung

$$(5.20) \quad 0 = \lambda \int_{\Omega} D_F W(x, Du(x)) : D\varphi(x) dx - \lambda \int_{\bar{\Omega}} \varphi(x) df(x) \\ + \int_{\Omega_c^1(u)} \int_{\Omega_c^2(u)} \langle d_c^*(x, y), \varphi_2(y) - \varphi_1(x) \rangle d\mu_x(y) d\hat{\mu}_c(x)$$

gilt, wobei alle auftretenden Integrale existieren. Insbesondere ist  $\hat{\mu}_c = 0$ , falls  $\hat{g}(u) < 0$  oder, äquivalent dazu, falls  $\Omega_c^1(u) = \emptyset$ .

In Gleichung (5.20) kann  $\lambda = 1$  gesetzt werden, falls es für alle  $\tilde{x} \in \Omega_c^1(u)$  eine offene Umgebung  $U(\tilde{x})$  gibt mit

$$(5.21) \quad 0 \notin \overline{\text{conv}} \bigcup_{x \in \Omega_c^1(u) \cap U(\tilde{x})} \mathcal{D}^*(u_1(x), u).$$

### Bemerkung 5.5

1) Der letzte Term in (5.20) beschreibt die Kontaktkräfte zwischen den beiden Teilkörpern. Falls sowohl  $u_1$  als auch  $u_2$  global injektiv auf  $\bar{\Omega}_1$  bzw.  $\bar{\Omega}_2$  sind, charakterisiert der Vektor  $d_c^*(x, y)$  die Kontaktkraft zwischen den Kontaktpunkten  $u_1(x) = u_2(y)$ , das Maß  $\mu_x$  besitzt konzentrierte Masse im Punkt  $u_2^{-1}(u_1(x))$ , während das Maß  $\hat{\mu}_c$  die Verteilung der Kontaktkräfte auf die Kontaktpunktmenge  $\Omega_c^1(u) \subset \bar{\Omega}_1$  wiedergibt.

2) Die Menge  $\mathcal{D}^*(u_1(x), u)$  kann als Menge verallgemeinerter Normalenrichtungen für die Kontaktfläche  $u_2(\partial\Omega_2)$  im Punkt  $u_1(x)$  interpretiert werden. Bei glatter Kontaktfläche enthält diese Menge die Normale, dennoch ist auch in dieser Situation unklar, ob die Menge weitere Richtungen enthält (vgl. Lemma 5.6). Diese Frage ist verbunden mit der Frage der (geometrischen)

Regularität des deformierten Randes  $u_2(\partial\Omega_2)$  sowie dessen Verhalten unter kleinen Störungen.

3) In Theorem 5.1 können wegen der Symmetrie des Problems die Rollen von  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  vertauscht werden. Dabei ist es möglich, dass eine Variante eine restriktivere Bedingung für die Richtung  $d_c^*(x, y)$  der Kontaktkraft liefert. Insbesondere kann diese “bessere” Wahl für verschiedene Punktepaare  $(x, y)$  differieren.

Abschließend ein weiteres Ergebnis (s.[15, Kor. 4.3]), welches die Menge der Kontaktrichtungen  $\mathcal{D}^*(u_1(x), u)$  untersucht. Dazu definieren wir für die Menge  $\mathcal{O} := u_2(\partial\Omega_2)$  die Abstandsfunktion

$$\tilde{d}_{\mathcal{O}}(q) := \begin{cases} \text{dist}_{\mathcal{O}}(q) & , \text{ falls } q \in u_2(\Omega_2), \\ -\text{dist}_{\mathcal{O}}(q) & , \text{ falls } q \notin u_2(\Omega_2), \end{cases}$$

**Lemma 5.6** *Seien die Voraussetzungen von Theorem 5.4 erfüllt. Dann gilt*

$$(5.22) \quad -\partial\tilde{d}_{\mathcal{O}}(u_1(x)) \subset \mathcal{D}^*(u_1(x), u) \quad \text{für alle } x \in \Omega_c^1(u).$$

Lemma 5.6 besagt, dass die Menge der Kontaktkraftrichtungen bei Fixierung eines der beiden Körper stets Teilmenge der Menge der Kontaktkraftrichtungen für den Fall zweier variabler Körper ist. Dieses Ergebnis widerspricht der Erwartung, denn vorab vermutet man für die Abbildung  $d_c^*(x, y)$  bei Störung beider Teilkörper eine restriktivere Charakterisierung als bei der Fixierung eines Teilkörpers.

Schließlich sei noch erwähnt, dass bei dieser Untersuchung des Kontakts zweier elastischer Körper die Frage des Selbstkontakts jedes Teilkörpers nicht behandelt worden ist.

### 5.3 Beweise

Nun werden die Resultate aus Abschnitt 5.1 bewiesen. Zunächst wird der Beweis von Theorem 5.1 geführt, anschließend wird Korollar 5.2 gezeigt.

BEWEIS von Theorem 5.1.

Um die Übersichtlichkeit zu wahren, wird der Beweis in einzelne Schritte unterteilt.

SCHRITT 1 (*Konstruktion des Ersatzproblems*)

Für Funktionen  $\varphi \in X$  definieren wir mit Hilfe der Konfigurationen  $u_\varphi(x) = u(x) + \varphi(u(x))$  (vgl. (2.41)) die Funktionale

$$(5.23) \quad \hat{E}_s(\varphi) := E_s(u_\varphi),$$

$$(5.24) \quad \hat{E}_p(\varphi) := E_p(u_\varphi),$$

$$(5.25) \quad \hat{E}(\varphi) := \hat{E}_s(\varphi) + \hat{E}_p(\varphi).$$

Zum lokalen Minimierer  $u$  konstruieren wir wie in Kapitel 2 Überdeckungen von  $\bar{\Omega}$  und  $u(\bar{\Omega})$ . Ausserdem übernehmen wir auch die Bezeichnungen aus diesem Kapitel. Damit existiert nach Proposition 2.10 eine kompakte Menge  $\Gamma \subset \partial\Omega$  mit  $\Gamma \cap \Gamma_D = \emptyset$ . Mit den in (2.33) bzw. (2.44) eingeführten Funktionen

$$d(q, x) = \begin{cases} -\text{dist}_{\Lambda_x}(q), & \text{falls } q \in Z_x \cap u(\Omega_x), \\ \text{dist}_{\Lambda_x}(q), & \text{falls } q \in Z_x \cap u(\Omega_x)^c \end{cases}$$

und

$$g(\varphi) (= g_\Gamma(\varphi)) = \max_{x \in \Gamma} d(u_\varphi(x), x)$$

formulieren wir das zum lokalen Minimierer  $u$  gehörende Variationsproblem

$$(5.26) \quad \hat{E}(\varphi) \rightarrow \text{Min!}, \quad \varphi \in X,$$

$$(5.27) \quad g(\varphi) \leq 0.$$

In diesem Problem ist die Dirichletrandbedingung in der Definition des Raumes  $X$  enthalten (vgl. (5.4)).

SCHRITT 2 ( $\psi = 0$  lokaler Minimierer von (5.26)–(5.27))

Um zu zeigen, dass die Nullfunktion lokaler Minimierer des Variationsproblems (5.26)–(5.27) ist, wird das nächste Lemma benötigt. In diesem Lemma wird gezeigt, dass durch  $F_u(\varphi) = u_\varphi$  eine Abbildung  $F : X \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$

definiert wird, die stetig in  $\varphi = 0$  ist. Weiterhin wird bewiesen, dass  $u_\varphi$  die Nebenbedingungen von (5.1)–(5.3) respektiert, falls  $\varphi$  eine "kleine" Störung ist, die die Nebenbedingung (5.27) erfüllt.

**Lemma 5.7** *Sei  $r$  die Konstante aus Proposition 2.10, die zum lokalen Minimierer  $u$  von (5.1)–(5.3) gehört. Dann gilt:*

- (i) *Für jedes  $\varphi \in X$  gilt  $h_\varphi(x) := \varphi(u(x)) \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Die schwache Ableitung von  $h_\varphi$  ist durch*

$$(5.28) \quad Dh_\varphi(x) = (D_w\varphi)(u(x)) \cdot Du(x)$$

*gegeben.*

- (ii) *Die Abbildung*

$$(5.29) \quad F_u : X \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), (F_u\varphi)(x) := u_\varphi(x),$$

*ist stetig in  $\varphi = 0$ , d. h. es gibt eine Konstante  $c = c(p, \Omega, u)$  mit*

$$(5.30) \quad \|F_u\varphi - u\|_{1,p} \leq c\|\varphi\|_{1,\infty} \quad \text{für alle } \varphi \in X.$$

- (iii) *Die Funktion  $u_\varphi$  ist für das Ausgangsproblem (5.1)–(5.3) zulässig, falls  $\varphi \in B_r(0) \cap X$  und  $\varphi$  die Nebenbedingung  $g(\varphi) \leq 0$  erfüllt.*

BEWEIS von Lemma 5.7.

Zu (i):

Wir verwenden eine Kettenregel von Ambrosio und Dal Maso aus [3]. Einen Spezialfall dieser Kettenregel formulieren wir an dieser Stelle.

**Satz 5.8** *Sei  $v \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  und  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lokal Lipschitz-stetig. Dann ist die Verkettung  $F(x) = f(v(x))$  ein Element von  $\mathcal{W}_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  und für fast alle  $x \in \mathbb{R}^3$  ist die Einschränkung von  $f$  auf den affinen Raum*

$$T_x^v := \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w = v(x) + Dv(x) \cdot z \text{ für ein } z \in \mathbb{R}^3\}$$

differenzierbar in  $v(x)$  und es gilt

$$(5.31) \quad DF(x) = (D_w f|_{T_x^v})(v(x)) Dv(x).$$

Für  $\varphi \in X$  setzen wir nun  $h = h_\varphi$ . Dann folgt  $h \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Mit der Kettenregel (5.31) von Ambrosio und Dal Maso gilt

$$(5.32) \quad Dh(x) = (D_w \varphi|_{T_x^u})(u(x)) Du(x)$$

für fast alle  $x \in \Omega$ . Nach Voraussetzung (A1) besitzt der lokale Minimierer  $u$  des Ausgangsproblems (5.1)–(5.3) die Eigenschaft

$$\det Du(x) > 0 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Somit ist  $Du(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$  regulär und aus (5.32) folgt

$$(5.33) \quad Dh(x) = (D_w \varphi)(u(x)) Du(x)$$

fast überall in  $\Omega$ . Insgesamt gilt daher  $h \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , da  $D\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ .

Zu (ii):

Für eine Funktion  $\varphi \in X$  gilt  $|\varphi(u(x))| \leq \|\varphi\|_\infty$  für fast alle  $x \in \Omega$ . Dies liefert

$$\|h\|_p = \left( \int_\Omega |\varphi(u(x))|^p dx \right)^{1/p} \leq c(\Omega, p) \|\varphi\|_\infty.$$

Mit der in (i) bewiesenen Kettenregel für die schwache Ableitung der Funktion  $h$  erhalten wir daher insgesamt

$$\begin{aligned} \|h\|_{1,p}^p &= \|\varphi(u(x))\|_p^p + \|D(\varphi(u(x)))\|_p^p \\ &\leq c(p, \Omega) \|\varphi\|_\infty^p + \|D\varphi\|_\infty^p \|Du(x)\|_p^p \\ &\leq c(p, \Omega, u) \{ \|\varphi\|_\infty^p + \|D\varphi\|_\infty^p \} \\ &\leq c(p, \Omega, u) \|\varphi\|_{1,\infty}^p. \end{aligned}$$

Es gilt  $F_u(\varphi_1 + \varphi_2) = F_u(\varphi_1) + F_u(\varphi_2) - u(x)$  für alle  $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ . Damit ist

$F_u$  als affin lineare Abbildung stetig in  $\varphi = 0$ , denn

$$\|F_u(\varphi) - F_u(0)\|_{1,p} = \|F_u(\varphi) - u\|_{1,p} = \|h\|_{1,p} \leq c(p, \Omega, u)\|\varphi\|_{1,\infty}.$$

Zu (iii):

Sei  $\varphi \in B_r(0) \cap X$  eine beliebige, aber fest gewählte Funktion, die für (5.26)–(5.27) zulässig ist. Für die Funktion  $u_\varphi$  ist zu zeigen:

- (1)  $u_\varphi$  erfüllt (5.2),
- (2)  $u_\varphi$  genügt der Ciarlet-Nečas Bedingung (5.3).

Nach Konstruktion des Raumes  $X$  gilt  $\varphi(u(\Gamma_D)) = 0$  für alle  $\varphi \in X$ . Es folgt  $u_\varphi = u$  auf  $\Gamma_D$  für alle  $\varphi \in X$ . Daher erfüllt  $u_\varphi$  die Dirichletrandbedingung (5.2). Nach Konstruktion folgt weiterhin mit Proposition 2.10, dass  $u_\varphi$  der Ciarlet-Nečas Bedingung (2.14) genügt, da  $\varphi \in X$  die Nebenbedingungen  $g(\varphi) \leq 0$  und  $\|\varphi\|_{1,\infty} \leq r$  erfüllt.

◇

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun den Beweisschritt 2 abschließen. Denn da  $u$  lokaler Minimierer des Ausgangsproblems (5.1)–(5.3) ist, existiert eine Konstante  $\rho > 0$ , so dass

$$(5.34) \quad E(u) \leq E(v)$$

für alle  $v \in B_\rho(u) \subset \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , die (5.2) und (5.3) erfüllen. Weiterhin folgt aus (5.30) die Relation

$$(5.35) \quad u_\varphi \in B_\rho(u) \quad \text{für alle } \varphi \in B_{\tilde{\rho}}(0) \cap X$$

mit  $\tilde{\rho} < \rho/c$ , wobei  $c$  die Konstante aus (5.30) bezeichnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $\tilde{\rho} < r$  annehmen, wodurch alle  $u_\varphi$  mit  $\|\varphi\|_{1,\infty} \leq \tilde{\rho}$  und  $\varphi \in X$  den Bedingungen (5.2) und (5.3) genügen. Durch Einsetzen der Funktionen  $v = u_\varphi$  in (5.34) ergibt sich  $\hat{E}(\varphi) = E(u_\varphi) \geq E(u)$  für alle  $\varphi \in B_{\tilde{\rho}}(0) \cap X$ . Nach Konstruktion gilt  $\hat{E}(0) = E(u)$  und somit ist  $\psi = 0$  lokaler Minimierer von (5.26)–(5.27).

SCHRITT 3 (*Gâteaux-Differenzierbarkeit der Energie  $\hat{E}$* )

Da wir die nichtglatte Multiplikatorenregel (vgl. Proposition 4.3,(vi)) aus Kapitel 4 anwenden wollen, ist die stetige Gâteaux-Differenzierbarkeit der Energie  $\hat{E}$  zu zeigen. Dazu betrachten wir die durch

$$\begin{aligned}\hat{E}(\varphi) &= E(u_\varphi) \\ &= \int_{\Omega} W(x, D_x u_\varphi(x)) dx - \int_{\bar{\Omega}} u_\varphi(x) df(x) \\ &= \hat{E}_s(\varphi) + \hat{E}_p(\varphi)\end{aligned}$$

gegebene Zerlegung und behandeln die potentielle sowie die elastische Energie getrennt.

Zunächst wird die Gâteaux-Differenzierbarkeit der potentiellen Energie  $\hat{E}_p$  studiert. Offenbar ist das Funktional  $\hat{E}_p(\cdot)$  affin linear. Ist  $\{\varphi_i\}$ ,  $\varphi_i \in X$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , eine Folge mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi\|_{1,\infty} = 0$ , so folgt

$$\begin{aligned}|\hat{E}_p(\varphi_n) - \hat{E}_p(\varphi)| &= \left| \int_{\bar{\Omega}} [\varphi_i(u(x)) - \varphi(u(x))] df(x) \right| \\ &\leq \left| \int_{\bar{\Omega}} |\varphi_i(u(x)) - \varphi(u(x))| df(x) \right| \\ &\leq c \|\varphi_i - \varphi\|_{1,\infty} \\ &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Damit ist  $\hat{E}_p$  eine affin lineare stetige Abbildung auf dem Raum der zulässigen Funktionen. Die potentielle Energie  $\hat{E}_p$  ist daher Gâteaux-differenzierbar auf  $X$ . Für die Gâteaux-Ableitung von  $\hat{E}_p$  folgt

$$(5.36) \quad \langle \hat{E}'_p(\psi), \varphi \rangle = - \int_{\bar{\Omega}} \varphi(u(x)) df(x) \quad \text{für alle } \psi, \varphi \in X.$$

Ferner ist  $\hat{E}'_p(\cdot) : X \rightarrow X^*$  stetig auf  $X$ . Die Gâteaux-Differenzierbarkeit der elastischen Energie  $\hat{E}_s$  wird im nächsten Lemma bewiesen.

**Lemma 5.9** *Seien (W1) und eine der Wachstumsbedingungen (W2) oder (W2') erfüllt. Dann existiert eine Konstante  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , so dass die elasti-*

sche Energie  $\hat{E}_s$  auf  $B_{\varepsilon}(0) \cap X$  Gâteaux-differenzierbar ist. Mit der Funktion  $\tilde{W}(x, F) := W(x, Du(x) + F)$  für alle  $(x, F) \in \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gilt

$$(5.37) \quad \langle \hat{E}'_s(\psi), \varphi \rangle = \int_{\Omega} D_F \tilde{W} \left( x, D_w \psi(u(x)) Du(x) \right) Du(x)^T : D_w \varphi(u(x)) dx$$

für alle  $\psi \in B_{\varepsilon}(0) \cap X$  und alle  $\varphi \in X$ . Darüber hinaus ist das Funktional  $\hat{E}'_s(\cdot)$  stetig auf  $X \cap B_{\varepsilon}(0)$ .

BEWEIS von Lemma 5.9.

Sei zunächst (W2) gegeben. In diesem Fall ist keine Einschränkung auf eine Umgebung um 0 notwendig. Seien  $\psi, \varphi \in X$  beliebig, aber fest gewählt. Für die Hilfsfunktion  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b(t) := \hat{E}_s(\psi + t\varphi)$  ergibt sich für  $t \neq 0$  der Differenzenquotient zu

$$\frac{b(t) - b(0)}{t} = \int_{\Omega} \frac{1}{t} \left\{ \tilde{W} \left( x, D_w(\psi + t\varphi)(u(x)) Du(x) \right) - \tilde{W} \left( x, D_w \psi(u(x)) Du(x) \right) \right\} dx.$$

Bezeichnet man den Integranden im obigen Integral mit  $c_t(x)$ , so erhält man mit Voraussetzung (W1) und Lemma 5.7 für fast alle  $x \in \Omega$  die Relation

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} c_t(x) &= D_F \tilde{W} \left( x, D_w \psi(u(x)) Du(x) \right) : D_w \varphi(u(x)) Du(x) \\ &= D_F \tilde{W} \left( x, D_w \psi(u(x)) Du(x) \right) Du(x)^T : D_w \varphi(u(x)). \end{aligned}$$

Um den Satz über dominierte Konvergenz anwenden zu können, muss der Betrag von  $c_t(x)$  durch eine  $L^1$ -Majorante kontrolliert werden. Dabei reicht es aus, den Fall  $t > 0$  zu betrachten. Mit der Wachstumsbeschränkung (W2) und  $c_{\varphi} = \|\varphi\|_{1, \infty}$  folgt

$$\begin{aligned} |c_t(x)| &= t^{-1} \left| \tilde{W} \left( x, D_w(\psi + t\varphi)(u(x)) Du(x) \right) - \tilde{W} \left( x, D_w \psi(u(x)) Du(x) \right) \right| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{ds} \tilde{W} \left( x, D_w(\psi + s\varphi)(u(x)) Du(x) \right) ds \right| \\
&\leq \sup_{s \in [0,t]} \left| D_F \tilde{W} \left( x, D_w(\psi + s\varphi)(u(x)) Du(x) \right) \right| |D_w \varphi(u(x)) Du(x)| \\
&\leq c_\varphi \sup_{s \in [0,t]} \left| D_F \tilde{W} \left( x, D_w(\psi + s\varphi)(u(x)) Du(x) \right) \right| |Du(x)| \\
&= c_\varphi |Du(x)| \sup_{s \in [0,t]} \left| D_F W \left( x, Du(x) + D_w(\psi + s\varphi)(u(x)) Du(x) \right) \right| \\
&\leq c_\varphi |Du(x)| \left\{ \gamma(x) + c |Du(x)|^{p-1} \sup_{s \in [0,t]} |Id + D_w(\psi + s\varphi)(u(x))|^{p-1} \right\} \\
&\leq \tilde{c} \{ \gamma(x) |Du(x)| + |Du(x)|^p \}
\end{aligned}$$

für alle  $|t| < 1$  und fast alle  $x \in \Omega$ . Nach (W2) gilt  $\gamma \in \mathcal{L}^{p/(p-1)}(\Omega, \mathbb{R})$ . Nach der Hölderungleichung ist daher die Funktion

$$(5.38) \quad \tilde{\gamma}(x) := \gamma(x) |Du(x)| + |Du(x)|^p$$

eine  $\mathcal{L}^1$ -Funktion. Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (b(t) - b(0)) \\
&= \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} c_t(x) dx \\
&= \int_{\Omega} D_F \tilde{W} \left( x, D_w \psi(u(x)) Du(x) \right) Du(x)^T : D_w \varphi(u(x)) dx.
\end{aligned}$$

Somit ist  $\hat{E}_s$  Gâteaux-differenzierbar und die Ableitung ist gemäß (5.37) gegeben.

Für den Nachweis der Stetigkeit von  $\hat{E}'_s$  definieren wir zunächst die Funktion  $\hat{w}$  durch

$$\hat{w}(x, \psi) = D_F \tilde{W} \left( x, D_w \psi(u(x)) Du(x) \right) \quad \text{für alle } (x, \psi) \in \Omega \times X.$$

Sei nun  $\{\psi_i\}$  eine Folge in  $X$  mit  $\psi_i \rightarrow \psi$  in  $X$ . Damit gilt insbesondere  $D_w \psi_i(w) \rightarrow D_w \psi(w)$  für fast alle  $w \in u(\Omega)$ . Nach Voraussetzung (A1) erhalten wir  $D_w \psi_i(u(x)) \rightarrow D_w \psi(u(x))$  für fast alle  $x \in \Omega$ . Nach Voraussetzung

(W1) ist die Funktion  $D_F W(x, \cdot)$  für alle  $x \in \Omega$  stetig. Somit folgt

$$(5.39) \quad \begin{aligned} \hat{w}(x, \psi_i) &= D_F W\left(x, Du(x) + D_w \psi_i(u(x)) Du(x)\right) \\ &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} D_F W\left(x, Du(x) + D_w \psi(u(x)) Du(x)\right) = \hat{w}(x, \psi) \end{aligned}$$

für fast alle  $x \in \Omega$ . Mit (W2) erhält man für fast alle  $x \in \Omega$  und für alle  $i \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\hat{w}(x, \psi_i) Du(x)^T| &= \left| D_F \tilde{W}\left(x, D_w \psi_i(u(x)) Du(x)\right) Du(x)^T \right| \\ &\leq |Du(x)| \{ \gamma(x) + c |Du(x) + D_w \psi_i(u(x)) Du(x)|^{p-1} \} \\ &\leq |Du(x)| \gamma(x) + c |Du(x)|^p |Id + D_w \psi_i(u(x))|^{p-1} \\ &\leq c \{ |Du(x)| \gamma(x) + |Du(x)|^p \} \\ &= c \tilde{\gamma}(x). \end{aligned}$$

Zu der oben gewählten Folge  $\{\psi_i\}$  existieren nun Funktionen  $\varphi_i \in X$ ,  $\|\varphi_i\|_{1,\infty} \leq 1$ , so dass

$$\begin{aligned} \|\hat{E}'_s(\psi_i) - \hat{E}'_s(\psi)\|_{X_0^*} &= \sup_{\varphi \in X, \|\varphi\| \leq 1} \left| \langle \hat{E}'_s(\psi_i) - \hat{E}'_s(\psi), \varphi \rangle \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \left( \hat{w}(x, \psi_i) - \hat{w}(x, \psi) \right) Du(x)^T : D_w \varphi_i(u(x)) dx \right| + \frac{1}{i} \\ &\leq \int_{\Omega} |\hat{w}(x, \psi_i) - \hat{w}(x, \psi)| |Du(x)| dx + \frac{1}{i} \end{aligned}$$

gilt. Mit (5.39) und  $w(x, \psi_i) \leq c \tilde{\gamma}(x)$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  sowie fast alle  $x \in \Omega$  liefert nun der Satz über dominierte Konvergenz, dass  $\|\hat{E}'_s(\psi_i) - \hat{E}'_s(\psi)\|_{X^*} \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ . Somit konvergiert  $\hat{E}'_s(\psi_i)$  in  $X^*$  gegen  $\hat{E}'_s(\psi)$  und die Stetigkeit der Abbildung  $\hat{E}'_s(\cdot)$  ist gezeigt.

Nun setzen wir statt (W2) die Bedingung (W2') voraus. Es gibt dann eine Konstante  $\tilde{\varepsilon} > 0$  derart, dass für alle  $\varphi \in B_{\tilde{\varepsilon}}(0) \subset \mathcal{W}^{1,\infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  und

fast alle  $w \in u(\Omega)$  die Relationen

$$(5.40) \quad \det (Id + D_w \varphi(w)) > 0, |D_w \varphi(w)| < \varepsilon_0/2$$

gelten. Damit wird für Matrizen  $C$  der Form  $C = Id + (D_w \varphi)(u(x))$  die Bedingung  $|C - Id| < \varepsilon_0$ , die zur Verwendung der Wachstumsbedingung (W2') benötigt wird, erreicht.

Sei nun  $\psi \in X \cap B_{\varepsilon}(0)$ . Für beliebiges, aber festes  $\varphi \in X$  existiert eine Konstante  $t_0 > 0$ , so dass alle Funktionen  $\eta_t(w) := \psi(w) + t\varphi(w)$  ebenfalls in  $B_{\varepsilon}(0) \cap X$  liegen und somit die Abschätzungen

$$(5.41) \quad \det (Id + D_w \eta_t(w)) > 0, |D_w \eta_t(w)| < \varepsilon_0$$

erfüllen, sofern  $|t| < t_0$ . Unter diesen Einschränkungen kann zum Nachweis der Gâteaux-Differenzierbarkeit genauso verfahren werden wie im vorherigen Fall. Lediglich die  $L^1$ -Majorante für die Funktion  $c_t(x)$  besitzt eine andere Form, denn für  $t$  mit  $t \in (0, t_0)$  und fast alle  $x$  ergibt sich

$$\begin{aligned} |c_t(x)| &= t^{-1} \left| \tilde{W} \left( x, D_w(\psi + t\varphi)(u(x)) Du(x) \right) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{W} \left( x, D_w\psi(u(x)) Du(x) \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{ds} \tilde{W} \left( x, D_w(\psi + s\varphi)(u(x)) Du(x) \right) ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} \int_0^t D_F W \left( x, Du(x) + D_w(\psi + s\varphi)(u(x)) Du(x) \right) \right. \\ &\quad \left. : D_w\varphi(u(x)) Du(x) ds \right| \\ &\leq \frac{c_\varphi}{t} \int_0^t \left| D_F W \left( x, Du(x) + D_w(\psi + s\varphi)(u(x)) Du(x) \right) Du(x)^T \right| ds. \end{aligned}$$

Offenbar erfüllen die Matrizen  $C_s := Id + D_w(\psi + s\varphi)(u(x))$  die Bedingungen  $\det C_s > 0$  sowie  $|C_s - Id| < \varepsilon_0$  für alle  $s \in (0, t_0)$  und fast alle  $x \in \Omega$  (vgl. (5.41)). Damit ergibt sich mit (W2') für fast alle  $x \in \Omega$  sowie alle  $s \in (0, t_0)$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& |D_F W\left(x, Du(x) + D_w(\psi + s\varphi)(u(x)) Du(x)\right) Du(x)^T| \\
&= |D_F W\left(x, C_s Du(x)\right) Du(x)^T| \\
&\leq c(W(x, Du(x)) + 1).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung können wir  $|c_t(x)|$  weiter abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned}
|c_t(x)| &\leq \frac{c_\varphi}{t} \int_0^t c(W(x, Du(x)) + 1) ds \\
&\leq c c_\varphi (W(x, Du(x)) + 1)
\end{aligned}$$

für alle  $t \in (0, t_0)$  und fast alle  $x \in \Omega$ .

Zum Beweis der Stetigkeit der Ableitung verfahren wir auf gleiche Weise wie unter der Voraussetzung (W2). Sei dazu wiederum  $\{\psi_i\}$  eine Folge mit  $\psi_i \in B_{\bar{\varepsilon}}(0) \cap X$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und  $\psi_i \rightarrow \psi$  in  $X$ . Wie im ersten Fall erhalten wir (5.39), d.h die punktweise Konvergenz der Funktionenfolge  $\hat{w}(x, \psi_i)$  für fast alle  $x \in \Omega$ . Um den Satz über majorisierte Konvergenz anwenden zu können, benötigen wir eine  $L^1$ -Majorante für die Funktionen  $\hat{w}(x, \psi) Du(x)^T$ . Nach Wahl der Folge  $\{\psi_i\}$  gelten für fast alle  $x \in \Omega$  und alle  $i \in \mathbb{N}$  die Ungleichungen  $\det(Id + D_w \psi_i(u(x))) > 0$  und  $|D_w \psi_i(u(x))| < \varepsilon_0$ . Somit können wir (W2') für die Matrizen  $C_i = Id + D_w \psi_i(u(x))$  anwenden. Für fast alle  $x \in \Omega$  und alle  $i \in \mathbb{N}$  folgt

$$\begin{aligned}
& |\hat{w}(x, \psi_i) Du(x)^T| \\
&= \left| D_F W\left(x, Du(x) + D_w \psi_i(u(x)) Du(x)\right) Du(x)^T \right| \\
&= \left| D_F W\left(x, (Id + D_w \psi_i(u(x))) Du(x)\right) Du(x)^T \right| \\
&\leq c(W(x, Du(x)) + 1).
\end{aligned}$$

Analog zum ersten Fall folgt nun die Stetigkeit des Funktionals  $\hat{E}'_s(\cdot)$  mit dem Satz über dominierte Konvergenz.  $\diamond$

Insgesamt ist demnach  $\hat{E} = \hat{E}_s + \hat{E}_p$  auf  $B_\varepsilon(0) \cap X$  stetig Gâteaux-differenzierbar. Proposition 4.3 aus Kapitel 4 liefert daher

$$\{\hat{E}'(0)\} = \partial\hat{E}'(0) = \partial\hat{E}'_s(0) + \partial\hat{E}'_p(0) = \{\hat{E}'_s(0)\} + \{\hat{E}'_p(0)\}.$$

#### SCHRITT 4 (Der verallgemeinerte Gradient $\partial g(0)$ )

Zur Berechnung des verallgemeinerten Gradienten von  $g$  an der Stelle  $\varphi = 0$  benutzen wir Proposition 4.8 aus Kapitel 4. Um die Funktion  $g$  wie in (4.7) darstellen zu können, definieren wir eine Hilfsfunktion  $p : \bar{\Omega} \times X \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$(5.42) \quad p(x, \varphi) := u_\varphi(x) = u(x) + \varphi(u(x)).$$

Mit dieser Funktion und der kompakten Menge  $K = \Gamma$  hat  $g$  die gewünschte Form (4.7). Weiterhin ist mit  $K = \Gamma$ ,  $X$  wie in (5.4),  $U = B_r(0) \cap X$  sowie  $V = \mathbb{R}^3$  die Voraussetzung (C1) von Proposition 2.10 erfüllt. Weiterhin setzen wir  $q_0(x) = u(x)$  und  $r(x) = r_0 = r$ . Dann sind mit der in (2.33) definierten Abstandsfunktion  $d(q, x)$  auch (C2), (C3) und (C5) gegeben (s. dazu Lemma 2.8 und Schritt 3 im Beweis von Proposition 2.10).

Verbleibt einzig noch Voraussetzung (C4). Die darin geforderten Eigenschaften der Funktion  $p$  werden im nächsten Lemma gezeigt.

**Lemma 5.10** *Die durch (5.42) gegebene Funktion  $p$  besitzt folgende Eigenschaften:*

- (i)  $p(\cdot, \cdot)$  ist stetig auf  $\Gamma \times X$ .
- (ii) Für alle  $(x, \varphi) \in \Gamma \times (X \cap B_r(0))$  gilt  $p(x, \varphi) \in B_r(u(x))$ .
- (iii)  $p(x, \cdot)$  ist Gâteaux-differenzierbar auf  $X$  für alle  $x \in \Gamma$ .
- (iv) Die Funktion  $p_\varphi(\cdot, \cdot)$  ist stetig auf  $\Gamma \times X$ .

BEWEIS von Lemma 5.10.

Zu (i):

Sei  $(x_n, \varphi_n) \in \Gamma \times X$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \varphi_n) = (x, \varphi)$ . Dann

existiert ein Index  $n_0 = n_0(x)$  sowie ein  $j = j(x) \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$ , so dass

$$x_n \in B_{\tilde{\sigma}_j}(x_j) \cap \bar{\Omega} \quad \forall n \geq n_0.$$

Dabei ist  $\tilde{k}$  die Konstante, die zur Überdeckung von  $\partial\Omega$  bzw.  $u(\bar{\Omega})$  gemäß Kapitel 2 gehört. Mit den ebenfalls in diesem Kapitel konstruierten Mengen  $V_j$  ergibt sich weiterhin  $u(x_n) \in \bar{V}_j$  für alle  $n \geq n_0$ . Nach Schritt 2 des Beweises von Proposition 2.10 ist jedes  $\varphi \in X$  Lipschitz-stetig auf  $\bar{V}_j$ , wobei mit einer Konstante  $c_j = c_j(V_j)$  die Lipschitzkonstante der Abschätzung

$$(5.43) \quad l_\varphi \leq c_j \|\varphi\|_{1,\infty} \quad \forall \varphi \in X$$

genügt.

Dadurch erhalten wir für alle natürlichen Zahlen  $n \geq n_0$  nun

$$\begin{aligned} |p(x_n, \varphi_n) - p(x, \varphi)| &= |u(x_n) + \varphi_n(u(x_n)) - u(x) - \varphi(u(x))| \\ &\leq |u(x_n) - u(x)| + |\varphi_n(u(x_n)) - \varphi(u(x_n))| + |\varphi(u(x_n)) - \varphi(u(x))| \\ &\leq |u(x_n) - u(x)| + \|\varphi_n - \varphi\|_\infty + c_j \|\varphi\|_{1,\infty} |u(x_n) - u(x)|. \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit des Minimierers  $u$  folgt die Stetigkeit der Funktion  $p$ .

Zu (ii) :

Aus der Konstruktion der Konfigurationen  $u_\varphi(x) = u(x) + \varphi(u(x))$  folgt  $|p(x, \varphi) - u(x)| < r$  für alle  $\varphi \in B_r(0) \cap X$  und alle  $x \in \Gamma$ .

Zu (iii) :

Sei  $x \in \Gamma$  beliebig, aber fest. Dann ist die Funktion  $p(x, \cdot)$  offenbar affin linear. Nach (i) ist sie auch stetig und daher Gâteaux-differenzierbar auf  $X$ . Man berechnet

$$p_\varphi(x, \varphi)\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p(x, \varphi + t\psi) - p(x, \varphi)}{t} = \psi(u(x)).$$

Zu (iv) :

Sei  $(x_n, \varphi_n)$  wie in (i), d.h. es gelte  $u(x_n) \in \bar{V}_j$  für alle  $n \geq n_0$  mit einem geeigneten Index  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Es existieren Funktionen  $\psi_n \in X$ ,

$\|\psi_n\|_{1,\infty} \leq 1$ , so dass

$$\begin{aligned} \|p_\varphi(x_n, \varphi_n) - p_\varphi(x, \varphi)\| &= \sup_{\psi \in X, \|\psi\|_{1,\infty} \leq 1} |(p_\varphi(x_n, \varphi_n) - p_\varphi(x, \varphi)) \psi| \\ &\leq |(p_\varphi(x_n, \varphi_n) - p_\varphi(x, \varphi)) \psi_n| + \frac{1}{n} \\ &= |\psi_n(u(x_n)) - \psi_n(u(x))| + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Da jede Funktion  $\psi_n$  Lipschitz-stetig ist auf  $\bar{V}_j$  mit  $l_{\psi_n} \leq c_j \|\psi_n\|_{1,\infty}$ , erhalten wir

$$\|p_\varphi(x_n, \varphi_n) - p_\varphi(x, \varphi)\| \leq c_j |u(x_n) - u(x)| + \frac{1}{n}$$

für alle  $n \geq n_0$ . Da  $u$  stetig ist, folgt die Behauptung. ◇

Damit sind die Voraussetzungen von Proposition 4.8 verifiziert. Somit existieren für alle  $g^* \in \partial g(0)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in R_1[\Gamma]$  sowie eine  $\mu$ -integrierbare Funktion

$$x \rightarrow d_c(x) \in \partial_q d(p(x, 0), x) \quad \text{auf } \Gamma$$

derart, dass

$$\begin{aligned} \langle g^*, \psi \rangle &= \int_\Gamma \langle d_c(x), p_\varphi(x, 0) \psi \rangle d\mu(x) \\ (5.44) \quad &= \int_\Gamma \langle d_c(x), \psi(u(x)) \rangle d\mu(x) \quad \text{für alle } \psi \in X. \end{aligned}$$

Wir werden später im Beweisschritt 6 zeigen, dass der Träger des Maßes  $\mu$  sogar in der Menge der Kontaktargumente  $\Omega_c$  enthalten ist, d. h. durch das Maß  $\mu$  wird nur der Selbstkontakt des Körpers beschrieben. Daher liefern nur Kontaktargumente einen Beitrag zum Integral in (5.44) und die Bezeichnung Kontaktmaß für  $\mu$  ist gerechtfertigt.

SCHRITT 5 (*Nichtglatte Lagrange-Multiplikatorenregel*)

Das Energiefunktional  $\hat{E}$  ist nach Schritt 3 in einer Umgebung des Ursprungs stetig Gâteaux-differenzierbar und die Funktion  $g$ , die die Nebenbe-

dingung (5.27) beschreibt, ist in einer Umgebung von  $\varphi = 0$  Lipschitz-stetig. Damit können wir auf das Variationsproblem (5.26)–(5.27) mit dem lokalen Minimierer  $\varphi = 0$  die Lagrange-Multiplikatorenregel aus Proposition 4.3 (siehe Kapitel 4) anwenden. Daher existieren Konstanten  $\lambda, \tilde{\lambda} \geq 0$ , nicht beide gleich Null, und ein Element  $g^* \in \partial g(0)$ , so dass

$$(5.45) \quad 0 = \lambda \hat{E}'(0) + \tilde{\lambda} g^* .$$

Einsetzen von (5.36), (5.37) und (5.44) in (5.45) liefert die Euler-Lagrange Gleichung

$$(5.46) \quad 0 = \lambda \int_{\Omega} D_F W(x, Du(x)) Du(x)^T : (D_w \varphi)(u(x)) dx \\ - \lambda \int_{\bar{\Omega}} \varphi(u(x)) df(x) + \tilde{\lambda} \int_{\Gamma} \langle d_c(x), \varphi(u(x)) \rangle d\mu(x)$$

für alle  $\varphi \in X$ , wobei alle auftretenden Integrale existieren.

Nun zeigen wir durch Widerspruch, dass die Konstante  $\lambda$  in (5.46) strikt positiv ist.

Sei dazu  $\lambda = 0$  in (5.46). Dann ist  $\tilde{\lambda} > 0$  und aus (5.46) ergibt sich für alle Störungen  $\varphi \in X$  die Gleichung

$$(5.47) \quad \int_{\Gamma} \langle d_c(x), \varphi(u(x)) \rangle d\mu(x) = 0 .$$

Da  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gibt es ein  $x' \in \Gamma$  mit

$$(5.48) \quad \mu(\Gamma \cap \bar{B}_\varepsilon(x')) > 0$$

für alle  $\varepsilon > 0$ . Offenbar gilt  $u(x') \in u(\partial\Omega)$ . Nach Proposition 4.5 existieren daher eine Umgebung  $U'$  von  $u(x')$  sowie ein Vektor  $z' \in \mathbb{R}^3$ , so dass für alle  $w \in U'$  und alle  $d^* \in \partial_q d(w, x)$  die Abschätzung

$$(5.49) \quad \langle d^*, z' \rangle \geq c' > 0$$

mit einer positiven Konstante  $c'$  erfüllt ist. Ferner gibt es eine positive Kon-



stante  $r' < r$ , so dass

$$(5.50) \quad B_{r'}(u(x')) \subset\subset U'.$$

Nach Schritt 3 im Beweis von Proposition 2.10 gilt

$$(5.51) \quad d(q, y) = d(q, x') \quad \forall y \in B_{s(x')}(x') \cap \partial\Omega, q \in Q_r(y)$$

mit einer geeigneten Konstanten  $s(x') > 0$  und  $Q_r(y) = B_r(u(y)) \cap B_r(u(x'))$ . Insbesondere ist  $Q_r(y) \neq \emptyset$  für alle  $y \in B_{s(x')}(x') \cap \partial\Omega$ .

Nach der Konstruktion der Überdeckung von  $\partial\Omega$  in Kapitel 2 hat man  $x' \in B_{\sigma_i}(x_i)$  für ein  $i \in \{k_D + 1, \dots, \tilde{k}\}$  (vgl. (2.52)). Da die Urbildmenge  $u^{-1}(u(x'))$  nach Lemma 2.7 nur endlich viele Elemente besitzt und  $u$  auf  $\bar{\Omega}$  stetig ist, finden wir eine positive Konstante  $\alpha < s(x')$ , so dass die Relationen

$$(5.52) \quad \bar{B}_\alpha(x') \subset B_{\sigma_i}(x_i),$$

$$(5.53) \quad \bar{B}_\alpha(x') \cap \bar{B}_\alpha(y) = \emptyset \quad \text{für alle } y \in u^{-1}(u(x')), y \neq x'$$

und

$$(5.54) \quad u(\bar{B}_\alpha(x') \cap \bar{\Omega}) \subset B_{r'}(u(x))$$

erfüllt sind. Damit erhalten wir nach Wahl von  $\alpha$ , (5.52) und Voraussetzung (A3) nun

$$(5.55) \quad \begin{cases} M_{\alpha'} \subset B_r(u(x)) \cap V_i, \\ \bar{M}_{\alpha'} \cap u(\Gamma_D) = \emptyset \end{cases}$$

für alle  $\alpha' \leq \alpha$ , wobei  $M_t := u(B_t(x') \cap \Omega)$  für ein positives  $t$  gesetzt wird und  $V_i$  die zu  $x_i$  korrespondierende Menge gemäß (2.29) bezeichnet.

Wegen der Injektivität von  $u$  auf  $\bar{\Omega}_i$  gilt

$$M_t \subsetneq M_{t'} \quad \text{für alle } 0 < t < t' \leq \alpha.$$

Dadurch können wir eine Funktion  $h_0 \in \mathcal{W}^{1,\infty}(u(\Omega), \mathbb{R}^3)$  wählen, die die

Eigenschaften

- (i)  $h_0(w) = 1$  für alle  $w \in M_{\alpha/4}$ ,
- (ii)  $h_0(w) \geq 0$  für alle  $w \in M_{\alpha/2} \setminus M_{\alpha/4}$ ,
- (iii)  $h_0(w) = 0$  für alle  $w \in u(\Omega) \setminus M_{\alpha/2}$

besitzt. Aus (5.55) erhalten wir  $h_0(w) = 0$  für alle Bildpunkte  $w \in u(\Gamma_D)$ . Daher ist die Funktion  $\varphi_0(w) := h_0(w) \cdot z'$  ein Element aus  $X$ . Insbesondere folgt aus (5.55) auch  $h_0(u(x)) = 0$  für alle  $x \in \partial\Omega \setminus \bar{B}_{\alpha/2}(x')$ .

Aus der Konstruktion der Funktion  $h_0$ , (5.49)–(5.51) und (5.54) folgt

$$(5.56) \quad \begin{cases} \langle d_c(x), \varphi_0(u(x)) \rangle \geq c' > 0 & \text{für alle } x \in B_{\alpha/4}(x') \cap \Gamma, \\ \langle d_c(x), \varphi_0(u(x)) \rangle \geq 0 & \text{für alle } x \in \Gamma. \end{cases}$$

Einsetzen dieser Funktion  $\varphi_0$  in (5.47) liefert mit (5.48) und (5.56) die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} h_0(u(x)) \langle d_c(x), z \rangle d\mu(x) \\ &\geq c' \int_{\Gamma} h_0(u(x)) d\mu(x) \\ &\geq c' \int_{B_{\alpha/4}(x') \cap \Gamma} h_0(u(x)) d\mu(x) > 0. \end{aligned}$$

Damit führt die Annahme  $\lambda = 0$  zu einem Widerspruch. Wir erhalten demnach  $\lambda > 0$  und können in (5.9) durch  $\lambda$  dividieren. Mit dem Radonmaß

$$(5.57) \quad \mu_c := \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \mu$$

geht die Gleichung (5.46) dann in

$$(5.58) \quad 0 = \int_{\Omega} D_F W(x, Du(x)) Du(x)^T : (D_w \varphi)(u(x)) dx \\ - \int_{\bar{\Omega}} \varphi(u(x)) df(x) + \int_{\Gamma} \langle d_c(x), \varphi(u(x)) \rangle d\mu_c(x)$$

für alle  $\varphi \in X$  über. Dies ist gerade die Euler-Lagrange Gleichung (5.7).

SCHRITT 6 (*Der Träger von  $\mu_c$* )

Um den Beweis des Theorems abzuschließen, ist noch zu zeigen, dass das in (5.57) definierte Maß  $\mu_c$  die Relation

$$(5.59) \quad \text{supp } \mu_c \subset \Omega_c$$

erfüllt (und somit die Bezeichnung Kontaktmaß gerechtfertigt ist, vgl. Ausführungen am Ende von Beweisschritt 4).

Dazu leiten wir zunächst eine weitere Euler-Lagrange Gleichung für den lokalen Minimierer  $u$  des Ausgangsproblems (5.1)–(5.3) her. Wie Ball in [8] betrachten wir dazu auf dem in (5.8) eingeführten Raum

$$\tilde{X} = \{\varphi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(B_R(0), \mathbb{R}^3) \mid \varphi(w) = 0 \text{ für } w \in u(\Gamma_D)\}$$

das Variationsproblem

$$(5.60) \quad \hat{E}(\varphi) \rightarrow \text{Min!}, \quad \varphi \in \tilde{X}.$$

Für die Konfigurationen  $u_\varphi$  mit  $\varphi \in \tilde{X}$  liefert die Lipschitz-Stetigkeit von  $\varphi$  für beliebige  $x, y \in \Omega$  mit  $u_\varphi(x) = u_\varphi(y)$  die Relation

$$(5.61) \quad |u(x) - u(y)| = |\varphi(u(x)) - \varphi(u(y))| \leq l_\varphi |u(x) - u(y)|.$$

Damit sind die Konfigurationen  $u_\varphi$  für  $\varphi \in \tilde{X}$  mit  $l_\varphi < 1$  injektiv auf  $\Omega$ , da  $u$  nach Voraussetzung (A1) injektiv auf  $\Omega$  ist. Der Definitionsbereich der Funktionen  $\varphi \in \tilde{X}$  ist konvex. Es folgt

$$l_\varphi \leq \|D\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_{1,\infty}$$

für alle  $\varphi \in \tilde{X}$ . Daher erfüllt jede Funktion  $u_\varphi$  die Ciarlet-Nečas Bedingung (5.3), falls  $\varphi \in \tilde{X}$  der Ungleichung  $\|\varphi\|_{1,\infty} < 1$  genügt. Aus  $\tilde{X} \subset X$  folgt mit Beweisschritt 2, dass  $\psi = 0$  ein lokaler Minimierer von (5.60) ist. Nach Schritt 3 erhalten wir mit den Formeln für die Gâteaux-Ableitungen der Energien

$\hat{E}_p$  und  $\hat{E}_s$  (vgl. (5.36) und (5.37)) somit

$$(5.62) \quad 0 = \int_{\Omega} D_F W(x, Du(x)) Du(x)^T : (D_w \varphi)(u(x)) dx - \int_{\bar{\Omega}} \varphi(u(x)) df(x)$$

für alle  $\varphi \in \tilde{X}$ . Zusammen mit (5.58) folgt

$$(5.63) \quad \int_{\Gamma} \text{dist}_{\tilde{V}}(u(x)) \langle d_c(x), \tilde{z} \rangle d\mu_c(x) = 0.$$

für alle  $\varphi \in \tilde{X}$ .

Nun nehmen wir an, dass (5.59) nicht gilt. Dann existiert ein  $\tilde{x} \in \text{supp } \mu$  mit

$$\tilde{x} \in (\Omega_c)^c.$$

Analog zu Schritt 5 konstruieren wir eine geeignete Testfunktion, um einen Widerspruch zu (5.63) herzustellen. Da wir in dieser Situation die Funktion explizit angeben, führen wir die Details der Konstruktion aus.

Zunächst existieren nach Proposition 4.5 wieder eine Umgebung  $\tilde{U}$  von  $u(\tilde{x})$ , ein Vektor  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^3$  und eine Konstante  $\tilde{c} > 0$ , so dass für alle  $w \in \tilde{U}$  und alle  $d^* \in \partial_q d(w, \tilde{x})$  die Abschätzung

$$\langle d^*, \tilde{z} \rangle \geq c > 0$$

gegeben ist. Ferner gilt mit einem geeigneten Index  $j \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$  auch  $\tilde{x} \in B_{\tilde{\sigma}_j}(x_j) \cap \Gamma$ . Dazu haben wir (5.51) (mit  $\tilde{x}$  statt  $x'$  und  $s(\tilde{x}) > 0$ ).

Wir wählen nun  $\tilde{\alpha} \in (0, s(\tilde{x}))$ , so dass

$$(5.64) \quad \begin{cases} \bar{B}_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) \cap \Gamma_D = \emptyset, \\ \bar{B}_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) \subset B_{\tilde{\sigma}_j}(x_j), \\ u(\bar{B}_{\tilde{\alpha}} \cap \bar{\Omega}) \subset \tilde{U}. \end{cases}$$

Ebenso existiert wegen  $\tilde{x} \notin \Omega_c$  und der Injektivität von  $u$  auf  $\bar{B}_{\sigma_j}(x_j) \cap \bar{\Omega}$  (vgl. Lemma 2.7) eine Konstante  $\beta > 0$  mit

$$(5.65) \quad \bar{B}_{\beta}(u(\tilde{x})) \cap u(\bar{\Omega} \setminus B_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x})) = \emptyset$$

(vgl. Abb. 5.2). Weiterhin können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch

$$(5.66) \quad \bar{B}_\beta(u(\tilde{x})) \subset\subset \tilde{U} \cap B_r(u(\tilde{x}))$$

annehmen.

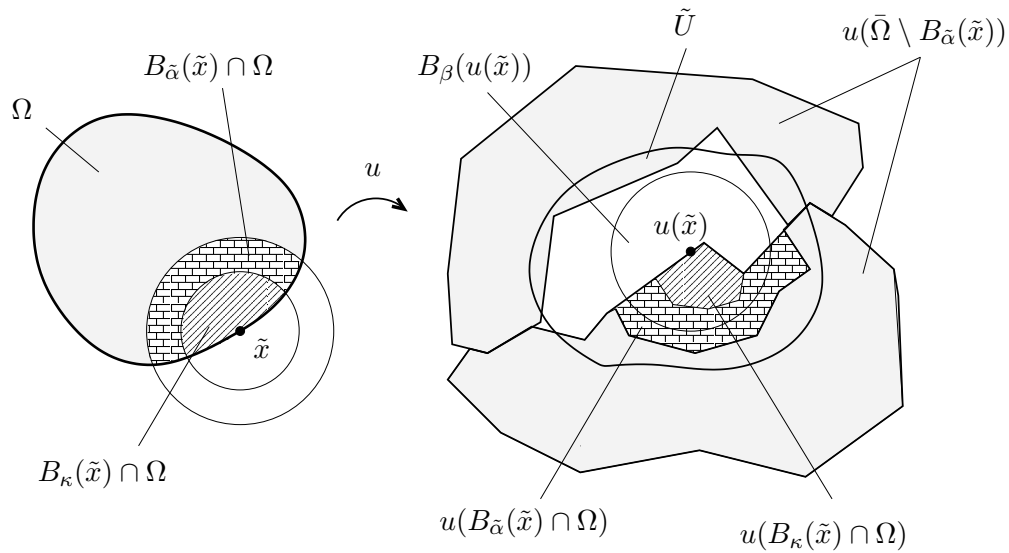


Abbildung 5.2: Situation nahe  $\tilde{x}$  und  $u(\tilde{x})$  für  $\tilde{x} \in \text{supp } \mu_c \cap (\Omega_c)^c$

Da der lokale Minimierer  $u$  auf  $\bar{\Omega}$  stetig ist, gibt es eine positive Konstante  $\kappa < \tilde{\alpha}$  mit

$$(5.67) \quad u(\bar{B}_\kappa(\tilde{x}) \cap \bar{\Omega}) \subset B_\beta(u(\tilde{x})).$$

Nun definieren wir mit

$$\tilde{V} := \bar{B}_R(0) \setminus B_\beta(u(\tilde{x})).$$

die Funktion  $\tilde{\varphi}_0$  durch

$$\tilde{\varphi}_0(w) := \text{dist}_{\tilde{V}}(w) \quad \text{für alle } w \in \mathbb{R}^3.$$

Die Funktion  $\varphi_0$  ist Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}^3$ . Aus (5.64) und (5.65) folgt

$\tilde{\varphi}_0(w) = 0$  für alle  $w \in u(\Gamma_D)$ . Damit gilt  $\tilde{\varphi}_0 \in \tilde{X}$ . Durch Einsetzen dieser Funktion in Gleichung (5.63) ergibt sich zusammen mit (5.64)–(5.67) nun

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \text{dist}_{\tilde{V}}(u(x)) \langle d_c(x), \tilde{z} \rangle d\mu(x) &\geq \tilde{c} \int_{\Gamma} \text{dist}_{\tilde{V}}(u(x)) d\mu(x) \\ &\geq \tilde{c} \int_{B_{\kappa}(\tilde{x}) \cap \Gamma} \text{dist}_{\tilde{V}}(u(x)) d\mu(x) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (5.63). Damit folgt  $\text{supp } \mu_c \subset \Omega_c$  und Theorem 5.1 ist bewiesen. ◇

BEWEIS von Korollar 5.2.

Zu (a):

Die Euler-Lagrange Gleichung (5.9) wurde schon in Schritt 5 des Beweises von Theorem 5.1 gezeigt (vgl. (5.62)). Um die lokalisierte Form (5.10) zu zeigen, betrachten wir einen beliebigen Punkt  $y_0 \in (\bar{\Omega} \setminus \Gamma_D)$ . Nach Lemma 2.7,(i), ist die Urbildmenge von  $u(y_0)$  endlich. Ist nun  $y_0$  ein Kontaktargument von  $u$ , so existieren  $k_0$  weitere, paarweise verschiedene Urbilder  $y_1, \dots, y_{k_0}$  von  $u_0 = u(y_0)$ . Dann können wir nach Voraussetzung (A2) eine positive Konstante  $\vartheta_0$  mit  $\vartheta_0 < \sigma(y_i)$  für  $i = 0, \dots, k_0$  wählen, so dass

$$(5.68) \quad \bar{B}_{\vartheta_0}(y_i) \cap \bar{B}_{\vartheta_0}(y_j) = \emptyset \quad \forall i, j \in \{0, \dots, k_0\}, i \neq j.$$

Darüber hinaus können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(5.69) \quad \bar{B}_{\vartheta_0}(y_i) \cap \Gamma_D = \emptyset$$

für alle  $i = 0, \dots, k_0$  voraussetzen, da  $\Omega_c \cap \Gamma_D = \emptyset$  (vgl. Vor. (A3)). Weiterhin gilt

$$u_0 \notin u(\text{cl } U_{k_0}) \quad \text{für} \quad U_{k_0} = \Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{k_0} \bar{B}_{\vartheta_0}(y_i).$$

Daher existiert eine Konstante  $\rho_0 > 0$  mit

$$(5.70) \quad B_{\rho_0}(u_0) \cap u(\text{cl } U_{k_0}) = \emptyset.$$

Nach Konstruktion folgt dann für alle  $\varphi \in \tilde{X}$  mit  $\text{supp } \varphi \subset B_{\rho_0}(u_0)$  die Relation

$$(5.71) \quad u_\varphi(x) = u(x) \quad \forall x \in U_{k_0}.$$

Somit reicht es aus, bei den Integralen in der Euler-Lagrange Gleichung (5.9) für Störungen  $\varphi \in \tilde{X}$  mit  $\text{supp } \varphi \subset B_{\rho_0}(u_0)$  lediglich über die Gebiete  $\hat{\Omega}_i$  bzw.  $\text{cl } \hat{\Omega}_i$ ,  $i = 0, \dots, k_0$ , statt über  $\Omega$  bzw.  $\bar{\Omega}$  zu integrieren. Damit folgt aus (5.9) nun Gleichung (5.10) für einen Kontaktargument  $y_0$ .

Ist  $y_0$  kein Kontaktargument, d. h.  $y_0$  ist einziges Urbild von  $u(y_0)$ , so ist  $k_0 = 0$  und nach Voraussetzung (A2) gibt es eine Konstante  $\vartheta_0 < \sigma(y_0)$ , so dass  $\Omega_c \cap \bar{B}_{\vartheta_0}(y_0) = \emptyset$  und  $\bar{B}_{\vartheta_0}(y_0) \cap \Gamma_D = \emptyset$ . In diesem Fall wählen wir die Konstante  $\rho_0$  derart, dass (5.70) mit  $k_0 = 0$  gilt. Wiederum ist es dann für Störungen  $\varphi \in \tilde{X}$  mit  $\text{supp } \varphi \subset B_{\rho_0}(u_0)$  ausreichend, in (5.9) über  $\hat{\Omega}_0$  bzw.  $\text{cl } \hat{\Omega}_0$  statt über  $\Omega$  bzw.  $\bar{\Omega}$  zu integrieren. Auch in diesem Fall erhalten wir daher (5.10).

Zu (b):

Die Relationen (5.12) bzw. (5.13) folgen unmittelbar aus der Kombination von (5.7) mit (5.9) bzw. (5.10).  $\diamond$





# Literaturverzeichnis

- [1] E. Acerbi, N. Fusco. Semicontinuity problems in the calculus of variations. *Arch. Rational Mech. Anal.* 86 (1984) 125–145
- [2] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. 4. Auflage, Springer, Berlin, 2002
- [3] L. Ambrosio, G. Dal Maso. A general chain rule for distributional derivatives. *Proc. Amer. Math. Soc.* 108 (1990) 691–702
- [4] S. S. Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity*. Springer, New York, 1995
- [5] C. Baiocchi, G. Buttazzo, F. Gastaldi, F. Tomarelli. General existence theorems for unilateral problems in continuum mechanics. *Arch. Rational Mech. Anal.* 100 (1988) 149–189
- [6] J. M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 63 (1977) 337–403
- [7] J. M. Ball. Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 88A (1981) 315–328
- [8] J. M. Ball. Minimizers and the Euler-Lagrange-Equations. In *Proc. ISIMM Conference*, Springer, Paris, 1983
- [9] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity. Vol.1: Three dimensional Elasticity*. North-Holland, Amsterdam, London, New York, Tokyo, 2004

- [10] P. G. Ciarlet, J. Nečas. Unilateral problems in nonlinear, three-dimensional elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 87 (1985) 319–338
- [11] P. G. Ciarlet, J. Nečas. Injectivity and self-contact in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 97 (1987) 171–188
- [12] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1983
- [13] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer, Berlin, 1989
- [14] I. Fonseca, W. Gangbo. *Degree Theory in Analysis and Applications*. Oxford University Press, Oxford, 1995
- [15] D. Habek, F. Schuricht. Contact between nonlinearly elastic bodies. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 136A (2006) 1239–1266
- [16] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundation of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983
- [17] M. Marcus, V. J. Mizel. Transformations by functions in sobolev spaces and lower semicontinuity for parametric variational problems. *Bull. AMS* 79 (1973) 790–795
- [18] C. B. Morrey. Quasi-convexity and the semicontinuity of multiple integrals. *Pacific J. Math.* 2 (1952) 25–53
- [19] S. Müller. Higher integrability of determinants and weak convergence in  $L^1$ . *J. reine angew. Math.* 412 (1990) 20–34
- [20] J. G. Reshetnyak. *Spaces Mappings of Bounded Distortion*. Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 1989
- [21] F. Schuricht. A variational approach to obstacle problems for shearable nonlinearly elastic rods. *Arch. Rational Mech. Anal.* 140 (1997) 103–159
- [22] F. Schuricht. Variational approach to contact problems in nonlinear elasticity. *Calc. Var.* 15 (2002) 433–449

- [23] C. Truesdell. *A First Course in Rational Continuum Mechanics, Vol.1.* Academic Press, San Diego, 1991
- [24] E. Villamor, J. J. Manfredi. An extension of Rešetnyak's theorem. *Indiana Univ. Math. J.* 47 (1998) 1131–1145



# Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die vorliegende Arbeit wurde am Mathematischen Institut der Universität zu Köln unter der Betreuung von Herrn Prof. Dr. F. Schuricht begonnen und am Institut für Analysis der Technischen Universität Dresden, ebenfalls unter der Betreuung von Herrn Prof. Dr. F. Schuricht, fertig gestellt.

Ich erkenne die Promotionsordnung der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften der TU Dresden vom 20. März 2000 an.

Dresden, den 15.04.2008

---

Daniel Habeck